ВМК МГУ – ШКОЛЕ

УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС
с решениями и указаниями

ЕГЭ
ОЛИМПИАДЫ
ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ

ФИЗИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

ФИЗИКА

УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС

с решениями и указаниями

ЕГЭ
ОЛИМПИАДЫ
ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ

3-е издание
(электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я729
Ф50

Физика. Углубленный курс с решениями и указаниями. ЕГЭ,
Ф50 олимпиады, экзамены в вуз [Электронный ресурс] / Е. А. Вишнякова [и др.] ; под ред. В. А. Макарова, С. С. Чеснокова. — 3-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 419 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2892-5

Пособие составлено преподавателями физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова по материалам вступительных испытаний по физике в МГУ, а также заданий единого государственного экзамена по физике. По каждому разделу курса физики дано достаточно полное изложение теории в объеме, необходимом для решения задач, приводятся примеры решения ключевых задач, даны задания для самостоятельной работы. Кроме того, в пособии помещены подробные решения всех задач, оформленные в соответствии с требованиями ЕГЭ и снабженные комментариями.

Рекомендуется школьникам, готовящимся к сдаче единого государственного экзамена по физике и профильных вступительных экзаменов в вузы, участию в олимпиадах, а также учителям физики, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 53(075.3)
ББК 22.3я729

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Физика. Углубленный курс с решениями и указаниями. ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз / Е. А. Вишнякова [и др.] ; под ред. В. А. Макарова, С. С. Чеснокова. — 2-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 414 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-9963-1821-6.

ISBN 978-5-9963-2892-5

Оглавление

О серии учебных пособий «ВМК МГУ – школе» 5
Предисловие редакторов 6

Часть I. Теория и задачи 7

1. Механика 7
1.1. Кинематика 7
1.2. Динамика 20
1.3. Статика 34
1.4. Законы сохранения в механике 48
1.5. Механические колебания и волны. 62

2. Молекулярная физика. Термодинамика 75
2.1. Молекулярная физика 75
2.2. Термодинамика 97

3. Электродинамика 109
3.1. Электрическое поле 109
3.2. Законы постоянного тока 127
3.3. Магнитное поле 148
3.4. Электромагнитная индукция 159
3.5. Электромагнитные колебания и волны 166
3.6. Оптика 181

4. Основы специальной теории относительности 205

5. Квантовая физика 212
5.1. Корпускулярно-волновой дуализм 212
5.2. Физика атома 219
5.3. Физика атомного ядра 226

Часть II. Указания и решения 234

1. Механика 234
1.1. Кинематика 234
1.2. Динамика 246
1.3. Статика 258
1.4. Законы сохранения в механике 269
1.5. Механические колебания и волны. 289

2. Молекулярная физика. Термодинамика 301
2.1. Молекулярная физика 301
2.2. Термодинамика 316

3. Электродинамика 330
3.1. Электрическое поле 330
3.2. Законы постоянного тока 339
3.3. Магнитное поле 347
3.4. Электромагнитная индукция 354
3.5. Электромагнитные колебания и волны 360
3.6. Оптика 366
4. Основы специальной теории относительности 378
5. Квантовая физика 384
5.1. Корпускулярно-волновой дуализм 384
5.2. Физика атома 390
5.3. Физика атомного ядра 395

Ответы 400
Литература 414

О серии учебных пособий «ВМК МГУ – школе»

Уважаемый читатель!

Учебно-методические пособия, входящие в серию «ВМК МГУ – школе», являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива преподавателей, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М.В. Ломоносова. Сейчас уже изданы пособия по алгебре и геометрии, а также базовый курс по физике. Вашему вниманию предлагается углубленный курс по этому предмету. В дальнейшем предполагается продолжить эту серию и выпустить пособие по информатике.

В последнее время, когда сдача выпускных экзаменов по физике перестала быть обязательной, в большинстве школ стали уделять меньше внимания этому предмету. А между тем хорошее знание физики важно как для поступающих на ВМК и ряд других факультетов МГУ, так и для абитуриентов многих технических университетов. Кроме того, для того чтобы стать успешно успевающим студентом престижного вуза, нужно иметь достаточно глубокую подготовку по физике, позволяющую освоить весьма сложную вузовскую программу. Предлагаемое пособие позволит сделать важный шаг в этом направлении.

В серии «ВМК МГУ – школе» по каждому предмету предусмотрены два пособия – базовый и углубленный курсы. Базовый курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач ЕГЭ частей А, В и некоторых задач части С, а также первой половины задач профильных экзаменов в вузы и олимпиад. Пособие по углубленному курсу включает в себя сложные задачи ЕГЭ части С и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М.В. Ломоносова), научившись решать которые вы сможете справиться со всеми заданиями ЕГЭ и практически со всеми задачами олимпиад и профильных экзаменов в вузы.

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет существенно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направить ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу.

Директор учебного центра
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М.В. Федотов

Предисловие редакторов

В настоящее время на полках книжных магазинов широко представлены различные пособия по школьному курсу физики. Однако среди этих пособий непросто найти книгу, одновременно предлагающую учителю – грамотный дидактический материал, преподавателю подготовительных курсов – методику решения ключевых задач, а добросовестному ученику – задания для приобретения и отработки навыков решения сложных задач.

Мы поставили перед собой цель – совместить в одном пособии, адресованном всем, кто любит физику и математику, упомянутые выше требования. Предлагаемая книга содержит углубленный курс, включающий все основные разделы школьного курса физики, соответствующие «Кодификатору элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для единого государственного экзамена по физике». Освоение этого курса позволит уверенно выполнять задания категории С единого государственного экзамена и физических олимпиад первого и второго уровней.

Книга состоит из трех частей – «Теории и задач», «Указаний и решений» и «Ответов». Каждый раздел первой части содержит достаточно полное изложение теории в объеме, необходимом для решения задач. Далее приводятся примеры решения ключевых задач по данной теме и задачи для самостоятельной работы. Во второй части помещены подробные решения этих задач, оформленные в соответствии с требованиями ЕГЭ и профильных экзаменов и снабженные подсказками и указаниями. В третьей части приведены ответы к задачам, позволяющие учащимся проверить себя при самостоятельной работе над второй частью книги. Циклическая структура книги позволяет использовать ее как справочное пособие для интенсивного повторения школьного курса физики, как пособие по методике решения задач, а также как базу данных для плановых самостоятельных и контрольных работ. Всего пособие содержит около 360 примеров и задач разного уровня сложности, от относительно простых до олимпиадных.

Приведенные в книге решения могут быть положены в основу приобретения навыков правильного, логически последовательного и физически верного построения решения ключевых задач данного курса, что впоследствии пригодится школьникам для выполнения заданий достаточно высокого, профильного уровня. Именно им посвящена настоящая книга.

Предлагаемое пособие может быть рекомендовано учителям физики средних школ, лицеев и гимназий, преподавателям подготовительных курсов, а также школьникам, изучающим физику.

Желаем успеха!

Часть I. Теория и задачи

1. Механика

1.1. Кинематика

Теоретический материал

Механическое движение. Относительность механического движения. В механике изучается наиболее простая форма движения – механическое движение. *Механическим движением* называется изменение положения данного тела (или его частей) относительно других тел, происходящее с течением времени. Любое механическое движение является *относительным*. В природе не существует абсолютного движения или абсолютного покоя. Поэтому для описания механического движения необходимо указать конкретное тело, относительно которого наблюдается движение других тел. Это тело называют *телом отсчета*. Таким образом, механическое движение – это изменение положения тел относительно выбранного тела отсчета.

Материальная точка. Для математического описания движения в кинематике используются различные модели физических тел. *Материальная точка* – простейшая модель тела, используемая для описания движения в тех случаях, когда размерами и формой тела можно пренебречь. Эта модель применима, когда 1) размеры тела малы по сравнению с характерными размерами области движения тела или когда 2) твердое тело совершает поступательное движение (см. ниже). Положение *материальной* точки в пространстве определяется положением изображающей ее *геометрической* точки.

Системой отсчета называют тело отсчета, связанную с ним систему координат и прибор для измерения времени (часы). Положение материальной точки в пространстве определяется *тремя координатами* – x, y, z. Оно может быть задано также *радиус-вектором* $\vec{r}$, соединяющим начало координат с материальной точкой (рис. 1.1.1), причем

$$\vec{r} = \{x, y, z\}. \qquad (1.1.1)$$

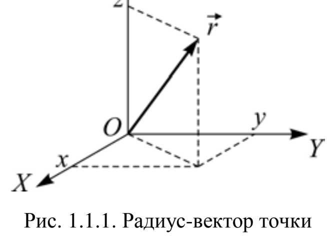


Рис. 1.1.1. Радиус-вектор точки

Единица измерения длины, установленная в Международной системе единиц (СИ), называется *метром*. Приближенно он равен $1/40\,000\,000$ части земного меридиана. По современному определению один метр – это расстояние, которое свет проходит в вакууме за $1/299\,792\,458$ долю секунды. Таким образом, определение единицы расстояния связано с определением единицы измерения времени – *секундой*. Одна секунда приближенно равна $1/86\,400$ доле земных суток. Для точных измерений времени используются атомные часы. Определенная в СИ секунда равна $9\,192\,631\,770$ периодам излучения атома цезия при переходе между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния.

Траектория. При движении материальной точки конец радиус-вектора описывает в пространстве некоторую непрерывную линию, называемую *траекторией* точки. Уравнение, описывающее зависимость радиус-вектора движущейся точки от времени,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.1.2}$$

называется векторным кинематическим *уравнением движения точки*. Оно эквивалентно трем скалярным уравнениям движения:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.1.3}$$

Траектории одной и той же точки в разных системах отсчета имеют, вообще говоря, различную форму. Кинематические уравнения движения точки в разных системах отсчета также различны.

Перемещение материальной точки из положения *1* в положение *2* – это вектор

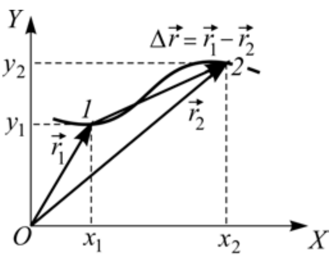


Рис. 1.1.2. Определение перемещения точки

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tag{1.1.4}$$

проведенный из начального положения точки в конечное (см. рис. 1.1.2). Проекции вектора перемещения на координатные оси могут быть выражены через разности координат его конца и начала:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1. \tag{1.1.5}$$

Эти величины часто называют перемещениями точки вдоль соответствующих координатных осей.

Путь точки равен сумме расстояний, пройденных ею вдоль траектории, и всегда является неотрицательной величиной. Пути, пройденные точкой за последовательные промежутки времени, складываются арифметически. Модуль перемещения точки $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ в общем случае не равен пути, пройденному точкой за данный промежуток времени. Эти величины совпадают только при движении точки по прямой в одном направлении.

Скорость. *Средняя скорость* точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t, t+\Delta t)$ есть вектор $\vec{v}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ к величине интервала времени Δt (рис. 1.1.3):

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.1.6}$$

Направление средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$. Средняя скорость характеризует движение точки в течение всего промежутка времени Δt, для которого она определена.

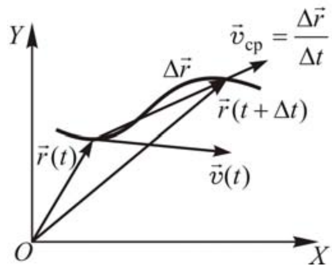


Рис. 1.1.3. Определение скорости точки

На практике часто используют понятие средней *путевой* скорости, которое определяют как отношение пути, пройденного точкой, ко времени его прохождения. Важно иметь в виду, что величина (модуль) средней скорости в общем случае не совпадает со средней путевой скоростью. Они различны, например, при возвратно-поступательном движении по прямой, при криволинейном движении и т.п.

Мгновенной скоростью (или просто *скоростью*) $\vec{v}(t)$ точки в данной системе отсчета в момент времени t называется предел средней скорости при неограниченном уменьшении интервала времени Δt:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (1.1.7)$$

Компонентами вектора скорости являются производные по времени от компонент радиус-вектора точки:

$$\vec{v}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}. \qquad (1.1.8)$$

Вектор скорости направлен *по касательной* к траектории точки.

Сложение скоростей. Важной задачей кинематики является установление связи между характеристиками движения точки *относительно разных систем отсчета*. Пусть одна система отсчета, которую мы будем называть подвижной, движется поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ относительно другой системы, которую будем называть неподвижной. Пусть скорость точки относительно подвижной системы отсчета равна $\vec{v}\,'$. Тогда скорость $\vec{v}$ этой же точки относительно неподвижной системы находится из соотношения, называемого законом *сложения скоростей*:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0. \qquad (1.1.9)$$

Ускорение. *Среднее ускорение* точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t, t+\Delta t)$ есть вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора приращения скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ на этом интервале к величине интервала времени Δt (рис. 1.1.4):

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (1.1.10)$$

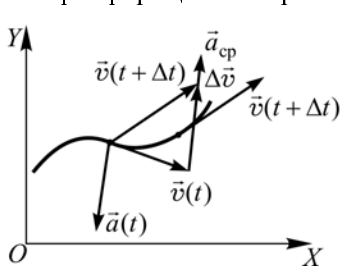


Рис. 1.1.4. Определение ускорения точки

Мгновенным ускорением (или просто *ускорением*) точки $\vec{a}(t)$ в момент времени t в данной системе отсчета называется предел среднего ускорения при стремлении интервала времени Δt к нулю:

$$\vec{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}. \qquad (1.1.11)$$

Сложение ускорений. Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную систему и систему, движущуюся поступательно и прямолинейно относительно неподвижной с ускорением $\vec{a}_0$. Если ускорение точки относительно подвижной системы отсчета равно $\vec{a}'$, то ускорение $\vec{a}$ этой же точки относительно неподвижной системы находится из соотношения, называемого законом *сложения ускорений*:

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0. \qquad (1.1.12)$$

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. По форме траектории движения делятся на прямолинейные и криволинейные. В первом случае траекторией движения точки в данной системе отсчета является прямая линия, во втором случае – некоторая кривая. Для описания *прямолинейного* движения удобно совместить координатную ось (например, ось OX) с направлением, вдоль которого происходит движение.

Равномерным называется движение с постоянной по модулю скоростью. При *равномерном прямолинейном движении* точки мгновенная скорость не зависит от времени и в каждой точке траектории направлена вдоль траектории. Средняя скорость за любой промежуток времени равна мгновенной скорости. Кинематическое уравнение движения принимает вид

$$x(t)=x_0+v_{x0}t, \qquad (1.1.13)$$

где x_0 – начальная координата точки, v_{x0} – проекция скорости точки на координатную ось OX.

Равнопеременное прямолинейное движение – это движение точки по прямой с постоянным по величине и по направлению ускорением. При этом среднее ускорение равно мгновенному ускорению. Если направление ускорения $\vec{a}$ совпадает с направлением скорости точки, то движение называется *равноускоренным*, в противном случае – *равнозамедленным*.

При равнопеременном прямолинейном движении зависимости скорости и координаты точки от времени выражаются следующими кинематическими уравнениями:

$$v_x(t)=v_{x0}+a_xt, \qquad x(t)=x_0+v_{x0}t+\frac{a_xt^2}{2}. \qquad (1.1.14)$$

Важно помнить, что величины, входящие в уравнения (1.1.13), (1.1.14), являются *алгебраическими*, т.е. могут иметь разные знаки в зависимости от того, сонаправлен или противонаправлен соответствующий вектор выбранному направлению координатной оси.

Зависимости скорости, координат и пути от времени. При решении задач и анализе результатов удобно представлять зависимости координаты и скорости тела от времени графически. Примеры таких представлений для прямолинейного равномерного и равноускоренного движений приведены на рис. 1.1.5 и 1.1.6.

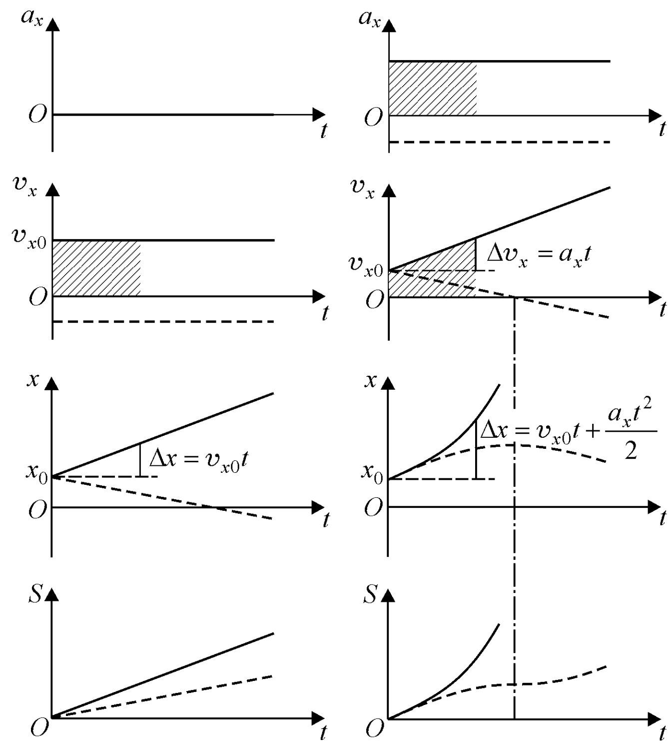


Рис. 1.1.5.
Равномерное движение

Рис. 1.1.6.
Равноускоренное движение

При построении графиков необходимо учитывать, что тангенс угла наклона касательной к кривой $x = x(t)$ в какой-либо момент времени пропорционален скорости точки в этот момент времени, а тангенс угла наклона касательной к кривой $v = v(t)$ пропорционален ускорению точки в данный момент. По графику зависимости $a = a(t)$ можно найти изменение скорости за промежуток времени от t_1 до t_2: оно равно площади под кривой $a = a(t)$ в пределах от t_1 до t_2. Аналогично по графику зависимости $v = v(t)$ можно найти изменение координаты точки за время $(t_2 - t_1)$.

Криволинейное движение. Равномерное движение по окружности. Простейшей моделью *криволинейного* движения является *равномерное движение по окружности*. В этом случае точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью v. Положение точки удобно описывать углом φ, который составляет радиус-вектор точки с некоторой фиксированной осью, например с осью *OX*.

Угловая скорость. Период и частота обращения. Величиной *угловой скорости* точки ω при движении по окружности называют отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ ее радиус-вектора ко времени Δt, за которое этот поворот произошел: $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (см. рис. 1.1.7).

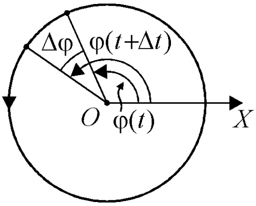


Рис. 1.1.7. Определение угловой скорости

Периодом T движения точки по окружности называют время, за которое точка совершает полный оборот. *Частота обращения* ν – это величина, обратная периоду. Угловая скорость, частота и период обращения при равномерном движении по окружности связаны между собой соотношениями:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (1.1.15)$$

Линейная скорость υ движения по окружности выражается через угловую скорость ω и радиус окружности R по формуле

$$\upsilon = \omega R. \qquad (1.1.16)$$

Ускорение тела при движении по окружности. При движении тела по окружности вектор скорости изменяется, поэтому у тела существует *центростремительное* ускорение, направленное по радиусу окружности к ее центру и по модулю равное

$$a = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (1.1.17)$$

Для описания неравномерного движения по окружности используют величину

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (1.1.18)$$

которая называется угловым ускорением.

Тангенциальное и нормальное ускорение. При криволинейном движении точки часто бывает удобно разложить ее ускорение на две составляющие (рис. 1.1.8):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{\tau} a_\tau + \vec{n} a_n, \qquad (1.1.19)$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории в данной точке; $\vec{n}$ – единичный вектор по нормали к траектории, направленный к центру кривизны.

Составляющая $\vec{a}_\tau$ вектора ускорения, направленная по касательной к траектории, называется *тангенциальным* (касательным) ускорением. Тангенциальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по модулю. Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону движения точки при возрастании ее скорости и в противоположную сторону при убывании скорости. Составляющая $\vec{a}_n$ вектора ускорения, направленная по нормали к траектории в данной точке, называется *нормальным* ускорением. Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению при криволинейном движении. Модули тангенциального и нормального ускорения вычисляются по формулам

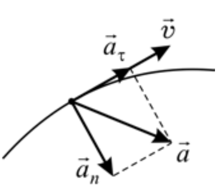


Рис.1.1.8. Тангенциальное и нормальное ускорение

$$a_\tau = \dot{\upsilon} = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt}, \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R}, \qquad (1.1.20)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке. При движении точки по окружности нормальное ускорение совпадает с центростремительным ускорением, а тангенциальное ускорение выражается через угловое ускорение ε по формуле $a_\tau = \varepsilon R$.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. *Свободным падением* называется движение, которое совершает тело только под действием притяжения Земли, без учета сопротивления воздуха. Ускорение $\vec{g}$, с которым движется вблизи поверхности Земли материальная точка, на которую действует только сила тяжести, называется *ускорением свободного падения*. Ускорение свободного падения не зависит от массы тела.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета. При описании движения тела у поверхности Земли удобно выбрать систему координат так, чтобы одна из координатных осей (обычно ось OX) была направлена горизонтально, а другая (обычно OY) – вертикально (рис. 1.1.9). Тогда движение по оси OX будет равномерным, а по оси OY – равнопеременным. В большинстве задач начало координат удобно совместить с точкой, откуда тело начинает движение.

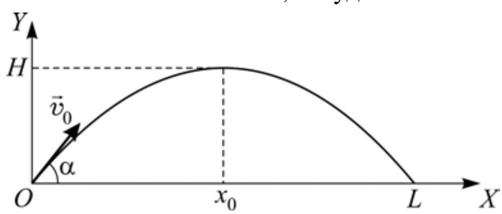


Рис. 1.1.9. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Для тела, брошенного от поверхности Земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту, в системе координат, изображенной на рис. 1.1.9,

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha = \text{const}, \qquad v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt, \tag{1.1.21}$$

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \qquad y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.1.22}$$

Исключая из уравнений (1.1.22) время t, получаем *уравнение траектории тела*

$$y(x) = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2, \tag{1.1.23}$$

которое является уравнением параболы. В точке с координатой

$$x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha \tag{1.1.24}$$

тело достигает наибольшей высоты

$$y(x_0) \equiv H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha. \tag{1.1.25}$$

Величины $L = 2x_0 = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$ и $H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$ называются соответственно *дальностью* и *высотой полета*.

Поступательное и вращательное движения твердого тела. *Твердое тело* – это модель, применяемая в случаях, когда изменением формы и размеров тела при его движении можно пренебречь. Модель рассматривается как система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными.

Простейшие модели движения твердого тела – это поступательное и вращательное движения.

Поступательным движением твердого тела (рис. 1.1.10) называют такое движение, при котором траектории всех точек тела одинаковы. При этом тело не поворачивается и каждая линия, соединяющая любые две точки тела, переносится параллельно самой себе. При поступательном движении все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому, зная движение какой-то одной точки тела, мы можем однозначно определить движение всех его остальных точек.

Вращательным движением называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой – оси вращения (рис. 1.1.11). Траектории всех точек лежат в плоскостях, параллельных друг другу и перпендикулярных оси вращения.

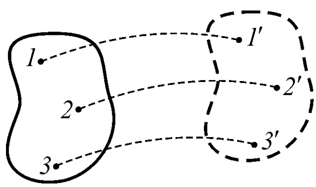


Рис. 1.1.10.
Поступательное движение тела

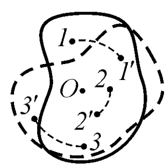


Рис. 1.1.11.
Вращательное движение тела

При таком движении различные точки тела за один и тот же промежуток времени проходят разные по длине пути. Линейная скорость v характеризует движение какой-либо одной точки тела, а не движение тела в целом. Поэтому для описания вращения тела используются такие величины, которые описывают движение всего тела, а не отдельных его точек. К этим величинам относятся: угол поворота φ, период вращения T, частота вращения $\nu = 1/T$, угловая скорость $\omega = 2\pi/T$.

Примеры решения задач

Пример 1. Пункты A и B находятся на берегу реки на некотором расстоянии друг от друга. Моторная лодка проходит расстояние AB вниз по течению реки за время $t_1 = 3$ ч, а плот то же расстояние – за время $t_0 = 12$ ч. Какое время t_2 затратит моторная лодка на обратный путь?

Решение. Обозначим расстояние между пунктами *A* и *B* через *L*, скорость моторной лодки относительно воды через $v_л$, а скорость течения через $v_т$. Тогда $t_0 = \frac{L}{v_т}$, $t_1 = \frac{L}{v_л + v_т}$, $t_2 = \frac{L}{v_л - v_т}$. Исключая из записанной системы уравнений *L*, $v_л$ и $v_т$, находим $t_2 = \frac{t_0 t_1}{t_0 - 2t_1} = 6$ ч.

Ответ. $t_2 = \frac{t_0 t_1}{t_0 - 2t_1} = 6$ ч.

Пример 2. Два автомобиля подъезжают к одному перекрестку. Первый автомобиль едет с севера на юг со скоростью $v_1 = 72$ км/ч, а второй – с востока на запад со скоростью $v_2 = 54$ км/ч. С какой скоростью автомобили приближаются друг к другу?

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с первым автомобилем. В этой системе первый автомобиль неподвижен, а Земля движется относительно него со скоростью $-\vec{v}_1$. Поэтому скорость второго автомобиля относительно первого равна $\vec{v}_0 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Векторы скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ образуют прямой угол, поэтому длина вектора $\vec{v}_0$ – это длина гипотенузы прямоугольного треугольника, т.е. $v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 90$ км/ч.

Ответ. $v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 90$ км/ч.

Пример 3. Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением a. Выразить перемещение тела через ускорение и значения его скорости в начальный (v_0) и конечный (v) моменты времени.

Решение. Пусть тело движется вдоль оси *OX*. Записывая кинематические уравнения движения, в момент времени τ имеем $x = x_0 + v_0\tau + \frac{a\tau^2}{2}$, $v = v_0 + a\tau$. Исключая из этих формул время τ, получаем, что $\Delta x = x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$.

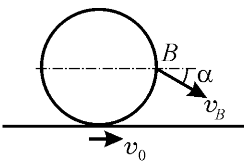
Ответ. $\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$.

Пример 4. Подброшенный вертикально вверх мяч поднялся на высоту $h = 4{,}9$ м. Сколько времени мяч находился в полете? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

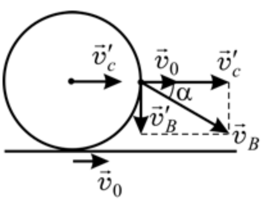
Решение. Как следует из закона равноускоренного движения, падение с высоты h занимает столько же времени, сколько и подъем на эту высоту. Время падения t_1 определяется выражением $h = \frac{gt_1^2}{2}$, следовательно, $t_1 = \sqrt{2h/g}$. Таким образом, полное время полета равно $t_2 = 2t_1 = 2\sqrt{2h/g} = 2$ с.

Ответ. $t_2 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2$ с.

Пример 5. Колесо катится без проскальзывания по ленте транспортера, движущейся горизонтально со скоростью $v_0 = 1$ м/с, в направлении движения ленты. Известно, что относительно неподвижного наблюдателя скорость v_B точки B, находящейся на ободе колеса на его горизонтальном диаметре, составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Найти скорость v центра колеса относительно неподвижного наблюдателя.

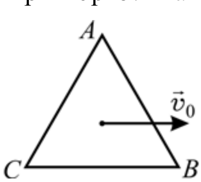


Решение. По закону сложения скоростей скорость центра колеса относительно неподвижного наблюдателя (абсолютная скорость) равна $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'_c$, где $\vec{v}'_c$ – скорость центра колеса относительно ленты транспортера (см. рисунок). Из условия отсутствия проскальзывания следует, что $v'_c = v'_B$, где v'_B – модуль скорости точки B относительно центра колеса. Таким образом, $v = v_0 + v'_c$, $v'_B = v - v_0$. Как видно из рисунка, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v'_B}{v_0 + v'_c} = \frac{v - v_0}{v}$. Отсюда $v = \frac{v_0}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$.

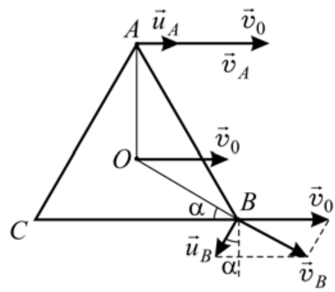


Ответ. $v = \frac{v_0}{1 - \operatorname{tg}\alpha} \approx 2{,}36$ м/с.

Пример 6. Равносторонний треугольник ABC скользит плашмя по горизонтальному столу. Известно, что в некоторый момент времени точка A имеет скорость $v_1 = \sqrt{6}$ м/с $\approx 2{,}45$ м/с, точка B имеет скорость $v_2 = 1{,}5$ м/с, а скорость центра треугольника направлена параллельно стороне CB. Каков модуль скорости v_0 центра треугольника в этот момент времени?



Решение. В поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром треугольника, он совершает вращательное движение, причем скорости его вершин $\vec{u}_A$, $\vec{u}_B$, $\vec{u}_C$ относительно центра равны друг другу по величине ($u_A = u_B = u_C \equiv u$) и каждая из них перпендикулярна линии, проведенной к соответствующей вершине из центра треугольника. Согласно закону сложения скоростей, скорости вершин A и B в неподвижной системе отсчета определяются векторными равенствами $\vec{v}_A \equiv \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{u}_A$, $\vec{v}_B \equiv \vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{u}_B$. Модули этих скоростей, как видно из рисунка, равны $v_1 = v_0 + u$, $v_2 = \sqrt{(u\cos\alpha)^2 + (v_0 - u\sin\alpha)^2}$, где $\alpha = 30°$. Из последнего равенства находим $v_2^2 = v_0^2 + u^2 - 2uv_0\sin\alpha = = v_0^2 + u^2 - uv_0$. Подставляя в эту формулу выражение



$u = v_1 - v_0$, получим уравнение относительно v_0: $v_0^2 - v_1 v_0 + \frac{1}{3}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 0$. Корни этого уравнения $v_0 = \frac{v_1 \pm \sqrt{\left(4v_2^2 - v_1^2\right)/3}}{2} = \frac{\sqrt{6} \pm 1}{2}$ м/с дают два значения скорости центра треугольника, удовлетворяющие условию задачи: $v_{01} \approx 1{,}72$ м/с, $v_{02} \approx 0{,}72$ м/с.

Ответ. $v_{01} \approx 1{,}72$ м/с, $v_{02} \approx 0{,}72$ м/с.

Задачи

1. Эскалатор поднимает стоящего на нем пассажира в течение $t_1 = 1$ мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается пешком на ту же высоту за $t_2 = 3$ мин. За какое время t_3 пассажир достигнет той же высоты, если будет подниматься пешком по движущемуся вверх эскалатору?

2. Пассажир метрополитена наблюдает отправление поезда. Находясь на платформе у начала первого вагона, он замечает, что с момента отправления поезда этот вагон прошел мимо него за время $\tau_1 = 5$ с. Считая движение поезда равноускоренным, найти, за какое время τ_2 мимо пассажира пройдет второй вагон.

3. В момент, когда опоздавший пассажир вышел на перрон вокзала, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона уходящего поезда. Желая определить, на сколько он опоздал, пассажир измерил время t_1, за которое мимо него прошел предпоследний вагон, и время t_2, за которое мимо него прошел последний вагон. Оказалось, что $t_1 = 9$ с, а $t_2 = 8$ с. Считая, что поезд двигался равноускоренно и длина вагонов одинакова, найти, на какое время τ пассажир опоздал к отходу поезда.

4. Беговые дорожки легкоатлетического стадиона состоят из двух прямолинейных участков, соединенных двумя полуокружностями. Ширина дорожки $d = 1$ м. Линия

старта проведена перпендикулярно прямолинейному участку дорожек и совпадает с линией финиша. Два бегуна, находящиеся на первой (внутренней) и второй дорожке, одновременно принимают старт и пробегают до финиша один круг. Они разгоняются равноускоренно, пока не наберут максимальную скорость $v_0 = 8$ м/с, одинаковую для обоих бегунов, с которой и пробегают оставшуюся часть дистанции. На сколько отличается время разгона бегунов, если, двигаясь каждый по середине своей дорожки, они финишируют одновременно?

5. Пуля, летящая со скоростью $v_0 = 400$ м/с, попадает в земляной вал и проникает в него на глубину $l = 20$ см. Какова скорость v_1 пули в момент, когда она находится на глубине $l_1 = 10$ см? Силу сопротивления, действующую на пулю в земле, считать постоянной.

6. Ракета запущена вертикально вверх с поверхности Земли и на участке разгона имела постоянное ускорение $a = 19{,}6$ м/с^2. Какое время t_0 падала ракета с ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2 после достижения наибольшей в полете высоты, если на участке разгона движение продолжалось в течение времени $\tau = 1$ мин.?

7. Шарик бросают вертикально вверх со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Пролетев расстояние $h = 1{,}05$ м, он упруго ударяется о потолок и падает вниз. Через какое время τ после начала движения шарик упадет на пол, если расстояние от пола до потолка $H = 2{,}25$ м? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

8. Пловец переплывает реку шириной L по прямой, перпендикулярной берегу, и возвращается обратно, затратив на весь путь время $t_1 = 4$ мин. Проплывая такое же расстояние L вдоль берега реки и возвращаясь обратно, пловец затрачивает время $t_2 = 5$ мин. Во сколько раз α скорость пловца относительно воды превышает скорость течения реки?

9. В кабине лифта высотой $H = 2{,}5$ м, движущейся с ускорением $a = 0{,}8$ м/с^2, направленным вниз, с высоты $h = 0{,}5$ м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью v_0 относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

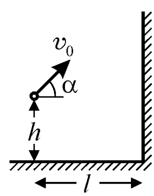
10. Человек бросает камень через забор высотой $H = 2{,}5$ м. На какое максимальное расстояние S он может отойти от забора, если бросок производится с высоты $h = 2$ м от поверхности Земли со скоростью $v_0 = 5$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

11. Дождевальная установка разбрызгивает воду, направляя водяные капли во все стороны с одинаковой скоростью. Какова площадь S орошаемого ею участка, если максимальная высота подъема капель $h = 1$ м? Считать, что капли начинают движение непосредственно от поверхности Земли. Сопротивление воздуха не учитывать.

12. Граната, брошенная под углом к горизонту, разрывается в верхней точке траектории на два одинаковых осколка. Один из осколков упал на землю через время t_1 после разрыва гранаты. Через какое время t_2 после разрыва окажется на земле второй осколок, упавший позднее первого, если разрыв гранаты произошел на высоте h над поверхностью земли? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g.

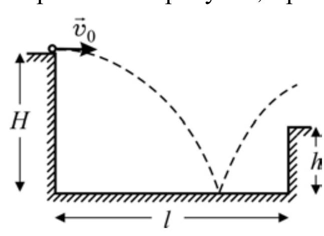
13. С вершины холма бросили камень под углом к горизонту со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. В момент падения камня на склон холма величина угла между направлением скорости камня и горизонталью составила $\beta = 60°$, а разность высот точек бросания и падения $\Delta h = 5$ м. Найти угол α между направлением начальной скорости камня υ_0 и горизонталью. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

14. Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам. Какова должна быть начальная скорость мяча υ_0, если бросок производится с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту? Расстояние от мальчика до стены $l = 6$ м. Удар мяча о стену считать абсолютно упругим, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

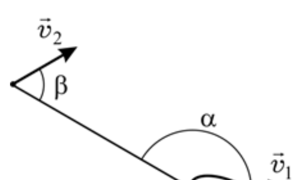


15. Маленький шарик падает с высоты $H = 2$ м без начальной скорости. На высоте $h = 0{,}5$ м над землей шарик испытывает абсолютно упругий удар о закрепленную гладкую площадку, наклоненную под углом $45°$ к горизонту. Найти дальность полета шарика L.

16. С края бетонированного желоба, сечение которого изображено на рисунке, бросают в горизонтальном направлении маленький шарик. Какие значения может иметь величина начальной скорости шарика υ_0 для того, чтобы он, ударившись один раз о дно желоба, выпрыгнул на его противоположную сторону? При расчетах положить $H = 0{,}9$ м, $h = 0{,}5$ м, $l = 2$ м. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Удар шарика о дно желоба считать абсолютно упругим, сопротивлением воздуха пренебречь.



17. Катер, движущийся со скоростью $\upsilon_1 = 30$ км/ч, буксирует спортсмена на водных лыжах. Трос, за который держится спортсмен, составляет с направлением движения катера угол $\alpha = 150°$. Направление движения спортсмена образует с тросом угол $\beta = 60°$. Чему равен модуль скорости спортсмена υ_2 в этот момент времени?



1.2. Динамика

Теоретический материал

В *динамике* изучается влияние взаимодействия между телами на их механическое движение. *Основная задача динамики* состоит в определении положения тел и их скоростей в произвольный момент времени по известным начальным положениям тел, их начальным скоростям и силам, действующим на тела.

Взаимодействие тел. Механическое действие одного тела на другое возможно как при непосредственном соприкосновении тел, так и на расстоянии. Действие одного тела на другое в механике проявляется в деформации взаимодействующих тел и в возникновении у тел ускорений.

Свободным (изолированным) телом называется тело, на которое не действуют какие-либо другие тела или поля, или тело, внешние воздействия на которое уравновешены (скомпенсированы).

Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. *Первый закон Ньютона* постулирует существование особого класса систем отсчета. В этих системах отсчета свободное тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются *инерциальными*. Особое значение инерциальных систем отсчета состоит в том, что в этих системах механические явления описываются наиболее просто.

Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то существует и бесконечное множество таких систем. Действительно, если в одной системе свободное тело движется с постоянной скоростью, то в любой другой системе отсчета, движущейся относительно первой с постоянной скоростью, это тело также будет иметь постоянную скорость.

Свободным можно считать тело, достаточно удаленное от других тел. Для того чтобы выяснить, в какой степени данную систему можно считать инерциальной, нужно из этой системы наблюдать за свободным телом (например, за уединенной звездой). Чем ближе к нулю ускорение этого тела, тем больше оснований считать данную систему отсчета инерциальной.

Из известных в настоящее время систем отсчета наиболее близка к инерциальной гелиоцентрическая система, связанная с центром Солнца. Для описания многих механических движений в земных условиях инерциальной можно считать систему отсчета, связанную либо с поверхностью Земли, либо с ее центром (геоцентрическая система отсчета). При этом пренебрегают ускорением этой системы, связанным с вращательным движением Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца.

Системы отсчета, в которых свободное тело не сохраняет скорость движения постоянной, называются *неинерциальными*. Неинерциальной является любая система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной.

Принцип относительности Галилея гласит: любое механическое явление во всех инерциальных системах отсчета протекает одинаково при одинаковых начальных условиях.

Следует подчеркнуть, что выполнение принципа относительности не означает полной тождественности движения одного и того же тела относительно разных инерциальных систем отсчета. Одинаковы лишь законы движения. Характер же движения тела определяется не только законами движения, но и начальными скоростями и начальными координатами.

Сила. В инерциальных системах отсчета ускорение тела, а также его деформация могут быть вызваны только его взаимодействием с другими телами. Характеристикой действия одного тела на другое является сила. *Силой* называется векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на материальную точку или тело со стороны других тел или полей. Сила полностью определена, если заданы ее модуль, направление и точка приложения.

Силы в механике. Различные взаимодействия, известные в современной физике, сводятся к четырем типам: гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые взаимодействия. Сила как количественная характеристика позволяет оценивать лишь гравитационные и электромагнитные взаимодействия. В тех чрезвычайно малых областях пространства и в тех процессах. в которых проявляются сильные и слабые взаимодействия, такие понятия, как точка приложения, линия действия, а вместе с ними и само понятие силы теряют смысл.

Таким образом, *в задачах механики* основную роль играют *гравитационные силы* (*силы тяготения*), *электромагнитные силы*, действующие на заряженное тело, а также три их разновидности – *силы упругости*, *силы трения* и *мускульные силы* человека и животных. В механике важно знать, при каких условиях возникают силы, каковы их модули и направления, т.е. знать, как силы зависят от расстояний между телами и от скоростей их движения. В свою очередь узнать значения сил, определить, как и когда они действуют, можно, располагая лишь способами их измерения.

Сравнение сил производится на основании следующего утверждения, являющегося определением равенства сил в механике: две силы, независимо от их природы, считаются равными по модулю и противоположно направленными, если их одновременное действие на тело не меняет его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Величина силы может быть измерена по степени деформации специального пробного тела – *динамометра*. Моделью динамометра обычно служит пружина.

Силы взаимодействия между телами не зависят от выбора системы отсчета. При переходе от одной системы отсчета к другой силы взаимодействия не изменяются.

Сложение сил, действующих на материальную точку. Если на материальную точку действует несколько сил в разных направлениях, то их действие можно заменить действием одной силы, называемой *равнодействующей*, величина и направление которой определяются по правилу сложения векторов (рис. 1.2.1).

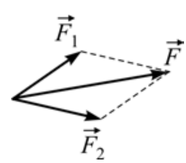


Рис. 1.2.1.
Сложение сил

Инертность тел. Свойство свободного тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью*.

Масса. Скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела, называется *массой* тела. Она служит количественной характеристикой отклика тела на воздействие на него других тел. Чем больше масса тела, тем меньшее ускорение приобретает это тело под действием одной и той же силы.

Измерение массы тела, т.е. сравнение его массы с *эталоном массы*, основывается на следующем утверждении, являющемся обобщением многочисленных опытных данных: в инерциальной системе отсчета отношение масс взаимодействующих тел равно обратному отношению модулей их ускорений.

В механике Ньютона постулируется, что

1) масса тела не зависит от скорости его движения;
2) масса тела равна сумме масс всех частиц (или материальных точек), из которых оно состоит;
3) при любых процессах, происходящих в замкнутой системе тел, ее полная масса остается неизменной.

Эти постулаты справедливы для макроскопических тел в случае, когда скорости их движения намного меньше, чем скорость света.

Плотность. *Средней плотностью* тела $\rho_{ср}$ называется величина, равная отношению массы тела m к его объему V:

$$\rho_{ср} = \frac{m}{V}. \tag{1.2.1}$$

Плотность тела в точке равна пределу отношения массы Δm элемента тела, выбранного в окрестности этой точки, к его объему ΔV при неограниченном уменьшении ΔV :

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{1.2.2}$$

Второй закон Ньютона. Основой динамики является *второй закон Ньютона*, согласно которому в инерциальной системе отсчета произведение массы тела на его ускорение равно сумме действующих на тело сил:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{1.2.3}$$

Единицы измерения силы и массы. За единицу массы в системе СИ принят *килограмм* – 1 кг. Килограмм – это масса эталона, изготовленного из сплава платины и иридия. Международный эталон килограмма хранится в г. Севре во Франции. С достаточной для практики точностью можно считать, что массой 1 кг обладает 1 л химически чистой воды при температуре 15 °C .

За единицу силы в системе СИ принимается сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2. Эта единица называется ньютон (Н). Приближенно 1 Н равен силе, с которой притягивается к Земле тело массой 0,102 кг.

Третий закон Ньютона: При любом взаимодействии двух тел сила, действующая со стороны одного тела на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны второго тела на первое. Эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, и всегда имеют одну и ту же физическую природу.

Этот закон утверждает, что силы взаимодействия всегда появляются попарно. Если в инерциальной системе отсчета на какое-то тело действует сила, то обязательно есть какое-то другое тело, на которое первое действует с такой же по модулю силой, но направленной в противоположную сторону. Всегда следует помнить, что силы, появляющиеся при взаимодействии тел, приложены к *разным* телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга. Уравновешиваться могут только силы, приложенные к одному телу.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.2.4}$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – *гравитационная постоянная*. Гравитационная постоянная относится к числу фундаментальных констант природы. Ее численное значение может быть определено только опытным путем.

Для протяженных тел произвольной формы задача нахождения силы тяготения является весьма сложной. Она имеет простое решение, описываемое формулой (1.2.4), в следующих случаях: 1) если оба тела являются однородными шарами, тогда m_1 и m_2 – их массы, r – расстояние между центрами шаров; 2) одно из тел является однородным шаром, второе – материальной точкой; тогда m_1 и m_2 – их массы, r – расстояние от материальной точки до центра шара.

Сила тяжести, действующая на тело со стороны Земли, равна произведению массы тела m на ускорение свободного падения g. Вблизи поверхности Земли

$$mg_0 = G\frac{mM}{R^2}, \tag{1.2.5}$$

где M – масса Земли, R – ее радиус. Отсюда ускорение свободного падения у поверхности Земли

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}. \tag{1.2.6}$$

Зависимость силы тяжести от высоты. Для тела, находящегося на высоте h над поверхностью Земли,

$$mg = G\frac{mM}{(R+h)^2} = m\frac{GM}{R^2(1+h/R)^2} = m\frac{g_0}{(1+h/R)^2}. \tag{1.2.7}$$

Формула (1.2.7) выражает *зависимость силы тяжести от высоты*. Из (1.2.7) видно, что ускорение свободного падения на высоте h связано с ускорением свободного падения у поверхности Земли соотношением

$$g(h) = \frac{g_0}{(1+h/R)^2}. \tag{1.2.8}$$

Сила тяжести, действующая на тело, находящееся под поверхностью Земли (например, в шахте или в тоннеле), убывает с глубиной по линейному закону и в центре Земли обращается в нуль.

Силы упругости. Понятие о деформациях. Под деформацией твердого тела понимают изменение его размеров и формы. К деформациям относятся растяжение, сжатие, сдвиг, изгиб и кручение. Поскольку твердые тела сохраняют свой объем и форму, при любой попытке их деформировать в телах возникают силы, препятствующие этому.

Тела, которые полностью восстанавливают свои форму и объем после прекращения действия внешних сил, вызывающих деформации, называются упругими. Соответственно упругими называются любые деформации упругого тела, а силы, возникающие в теле из-за упругих деформаций, носят название *сил упругости*. Наряду с упругими телами имеются пластичные тела, которые после прекращения действия внешних сил, вызвавших деформацию, не восстанавливают свою форму. Хотя при деформациях пластичных тел тоже возникают силы, они не являются силами упругости, поскольку их значение зависит не от деформации, а от других факторов. Пластичные деформации в элементарных курсах физики не рассматриваются.

Силы упругости действуют между соприкасающимися слоями деформируемого упругого тела, а также в месте контакта деформируемого тела с телом, вызывающим деформацию. В элементарной физике рассматриваются одномерные (линейные) деформации растяжения или сжатия. В этих случаях силы упругости направлены вдоль линии действия внешней (деформирующей) силы, т.е. вдоль осей продольно деформируемых нитей, витых пружин, стержней и т.п., или перпендикулярно поверхности соприкасающихся тел.

Закон Гука. Модуль Юнга. *Закон Гука* устанавливает прямую пропорциональную зависимость модуля силы упругости, возникающей при деформации тела, от модуля деформации. Для пружины он имеет вид

$$F = k\,|\,l - l_0\,|, \tag{1.2.9}$$

где l – длина деформированной пружины, l_0 – длина свободной пружины, k – коэффициент жесткости пружины. Жесткость пружины зависит как от формы пружины, так и от упругих свойств материала, из которого она изготовлена.

Аналогичные закономерности наблюдаются при растяжении и сжатии стержней из упругих материалов. Величина коэффициента жесткости для стержня зависит не только от материала стержня, но и от его первоначальной длины l_0 и площади поперечного сечения S. Эта зависимость выражается формулой

$$k = \frac{S}{l_0}E, \tag{1.2.10}$$

где E – модуль упругости материала, или *модуль Юнга*.

Силы трения возникают при соприкосновении твердых тел, а также при движении тел в вязкой среде (жидкости или газе). Главная особенность сил трения, отличающая их от гравитационных сил и сил упругости, состоит в том, что они зависят не от координат тел, а от скорости движения тел относительно друг друга или от относительной скорости тела и вязкой среды.

Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Трение между поверхностями соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки называется *сухим трением*. Сухое трение подразделяется на трение покоя и трение скольжения. Силы трения, возникающие между поверхностями твердых тел, неподвижных относительно друг друга, называются силами *трения покоя*. Величина силы трения покоя изменяется от нуля до некоторого максимального значения. Силы *трения скольжения* возникают при движении одного твердого тела по поверхности другого. Сила трения скольжения направлена против скорости относительного движения трущихся поверхностей.

Законы сухого трения имеют следующий вид:

1) Модуль силы трения скольжения пропорционален величине нормальной составляющей силы реакции:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \tag{1.2.11}$$

2) *Коэффициент трения* μ не зависит от площади соприкасающихся поверхностей и от скорости их относительного движения.

3) Максимальная величина силы трения покоя равна величине силы трения скольжения.

График зависимости проекции силы трения на ось, параллельную трущимся поверхностям, от скорости их относительного движения для простейшей модели сухого трения изображен на рис. 1.2.2.

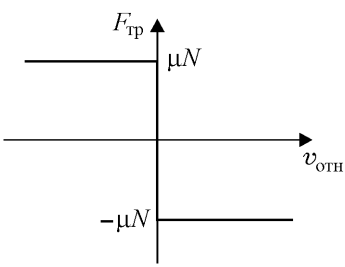


Рис. 1.2.2. Сухое трение

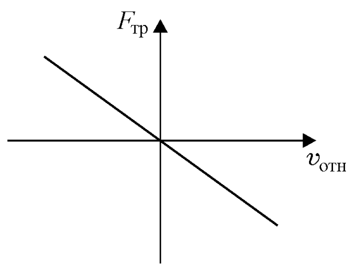


Рис. 1.2.3. Вязкое трение

Вязкое трение. При движении тел в жидкости или газе возникают *силы вязкого трения*. Они зависят от размеров и формы тела, свойств среды и от скорости относительного движения. В простейшей модели вязкого трения, применимой при малых скоростях движения,

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\beta \vec{v}, \tag{1.2.12}$$

где β – коэффициент вязкого трения. Величина β для тел сложной формы практически не поддается расчету и определяется для каждого тела экспериментально. Сила вязкого трения всегда направлена против относительной скорости тела и среды (рис. 1.2.3).

В отличие от трения между сухими поверхностями при движении тел в вязкой среде трение покоя отсутствует.

Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Под действием произвольно приложенной силы твердое тело совершает в общем случае сложное движение, при котором различные его точки движутся с разными ускорениями. Поступательное движение твердого тела возможно только в том случае, когда линия действия силы, приложенной к телу, проходит через некоторую, вполне определенную точку, связанную с телом. Эта точка получила название центра масс. Положение центра масс зависит от того, как масса тела распределена по его объему. Для однородных тел простой формы центр масс совпадает с центром симметрии. В частности, центр масс тела в форме параллелепипеда лежит в точке пересечения его диагоналей. Центр масс может оказаться и в точке, в которой нет вещества, образующего тело (например, в случае однородного обруча).

Особая роль центра масс в механике заключается в том, что эта точка движется так, как будто в ней сосредоточена вся масса тела и к ней приложены все силы, действующие на тело. Если тело движется поступательно, то это означает, что равнодействующая всех сил, приложенных к телу, проходит через его центр масс.

Частным случаем поступательного движения является свободное падение тела, не приведенного предварительно во вращение, в однородном поле тяготения. Под действием элементарных сил тяжести, действующих на все точки тела параллельно, оно движется поступательно. Следовательно, равнодействующая всех сил тяжести при любом положении тела проходит через его центр масс.

Вес тела. Невесомость. Перегрузки. Тело, находящееся в поле сил тяготения, может быть неподвижным (или двигаться равномерно и прямолинейно), только если на него действуют другие тела, например опора или подвес, которые уравновешивают силу тяжести. Сила, с которой тело в однородном поле тяготения действует на опору или подвес, удерживающие его от свободного падения, называется *весом тела* $\vec{P}$.

Вес неподвижного тела равен по величине и направлению силе тяжести: $\vec{P} = m\vec{g}$. В результате совместного действия силы тяжести и реакции подвеса (или опоры) тело, находящееся вблизи поверхности Земли, деформируется.

Если опора (подвес) движется с ускорением, направленным вверх или вниз, вес тела отличается от силы тяжести. В частности, при движении опоры (подвеса) с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз, модуль веса тела меньше модуля силы тяжести: $P = m(g - a)$. Если $\vec{a} = \vec{g}$, вес тела равен нулю: опора (подвес) на него не действует. В этом случае говорят, что тело находится в состоянии *невесомости*. При движении тела только под действием силы тяготения деформации тела отсутствуют.

При движении опоры (подвеса) с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх, модуль веса тела больше модуля силы тяжести: $P = m(g + a)$. Такое состояние тела называется *перегрузкой*. При перегрузках деформации тела больше, чем в случае, когда тело покоится.

Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Равномерное движение материальной точки по окружности происходит под действием одной или нескольких сил, векторная сумма (равнодействующая) которых $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...$ в каждый момент времени перпендикулярна скорости точки и направлена к центру окружности. Эта равнодействующая сообщает точке центростремительное ускорение $\vec{a}_n$. Согласно второму закону Ньютона, для равномерного движения точки массой m по окружности справедливо уравнение

$$m\vec{a}_n = \vec{F}. \quad (1.2.13)$$

Чтобы перейти к скалярному уравнению, нужно спроектировать все векторы на неподвижную ось OX, проходящую через материальную точку и направленную по радиусу к центру окружности (т.е. по направлению ускорения $\vec{a}_n$). При указанном выборе оси OX $a_{nx} = a_n = \dfrac{v^2}{R}$, где v – скорость точки, R – радиус окружности. В итоге получаем уравнение

$$m\frac{v^2}{R} = F. \quad (1.2.14)$$

Если точка движется неравномерно, то ее скорость изменяется не только по направлению, но и по модулю. В этом случае центростремительное ускорение $\vec{a}_n$ сообщают составляющие приложенных к точке сил, действующие вдоль радиуса, а составляющие, действующие вдоль касательной, сообщают точке касательное (тангенциальное) ускорение. Полное ускорение точки равно векторной сумме центростремительного и тангенциального ускорений.

Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость. Чтобы тело стало искусственным спутником Земли, движущимся на расстоянии h от ее поверхности, нужно поднять это тело на высоту h и сообщить ему в направлении, перпендикулярном вертикали, такую скорость v, чтобы, согласно второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения, выполнялось условие

$$m\frac{v^2}{R_З + h} = G\frac{mM}{(R_З + h)^2}. \quad (1.2.15)$$

Здесь m – масса спутника, M – масса Земли, $R_З$ – ее радиус. Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_З + h}}. \quad (1.2.16)$$

Если спутник запускается вблизи поверхности Земли $(h = 0)$, ему необходимо сообщить скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_З}} = \sqrt{g_0 R_З}, \quad (1.2.17)$$

где g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли. Скорость такого движения называют *первой космической скоростью*. При движении по орбите вокруг планеты тело находится в состоянии невесомости.

Примеры решения задач

Пример 1. Воздушный шар опускается с ускорением a, направленным вниз. Какой массы m_1 балласт надо сбросить, чтобы шар начал двигаться с тем же по модулю ускорением, направленным вверх? Начальная масса шара с балластом равна m. Сопротивлением воздуха движению шара пренебречь.

Решение. Воздушный шар движется под действием двух сил – силы тяжести, направленной вниз, и архимедовой силы $F_{\text{А}}$, направленной вверх. Поскольку объем балласта намного меньше, чем объем шара и оставшегося груза, архимедова сила практически не изменяется после выбрасывания балласта. Записывая уравнения движения шара в проекции на направление его ускорения, для указанных в условии случаев имеем: $ma = mg - F_{\text{А}}$, $(m - m_1)g = F_{\text{А}} - (m - m_1)$. Исключая отсюда архимедову силу, получаем $m_1 = \dfrac{2ma}{g+a}$.

Ответ. $m_1 = \dfrac{2ma}{g+a}$.

Пример 2. Брусок массой $m = 0{,}51$ кг, лежащий на горизонтальной плоскости, совершает прямолинейное равноускоренное движение под действием горизонтально направленной силы $F = 5$ Н. Если увеличить массу бруска в $\alpha = 2$ раза, то его ускорение под действием той же силы уменьшится в $\beta = 3$ раза. Пользуясь этими данными, вычислить коэффициент трения μ бруска о плоскость. Считать, что сила трения скольжения не зависит от скорости. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Решение. Уравнения движения бруска в первом и во втором случае соответственно имеют вид $ma = F - \mu mg$, $\alpha m \dfrac{a}{\beta} = F - \mu \cdot \alpha mg$. Исключая отсюда ускорение бруска a, получаем $\mu = \dfrac{(\beta - \alpha)}{\alpha(\beta - 1)} \cdot \dfrac{F}{mg} \approx 0{,}25.$

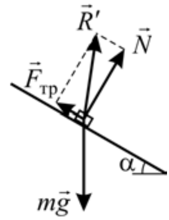
Ответ. $\mu = \dfrac{(\beta - \alpha)}{\alpha(\beta - 1)} \cdot \dfrac{F}{mg} \approx 0{,}25.$

Пример 3. По наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 15°$ тело движется вниз равномерно. С каким ускорением a будет двигаться это тело, если угол наклона плоскости увеличить до величины $\beta = 30°$? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. В проекции на направление наклонной плоскости уравнения движения тела имеют вид: $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0$ (при равномерном движении), $ma = mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta$ (при ускоренном движении), где a – ускорение тела, μ – коэффициент трения. Из первого уравнения следует, что $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$. Следовательно, $a = g(\sin\beta - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta) = g\left(2-\sqrt{3}\right) \approx 2{,}63$ м/с^2.

Ответ. $a \approx 2{,}63$ м/с^2.

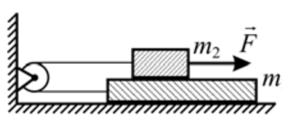
Пример 4. Брусок массой m находится на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Определить модуль силы R, с которой брусок действует на плоскость, если коэффициент трения между ними μ, а ускорение свободного падения g.



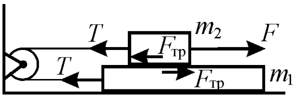
Решение. По третьему закону Ньютона искомая сила равна по величине и противоположна по направлению силе $\vec{R}'$, с которой плоскость действует на брусок. Разложим $\vec{R}'$ на две составляющие – перпендикулярную наклонной плоскости силу $\vec{N}$ и параллельную наклонной плоскости силу трения $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок). В проекции на нормаль к наклонной плоскости сумма сил, действующих на брусок, равна нулю: $N = mg\cos\alpha$. Величина второй составляющей силы $\vec{R}'$ зависит от коэффициента трения между бруском и плоскостью. Поскольку в условии задачи не сказано, покоится ли брусок на наклонной плоскости или скользит по ней, необходимо рассмотреть оба этих случая по отдельности. Как известно, предоставленное самому себе тело покоится на наклонной плоскости, если коэффициент трения удовлетворяет неравенству $\mu \geq \mathrm{tg}\,\alpha$. В этом случае сила трения покоя определяется из условия равновесия тела: $F_{тр} = mg\sin\alpha$. Если же $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$, то между бруском и плоскостью действует сила трения скольжения: $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Учитывая, что $R = R' = \sqrt{N^2 + F_{тр}^2}$, получаем ответ в виде: $R = mg\sqrt{1+\mu^2}\cos\alpha$ при $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$, $R = mg$ при $\mu \geq \mathrm{tg}\,\alpha$.

Ответ. $R = mg\sqrt{1+\mu^2}\cos\alpha$ при $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$, $R = mg$ при $\mu \geq \mathrm{tg}\,\alpha$.

Пример 5. На горизонтальном столе лежит брусок массой $m_1 = 2$ кг, на котором помещен второй брусок массой $m_2 = 1$ кг. Оба бруска соединены невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, ось которого неподвижна. Какую силу F нужно приложить к верхнему бруску в горизонтальном направлении, чтобы он начал двигаться с ускорением $a = 4{,}9$ м/с^2. Коэффициент трения между брусками $\mu = 0{,}5$. Трением нижнего бруска о стол, трением в блоке и его массой пренебречь.



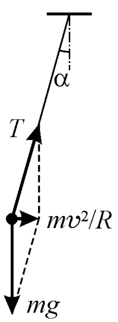
Решение. Бруски движутся под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где T – модуль силы натяжения нити, $F_{тр} = \mu m_2 g$ – модуль силы трения. В проекции на направление ускорения брусков уравнения их движения имеют вид: $m_1 a = T - \mu m_2 g$, $m_2 a = F - T - \mu m_2 g$. Исключая отсюда T, получаем $F = (m_1 + m_2)a + 2\mu m_2 g \approx 24{,}5$ Н.



Ответ. $F = (m_1 + m_2)a + 2\mu m_2 g \approx 24{,}5$ Н.

Пример 6. Маленький шарик массой $m = 100$ г подвешен на длинной нити к потолку вагона, который равномерно движется по криволинейному участку пути со скоростью $v = 72$ км/ч. С какой силой T натянута нить, если радиус закругления участка пути $R = 200$ м? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Решение. В вагоне, движущемся по закруглению пути, нить с шариком отклоняется в направлении от центра закругления на некоторый угол α. Сумма силы тяжести и силы натяжения нити сообщает шарику в неподвижной системе отсчета ускорение, направленное горизонтально к центру закругления и равное центростремительному ускорению вагона v^2/R. По второму закону Ньютона в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления имеем (см. рисунок): $\dfrac{mv^2}{R} = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$. Исключая из этих уравнений угол α, получаем $T = m\sqrt{g^2 + \left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2} = 1$ Н.

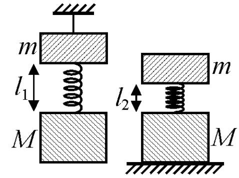


Ответ. $T = m\sqrt{g^2 + \left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2} = 1$ Н.

Задачи

1. На материальную точку массой $m = 1$ кг, которая первоначально покоилась, в момент времени $t = 0$ начинает действовать постоянная по величине сила $F = 1$ Н. До момента времени $t_1 = 5$ с сила сохраняет постоянное направление, а в момент t_1 происходит поворот вектора силы на $90°$, после чего направление силы не меняется. На какое расстояние S удалится материальная точка от своего начального положения к моменту времени $t_2 = 2t_1$, если на нее не действуют никакие другие силы?

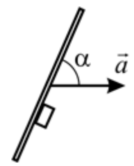
2. Невесомая пружина скрепляет два груза массами $m = 1$ кг и $M = 3$ кг. Когда эта система подвешена за верхний груз, длина пружины равна $l_1 = 20$ см. Если систему поставить на подставку, длина пружины будет равна $l_2 = 10$ см. Определить длину l_0 ненапряженной пружины.



3. Автомобиль трогается с места с ускорением $a_1 = 2$ м/с^2. При скорости $v = 50$ км/ч ускорение автомобиля стало равным $a_2 = 1$ м/с^2. С какой установившейся скоростью v_0 будет двигаться автомобиль, если сила сопротивления пропорциональна скорости? Силу тяги двигателя при движении автомобиля считать постоянной.

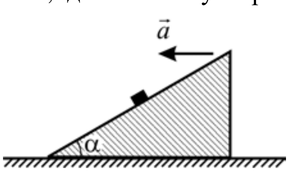
4. За какое время τ тело соскользнет с высоты h по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, если по плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\beta < \alpha$, это тело движется равномерно? Коэффициент трения в обоих случаях один и тот же. Ускорение свободного падения g.

5. На гладком столе лежит доска, к которой вплотную прижат брусок. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = \sqrt{3}/3 \approx 0{,}577$. Доску начинают поступательно перемещать по столу с некоторым постоянным ускорением. При каком минимальном значении α_{min} угла α между плоскостью доски и вектором ускорения брусок не будет скользить по доске?

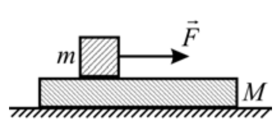


6. Санки можно удержать на горке с углом наклона $\alpha = 30°$ минимальной силой $F = 60$ Н, направленной вдоль горки. Предоставленные самим себе, они скатываются с ускорением $a = 3{,}9$ м/с^2. Какую минимальную силу F_1, направленную вдоль горки, нужно приложить к санкам, чтобы тянуть их в горку с постоянной скоростью? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

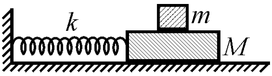
7. Наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол $\alpha = 30°$, движется с ускорением $\vec{a}$, направленным влево, как показано на рисунке. При каких значениях a тело, находящееся на наклонной плоскости, будет скользить вверх вдоль нее? Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}3$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



8. Брусок массой $M = 4$ кг находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит кубик массой $m = 1$ кг, к которому приложена горизонтальная сила F. При каком значении этой силы кубик начнет скользить по бруску? Коэффициент трения между кубиком и бруском $\mu = 0{,}5$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

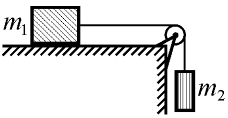


9. На гладком столе помещен брусок массой $M = 1$ кг, на котором лежит коробок



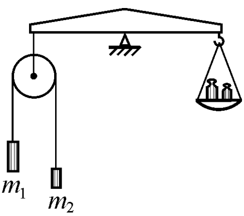
массой $m = 50$ г. Брусок прикреплен к одному из концов невесомой пружины, другой конец которой заделан в неподвижную стенку. Брусок отводят от положения равновесия перпендикулярно стенке на расстояние Δl и отпускают без начальной скорости. При каком значении Δl коробок начнет скользить по бруску? Коэффициент трения коробка́ о брусок $\mu = 0{,}2$, жесткость пружины $k = 500$ Н/м. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. Трением бруска о стол пренебречь.

10. На горизонтальном столе находится брусок массой m_1, к которому привязана не-

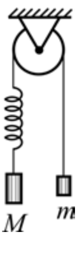


растяжимая нить. Второй конец нити перекинут через блок и прикреплен к грузу массой m_2. Коэффициент трения между бруском и столом μ. Пренебрегая массой блока, определить силу F, с которой нить действует на блок. Ускорение свободного падения g.

11. Два шарика с массами $m_1 = 600$ г и $m_2 = 400$ г подвешены на легкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок. В начальный момент времени блок заторможен, а расстояние между шариками по вертикали $l = 49$ см, причем более тяжелый шарик расположен выше. Через какое время τ шарики окажутся на одной горизонтали, если системе позволить двигаться? Блок невесом. Трением пренебречь.



12. На нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 50$ г. В заторможенном состоянии (когда грузы неподвижны) блок уравновешен на рычажных весах. На какую величину Δm нужно изменить массу гирь на правой чашке, чтобы при освобождении блока (когда грузы придут в движение) сохранить равновесие весов?

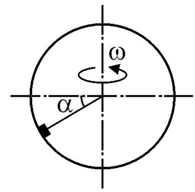


13. К грузику массой $M = 300$ г прикреплена пружина, другой конец которой привязан к нити, перекинутой через блок. На втором конце нити подвешен грузик массой $m = 200$ г. Когда блок заторможен, длина пружины $l = 15$ см. Какую длину l_1 будет иметь пружина, если блок освободить? Считать, что колебания в системе не возникнут, т.е. грузики будут двигаться с постоянным ускорением. Длина недеформированной пружины $l_0 = 10$ см. Массой пружины, нити и блока, а также трением в блоке пренебречь.

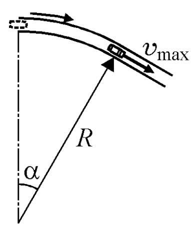
14. Вокруг планеты, имеющей форму шара радиуса r, по круговой орбите движется спутник. Определить радиус орбиты спутника R, считая известными ускорение свободного падения у поверхности планеты g и период обращения спутника T.

15. Вес тела на экваторе составляет $\eta = 97\%$ от веса этого же тела на полюсе. Найти период вращения планеты вокруг своей оси *T*, если плотность вещества планеты $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$. Планету считать однородным шаром.

16. На внутренней поверхности сферы радиуса *R*, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, располагается маленький брусок массой m. Положение бруска задается углом α между горизонталью и прямой, проведенной к бруску из центра сферы. Считая значение угла α известным, найти модуль силы трения, удерживающей брусок от скольжения по поверхности сферы. Ускорение свободного падения g.



17. Горизонтальный участок шоссе представляет собой дугу окружности радиуса $R = 100$ м с центральным углом $\alpha = 30°$, переходящую в прямолинейный отрезок. Автомобиль со всеми ведущими колесами, стоявший в начале криволинейного участка, начинает разгоняться с постоянным тангенциальным ускорением. С какой максимальной по модулю скоростью $v_{\max}$ может выехать автомобиль на прямолинейный участок, если коэффициент трения между шинами автомобиля и полотном шоссе $\mu = 0{,}3$? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.



1.3. Статика

Теоретический материал

Статикой называется раздел механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел под действием приложенных к ним сил.

Сложение сил, действующих на твердое тело. Сила, действующая на твердое тело, характеризуется точкой приложения, и линией действия. В задачах статики выделяют два типа сил:

1) Контактные силы, возникающие при соприкосновении тел. К ним относятся силы упругости, силы трения и силы давления жидкости или газа.

2) Дальнодействующие силы, действующие на расстоянии между телами. К ним относятся гравитационные и электромагнитные силы.

Силы упругости и трения приложены к телу в точке или в плоскости соприкосновения с другим твердым телом. Силы давления жидкости (газа) приложены ко всем точкам поверхности тела, окруженной жидкостью (газом). Гравитационные силы действуют на каждую точку внутри тела. Их равнодействующая приложена к некоторой точке пространства, связанной с телом – к его центру тяжести (определение центра тяжести см. ниже).

Вектор силы определяет линию, вдоль которой действует сила, – линию действия. Две силы, действующие на твердое тело, уравновешиваются тогда и только тогда, когда линии их действия лежат на одной прямой, силы равны по величине и действуют в противоположных направлениях. Перенос точки приложения силы, действующей на твердое тело, вдоль линии ее действия не влияет на изменение механического состояния тела. Таким образом, в задачах статики можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия.

Под *сложением сил*, действующих на твердое тело, понимается нахождение их *равнодействующей*, т.е. силы, вызывающей такое же изменение механического состояния тела, как и данная система сил. В зависимости от взаимного направления сил и соотношения между их величинами используются следующие способы определения равнодействующей (рис. 1.3.1).

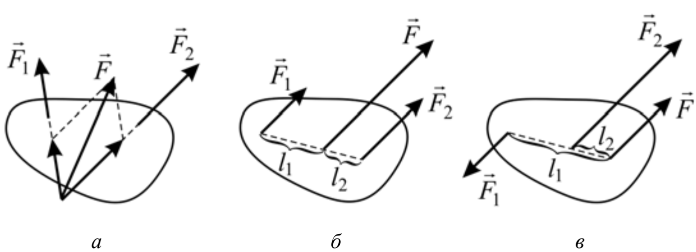


Рис. 1.3.1. Сложение сил

Равнодействующая двух сил, линии действия которых пересекаются, равна геометрической сумме этих сил (рис. 1.3.1, *а*). Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия складываемых сил.

Равнодействующая двух параллельных сил (рис. 1.3.1, *б*) равна их геометрической сумме, а линия ее действия делит расстояние между точками приложения этих сил в отношении, обратном отношению модулей сил:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{F_2}{F_1}. \tag{1.3.1}$$

Равнодействующая двух не совпадающих по модулю антипараллельных сил (рис. 1.3.1, *в*) равна их геометрической сумме, направлена в сторону большей из них, а линия ее действия пересекает продолжение прямой, соединяющей точки приложения сил, в точке O, для которой также выполняется равенство (1.3.1).

Если на тело действует несколько сил, то их равнодействующая находится попарным суммированием сил описанными выше способами.

Система двух равных по модулю антипараллельных сил, линии действия которых не лежат на одной прямой, называется парой сил. Пара сил сообщает телу угловое ускорение, но не вызывает ускорение его центра масс. Свести эту систему сил к одной силе, которая приводила бы к такому же изменению состояния твердого тела, невозможно. Поэтому говорят, что пара сил не имеет равнодействующей.

Момент силы относительно оси вращения. Для того чтобы привести твердое тело во вращение вокруг некоторой оси, к нему нужно приложить силу, имеющую отличную от нуля составляющую в плоскости, перпендикулярной к оси. При этом линия действия этой составляющей не должна проходить через ось вращения. Составляющая внешней силы, параллельная оси, не вызывает вращения тела, а приводит лишь к деформации оси. Учитывая это, под силой, действующей на твердое тело, будем понимать составляющую этой силы в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Плечом силы называют расстояние от оси вращения до линии действия силы (рис. 1.3.2). *Моментом силы* относительно оси называют величину, равную произведению модуля силы F на плечо l и взятую со знаком «плюс», если сила стремится вызвать поворот тела по часовой стрелке, и со знаком «минус», если против часовой стрелки:

Рис. 1.3.2. Определение момента силы

$$M = Fl. \tag{1.3.2}$$

Правило моментов. Состояние твердого тела, в котором все его точки остаются сколь угодно долго неподвижными по отношению к выбранной инерциальной системе отсчета, называется *равновесием*. Условие равновесия твердого тела, имеющего ось вращения, может быть сформулировано в виде *правила моментов*: тело, имеющее неподвижную ось вращения, находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно этой оси равна нулю.

Условия равновесия тела. Если твердое тело может перемещаться поступательно, а также совершать вращательное движение относительно некоторой оси, равновесие тела достигается при одновременном выполнении двух условий:

1) Сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю.
2) Алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу относительно оси вращения (или любой другой оси, параллельной оси вращения), равна нулю.

Можно показать, что при равновесии тела сумма моментов сил равна нулю относительно любой оси (геометрической линии).

Центр тяжести тела. Всякое тело, находящееся в гравитационном поле, можно представить в виде системы частиц, на каждую из которых действует сила тяжести, пропорциональная ее массе. Полная сила тяжести, действующая на тело, является равнодействующей всех этих сил. Вблизи поверхности Земли, где гравитационное поле можно считать однородным, элементарные силы тяжести, действующие на частицы, параллельны. Точка приложения равнодействующей всех элементарных сил тяжести называется *центром тяжести* тела. В однородном гравитационном поле центр тяжести тела совпадает с центром масс тела.

Относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, сумма моментов всех элементарных сил тяжести равна нулю.

Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесие тел. На практике большую роль играет качественная характеристика равновесия, называемая устойчивостью. В связи с этим различают три типа равновесия тел – устойчивое, неустойчивое и безразличное (рис. 1.3.3).

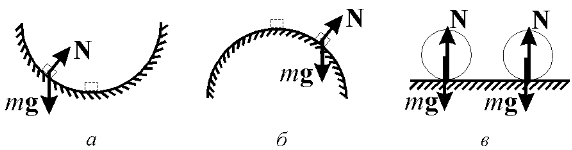


Рис. 1.3.3. Виды равновесия: *а* – устойчивое, *б* – неустойчивое, *в* – безразличное

Положение равновесия системы называется *устойчивым*, если при отклонении любого тела системы от этого положения возникают силы или моменты сил, возвращающие тела системы к этому положению. Положение равновесия называется *неустойчивым,* если при отклонении любого тела системы от этого положения возникают силы или моменты сил, удаляющие тела системы от равновесия. Равновесие системы называется *безразличным,* если существует область отклонений от положения равновесия, в которой смещение любого тела системы не вызывает сил, изменяющих состояние системы.

В механике жидкостей и газов изучается равновесие и движение жидкостей и газов, а также их взаимодействие с твердыми телами. В частности, в гидро- и аэростатике рассматриваются условия и закономерности равновесия жидкостей и газов под воздействием приложенных к ним сил, а также условия равновесия твердых тел, находящихся в жидкостях или газах.

Давление. Действие тел (твердых, жидких или газообразных) на мысленно выделенный объем жидкости (газа) можно отнести к одному из двух типов: действию на расстоянии и контактному воздействию.

Величина дальнодействующих сил (гравитационных и электромагнитных) пропорциональна выделенному объему жидкости (газа), поэтому эти силы называются *объемными*. Величина контактных сил пропорциональна площади выделенного участка поверхности, ограничивающей данный объем, поэтому эти силы получили название *поверхностных*.

Если любой выделенный объем жидкости или газа находится в равновесии, то поверхностные силы действуют лишь перпендикулярно элементарным поверхностям, ограничивающим этот объем. Существование касательных составляющих поверхностных сил при равновесии невозможно, так как из-за текучести любая сколь угодно малая касательная сила вызывает деформацию сдвига жидкости (газа), т.е. нарушает равновесие. Поэтому при описании взаимодействия элементов жидкости (газа) между собой и с другими телами рассматривают лишь нормальные компоненты поверхностных сил.

Давлением называют скалярную величину, равную отношению величины ΔF_n нормальной компоненты поверхностной силы, действующей на элементарную площадку, к площади этой площадки ΔS:

$$p = \frac{\Delta F_n}{\Delta S}. \tag{1.3.3}$$

Если сила давления $\vec{F}$ равномерно распределена по поверхности площадью S, то давление

$$p = \frac{F_n}{S}. \tag{1.3.4}$$

Прибор для измерения давления называется манометром.

Единицы измерения давления: паскаль, мм рт. ст. Единица давления в Международной системе единиц называется *паскалем* (Па). Паскаль равен давлению, вызываемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2: 1 Па = 1 Н/м^2. На практике также широко применяется внесистемная единица давления – *миллиметр ртутного столба* (мм рт. ст.). Это давление, оказываемое на дно сосуда столбиком ртути высотой в 1 мм: 1 мм рт. ст. = 133 Па.

Закон Паскаля. Когда внешняя сила действует на твердое тело, то создаваемое ею давление передается телом в направлении действия силы. Жидкости и газы ведут себя принципиально иначе. Согласно *закону Паскаля*, давление, оказываемое на покоящуюся жидкость внешними силами, передается ею одинаково во всех направлениях без изменения. То же самое утверждение справедливо и для газа. Это означает, что давление на элементарную площадку, помещенную в покоящуюся жидкость или газ, одинаково при любой ориентации площадки.

Давление жидкости на дно и стенки сосуда. Следствием закона Паскаля является уравнение, описывающее распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости, находящейся в поле тяготения. Записывая условия равновесия мысленно выделенного вертикального столба жидкости, можно получить для давления жидкости на глубине h следующее выражение:

$$p(h) = \rho g h, \tag{1.3.5}$$

где ρ – плотность жидкости, которая вследствие ее несжимаемости одинакова на любой глубине; g – ускорение свободного падения. Давление, определяемое формулой (1.3.5), называется гидростатическим. Это давление создает жидкость, находящаяся в равновесии под действием силы тяжести.

Поскольку давление верхних слоев жидкости на нижележащие слои передается ими одинаково по всем направлениям, приложенное к поверхности жидкости внешнее давление p_0 увеличивает давление в каждой точке жидкости на одну и ту же величину. В этом случае

$$p(h) = p_0 + \rho g h. \qquad (1.3.6)$$

Таким образом, сила тяжести и внешнее давление на поверхности жидкости создают внутри покоящейся жидкости давление, которое, согласно закону Паскаля, передается и на дно и на стенки сосуда. По третьему закону Ньютона дно и стенки сосуда оказывают на жидкость такое же по величине давление.

Если стенки сосуда вертикальные, то силы давления стенок сосуда на жидкость направлены горизонтально и не имеют вертикальной составляющей. В этом случае сила гидростатического давления жидкости на дно сосуда равна весу жидкости в сосуде. Если стенки сосуда наклонные, то сила давления стенок на жидкость имеет вертикальную составляющую. Поэтому в расширяющемся кверху сосуде сила давления жидкости на дно равна разности веса жидкости и вертикальной составляющей силы давления стенок. В этом случае сила гидростатического давления на дно меньше веса жидкости. В сужающемся кверху сосуде, наоборот, сила давления на дно равна сумме веса жидкости и вертикальной составляющей силы давления стенок на жидкость. В этом случае сила гидростатического давления на дно больше веса жидкости.

К гидростатическому давлению добавляется давление воздуха p_0, которое он оказывает на свободную поверхность жидкости. Это не влияет на равновесие сосуда с жидкостью, поскольку такое же давление воздух оказывает на стенки и дно сосуда снаружи.

Гидравлический пресс. Закон Паскаля позволяет объяснить действие широко применяемого на практике устройства – *гидравлического пресса*. Гидравлический пресс состоит из двух цилиндров разного диаметра, снабженных поршнями и соединенных трубкой. Пространство под поршнями заполняется жидкостью (обычно минеральным маслом). Пусть на поршень площадью S_1 действует нормальная сила F_1, а на поршень площадью S_2 – нормальная сила F_2. Если поршни находятся на одном уровне, то, согласно закону Паскаля, давление под поршнями одинаково, т.е. $\dfrac{F_1}{S_1} = \dfrac{F_2}{S_2}$. Отсюда

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}. \qquad (1.3.7)$$

Если поршни находятся на разных уровнях, то давление под ними различается на величину $\Delta p = \rho g \Delta h$, где ρ – плотность жидкости, а Δh – разность высот поршней. В этом случае формула (1.3.7), вообще говоря, неверна, однако указанной разницей давлений, как правило, можно пренебречь по сравнению с давлением жидкости в прессе, создаваемом поршнями.

Гидравлический пресс является механизмом, позволяющим развивать большое усилие на одном из поршней при небольшом усилии на другом. Положенный в его основу принцип используется и в других гидравлических машинах (гидравлические подъемники, гидроусилители и т.п.).

Сообщающиеся сосуды. Система сосудов, соединенных трубами, заполненными покоящейся жидкостью, называется *сообщающимися сосудами*. Равенство давления жидкости на одном и том же уровне приводит к тому, что свободные поверхности однородной жидкости в сообщающихся сосудах любой формы находятся на одном уровне (если влияние сил поверхностного натяжения пренебрежимо мало). Если в сообщающихся сосудах находятся жидкости с различными плотностями, то при равенстве давления высота столба жидкости с меньшей плотностью будет больше высоты столба жидкости с большей плотностью.

Атмосферное давление. Опыт Торричелли. Наша Земля окружена атмосферой – слоем воздуха, состоящего из смеси различных газов. Давление воздуха у поверхности Земли равно примерно $p_0 \approx 10^5$ Па. Однако человек в повседневной жизни не замечает действия атмосферного давления, поскольку все органы внутри его тела сжаты до такого же давления.

Одними из первых экспериментальных доказательств существования атмосферного давления явились *опыты* итальянского физика *Е. Торричелли*, проделанные им в 1643 – 1644 годах. Для этих опытов он использовал стеклянную трубку длиной в 1 м, запаянную с одного конца. Заполняя эту трубку ртутью и опуская ее открытым концом в чашку с ртутью, Торричелли убедился, что ртуть из трубки выливается в чашку не полностью. Каждый раз высота оставшегося столба ртути была примерно одинаковой и составляла около 760 мм.

Прибор, описанный Торричелли, представляет собой *ртутный барометр*. Действие этого прибора, являющегося разновидностью сообщающихся сосудов – трубки со ртутью и атмосферы, – основано на том, что давление в области над поверхностью ртути в трубке (в «торричеллиевой пустоте») пренебрежимо мало. Из условий механического равновесия ртути следует связь между давлением атмосферы и высотой столба ртути h_{Hg}:

$$p_0 = \rho g h_{\mathrm{Hg}}. \qquad (1.3.8)$$

Изменение атмосферного давления с высотой. Давление атмосферы зависит от погодных условий и высоты места наблюдения. В обычных условиях на уровне моря высота столба ртути составляет около 760 мм и уменьшается с подъемом барометра. Однако *изменение атмосферного давления с высотой* происходит не по линейному закону, как для жидкостей, а по более сложному. Это объясняется тем, что воздух (как и любой газ) является сжимаемой средой, его плотность зависит от давления и температуры (см. раздел 2.1 настоящего пособия). Расчет с учетом сжимаемости воздуха показывает, что при постоянной температуре атмосферы изменение давления с высотой h описывается барометрической формулой

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right), \qquad (1.3.9)$$

где $M = 29$ г/моль – молярная масса воздуха, g – ускорение свободного падения у поверхности Земли, T – абсолютная температура, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

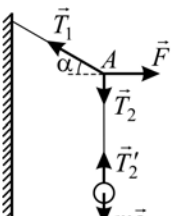
Закон Архимеда. Зависимость давления в жидкости или газе от глубины приводит к возникновению выталкивающей силы, действующей на любое тело, погруженное в жидкость или газ. Выталкивающая (архимедова) сила представляет собой результирующую элементарных сил давления, действующих на поверхность тела со стороны окружающей жидкости (газа). В соответствии с *законом Архимеда* выталкивающая сила направлена вертикально вверх; ее величина равна весу жидкости (газа) в объеме погруженной части тела, а точка приложения совпадает с центром тяжести объема вытесненной телом жидкости (газа). Важно отметить, что применимость закона Архимеда ограничена случаем, когда вся поверхность погруженной в жидкость (газ) части тела находится в контакте с жидкостью (газом). Если часть этой поверхности исключена из контакта с жидкостью (газом), то формальное применение закона Архимеда не даст правильного значения величины и правильного направления равнодействующей сил давления.

Плавание тел. Пусть тело, погруженное в жидкость, предоставлено самому себе. Если сила тяжести, действующая на это тело, равна архимедовой силе, то тело плавает внутри жидкости, т.е. находится в безразличном равновесии на любой глубине. Если сила тяжести больше архимедовой силы, то тело опускается вниз (тонет). Если сила тяжести меньше архимедовой силы, то тело поднимается вверх (всплывает на поверхность жидкости) до тех пор, пока вес жидкости, вытесненной погруженной в нее части тела, не станет равным силе тяжести, действующей на тело.

Примеры решения задач

Пример 1. Однородный шар массой $m = 7$ кг привязан за легкую веревку к гвоздю, вбитому в стену. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к середине веревки, чтобы натяжения нижней и верхней ее половин относились как $1:2$, а шар не касался стенки? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

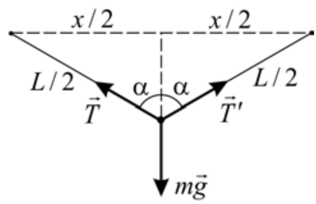
Решение. Положение веревки и силы, действующие в системе, изображены на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_2'$ – силы натяжения верхней и нижней половин веревки, причем $T_2 = T_2'$. Из условия равновесия шара вытекает, что $T_2' = mg$. Записывая условие равновесия точки приложения силы $\vec{F}$ (точки A) в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления, имеем: $T_1 \cos\alpha = F$, $T_1 \sin\alpha = T_2$. Из последнего соотношения с учетом того, что по условию $T_1 = 2T_2$, находим, что $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, т.е. $\alpha = 30°$. Следовательно, $F = 2mg\cos 30° \approx 118{,}8$ Н.



Ответ. $F = 2mg\cos 30° \approx 118{,}8$ Н.

Пример 2. Груз массой $m = 1{,}2$ кг подвешен к середине нити длиной $L = 2$ м, концы которой закреплены на одном уровне. Найти максимально возможное расстояние x между точками закрепления концов нити, если она выдерживает нагрузку не более $F = 10$ Н. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

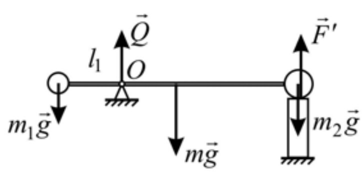
Решение. Груз находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ – силы натяжения левого и правого отрезков нити, причем $T = T'$. В проекции на вертикальное направление условие равновесия имеет вид $mg = 2T\cos\alpha$, причем $\cos\alpha = \sqrt{L^2 - x^2}/L$. Отсюда $T = \dfrac{mgL}{2\sqrt{L^2 - x^2}}$. Видно, что с увеличением x сила натяжения нити возрастает. Нить не оборвется, если $T \le F$. Отсюда находим $x = L\sqrt{1 - \left(\dfrac{mg}{2F}\right)^2} = 1{,}6$ м.



Ответ. $x = L\sqrt{1 - \left(\dfrac{mg}{2F}\right)^2} = 1{,}6$ м.

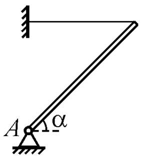
Пример 3. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 0{,}8$ кг несет на концах два маленьких шарика, массы которых $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}25$ кг. Стержень может поворачиваться на горизонтальной оси, находящейся на расстоянии $l_1 = 0{,}3$ м от шарика меньшей массы. Чтобы стержень был расположен горизонтально, под шарик большей массы подставлена опора. Найти модуль силы F, действующей на опору. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Решение. Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$, $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ – силы тяжести, $\vec{Q}$ и $\vec{F}'$ – силы реакции оси и опоры. Уравнение моментов, записанное относительно оси, проходящей через точку O (оси вращения стержня), имеет вид $m_1 g l_1 + F'(l - l_1) = m_2 g(l - l_1) + mg\left(\dfrac{l}{2} - l_1\right)$. По третьему закону Ньютона модуль искомой силы равен модулю силы $\vec{F}'$. Отсюда находим



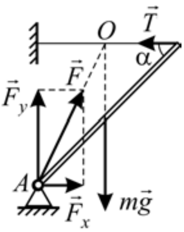
$$F = \left[m_2 + \frac{ml/2 - (m + m_1)l_1}{l - l_1}\right]g = 3{,}85 \text{ Н}.$$

Ответ. $F = \left[m_2 + \dfrac{ml/2 - (m + m_1)l_1}{l - l_1}\right]g = 3{,}85$ Н.



П р и м е р 4. Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке A и удерживается горизонтальной нитью. Масса стержня $m = 1$ кг, угол его наклона к горизонтали $\alpha = 45°$. Найти модуль силы реакции шарнира F. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Р е ш е н и е. Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{T}$ – сила натяжения нити; $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ – составляющие



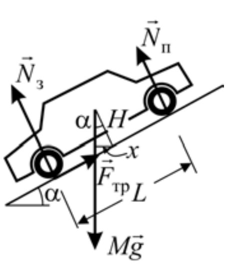
силы реакции шарнира вдоль горизонтальной и вертикальной осей соответственно. Условия равновесия стержня имеют вид – для сил: $F_x = T$, $F_y = mg$, для моментов сил относительно точки A: $mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha = Tl\sin\alpha$, где l – длина стержня. Учитывая, что $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, получаем $F = mg\sqrt{1 + \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha} \approx 11$ Н.

Замечание. Поскольку линии действия сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ пересекаются в точке O, линия действия силы $\vec{F}$ также должна проходить через эту точку, что позволяет до решения задачи однозначно определить направление силы реакции шарнира.

О т в е т. $F = mg\sqrt{1 + \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha} \approx 11$ Н.

П р и м е р 5. Автомобиль массой $M = 1000$ кг равномерно движется вверх по наклонному участку дороги, составляющему с горизонтом угол $\alpha = 15°$. Найти модуль силы $N_п$, с которой давят на дорогу передние колеса автомобиля, если расстояние между его осями $L = 2$ м, центр тяжести расположен посередине между осями на расстоянии $H = 0{,}5$ м от поверхности дороги, ведущие колеса задние. Силу трения, действующую на передние колеса, не учитывать. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Р е ш е н и е. Поскольку автомобиль движется с постоянной скоростью, связанная с



ним система отсчета является инерциальной. В этой системе автомобиль находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $M\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{F}_{тр}$ – сила трения покоя, действующая со стороны дороги на ведущие (задние) колеса; $\vec{N}_п$ и $\vec{N}_з$ – нормальные составляющие сил реакции дороги, действующие соответственно на передние и задние колеса. Записывая уравнение моментов относительно оси, проходящей через точки соприкосновения задних колес с дорогой, имеем $Mg\left(\dfrac{L}{2}\cos\alpha - x\right) = N_п L$; $x = H\sin\alpha$. Отсюда $N_п = Mg\left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha - \dfrac{H}{L}\sin\alpha\right) \approx 4{,}18\cdot 10^3$ Н.

Ответ. $N_{\text{п}} = Mg\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{H}{L}\sin\alpha\right) \approx 4{,}18 \cdot 10^3$ Н.

Пример 6. Браслет массой $M = 80$ г сделан из сплава золота и серебра. Вычислить массу золота m, содержащегося в браслете, исходя из следующих данных. Плотность золота $\rho_1 = 19{,}3$ г/см^3, плотность серебра $\rho_2 = 10{,}5$ г/см^3. При погружении браслета в воду, находящуюся в сосуде с вертикальными стенками и площадью основания $S = 25$ см^2, уровень воды поднимается на $h = 2$ мм. Объем сплава принять равным суммарному объему исходных компонент.

Решение. Объем браслета равен объему вытесненной им воды: $V = Sh.$ Этот объем складывается из объема золота V_1 и объема серебра V_2, причем $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$, $V_2 = \frac{M - m}{\rho_2}$.

Следовательно, $m\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{M}{\rho_2} = Sh.$ Объединяя полученные выражения, находим

$m = \left(M - Sh\rho_2\right) \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} = 60{,}3$ г.

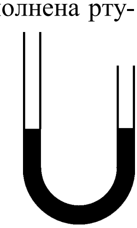
Ответ. $m = \left(M - Sh\rho_2\right) \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} = 60{,}3$ г.

Пример 7. На поверхности воды плавает лист пенопласта, причем толщина погруженной в воду части $h = 1$ м. Если положить на пенопласт груз массой $M = 50$ кг, то высота выступающей над водой части пенопласта уменьшится на $\Delta h = 5$ см. Чему равна масса m пенопласта?

Решение. Пусть S – площадь листа пенопласта, ρ – плотность воды. Условия плавания листа пенопласта имеют вид $mg = \rho Shg$ (без груза), $(m + M)g = \rho S(h + \Delta h)g$ (с грузом). Исключая из этих равенств S, получаем $m = M\frac{h}{\Delta h} = 10$ кг.

Ответ. $m = M\frac{h}{\Delta h} = 10$ кг.

Пример 8. Вертикально расположенная U-образная трубка частично заполнена ртутью, причем левый конец трубки выше уровня ртути на $h_1 = 50{,}2$ см, а правый – на $h_2 = 25$ см. В оба колена трубки наливают воду так, что они оказываются полностью заполненными. На какую величину Δh переместится уровень ртути в левом колене трубки, если известно, что ртуть из него не вытесняется полностью? Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3.



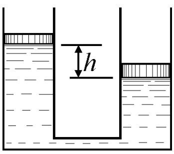
Решение. Пусть первоначальная высота столба ртути в каждом из колен трубки равна h_0. Поскольку ртуть несжимаема и сечение трубки постоянно, после заполнения колен водой ртуть опустится в левом колене на такую же величину Δh, на которую поднимется в правом колене. Поэтому высоты столбов воды в левом и правом коленах трубки будут равны соответственно $h_1+\Delta h$ и $h_2-\Delta h$. Жидкости будут находиться в равновесии при равенстве давления ртути в левом и правом коленах в нижней точке трубки, т.е. при выполнении условия

$$\rho_в g(h_1+\Delta h)+\rho g(h_0-\Delta h)=\rho_в g(h_2-\Delta h)+\rho g(h_0+\Delta h).$$

Отсюда получаем $\Delta h=\dfrac{\rho_в(h_1-h_2)}{2(\rho-\rho_в)}=1$ см.

Ответ. $\Delta h=\dfrac{\rho_в(h_1-h_2)}{2(\rho-\rho_в)}=1$ см.

Пример 9. Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с разными массами. В положении равновесия левый поршень расположен выше правого на величину $h=10$ см. Какой массы m гирю надо поставить на левый поршень, чтобы поршни оказались на одной высоте? Площади поршней одинаковы и равны $S=200$ см^2, плотность воды $\rho=1$ г/см^3.



Решение. Обозначим через M_1 и M_2 массы левого и правого поршней соответственно. Условия равновесия системы имеют вид: $\dfrac{M_1g}{S}+\rho gh=\dfrac{M_2g}{S}$ (в отсутствие гири), $\dfrac{(M_1+m)g}{S}=\dfrac{M_2g}{S}$ (когда гиря лежит на левом поршне). Вычитая из первого уравнения второе, получаем $m=\rho Sh=2$ кг.

Ответ. $m=2$ кг.

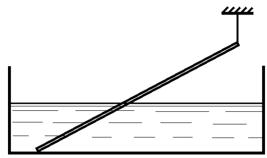
Пример 10. В цилиндрическом сосуде уровень воды находится на высоте $H=20$ см. Когда в сосуд пустили плавать пустой стеклянный стакан, уровень воды поднялся на $\Delta h=2$ см. На какой высоте H_1 будет располагаться уровень воды в сосуде, если стакан утопить? Плотность воды $\rho_в=1$ г/см^3, плотность стекла $\rho_{ст}=2{,}5$ г/см^3.

Решение. Пусть m – масса стакана, а S – площадь сечения сосуда. Поскольку плавающий стакан вытесняет объем воды, равный $S\Delta h$, условие его плавания имеет вид $mg=\rho_в gS\Delta h$. Следовательно, объем стекла, из которого изготовлен стакан, равен

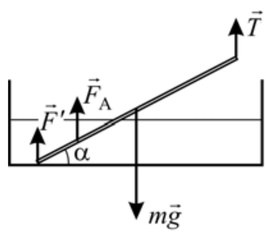
$V = \dfrac{m}{\rho_{ст}} = S\Delta h \dfrac{\rho_в}{\rho_{ст}}$. Этот объем равен объему воды, вытесненному утонувшим стаканом. Следовательно, $H_1 = H + \Delta h \dfrac{\rho_в}{\rho_{ст}} = 20{,}8$ см.

Ответ. $H_1 = H + \Delta h \dfrac{\rho_в}{\rho_{ст}} = 20{,}8$ см.

Пример 11. Алюминиевая спица длиной $L = 25$ см и площадью поперечного сечения $S = 0{,}1$ см^2 подвешена на нити за верхний конец. Нижний конец опирается на горизонтальное дно сосуда, в который налита вода. Длина погруженной в воду части спицы $l = 10$ см. Найти силу F, с которой спица давит на дно сосуда, если известно, что нить расположена вертикально. Плотность алюминия $\rho_а = 2{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



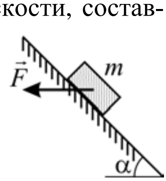
Решение. Силы, действующие на спицу, изображены на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести; $\vec{T}$ – сила натяжения нити; $\vec{F}_А$ – архимедова сила, $\vec{F}'$ – сила реакции дна сосуда. Сила тяжести приложена к центру спицы, архимедова сила – к центру погруженной в воду ее части. Масса спицы m и модуль архимедовой силы выражаются следующим образом: $m = SL\rho_а$, $F_А = Sl\rho_в g$. Уравнение моментов относительно точки подвеса спицы имеет вид $F'L\cos\alpha + Sl\rho_в g\left(L - \dfrac{l}{2}\right)\cos\alpha = SL\rho_а g \dfrac{L}{2}\cos\alpha$. Учитывая, что $F' = F$, находим $F = \left[\dfrac{1}{2}L\rho_а - \left(1 - \dfrac{l}{2L}\right)l\rho_в\right]Sg = 0{,}025$ Н.



Ответ. $F = \left[\dfrac{1}{2}L\rho_а - \left(1 - \dfrac{l}{2L}\right)l\rho_в\right]Sg = 0{,}025$ Н.

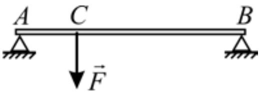
Задачи

1. Брусок массой $m = 1$ кг находится на неподвижной наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. С какой минимальной горизонтальной силой F нужно действовать на брусок, чтобы он покоился? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}25$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



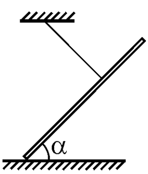
2. Однородный стержень лежит горизонтально на двух опорах. Расстояние от центра стержня до ближайшей опоры $S = 0{,}3$ м. Найти расстояние между опорами l, если известно, что модули сил, действующих на стержень со стороны опор, отличаются друг от друга на величину, равную $\alpha = 1/5$ веса стержня.

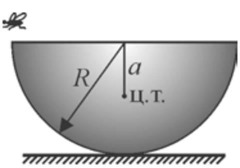
3. Невесомый стержень лежит горизонтально на двух опорах A и B. В точке C к стержню приложена сила $\vec{F}$, направленная вертикально вниз. Определить величину этой силы, если известно, что расстояние CB в $k = 2{,}5$ раза превышает расстояние AC, а нагрузка на опору A превышает нагрузку на опору B на величину $f = 30$ Н.



4. Деревянная линейка выдвинута за край стола на $\alpha = 1/4$ часть своей длины. При этом она не опрокидывается, если на ее свешивающийся конец положить груз массой не более $m_1 = 250$ г. На какую часть длины β можно выдвинуть за край стола эту линейку, если на ее свешивающийся конец положен груз массой $m_2 = 125$ г?

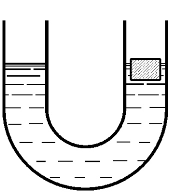
5. Лестница массой $m = 30$ кг удерживается в наклонном положении легкой нерастяжимой веревкой. Веревка привязана к лестнице в точке, отстоящей от верхнего конца лестницы на расстояние, равное $1/3$ длины лестницы. Найти модуль силы нормального давления N лестницы на пол, если лестница составляет с полом угол $\alpha = 45°$, а веревка перпендикулярна лестнице. Центр тяжести лестницы находится посередине. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.





6. Тонкостенная полусфера массой M и радиусом R покоится на горизонтальном столе. На какую высоту h опустится край полусферы, если на него сядет муха массой m? Центр тяжести полусферы расположен на расстоянии $a = R/2$ от ее центра.

7. Автомобиль массой M поднимается с постоянной скоростью вверх по дороге, составляющей угол α с горизонтом. Найти силу F взаимодействия ведущих (задних) колес с поверхностью дороги. Расстояние между осями автомобиля L, центр тяжести находится посередине между осями на расстоянии H от поверхности дороги. Силу трения, действующую на передние колеса, не учитывать. Ускорение свободного падения g.



8. В одно из колен U-образной трубки, частично заполненной водой, опускают плавать кусочек дерева массой $m = 10$ г. На какую высоту Δh поднимется уровень воды в трубке, если площадь ее сечения $S = 10$ см^2? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

9. К коромыслу равноплечных весов подвешены два сплошных однородных шарика равной массой, сделанных из разных материалов. Если одновременно один из шариков поместить в жидкость с плотностью $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3, а другой – в жидкость с плотностью $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, то равновесие сохранится. Считая, что плотности шариков больше плотностей жидкостей, найти отношение плотностей шариков n.

10. Надводная часть айсберга имеет объем $V = 1000$ м^3. Найти массу айсберга M, если плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, а плотность льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

11. В двух сосудах налиты одинаковые объемы различных жидкостей. Если брусок из пластмассы поместить в первый сосуд, то он плавает в нем, причем сторона бруска, имеющая длину a, перпендикулярна поверхности жидкости и высота выступающей части равна h_1. Если этот брусок поместить во второй сосуд, то высота выступающей части станет h_2. Какой будет величина выступающей части h, если жидкости слить в один сосуд? Считать, что жидкости смешиваются без изменения суммарного объема.

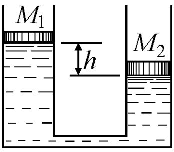
12. Цилиндрическая пробирка с грузиком, имеющая площадь поперечного сечения $S = 1$ см^2, плавает в воде вертикально, причем из воды высовывается часть пробирки высотой $h = 5$ см. Какова минимальная плотность жидкости ρ, в которой пробирка с грузиком не утонет, если суммарная масса пробирки и грузика $M = 20$ г? Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3.

13. Стеклянная бутылка вместимостью $V = 0{,}5$ л и массой $M = 200$ г плавает в воде. Какое количество воды m нужно налить в бутылку, чтобы она утонула? Плотность стекла $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3.

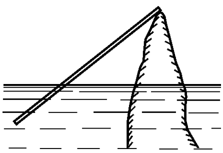
14. Запаянная с одного конца трубка длиной $L = 110$ см погружается в воду в вертикальном положении открытым концом вниз. Определить давление p воздуха внутри трубки, если ее верхний конец находится на уровне поверхности воды. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температуру воздуха в трубке считать постоянной, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

15. Тонкостенный стакан вместимостью $V_0 = 200$ см^3 и массой $m = 100$ г погружают в воду, держа его дном вверх. На какой глубине h предоставленный самому себе стакан перестанет всплывать? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, температура воды не меняется с глубиной. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. Размерами стакана по сравнению с глубиной его погружения, давлением паров воды, а также объемом стенок стакана пренебречь.

16. Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами $M_1 = 1$ кг и $M_2 = 2$ кг. В положении равновесия левый поршень расположен выше правого на величину $h = 10$ см. Когда на левый поршень поместили гирю массой $m = 2$ кг, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Какова будет разность высот поршней H, если гирю перенести на правый поршень?



17. Тонкая однородная палочка опирается одним концом о вершину острого камня, выступающего из воды. Другой конец палочки находится на плаву, причем погруженная в воду часть палочки в n раз меньше всей ее длины. Найти плотность ρ материала, из которого сделана палочка, если $n = 3$.



1.4. Законы сохранения в механике
Теоретический материал

Импульс материальной точки. *Импульсом материальной точки* называют векторную величину, равную произведению массы точки на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \qquad (1.4.1)$$

Импульс силы. *Импульсом постоянной силы* $\vec{F}$ за время Δt называют векторную величину $\vec{F}\Delta t$.

Связь между приращением импульса материальной точки и импульсом силы. Второй закон Ньютона точки может быть сформулирован в виде теоремы об изменении импульса материальной точки: в инерциальной системе отсчета изменение импульса точки за некоторое время Δt равно импульсу действующей на нее силы за это же время:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t. \qquad (1.4.2)$$

Импульс системы материальных точек. Центр масс системы материальных точек. *Импульсом системы материальных точек* называют векторную сумму импульсов всех N точек, входящих в систему, т.е.

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_N\vec{v}_N = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N. \qquad (1.4.3)$$

Важные закономерности движения системы материальных точек можно установить, используя понятие *центра масс системы*. Центром масс системы материальных точек называется воображаемая точка, положение которой в заданной системе отсчета определяется радиус-вектором $\vec{r}_{\text{цм}}$, вычисляемым по формуле

$$\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i, \tag{1.4.4}$$

где $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – масса системы, m_i – масса i-й точки, $\vec{r}_i$ – ее радиус-вектор. Скорость центра масс находится из выражения

$$\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i, \tag{1.4.5}$$

где $\vec{v}_i$ – скорость i-й точки. Сравнение формул (1.4.3) и (1.4.5) показывает, что

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{цм}}. \tag{1.4.6}$$

Следовательно, импульс системы материальных точек равен произведению суммарной массы системы на скорость ее центра масс.

Закон сохранения импульса. Закон изменения импульса может быть обобщен на систему материальных точек. Для этого необходимо ввести понятие о внутренних и внешних силах. Внутренними силами называются силы взаимодействия между точками, входящими в систему. Внешними силами называются силы взаимодействия точек системы с телами, не входящими в систему (рис. 1.4.1).

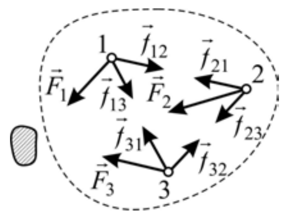


Рис. 1.4.1. Система материальных точек: $\vec{F}_i$ – внешние силы, $\vec{f}_{ij}$ – внутренние силы

Записывая для каждой точки системы закон изменения импульса под действием внутренних и внешних сил, получим:

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{p}_1 &= \left(\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1\right)\cdot \Delta t,\\
\Delta\vec{p}_2 &= \left(\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2\right)\cdot \Delta t,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta\vec{p}_N &= \left(\vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \ldots + \vec{f}_{NN-1} + \vec{F}_N\right)\cdot \Delta t.
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Складывая уравнения системы (1.4.7) почленно и учитывая, что, согласно третьему закону Ньютона, $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, получаем закон изменения импульса системы точек:

$$\Delta\vec{P} = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N\right)\cdot \Delta t = \vec{F}_{\text{внеш}} \cdot \Delta t, \tag{1.4.8}$$

где $\vec{F}_{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ – сумма внешних сил.

В инерциальной системе отсчета изменение импульса системы материальных точек равно импульсу внешних сил, приложенных к системе. Внутренние силы не изменяют импульса системы.

Сопоставление формул (1.4.6) и (1.4.8) позволяет получить закон движения центра масс системы:

$$M\vec{a}_{\text{цм}} = \vec{F}_{\text{внеш}}, \tag{1.4.9}$$

где $\vec{a}_{\text{цм}}$ – ускорение центра масс. Отсюда следует, что эта точка движется так, как будто в ней сосредоточена вся масса системы и к ней приложены все внешние силы, действующие на систему.

Закон сохранения импульса системы является следствием сформулированного выше закона изменения импульса и гласит: если импульс внешних сил, приложенных к системе материальных точек, равен нулю, то импульс системы сохраняется.

Важным частным случаем является равенство нулю суммы внешних сил, действующих на систему (такие системы называются замкнутыми): *импульс замкнутой системы сохраняется*. Скорость центра масс замкнутой системы во времени не изменяется.

Если внешние силы не равны нулю, но существует такое неизменное направление в пространстве, что проекция суммы внешних сил на это направление обращается в нуль, то проекция импульса системы на это направление сохраняется.

Реактивное движение. Большое значение имеет закон сохранения импульса для исследования *реактивного движения*. Под реактивным движением понимают движение тела, возникающее при отделении некоторой его части с определенной скоростью относительно тела, например при истечении продуктов сгорания из сопла реактивного летательного аппарата. При этом появляется так называемая *реактивная сила*, сообщающая телу ускорение. Главная особенность реактивной силы состоит в том, что она возникает без какого-либо взаимодействия с внешними телами. Происходит лишь взаимодействие между ракетой и вытекающей из нее струей вещества. Принцип реактивного движения основан на том, что истекающие из реактивного двигателя газы получают импульс. Такой же по модулю импульс приобретает ракета. Масса ракеты со временем убывает; ракета является телом переменной массы.

Из закона сохранения импульса для замкнутой системы «ракета + газ» можно получить уравнение Мещерского

$$M\vec{a} = -\mu\vec{u}, \tag{1.4.10}$$

где $M = M(t)$ – масса ракеты в момент времени t, $\vec{a}$ – ее ускорение, μ – расход топлива (масса сгоревшего топлива в единицу времени), $\vec{u}$ – скорость истечения газов относительно ракеты. Векторная величина $\vec{F}_{\text{р}} = -\mu\vec{u}$ носит название реактивной силы. Она появляется вследствие истечения газов из ракеты, приложена к ракете и направлена противоположно скорости газов относительно ракеты. Если на ракету действуют внешние силы, то ее движение определяется реактивной силой $\vec{F}_{\text{р}}$ и суммой внешних сил $\vec{F}$:

$$M\vec{a} = \vec{F}_{\text{р}} + \vec{F}. \tag{1.4.11}$$

Механическая работа. Мощность. *Работой силы* $\vec{F}$ на перемещении $\Delta\vec{r}$ материальной точки называется скалярная величина

$$A = F\Delta r\cos\alpha, \qquad (1.4.12)$$

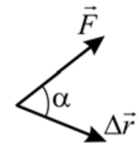


Рис. 1.4.2. Определение работы

где α – угол между направлениями силы и перемещения (рис. 1.4.2). В зависимости от взаимной ориентации векторов $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$ работа может быть величиной положительной, отрицательной или равной нулю. Если на материальную точку действует система сил, то работа всех этих сил на перемещении точки $\Delta\vec{r}$ равна

$$A = \sum_{i=1}^{N} F_i \Delta r\cos\alpha_i = F_\Sigma \Delta r\cos\alpha, \qquad (1.4.13)$$

где α_i – угол между силой $\vec{F}_i$ и перемещением $\Delta\vec{r}$ точки; F_Σ – модуль равнодействующей всех сил, действующих на материальную точку; α – угол между векторами $\vec{F}_\Sigma$ и $\Delta\vec{r}$. При поступательном движении твердого тела работа силы (или равнодействующей нескольких сил) вычисляется по формуле (1.4.12), где под $\Delta\vec{r}$ понимается перемещение любой точки тела, например центра масс.

Мощностью называется отношение работы ΔA к величине интервала времени Δt, за который эта работа совершена:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \qquad (1.4.14)$$

Если сила $\vec{F}$ действует на точку, движущуюся со скоростью $\vec{v}$, то мощность этой силы равна

$$N = Fv\cos\alpha, \qquad (1.4.15)$$

где α – угол между направлениями силы и скорости.

Единицы измерения работы и мощности. Единица работы в СИ называется джоулем (Дж). Джоуль равен работе, совершаемой силой 1 Н при перемещении точки ее приложения на 1 м в направлении действия силы: 1 Дж = 1 Н·м. Единица мощности в СИ называется ваттом (Вт). Ватт равен мощности, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж: 1 Вт = 1 Дж/с.

Энергия. Энергией называется скалярная физическая величина, являющаяся общей количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи. Энергия не возникает из ничего и не исчезает, она может только переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления природы.

Для характеристики различных форм движения материи вводятся соответствующие виды энергии, например механическая энергия, внутренняя энергия, энергия электромагнитных взаимодействий и др.

Механическая энергия E характеризует движение и взаимодействие тел и является функцией их скоростей и взаимного расположения. Она равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

Кинетическая энергия материальной точки является мерой ее механического движения, зависящей от скорости ее движения в данной инерциальной системе отсчета. *Кинетической энергией* материальной точки называется скалярная величина

$$E_{\text{К}} = \frac{mv^2}{2}. \tag{1.4.16}$$

При поступательном движении твердого тела его кинетическая энергия также определяется по формуле (1.4.16), где под m понимается масса тела, а под v – скорость любой из его точек (например, центра масс).

Для *системы материальных точек*

$$E_{\text{К}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_N v_N^2}{2}. \tag{1.4.17}$$

Отметим, что кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета. При переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой, кинетическая энергия тела изменяется.

Связь между приращением кинетической энергии тела и работой приложенных к телу сил. Из второго закона Ньютона следует закон изменения кинетической энергии материальной точки

$$\Delta E_{\text{К}} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12}, \tag{1.4.18}$$

согласно которому изменение кинетической энергии точки на каком-либо отрезке траектории равно работе приложенных к точке сил на этом же отрезке. Это утверждение справедливо также для твердого тела, совершающего поступательное движение. Движущееся тело обладает кинетической энергией, которая равна работе, которую нужно совершить, чтобы увеличить скорость тела от нуля до текущего значения.

Кинетическая энергия тела увеличивается, если работа приложенных к нему сил положительна, и уменьшается, если эта работа отрицательна.

Потенциальная энергия – это энергия взаимодействия тел, определяемая их взаимным расположением. Потенциальная энергия может быть введена для таких сил взаимодействия, которые зависят только от расстояний между телами системы (но не от их скоростей). Эти силы в механике выделяют в особый класс и называют *потенциальными* или *консервативными*. Потенциальными являются силы тяготения, силы упругости, кулоновские и архимедовы силы. Работа потенциальной силы не зависит от формы траектории тела и определяется только его начальным и конечным положением. Это эквивалентно утверждению, что работа потенциальной силы по любому замкнутому пути равна нулю.

Хотя потенциальная энергия – это энергия взаимодействия по крайней мере двух тел, часто бывает удобно при ее вычислении принять одно из взаимодействующих тел за неподвижное. В этом случае можно говорить о потенциальной энергии второго тела, находящегося под действием силы со стороны первого, и рассматривать эту силу как внешнюю. Так поступают, например, определяя потенциальную энергию тела в поле притяжения Земли (см. ниже).

Таким образом, *потенциальной энергией* E_Π тела в некоторой точке M называют работу, которую совершает потенциальная сила при перемещении тела из точки M в точку, где потенциальная энергия равна нулю. Отметим, что потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной величины, значение которой зависит от выбора точки отсчета потенциальной энергии, в которой ее полагают равной нулю.

Зная потенциальную энергию, можно найти работу силы по перемещению тела из точки *1* в точку *2*:

$$A_{12} = -\Delta E_\Pi = E_{\Pi 1} - E_{\Pi 2}. \qquad (1.4.19)$$

Поскольку работа определяется лишь изменением потенциальной энергии, выбор нулевого уровня потенциальной энергии не играет никакой особой роли и диктуется исключительно соображениями удобства при решении конкретной задачи. Ни одно явление природы не зависит от самой потенциальной энергии. Важна лишь разность значений потенциальной энергии в конечном и начальном состояниях системы. Изменение потенциальной энергии не зависит также от выбора системы отсчета.

Потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли вычисляется по формуле

$$E_\Pi = mgy, \qquad (1.4.20)$$

где y – высота центра тяжести тела над поверхностью Земли.

Потенциальная энергия упруго деформированного тела. Простейшей моделью упругих деформаций является растяжение или сжатие пружины. Потенциальная энергия тел, взаимодействующих посредством пружины, равна

$$E_\Pi = \frac{kx^2}{2}, \qquad (1.4.21)$$

где k – жесткость пружины, x – удлинение пружины, т.е. разность ее длин в деформированном и недеформированном состояниях. Потенциальная энергия, определяемая выражением (1.4.21), не зависит от свойств тел, которые связывает пружина. Эта энергия сконцентрирована в пружине.

Закон сохранения механической энергии. Полной механической энергией E материальной точки называется сумма ее кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_К + E_\Pi. \qquad (1.4.22)$$

Аналогично вводится полная механическая энергия системы точек, причем полная кинетическая энергия рассчитывается по формуле (1.4.17), а полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех пар взаимодействующих точек, а также потенциальных энергий этих точек в поле внешних сил.

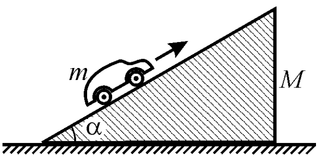
Кроме потенциальных сил в системе и на систему могут действовать также непотенциальные силы, которые зависят от скоростей тел. Работа непотенциальной силы при перемещении точки или тела по замкнутой траектории отлична от нуля. Непотенциальными являются силы трения скольжения и силы вязкого трения.

Изменение полной механической энергии подчиняется следующему закону: в инерциальной системе отсчета изменение полной механической энергии материальной точки или системы точек равно работе непотенциальных сил (как внешних, так и внутренних).

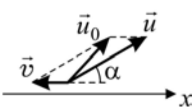
Следствием этого закона является *закон сохранения полной механической энергии*: если непотенциальные силы, действующие в системе и на систему, не совершают работу, полная механическая энергия системы сохраняется.

Примеры решения задач

Пример 1. Клин массой $M = 0{,}5$ кг с углом при основании $\alpha = 30°$ покоится на гладкой горизонтальной плоскости. На наклонную поверхность клина ставят заводной автомобиль массой $m = 0{,}1$ кг и отпускают без начальной скорости, после чего автомобиль начинает движение вверх по клину в плоскости рисунка. Найти скорость u автомобиля относительно клина в момент, когда клин приобретает относительно плоскости скорость $v = 2$ см/с.



Решение. В системе двух тел «автомобиль + клин» сохраняется горизонтальная проекция суммарного импульса. Следовательно, в неподвижной системе отсчета выполняется соотношение $Mv - mu_{0x} = 0$, где v – модуль скорости клина, u_{0x} – горизонтальная проекция абсолютной скорости автомобиля $\vec{u}_0$. По закону сложения скоростей (см. рисунок) $\vec{u}_0 = \vec{v} + \vec{u}$, где $\vec{u}$ – скорость автомобиля относительно клина. В проекции на горизонтальную ось это равенство имеет вид: $u_{0x} = u_x - v = u\cos\alpha - v$. Объединяя записанные соотношения, получаем $u = \dfrac{M+m}{m\cos\alpha}v \approx 14$ см/с.



Ответ. $u = \dfrac{M+m}{m\cos\alpha}v \approx 14$ см/с.

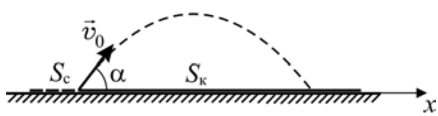
Пример 2. Граната разрывается в наивысшей точке траектории на два одинаковых осколка. Один из осколков летит в обратном направлении с той же по модулю скоростью, которую имела граната до разрыва. На каком расстоянии l от места бросания гранаты упадет на землю второй осколок, если расстояние по горизонтали от места бросания до точки, над которой произошел разрыв гранаты, составляет $a = 15$ м? Граната брошена от поверхности Земли. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. По условию при разрыве гранаты скорость гранаты и скорости образовавшихся осколков направлены горизонтально. В проекции на это направление закон сохранения импульса, записанный в момент разрыва гранаты, имеет вид $mv_x = -\frac{m}{2}v_x + \frac{m}{2}u_x$, где v_x – горизонтальная проекция скорости гранаты, u_x – горизонтальная проекция скорости осколка, полетевшего после разрыва вперед. Отсюда $u_x = 3v_x$. Имея такую скорость, этот осколок за время падения на землю переместится по горизонтали на расстояние $3a$. Отсюда $l = 4a = 60$ м.

Ответ. $l = 4a = 60$ м.

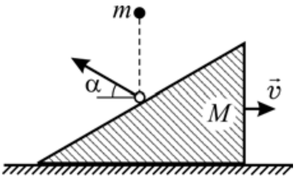
Пример 3. Кузнечик сидит на одном из концов соломинки длины $l = 50$ см, покоящейся на гладком полу. С какой минимальной относительно пола скоростью v_0 он должен прыгнуть, чтобы при приземлении попасть точно на второй конец соломинки? Масса кузнечика в $\beta = 3$ раза больше массы соломинки. Размерами кузнечика и трением между полом и соломинкой пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Решение. В системе двух тел «кузнечик + соломинка» сохраняется горизонтальная проекция суммарного импульса, откуда следует, что в неподвижной системе отсчета справедливо равенство $mv_0\cos\alpha = Mu$, где m и M – массы кузнечика и соломинки соответственно, u – скорость соломинки. Отсюда $u = mv_0\cos\alpha / M$. Время t_0, которое кузнечик проводит в полете, $t_0 = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$. За это время перемещение соломинки влево и горизонтальное перемещение кузнечика вправо равны соответственно $S_с = ut_0 = \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{m}{M}\sin\alpha\cos\alpha$, $S_к = v_0 t_0\cos\alpha = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$. По условию эти величины связаны соотношением $S_с + S_к = l$. Учитывая, что $m/M = \beta$, находим величину начальной скорости кузнечика: $v_0 = \sqrt{\frac{gl}{\sin 2\alpha\cdot(1+\beta)}}$. Эта величина минимальна при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 45°$. Отсюда находим $v_0 = \sqrt{\frac{gl}{1+\beta}} \approx 1{,}1$ м/с.

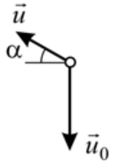


Ответ. $v_0 = \sqrt{\frac{gl}{1+\beta}} \approx 1{,}1$ м/с.

Пример 4. На покоящийся на гладком горизонтальном столе клин массой $M = 1$ кг с высоты $h = 50$ см падает резиновый шарик массой $m = 10$ г и отскакивает под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти скорость клина v после удара. Соударение между шариком и клином считать абсолютно упругим, трение между клином и столом не учитывать. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

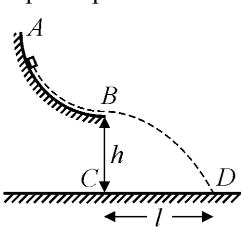


Решение. Пусть u_0 и u – модули скоростей шарика до и после соударения с клином соответственно. Для тела, падающего без начальной скорости с высоты h, имеем $u_0 = \sqrt{2gh}$. Из закона сохранения проекции импульса системы «шарик + клин» на горизонтальную ось, следует, что $mu\cos\alpha = Mv$. При упругом соударении шарика и клина сохраняется суммарная кинетическая энергия этих тел: $\dfrac{mu_0^2}{2} = \dfrac{mu^2}{2} + \dfrac{Mv^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $v = m\cos\alpha\sqrt{\dfrac{2gh}{M(M + m\cos^2\alpha)}} \approx 2{,}7$ см/с.



Ответ. $v = m\cos\alpha\sqrt{\dfrac{2gh}{M(M + m\cos^2\alpha)}} \approx 2{,}7$ см/с.

Пример 5. Маленький брусок массой $m = 100$ г соскальзывает по шероховатому желобу AB, составляющему четверть окружности радиусом $R = 1$ м, и падает на горизонтальную поверхность в точку D. Точка B желоба находится на высоте $h = 2$ м от горизонтальной поверхности. Расстояние между точками C и D равно $l = 2$ м. Найти модуль A работы силы трения бруска о желоб. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



Решение. Согласно закону изменения механической энергии, модуль работы силы трения при движении бруска по желобу равен $A = E_н - E_к$, где $E_н = mgR$ – энергия бруска в начале движения по желобу, $E_к = \dfrac{mv^2}{2}$ – энергия бруска в конце движения по желобу, v – скорость бруска в точке B. Из кинематических уравнений, описывающих свободное падение бруска в течение времени τ, следует? что $l = v\tau$, $h = \dfrac{g\tau^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $A = mg\left(R - \dfrac{l^2}{4h}\right) = 0{,}5$ Дж.

Ответ. $A = mg\left(R - \frac{l^2}{4h}\right) = 0{,}5$ Дж.

Пример 6. Граната брошена от поверхности Земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. В верхней точке траектории граната разрывается на два одинаковых осколка, скорости которых сразу после взрыва направлены горизонтально. На каком расстоянии l друг от друга упадут осколки, если кинетическая энергия, сообщенная им при взрыве, $E = 18$ Дж, а масса гранаты $m = 1$ кг? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

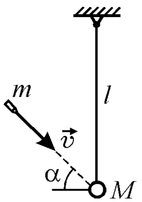
Решение. Перейдем в систему отсчета, равномерно движущуюся со скоростью, которую имела граната непосредственно перед разрывом. В этой системе суммарный импульс осколков равен нулю, поэтому их скорости после разрыва противоположны по направлению и в силу равенства их масс равны по величине. В результате взрыва осколки приобретают кинетическую энергию E, которая поровну делится между ними. Обозначив через v модуль скорости каждого из осколков, имеем $E = \frac{m}{2}\cdot\frac{v^2}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{v^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. Время падения осколков $t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. За это время каждый из осколков смещается по горизонтали на расстояние vt_0. Расстояние между точками падения равно $l = 2vt_0$. Объединяя записанные выражения, получаем $l = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\sqrt{\frac{2E}{m}} = 6$ м.

Ответ. $l = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\sqrt{\frac{2E}{m}} = 6$ м.

Задачи

1. На прямолинейном горизонтальном участке пути стоят $N = 5$ одинаковых вагонов. Промежутки между соседними вагонами одинаковы и равны $L = 30$ м. К крайнему вагону подкатывается еще один такой же вагон, имеющий скорость $v_0 = 2$ м/с. В результате N последовательных столкновений, в каждом из которых сталкивающиеся вагоны сцепляются вместе, все $N + 1$ вагонов соединяются в один состав. Найти время τ между первым и последним столкновениями. Силами сопротивления движению вагонов пренебречь.

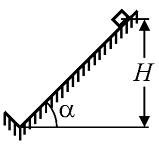
2. Граната массой $m = 1$ кг разорвалась на высоте $h = 6$ м над землей на два осколка. Непосредственно перед разрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и по модулю равна $v = 10$ м/с. Один из осколков массой $m_1 = 0{,}4$ кг полетел вертикально вниз и упал на Землю под местом разрыва со скоростью $v_1 = 40$ м/с. Чему равен модуль скорости v_2 второго осколка сразу после разрыва? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



3. Шар массой $M = 1$ кг подвешен на невесомом жестком стержне длиной $l = 1{,}25$ м, шарнирно закрепленном за верхний конец. В шар попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 500$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту и застревает в нем. Определить максимальный угол β отклонения стержня от вертикали. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

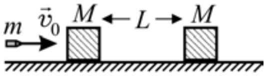
4. С горки высотой $h = 2$ м с углом наклона $\alpha = 45°$ начинают скатываться санки с нулевой начальной скоростью. Найти скорость v санок у основания горки, если на верхней половине горки коэффициент трения пренебрежимо мал, а на нижней половине коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

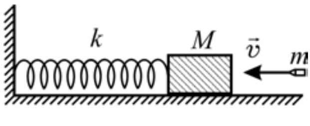
5. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, соскальзывает без начальной скорости небольшое тело и ударяется о выступ, перпендикулярный наклонной плоскости. Считая удар о выступ абсолютно упругим, найти, на какую высоту h поднимется тело после удара. Начальная высота тела $H = 1$ м, коэффициент трения $\mu = 0{,}5$.



6. На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M = 100$ г. В брусок попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v_1 = 800$ м/с, и пробивает его насквозь. Скорость пули после вылета из бруска $v_2 = 200$ м/с. Какое количество энергии Q перешло во внутреннюю энергию тел в процессе удара? Трением бруска о плоскость пренебречь.

7. На гладком горизонтальном столе покоятся два одинаковых кубика массой M каждый. В центр левого кубика попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v_0, направленной вдоль линии, соединяющей центры кубиков. Пробив насквозь левый кубик, пуля летит дальше со скоростью $v_0/2$, попадает в правый кубик и застревает в нем. Через какое время τ после попадания пули в левый кубик кубики столкнутся, если начальное расстояние между ними равно L? Размерами кубиков пренебречь.

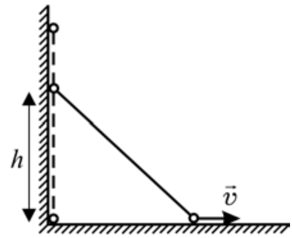




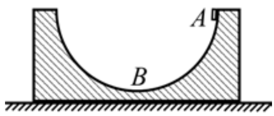
8. На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M = 4$ кг, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. В центр бруска

попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально и параллельно пружине, и застревает в нем. Определить скорость пули v, если максимальное сжатие пружины после удара составило $\Delta l = 30$ см. Трением бруска о плоскость пренебречь.

9. Два одинаковых маленьких шарика соединены невесомым жестким стержнем длиной $l = 60$ см. Стержень стоит вертикально вплотную к вертикальной плоскости. При смещении нижнего шарика вправо на малое расстояние система из шариков приходит в движение в плоскости рисунка. Найти модуль скорости нижнего шарика v в момент времени, когда верхний шарик находится на высоте $h = 40$ см над горизонтальной плоскостью. Считать, что при движении шарики не отрываются от плоскостей, трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



10. Сферическая чашка массой $M = 200$ г покоится на гладкой горизонтальной поверхности. По внутренней поверхности чашки из положения A начинает скользить без начальной скорости маленький брусок массой $m = 20$ г. Какую скорость v будет иметь чашка в тот момент, когда брусок достигнет наинизшей точки (положение B), если радиус чашки $R = 8$ см. Трением между всеми поверхностями пренебречь.



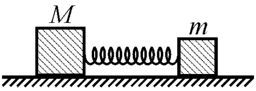
11. Человек массой $M = 70$ кг, неподвижно стоявший на коньках, бросил вперед в горизонтальном направлении снежный ком массой $m = 3{,}5$ кг. Какую работу A совершил человек при броске, если после броска он откатился назад на расстояние $S = 0{,}2$ м? Коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0{,}01$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

12. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Его приводят в движение так, что он обращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, которая находится на расстоянии $l/2$ от точки подвеса. Какую работу A нужно совершить для сообщения шарику такого движения?

13. При броске тела от поверхности Земли под некоторым углом к горизонту была совершена работа $A = 58{,}8$ Дж. На каком расстоянии S от места бросания тело упало на Землю, если его масса $m = 1$ кг, а максимальная высота подъема в полете $H = 3$ м? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

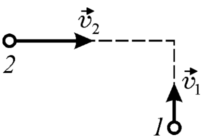
14. Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 350$ км над поверхностью Земли. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, радиус которой меньше на $\Delta h = 25$ км. На какую величину η изменилась при этом кинетическая энергия спутника по отношению к ее первоначальному значению? Радиус Земли $R = 6400$ км.

15. Между двумя кубиками массами m и M находится сжатая пружина. Если кубик



массой M удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью v. С какой скоростью v_1 будет двигаться кубик массой m, если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях. Трением и массой пружины пренебречь.

16. Пластилиновые шарики имеют одинаковые массы m и взаимно перпендикулярные скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, лежащие в одной плоскости. В результате столкновения шарики слипаются и движутся как одно целое. Какое количество теплоты Q выделилось при столкновении, если $m = 1$ г, $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 4$ м/с.



17. Два тела массами $m_1 = 3{,}8$ г и $m_2 = 6$ г прикреплены к невесомой нити, перекинутой через блок с неподвижной осью. В начальный момент времени груз массой m_2 находится на высоте $h = 1$ м над горизонтальной поверхностью и оба груза неподвижны. Затем грузы отпускают. Определить количество теплоты Q, выделившейся при неупругом ударе тела массой m_2 о горизонтальную поверхность, если это тело сразу после удара останавливается. Силами трения пренебречь. Блок считать невесомым.

18. Шарик *1* массой $m = 200$ г движется равномерно со скоростью $v_1 = 10$ м/с. Навстречу ему движется шарик *2* такой же массой со скоростью $v_2 = 8$ м/с. После соударения шарик *1* стал двигаться перпендикулярно направлению его движения до соударения со скоростью $u_1 = 5$ м/с. Какое количество теплоты Q выделилось при соударении шариков?

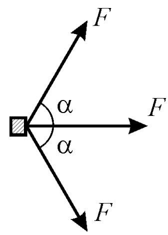
19. На гладком столе покоится брусок массой $M = 20$ г, прикрепленный пружиной жесткостью $k = 50$ Н/м к стене. В брусок ударяется шарик массой $m = 10$ г, движущийся по столу со скоростью $v_0 = 30$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Считая соударение шарика и бруска упругим, найти амплитуду A колебаний бруска после удара.

20. На горизонтальном участке пути длиной $L = 3$ км скорость поезда увеличилась от $v_1 = 36$ км/ч до $v_2 = 72$ км/ч. Какую массу топлива m израсходовал двигатель локомотива на этом участке? Суммарная масса поезда и локомотива $M = 1000$ т, сила сопротивления движению поезда пропорциональна его весу с коэффициентом пропорциональности $\mu = 0{,}005$, удельная теплота сгорания топлива $h = 42$ МДж/кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

21. Система из двух шаров массами $m_1 = 0{,}6$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг, соединенных невесомой спицей длиной $l = 0{,}5$ м, вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через

центр тяжести и перпендикулярной спице, с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Найти энергию системы E. Размерами шаров по сравнению с длиной спицы пренебречь.

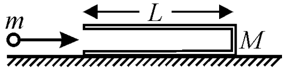
22. На горизонтальной шероховатой поверхности находится маленький брусок. Если на брусок подействовать в течение очень короткого промежутка времени горизонтальной силой F, значительно превышающей силу трения скольжения, то после этого брусок пройдет до остановки путь S_0. Какой путь S пройдет до остановки этот брусок, если в течение того же промежутка времени на него одновременно подействовать тремя горизонтальными силами F, две из которых направлены под углами $\alpha = 60°$ к третьей?



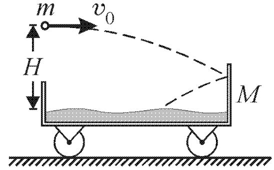
23. Молекулярный пучок составляют одинаковые молекулы, движущиеся с одинаковыми скоростями $v = 500$ м/с. Масса молекулы $m = 4{,}8 \cdot 10^{-26}$ кг. На пути пучка установлен экран, плоскость которого перпендикулярна вектору $\vec{v}$. Найти давление p, оказываемое пучком на экран. Число молекул в единице объема пучка $n = 3 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Удар молекулы об экран считать абсолютно упругим.

24. Правая чаша рычажных весов находится под мелким моросящим дождем, а левая укрыта от дождя навесом. Каждая чаша представляет собой тонкостенную цилиндрическую емкость с площадью дна $S = 0{,}05$ м^2 и высотой бортика $h = 1$ мм. Интенсивность равномерно падающего дождя такова, что дождевая вода целиком заполняет предварительно опорожненную чашу весов за время $\tau = 30$ с. Какой массы m гирю нужно положить на левую чашу весов, чтобы уравновесить весы в случае, когда правая чаша заполнена дождевой водой до краев? Капли дождя падают вертикально со скоростью $v = 3$ м/с. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Соударение капель с водой в чаше считать неупругим.

25. На гладком горизонтальном столе покоится трубка массой M и длиной L, закрытая с одного торца. В открытый конец трубки влетает маленький шарик массой m со скоростью, направленной вдоль оси трубки. После упругого удара о закрытый торец трубки шарик вылетает наружу. Какой путь S относительно стола пройдет шарик за время, которое он будет находиться внутри трубки? Размером шарика и трением между всеми поверхностями пренебречь.

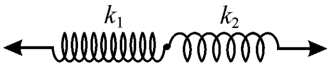


26. На горизонтальных рельсах стоит тележка массой M. В нее бросают шар массой m, который ударяется о правую стенку тележки и падает на ее дно, застревая в насыпанном на дно песке. В момент, когда шар пролетал над левой стенкой тележки, его скорость была равна $v_0 = 4$ м/с и направлена горизонтально, а высота над поверхностью песка составляла $H = 1{,}8$ м. Какой путь S пройдет тележка к моменту падения шара на песок, если длина тележки $L = 2$ м? Удар

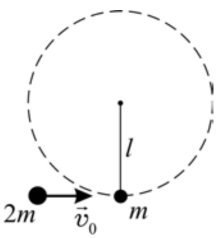


шара о стенку считать абсолютно упругим, стенку и шар – гладкими, трением при движении тележки и размером шара пренебречь. При расчете положить $m = M/9$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

27. Две пружины, соединенные как показано на рисунке, имеют жесткости $k_1 = 15$ Н/м и $k_2 = 10$ Н/м. Пружины растянули за свободные концы в разные стороны, совершив работу $A = 1$ Дж. Каковы потенциальные энергии E_1 и E_2 деформации каждой из пружин по отдельности?



28. Шарик массой m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м. В него ударяется шарик массой $2m$, летящий в плоскости рисунка со скоростью $\mathbf{v}_0$ так, что вектор скорости направлен горизонтально вдоль линии, соединяющей центры шаров. Каким должен быть модуль скорости v_0, чтобы после удара шарик массой m совершил полный оборот по окружности в вертикальной плоскости? Удар считать абсолютно упругим, силы трения не учитывать. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



1.5. Механические колебания и волны

Теоретический материал

Понятие о колебательном движении. Колебаниями называются движения или изменения состояния системы, обладающие повторяемостью во времени. Колебания весьма разнообразны по своей природе. Модели колебательных процессов широко используются в физике, химии, биологии, науках о Земле. Колебания самой разной природы могут иметь общие количественные закономерности и описываться одинаковыми математическими методами.

Колебания механических систем представляют собой повторяющиеся движения в окрестности устойчивого положения равновесия. Примерами механических колебаний являются движения груза, подвешенного на пружине, качания маятника, колебания натянутой струны, колебания ветвей и ствола дерева на ветру и т.п.

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через *равные* промежутки времени.

Период и частота колебаний. *Периодом* колебаний T называется наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение (например, смещения, скорости и ускорения колеблющейся точки). За это время совершается одно *полное колебание*. Период колебаний измеряется в секундах. Величина, обратная периоду, $\nu = 1/T$, называется частотой колебаний. Частота колебаний измеряется в герцах. Один герц – это частота колебаний, период которых равен одной секунде. Круговой или циклической частотой колебаний называют величину $\omega = 2\pi\nu$. Круговая частота измеряется в радианах в секунду. Она связана с периодом колебаний формулой $\omega = 2\pi / T$.

Гармонические колебания. Смещение, амплитуда и фаза при гармонических колебаниях. Частным, но весьма широко распространенным случаем периодических колебаний являются *гармонические* колебания, происходящие во времени по закону синуса или косинуса. Гармонические колебания в общем случае описываются формулой:

$$x = a\sin\omega t + b\cos\omega t, \qquad (1.5.1)$$

где x – *смещение* колеблющегося тела относительно положения равновесия в данный момент времени t, a и b – константы, определяемые начальным состоянием тела, т.е. его начальным смещением x_0 и начальной скоростью v_0: $a = v_0 / \omega$, $b = x_0$. Во многих случаях удобно вместо (1.5.1) использовать для описания колебаний эквивалентную формулу

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (1.5.2)$$

где A – максимальное смещение тела относительно положения равновесия, называемое *амплитудой* колебаний; $\omega t + \varphi_0$ – аргумент гармонической функции, называемый *фазой* колебаний. Амплитуда и фаза колебаний однозначно определяют механическое состояние (т.е. координату и скорость) колеблющегося тела в любой момент времени. Амплитуда A и начальная фаза колебаний φ_0 выражаются через константы a и b следующим образом: $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{v_0^2 / \omega^2 + x_0^2}$, $\varphi_0 = \mathrm{arctg}(-a/b) = \mathrm{arctg}(-v_0/(\omega x_0))$. График зависимости смещения колеблющегося тела от времени изображен на рис. 1.5.1.

Скорость колеблющегося тела равна производной от координаты тела по времени:

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (1.5.3)$$

Скорость изменяется по синусоидальному закону с такой же частотой, что и смещение (рис 1.5.2). Амплитуда скорости $A\omega$ пропорциональна циклической частоте и амплитуде смещения. Фаза скорости опережает фазу смещения на $\pi/2$. В частности, скорость колеблющегося тела максимальна по абсолютной величине в момент прохождения телом положения равновесия. При максимальных смещениях тела от положения равновесия его скорость равна нулю.

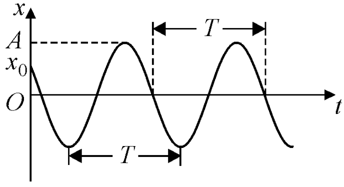


Рис. 1.5.1. График гармонических колебаний

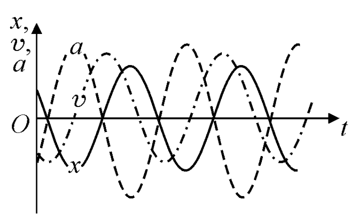


Рис. 1.5.2. Смещение, скорость и ускорение при колебаниях

Ускорение колеблющегося тела равно второй производной смещения по времени:

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{1.5.4}$$

Ускорение изменяется по косинусоидальному закону с той же частотой, что и смещение (рис. 1.5.2). Амплитуда ускорения $A\omega^2$ пропорциональна квадрату циклической частоты и амплитуде смещения. Фаза ускорения отличается от фазы смещения на π. Это означает, что ускорение колеблющегося тела всегда направлено к положению его равновесия. Величина ускорения максимальна при наибольших смещениях тела от положения равновесия.

Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Периоды их колебаний. Особое место в физике занимает определенный тип колебательных движений – *свободные колебания*. Они возможны в случае, когда в колебательной системе не действуют переменные во времени внешние силы или когда работа переменных внешних сил равна нулю. Свободные колебания возникают в системе, предоставленной самой себе после какого-либо однократного начального воздействия на нее, приводящего к отклонению от положения равновесия. При свободных колебаниях в системе всегда действуют силы, стремящиеся вернуть ее в положение равновесия. Если внешние и внутренние силы потенциальны, то при колебаниях сохраняется механическая энергия. В этом случае свободные колебания называются *незатухающими*. Незатухающие свободные колебания в системе возможны лишь при отсутствии трения и любых других сил сопротивления. Амплитуда незатухающих колебаний постоянна (не зависит от времени).

Уравнение движения системы, совершающей свободные гармонические колебания, всегда может быть приведено к виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1.5.5}$$

Множитель, стоящий перед координатой в уравнении вида (1.5.5), представляет собой квадрат циклической частоты свободных колебаний.

Важным примером колебательной системы является груз, подвешенный на пружине. Такая система способна совершать гармонические колебания, если сила упругости пружины пропорциональна величине смещения груза относительно положения равновесия, т.е. если сила упругости подчиняется закону Гука. Циклическая частота и период свободных колебаний груза, подвешенного на пружине, определяются формулами

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{1.5.6}$$

Здесь m – масса груза, k – коэффициент упругости пружины.

Математический маятник представляет собой идеализированную модель колебательной системы – материальную точку, подвешенную на невесомой нерастяжимой нити и находящуюся в поле силы тяжести. Движения маятника происходят под действием силы тяжести и силы натяжения нити. Циклическая частота и период колебаний при малых углах отклонения маятника от вертикали даются выражениями

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1.5.7}$$

где l – длина нити, g – ускорение свободного падения.

Превращения энергии при гармонических колебаниях. При свободных гармонических колебаниях полная механическая энергия колебательной системы остается постоянной. Однако она периодически меняет свою форму, превращаясь из кинетической энергии в потенциальную и наоборот. Этот процесс повторяется дважды на каждом периоде колебания. Кинетическая энергия достигает максимума в моменты прохождения системой положения равновесия. Потенциальная энергия, напротив, максимальна в моменты наибольших отклонений колеблющегося тела от положения равновесия, т.е. в моменты времени, когда скорость движения обращается в нуль.

Полная энергия гармонических колебаний пружинного маятника пропорциональна квадрату амплитуды колебаний A:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \tag{1.5.8}$$

Для математического маятника, колеблющегося с угловой амплитудой α_0, полная энергия

$$E = mgl(1 - \cos\alpha_0) \approx \frac{mgl\alpha_0^2}{2} = \frac{m\omega^2 l^2 \alpha_0^2}{2}. \tag{1.5.9}$$

Затухающие колебания. В реальных колебательных системах свободные колебания постепенно затухают под действием сил сопротивления, например силы трения колеблющегося тела о воздух. Зависимость координаты тела от времени при затухающих колебаниях изображена на рис. 1.5.3. Затухающие колебания представляют собой непериодические движения. Поэтому к ним неприменимы непосредственно понятия периода и частоты, введенные для периодических колебаний. *Условным периодом* $T_{зат}$ затухающих колебаний называется промежуток времени между двумя последовательными прохождениями колеблющейся системой положения равновесия при движении в одну и ту же сторону. Величина $\omega_{зат} = 2\pi / T_{зат}$ называется *циклической частотой* затухающих колебаний. Она всегда меньше циклической частоты ω незатухающих колебаний в идеализированной системе без трения. Разность между ω и $\omega_{зат}$ увеличивается с возрастанием коэффициента трения.

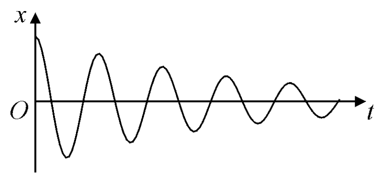


Рис. 1.5.3. Затухающие колебания

Количественной характеристикой затухания является *добротность* колебаний, определяемая как число свободных колебаний системы, которые произойдут до того, как полная механическая энергия колебательной системы уменьшится в два раза.

Вынужденные колебания. Резонанс. *Вынужденными колебаниями* называются движения системы, которые вызываются действием на нее внешних сил $F(t)$, периодически изменяющихся во времени. Сила $F(t)$ называется *вынуждающей силой*. Если вынуждающая сила $F(t)$ изменяется по гармоническому закону

$$F(t) = F_0 \cos\gamma t, \qquad (1.5.10)$$

где F_0 – амплитуда вынуждающей силы, а γ – ее циклическая частота, то в системе устанавливаются вынужденные колебания, которые также являются гармоническими, происходят с циклической частотой, равной частоте γ вынуждающей силы, и описываются уравнением

$$x = A_{\text{вын}} \cos(\gamma t + \varphi_1). \qquad (1.5.11)$$

Здесь $A_{\text{вын}}$ – амплитуда вынужденных колебаний, φ_1 – разность фаз между смещением $x(t)$ и силой $F(t)$. В процессе установления вынужденных колебаний движения в системе носят сложный характер: происходит наложение свободных затухающих колебаний и вынужденных колебаний. После того как свободные колебания прекратятся, в системе установятся гармонические вынужденные колебания.

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит от соотношения частот вынуждающей силы γ и свободных колебаний ω, а также от трения в системе. Изменение амплитуды колебаний в зависимости от частоты вынуждающей силы при различных коэффициентах трения изображено на рис. 1.5.4. Кривой *1* соответствует минимальное трение, а кривой *3* – максимальное.

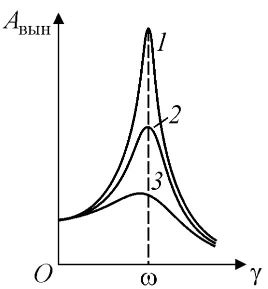


Рис. 1.5.4. Резонанс

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте свободных колебаний системы называется *резонансом*. Расчет показывает, что при наличии трения в системе резонансная циклическая частота $\gamma_{\text{рез}}$ несколько меньше собственной циклической частоты $\omega_{\text{зат}}$ свободных затухающих колебаний. Возрастание амплитуды вынужденных колебаний при резонансе выражено тем отчетливее, чем меньше трение в системе.

Понятие о волновых процессах. Поперечные и продольные волны. Волновым процессом (волной) называется процесс распространения колебаний в пространстве. Примеры волновых процессов – волна на поверхности воды, волна в упругой среде. Волны бывают продольные и поперечные. В продольной волне колебательное движение частиц среды происходит в направлении, параллельном направлению распространения волны. Такова, например, звуковая волна в воздухе. В поперечной волне колебательное движение частиц среды происходит в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны. Примером поперечных волн являются сдвиговые волны в среде.

Длина волны. Скорость распространения волны. Фронт волны. Уравнение бегущей волны. При волновом движении возникает периодичность двоякого рода. *Во-первых*, отдельные частицы среды совершают колебания около своих положений равновесия с периодом T. При этом фазы колебаний частиц, расположенных в разных точках пространства, различны. *Во-вторых*, в каждый фиксированный момент времени механическое состояние среды периодически повторяется в пространстве вдоль направления распространения волны.

В качестве иллюстрации на рис. 1.5.5 изображен профиль поперечной волны в определенный момент времени (сплошная линия). Через $s = s(x, t)$ там обозначено смещение от положения равновесия точки среды с координатой x в момент времени t. С течением времени вся картина перемещается со скоростью υ слева направо. Спустя промежуток времени $\Delta t = \Delta x / \upsilon$ волна будет иметь вид, изображенный на рис. 1.5.5 штриховой линией.

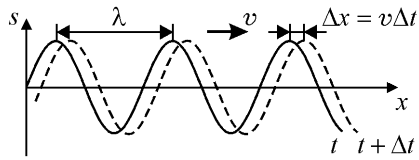


Рис. 1.5.5. Бегущая волна

Фаза колебаний частиц линейно связана с координатой, отсчитываемой в направлении распространения волны. Кратчайшее расстояние между двумя точками, в которых частицы среды колеблются в одной и той же фазе, называется длиной волны λ. Такое расстояние волна проходит за время, равное одному периоду колебаний.

Уравнение, описывающее колебательный процесс в любой точке пространства при распространении гармонической волны, называется *уравнением бегущей волны*. Для волны, бегущей вправо вдоль оси OX, оно имеет вид

$$s = A\cos(\omega t - \kappa x + \varphi_0). \tag{1.5.12}$$

Здесь A – амплитуда волны, $\omega = 2\pi / T$ – круговая частота, $\kappa = 2\pi / \lambda$ – волновое число, φ_0 – начальная фаза.

Геометрическое место точек, в которых частицы среды совершают колебания в одной и той же фазе, называется *фронтом волны* (волновым фронтом). Волновой фронт может быть, в частности, плоским или сферическим. Скоростью распространения волны называется скорость движения ее волнового фронта. Она вычисляется по формуле

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu, \tag{1.5.13}$$

где $\nu = 1/T$ – частота колебаний частиц в волне.

Стоячие волны. В простейшем случае *стоячая волна* образуется в результате наложения двух волн одинаковой частоты, распространяющихся навстречу друг другу. Например, стоячая волна возникает в натянутом резиновом шнуре, закрепленном в одном из концов, когда другому концу сообщаются в поперечном направлении гармонические колебания. Пусть волна, бегущая по направлению к закрепленному концу шнура (вправо), описывается уравнением

$$s_1 = A\cos(\omega t - \kappa x). \tag{1.5.14}$$

Поскольку смещения s_2 шнура в отраженной от закрепленного конца волне имеют противоположный знак по сравнению со смещениями s_1 в бегущей волне, а амплитуды бегущей и отраженной волн практически совпадают, уравнение отраженной волны имеет вид

$$s_2 = -A\cos(\omega t + \kappa(x - 2l)), \tag{1.5.15}$$

где l – длина шнура. Результирующее смещение произвольной точки шнура с координатой x равно

$$s = s_1 + s_2 = 2A\sin\left(\kappa(x-l)\right)\cdot\sin\left(\omega t - \kappa l\right). \qquad (1.5.16)$$

Видно, что каждая точка шнура совершает гармонические колебания на частоте ω, причем модуль максимального смещения колеблющихся точек (амплитуда их колебаний) не зависит от времени и является периодической функцией координаты x:

$$s_0 = 2A\left|\sin\left(\kappa(x-l)\right)\right|. \qquad (1.5.17)$$

На рис. 1.5.6 изображен профиль стоячей волны в близкие моменты времени t и $t+\Delta t$. Точки, в которых амплитуда стоячей волны обращается в нуль, называются узлами стоячей волны. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна и равна $2A$, называются пучностями стоячей волны. Фаза колебаний всех точек между двумя соседними узлами в стоячей волне одинакова, но при переходе через узел фаза колебаний меняется на π, т.е. смещения меняют знак.

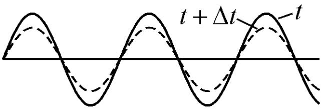


Рис. 1.5.6. Стоячая волна

Интерференция волн. Если в среде возбуждено одновременно несколько волн, то они распространяются, не влияя одна на другую. В каждой точке среды колебания, вызванные различными волнами, складываются. Результирующее перемещение любой частицы представляет собой сумму перемещений, которые происходили бы при распространении одной из волн в отсутствие остальных. В результате такого наложения волн амплитуды колебаний частиц среды, расположенных в разных точках пространства, будут, вообще говоря, различными. В частности, в некоторых точках пространства колебания частиц могут практически отсутствовать, в то время как в других точках амплитуда колебаний может быть велика. Если при наложении волн возникает такое неоднородное распределение амплитуд колебаний в пространстве и оно сохраняется во времени, то говорят, что имеет место *интерференция волн*. Для получения устойчивой интерференционной картины необходимо, чтобы источники волн имели одинаковую частоту и фазы их колебаний совпадали или отличались на некоторую постоянную, не зависящую от времени величину. Источники, удовлетворяющие этим условиям, называются *когерентными*.

Принцип Гюйгенса. Общий принцип, описывающий распространение волн, впервые был выдвинут голландским ученым Х. Гюйгенсом. Согласно этому принципу, каждая точка среды, до которой дошло волновое возмущение, становится источником элементарной вторичной волны. Положение волнового фронта распространяющейся волны в следующий момент времени определяется огибающей элементарных вторичных волн. Принцип Гюйгенса, по существу, определяет направление лучей, т.е. линий, перпендикулярных волновому фронту. С его помощью можно, в частности, вывести законы отражения и преломления волн на границе раздела двух сред.

Для механических волн принцип Гюйгенса имеет наглядное истолкование. Частицы среды, до которых доходят колебания, в свою очередь, колеблясь, приводят в движение соседние частицы среды, с которыми они взаимодействуют.

Дифракция волн. Дифракцией называют явление отгибания волной препятствия, встречающегося на ее пути. Это явление проявляется наиболее отчетливо, если размеры препятствия d имеют тот же порядок, что и длина волны λ. При $d >> \lambda$ явление дифракции обычно не играет существенной роли.

Звуковые волны представляют собой чередующиеся области сжатия и разрежения, распространяющиеся в упругой среде. Звуковые волны являются продольными. Они могут распространяться в воздухе, воде, почве, металлах и пр. В частности, сжатия и разрежения воздуха в звуковой волне вызывают колебания давления относительно среднего атмосферного давления. Частота слышимых человеческим ухом волн лежит в пределах *звукового диапазона*, образующего область частот колебаний от 16 Гц до 20 кГц. Звуковые волны с частотами менее 16 Гц называются *инфразвуками*, а с частотами более 20 кГц – *ультразвуками*.

Скорость звука в газе приблизительно равна средней скорости теплового движения молекул и, подобно ей, пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры. При температуре $0\,^\circ\mathrm{C}$ скорость звука в воздухе составляет 332 м/с.

Громкость звука зависит от *интенсивности* звуковой волны, т.е. от средней энергии, переносимой волной за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волны. Интенсивность звуковой волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний давления воздуха и измеряется в Вт/м^2. Наибольшей чувствительностью человеческое ухо обладает к звукам с частотами от 700 до 6000 Гц. В этом диапазоне ухо способно воспринимать звуки с интенсивностью около 10^{-12} Вт/м^2 (порог слышимости). Наибольшая интенсивность, при которой восприятие звука не вызывает болевых ощущений, называется болевым порогом. Болевой порог зависит от частоты звуковых колебаний и при $\nu = 1$ кГц составляет около 1 Вт/м^2.

Высота звука определяется частотой колебаний. При этом низкие звуки соответствуют колебаниям воздуха на низких частотах, а высокие – колебаниям на высоких частотах.

Примеры решения задач

Пример 1. Горизонтальная доска совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с периодом $T = 2$ с. При какой амплитуде колебаний A лежащее на ней тело начнет скользить? Коэффициент трения между доской и телом $\mu = 0{,}2$, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение. Направим ось OX горизонтально и совместим начало координат с некоторой фиксированной точкой доски в положении равновесия. Зависимость координаты этой точки от времени имеет вид $x = A\cos\dfrac{2\pi}{T}t$. Ускорение доски описывается гармонической функцией времени $a = \ddot{x} = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 A\cos\dfrac{2\pi}{T}t$, где $\ddot{x}$ – вторая производная от

x по времени. Амплитудное значение ускорения доски равно $a_0 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$. Лежащее на доске тело приводится в движение силой трения. Поскольку максимальное значение силы трения покоя равно μmg, максимальное ускорение, которое она может сообщить телу, $a_{\max} = \mu g$. Следовательно, тело начнет скользить по доске, когда амплитудное значение ускорения доски превысит максимально возможное значение ускорения тела, т.е. при $a_0 > a_{\max}$. Отсюда находим $A > \frac{\mu g T^2}{4\pi^2}$.

Ответ. $A > \frac{\mu g T^2}{4\pi^2}$.

Пример 2. Определить период T вертикальных колебаний груза массой m, подвешенного к двум последовательно соединенным пружинам, жесткости которых k_1 и k_2.

Решение. Жесткость пружин, соединенных последовательно, рассчитывается по формуле $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Период колебаний груза, подвешенного на пружине, равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Следовательно, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$.

Пример 3. Зная период колебаний маятника на уровне моря $T_0 = 1$ с, найти период колебаний этого маятника T_1 на высоте $h = 6{,}4$ км над уровнем моря. Радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. Зависимость ускорения свободного падения от высоты h над поверхностью Земли имеет вид $g(h) = \frac{g_0}{(1 + h/R)^2}$, где g_0 – ускорение свободного падения на уровне моря (см. теорию к разделу 1.2). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Следовательно, $T_1 = \left(1 + \frac{h}{R}\right)T_0 = 1{,}001$ с.

Ответ. $T_1 = \left(1 + \frac{h}{R}\right)T_0 = 1{,}001$ с.

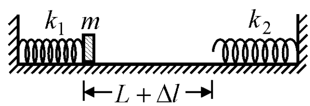
Пример 4. Тело массой $m = 0{,}1$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жесткостью $k = 10$ Н/м с неподвижной стенкой. Тело смещают от положения равновесия на расстояние $x_0 = 10$ см и отпускают без начальной скорости. Найти среднюю скорость тела $\upsilon_{ср}$ за время, в течение которого оно проходит из крайнего положения путь $x_0/2$.

Решение. Пусть в момент, когда тело, смещенное от положения равновесия на расстояние x_0, отпускают без начальной скорости, $t = 0$. Тогда координата тела будет меняться со временем по закону $x(t) = x_0 \cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – круговая частота колебаний. Обозначив через t_0 время, за которое тело проходит от крайнего положения путь $x_0/2$, имеем $\dfrac{x_0}{2} = x_0 \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}} t_0$, откуда $t_0 = \sqrt{\dfrac{m}{k}} \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Средняя скорость тела за время t_0 определяется выражением $\upsilon_{ср} = \dfrac{x_0}{2t_0}$. Отсюда находим

$$\upsilon_{ср} = \frac{3x_0}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 0{,}48 \text{ м/с.}$$

Ответ. $\upsilon_{ср} = \dfrac{3x_0}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \approx 0{,}48$ м/с.

Пример 5. Маленький брусок массой $m = 9$ г может совершать поступательное движение по прямой между двумя пружинами жесткостью $k_1 = 0{,}25$ Н/м и $k_2 = 0{,}16$ Н/м. В недеформированном состоянии пружин расстояние между их концами $L = 20$ см. В начальный момент времени пружина k_1 сжата на величину $\Delta l = 1$ см, а брусок расположен вплотную к ее концу. Через какое время τ после того, как брусок отпустят, он вернется в исходное положение? Трением пренебречь.

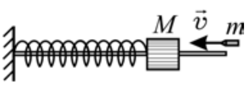


Решение. Искомое время складывается из трех времен: половины периода T_1 колебаний бруска на пружине k_1, времени $2L/\upsilon$ равномерного движения бруска между пружинами и половины периода T_2 колебаний бруска на пружине k_2. Согласно известной формуле для периода колебаний груза на пружине, $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_2}}$. Скорость равномерного движения бруска можно найти из закона сохранения энергии, справедливого при свободных колебаниях: $\dfrac{k_1 \Delta l^2}{2} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$. Отсюда $\upsilon = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}\Delta l$. Следовательно, $\tau = \pi\left(\sqrt{\dfrac{m}{k_1}} + \sqrt{\dfrac{m}{k_2}}\right) + \dfrac{2L}{\Delta l}\sqrt{\dfrac{m}{k_1}} \approx 9$ с.

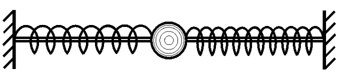
Ответ. $\tau = \pi\left(\sqrt{\dfrac{m}{k_1}} + \sqrt{\dfrac{m}{k_2}}\right) + \dfrac{2L}{\Delta l}\sqrt{\dfrac{m}{k_1}} \approx 9$ с.

Задачи

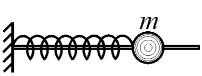
1. Тело массой $M = 10$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной с неподвижной стенкой. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль стержня. Тело вместе с застрявшей в нем пулей начинает совершать колебания с амплитудой $A = 10$ см. Найти период T колебаний тела.

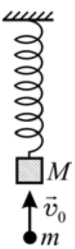


2. Шарик, надетый на гладкую горизонтальную спицу, прикреплен к концам двух невесомых пружин. Вторые концы пружин заделаны в неподвижные стенки так, что в положении равновесия шарика пружины не деформированы. Каков период T колебаний шарика, если известно, что при поочередном подвешивании шарика к каждой из пружин по отдельности их удлинения составили $h_1 = 4$ см и $h_2 = 6$ см? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



3. Тело массой $m = 1$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, совершает свободные гармонические колебания под действием пружины. Какова полная механическая энергия колебаний E, если амплитуда колебаний $A = 0{,}2$ м, а модуль максимального ускорения тела в процессе колебаний $a_{\max} = 3$ м/с^2?





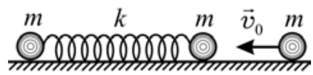
4. Брусок массой $M = 100$ г подвешен на невесомой пружине жесткостью $k = 1$ Н/м. Снизу в него попадает пластилиновый шарик массой $m = 1$ г, летящий вертикально вверх со скоростью $v_0 = 2{,}5$ м/с, и прилипает к бруску. Найти амплитуду A возникающих при этом гармонических колебаний. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

5. На гладком горизонтальном столе лежит деревянный брусок, прикрепленный пружиной к вертикальной стенке. В брусок попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально вдоль оси пружины, и застревает в нем. Определить жесткость пружины k, если известно, что время, в течение которого сжималась пружина после попадания пули в брусок, $T = 0{,}1$ с, отношение количества теплоты, выделившейся при взаимодействии пули с бруском, к начальной кинетической энергии пули $\alpha = 0{,}9$. Трением бруска о стол, а также массой пружины пренебречь.

6. Гиря массой $m = 1$ кг, подвешенная на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $A = 0{,}2$ м и периодом $T = 2$ с. Определить силу натяжения пружины F в момент, когда гиря достигает нижней точки. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

7. Тело массой $m = 1$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жесткостью $k = 10$ Н/м с неподвижной стенкой. Тело сместили на некоторое расстояние от положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Через какое минимальное время t_0 после начала движения тела его кинетическая энергия будет в $n = 3$ раза больше потенциальной энергии пружины?

8. Два одинаковых шарика массой m каждый, связанные пружиной жесткостью k и длиной l, лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий такой же шарик движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры шариков, связанных пружиной, и совершает упругое соударение с одним из них. Определить максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении. Принять, что $v_0 < l\sqrt{2k/m}$. Массой пружины, временем соударения и трением пренебречь.



9. Маленький шарик, подвешенный на нити, отклоняют от положения равновесия и отпускают без начальной скорости. Определить, с каким по модулю ускорением a_1 начнет двигаться шарик, если известно, что в момент прохождения шариком нижней точки траектории модуль его ускорения равен $a_2 = 15$ м/с^2. Нить считать невесомой и нерастяжимой, сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

10. Математический маятник совершает малые колебания. Известно, что через время $\tau = 0{,}314$ с после прохождения маятником положения равновесия его отклонение составило некоторую величину α_0, а через время 2τ – величину $\sqrt{3}\alpha_0$. Найти длину маятника l, если 2τ меньше полупериода его колебаний. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

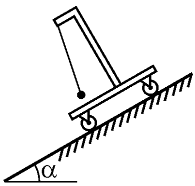
11. На ракете, взлетающей вертикально с постоянным ускорением $a = 1{,}25g$, установлены маятниковые часы. Точно такие же часы расположены на поверхности Земли. На какое время Δt будут отличаться показания этих часов по истечении $\tau = 1$ мин. после взлета ракеты? Время τ измерено по часам, находящимся на Земле. Зависимостью ускорения свободного падения g от высоты пренебречь.

12. К потолку покоящегося вагона на нити длиной l подвешен маленький шарик. В некоторый момент времени вагон приходит в движение в горизонтальном направлении

с постоянным ускорением a. На какую максимальную высоту h относительно своего начального положения поднимется шарик? Ускорение свободного падения g.

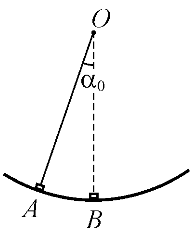
13. К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью k подвешена гиря массой m. В некоторый момент времени лифт начинает движение вверх с постоянным ускорением a. Какой путь S пройдет кабина лифта к тому моменту, когда длина пружины первый раз станет максимальной?

14. Математический маятник отклонили от положения равновесия на малый угол $\alpha_0 = 0{,}1$ рад и отпустили без начальной скорости, после чего маятник стал совершать гармонические колебания. Найти максимальную величину $v_{y\max}$ вертикальной составляющей скорости маятника. Длина маятника $l = 0{,}4$ м. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. Считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$.



15. Математический маятник длиной $l = 0{,}5$ м подвешен на штативе, закрепленном на тележке, которая свободно скатывается с наклонной плоскости. Найти период T малых колебаний маятника относительно тележки. Считать, что масса тележки значительно больше массы маятника, а силы трения пренебрежимо малы. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$.

16. По гладкому желобу, имеющему форму дуги окружности, из точки A без начальной скорости начинает скользить маленький брусок. Когда этот брусок проходит половину пути до нижней точки желоба (точки B), из точки A начинает скользить без начальной скорости второй такой же брусок. Найти, какой угол α будет составлять с вертикалью линия, соединяющая второй брусок с центром дуги (точкой O), в момент, когда первый брусок достигнет точки B, если $\angle AOB$ известен и равен α_0 ($\alpha_0 \ll 1$).



17. Математический маятник, представляющий собой шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, помещен в электрическое поле плоского конденсатора, заряженного до напряжения U. Пластины конденсатора расположены горизонтально, расстояние между ними d. Заряд шарика положителен и равен q. Определить период T колебаний маятника. Ускорение свободного падения g.

2. Молекулярная физика. Термодинамика

2.1. Молекулярная физика

Теоретический материал

Молекулярная физика – это раздел физики, изучающий строение и свойства вещества в различных агрегатных состояниях исходя из молекулярно-кинетических представлений.

Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытное обоснование. *Основные положения молекулярно-кинетической теории* состоят в следующем:

1) любое вещество состоит из молекул – наименьших устойчивых частиц данного вещества, обладающих всеми его химическими свойствами;
2) все молекулы находятся в состоянии непрерывного хаотического движения, характер которого зависит от агрегатного состояния вещества;
3) между молекулами действуют силы притяжения и отталкивания.

Множество прямых и косвенных доказательств реальности молекул позволяет считать молекулярно-кинетические представления о строении вещества абсолютно достоверными. Основные положения молекулярно-кинетической теории подтверждаются многочисленными опытами с использованием достижений современной экспериментальной техники. С помощью ионного проектора получают изображения кристаллов, по которым можно представить их строение. Электронные микроскопы позволили получить изображения кристаллов, по которым оказалось возможным определение расстояний между отдельными атомами и молекулами. Одним из важнейших прямых доказательств справедливости молекулярно-кинетической теории газов являются измерения значений скоростей молекул газов и сравнение этих результатов со значениями, полученными на основании теории.

Броуновское движение. Большое значение в обосновании молекулярно-кинетической теории имело в свое время открытие английского ботаника Р. Броуна. В 1827 году он обнаружил беспорядочное движение видимых в микроскоп частиц цветочной пыльцы, взвешенных в воде (названное впоследствии *броуновским движением*). Наблюдаемые частицы размером примерно в 1 мкм совершали неупорядоченные движения, описывая сложные зигзагообразные траектории. Многочисленные эксперименты, проведенные французским ученым Ж. Перреном, позволили установить основные закономерности броуновского движения: его интенсивность не зависит от времени, но возрастает с ростом температуры среды, уменьшением ее вязкости и размеров частиц.

Объяснить броуновское движение и его закономерности смогла лишь молекулярно-кинетическая теория. Причиной броуновского движения является тепловое движение молекул среды и отсутствие точной компенсации ударов, испытываемых частицей со стороны окружающих ее молекул. Импульс одной молекулы слишком мал, чтобы результат ее столкновения с броуновской частицей можно было увидеть под микроскопом. Но если с частицей сталкивается сразу большое число молекул, случайно движущихся в одном направлении, то они могут вызвать ее заметное смещение. Чем меньше размеры и масса частицы, тем более заметными становятся изменения ее импульса во времени.

Количественная теория броуновского движения была разработана А. Эйнштейном и М. Смолуховским в 1906 году. Она полностью объяснила все закономерности этого явления.

Масса и размер молекул. Современные приборы позволяют рассматривать отдельные атомы на поверхностях тел и измерять их размеры. Так, например, диаметр атома углерода, измеренный с помощью туннельного микроскопа, оказался равным $1{,}4 \cdot 10^{-8}$ см. Такой же порядок имеют размеры других атомов и большинства молекул. В частности, размер молекулы водорода составляет $2{,}3 \cdot 10^{-8}$ см.

Зная размер молекулы какого-либо вещества, можно оценить ее массу. Например, диаметр молекулы воды примерно равен $3 \cdot 10^{-8}$ см. Считая, что молекулы в воде упакованы плотно, т.е. пренебрегая межмолекулярными промежутками, легко получить для массы одной молекулы H_2O следующую оценку: $m_{0H_2O} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-23}$ г. Массы такого же порядка имеют молекулы других веществ (за исключением огромных молекул сложных органических соединений, содержащих тысячи атомов). Наиболее точно массы атомов и молекул измеряются с помощью современных масс-спектрометров.

Так как массы молекул очень малы, удобно использовать на практике не абсолютные значения масс, а относительные. Относительной молекулярной (или атомной) массой вещества называют отношение массы молекулы (или атома) данного вещества к $1/12$ массы атома углерода ^{12}C.

Моль вещества. Постоянная Авогадро. Количество вещества ν пропорционально числу структурных единиц (атомов или молекул), из которых оно состоит. Поскольку число таких единиц в макроскопических телах огромно, принято использовать в расчетах не абсолютное их число, а относительное. В системе СИ количество вещества выражают в *молях*.

Один моль – это количество вещества, в котором содержится столько же структурных единиц (молекул или атомов), сколько атомов содержится в углероде ^{12}C массой 12 г.

В одном моле любого вещества содержится одно и то же число структурных единиц, из которых оно состоит. Это число называют *постоянной Авогадро* N_A. Постоянная Авогадро равна $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Молярной массой M называется величина, равная отношению массы вещества m к количеству вещества ν:

$$M = \frac{m}{\nu}. \qquad (2.1.1)$$

Иными словами, молярная масса – это масса вещества, взятого в количестве одного моля. Она измеряется в граммах на моль и численно равна относительной молекулярной (или атомной) массе вещества.

Характер теплового движения молекул в газах, жидкостях и твердых телах. Характер теплового движения в веществе зависит от его агрегатного состояния. Молекулы (атомы) *в твердом теле* совершают беспорядочные колебания относительно положений, в которых силы притяжения и отталкивания со стороны соседних молекул (атомов) уравновешены. *В жидкости* молекулы не только колеблются около положения равновесия, но и совершают перескоки из одного положения равновесия в соседнее. Эти перескоки являются причиной текучести жидкости, ее способности принимать форму сосуда. *В газах* расстояния между молекулами в среднем значительно больше размеров молекул. Силы отталкивания на больших расстояниях малы, поэтому газы легко сжимаются. Практически отсутствуют между молекулами газа и силы притяжения, поэтому газы обладают свойством неограниченно расширяться.

Тепловое равновесие. На основании многочисленных экспериментов установлено очень важное свойство тепловых явлений: тело или система тел при неизменных внешних условиях самопроизвольно переходит в состояние теплового равновесия. *Тепловым или термодинамическим равновесием* называют такое состояние, при котором все макроскопические параметры системы сколь угодно долго остаются постоянными. Это означает, что не меняются объем и давление, не происходит теплообмен (передача энергии) между частями системы, отсутствуют взаимные превращения газов, жидкостей, твердых тел и т.д. Но микроскопические процессы (движение молекул, их столкновения, обмен скоростями) в системе не прекращаются и при тепловом равновесии.

Температура и ее физический смысл. Физический параметр, одинаковый во всех частях системы тел, находящихся в состоянии теплового равновесия, называется *температурой*. Если при контакте двух тел никакие их физические параметры не изменяются, то между телами нет теплообмена и температура тел одинакова.

Способы измерения температуры основываются на следующем утверждении, которое является обобщением многочисленных экспериментальных данных: если тело A находится в тепловом равновесии с телом C, а тело B тоже находится в тепловом равновесии с телом C, то тела A и B также находятся в состоянии теплового равновесия. Это дает возможность сравнивать состояния теплового равновесия тел, не приводя их в непосредственный контакт.

Шкала температур Цельсия. Для измерения температуры можно воспользоваться зависимостями любой макроскопической величины от температуры, а именно объема, давления, электрического сопротивления и т.д. На практике чаще всего используют зависимость объема жидкости (ртути или спирта) от температуры. По *шкале Цельсия* за начало отсчета (0) принимают температуру тающего льда; второй постоянной точкой (100) считают температуру кипения воды при нормальном атмосферном давлении. Шкалу между точками 0 и 100 делят на 100 равных частей, называемых градусами ($1\,°\mathrm{C}$). Перемещение столбика жидкости на одно деление соответствует изменению температуры на $1\,°\mathrm{C}$.

Идеальный газ. Для объяснения свойств вещества в газообразном состоянии используется модель *идеального газа*. В этой модели предполагается, что молекулы обладают пренебрежимо малым объемом по сравнению с объемом сосуда, между молекулами не действуют силы притяжения, при соударениях молекул друг с другом и со стенками сосуда действуют силы упругого отталкивания.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Одним из самых важных успехов молекулярно-кинетической теории явилось количественное объяснение давления газа на стенки сосуда. *Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа* было выведено в предположении, что молекулы газа при столкновениях со стенками сосуда взаимодействуют с ними по законам механики как упругие тела. Согласно этому уравнению,

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2}, \tag{2.1.2}$$

где p – давление газа, n – концентрация молекул (число молекул в единице объема), m_0 – масса молекулы, $\overline{v^2}$ – среднее значение квадрата скорости молекул. Обозначив через $\overline{E}$ среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул газа

$$\overline{E} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}, \tag{2.1.3}$$

уравнение (2.1.2) можно записать в эквивалентной форме

$$p = \frac{2}{3} n \overline{E}. \tag{2.1.4}$$

Средняя кинетическая энергия молекул и температура. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа устанавливает связь макроскопического параметра – давления – с микроскопическими параметрами газа – средней кинетической энергией и концентрацией молекул. Но, измерив только давление газа, мы не можем в отдельности узнать ни среднее значение кинетической энергии молекул, ни их концентрацию. Для нахождения микроскопических параметров газа нужны измерения еще одной физической величины, как-то связанной со средней кинетической энергией молекул. Такой величиной является температура.

Для установления этой связи используется известный из экспериментов факт, что для большинства разреженных газов, находящихся в состоянии теплового равновесия, отношение произведения давления газа на его объем к числу молекул является одинаковым:

$$\frac{p_1 V_1}{N_1} = \frac{p_2 V_2}{N_2} = \frac{p_3 V_3}{N_3} = \theta. \tag{2.1.5}$$

Этот опытный факт позволяет принять величину θ в качестве естественной меры температуры. Так как $n = \frac{N}{V}$, то с учетом (2.1.4) получим

$$\frac{pV}{N} = \frac{2}{3} \overline{E} = \theta. \tag{2.1.6}$$

Следовательно, средняя кинетическая энергия молекул любых газов, находящихся в тепловом равновесии, одинакова. Величина θ равна двум третям средней кинетической энергии теплового движения молекул газа и выражается в *джоулях*. В физике температуру выражают в *градусах*, принимая, что температура T и величина θ связаны уравнением

$$\theta = kT, \qquad (2.1.7)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единицы температуры. Окончательно получаем

$$\frac{pV}{N} = kT. \qquad (2.1.8)$$

Абсолютная температурная шкала. Постоянная Больцмана. Последнее уравнение показывает, что имеется возможность выбрать температурную шкалу, не зависящую от природы газа, используемого в качестве рабочего тела. Такая шкала называется *абсолютной температурной шкалой*, или шкалой Кельвина. Единица температуры по абсолютной шкале, называемая *кельвином* (К), выбрана равной одному градусу по шкале Цельсия: 1 К = 1 °С.

При таком выборе единицы температуры коэффициент k в уравнении (2.1.8) принимает значение $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Он называется *постоянной Больцмана*. Постоянную Больцмана можно рассматривать как величину, связывающую температуру, выражаемую в энергетических единицах, с температурой, выраженной в градусах.

Абсолютная температура T связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением

$$T = t + 273\,^\circ\mathrm{C}. \qquad (2.1.9)$$

Из уравнений (2.1.6) и (2.1.8) следует, что

$$\overline{E} = \frac{3}{2} kT\ . \qquad (2.1.10)$$

Средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул газа пропорциональна абсолютной температуре. Из уравнений (2.1.4) и (2.1.10) можно получить, что

$$p = nkT. \qquad (2.1.11)$$

При одинаковых значениях температуры и концентрации молекул давление любых газов одинаково. Отсюда следует *закон Авогадро*: в равных объемах газов при одинаковых температурах и давлениях содержится одинаковое число молекул.

Используя уравнения (2.1.3) и (2.1.10), найдем средний квадрат скорости поступательного движения молекул:

$$\overline{\upsilon^2} = \frac{3kT}{m_0}\ . \qquad (2.1.12)$$

Квадратный корень из этой величины называется *средней квадратичной скоростью*:

$$\upsilon_0 = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}\ . \qquad (2.1.13)$$

Уравнение Менделеева–Клапейрона (уравнение состояния идеального газа). Универсальная газовая постоянная. Каждая физически однородная система, состоящая из большого числа частиц (газ, жидкость или твердое тело) и находящаяся в состоянии теплового равновесия, характеризуется своим *уравнением состояния*, т.е. уравнением, связывающим давление, объем и абсолютную температуру: $f(p,V,T)=0$. Наиболее просто выглядит уравнение состояния идеального газа, хорошо известны различные приближенные уравнения, описывающие состояние реальных газов. В то же время для жидкостей из-за их сложного строения до сих пор не удалось получить общего уравнения состояния. Нет универсального уравнения состояния и для твердых тел.

Уравнение, устанавливающее связь между давлением, объемом и температурой газов, было получено французским физиком Б. Клапейроном путем обобщения многочисленных экспериментальных данных. В наиболее удобной форме, используемой вплоть до настоящего времени, его впервые применил Д.И. Менделеев. Поэтому *уравнение состояния идеального газа* называется также *уравнением Менделеева–Клапейрона*. Оно имеет вид

$$pV=\frac{m}{M}RT, \qquad (2.1.14)$$

где m – масса газа, M – его молярная масса, R – *универсальная газовая постоянная*, равная произведению постоянной Авогадро N_{A} на постоянную Больцмана k: $R=N_{\text{A}}k=8{,}31$ Дж/(моль·К). Используя выражение для плотности газа $\rho=\frac{m}{V}$, уравнение Менделеева–Клапейрона можно записать эквивалентной форме, более удобной в некоторых случаях:

$$\rho=\frac{pM}{RT}. \qquad (2.1.15)$$

Изотермический, изохорный и изобарный процессы. С помощью уравнения состояния идеального газа можно исследовать процессы, в которых масса газа и один из трех параметров – давление, объем или температура – остаются неизменными. Особую роль в физике и технике играют три процесса – изотермический, изохорный и изобарный.

Изотермическим процессом называется процесс, протекающий при постоянной температуре *T*. Из уравнения состояния идеального газа следует, что в таком процессе произведение давления газа на его объем должно оставаться постоянным:

$$pV=\text{const}. \qquad (2.1.16)$$

График изотермического процесса называется *изотермой*. На плоскости переменных объем – давление он представляет собой гиперболу. Уравнение (2.1.16) было получено экспериментально английским физиком Р. Бойлем и французским физиком Э. Мариоттом задолго до создания молекулярно-кинетической теории. Это уравнение называют *законом Бойля–Мариотта*.

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется *изохорным*. Из уравнения (2.1.14) вытекает, что при $V=\text{const}$

$$\frac{p}{T}=\text{const}. \qquad (2.1.17)$$

График изохорного процесса называется *изохорой*. На плоскости переменных температура – давление он представляет собой отрезок прямой, продолжение которого проходит через начало координат. Экспериментальным путем зависимость давления газа от температуры исследовал французский физик Ж. Шарль. Поэтому уравнение (2.1.17) называется *законом Шарля*.

Процесс изменения состояния газа при постоянном давлении называется *изобарным*. Его уравнение имеет вид

$$\frac{V}{T} = \text{const}. \qquad (2.1.18)$$

Этот закон был установлен экспериментально французским ученым Ж. Гей-Люссаком и носит название *закона Гей-Люссака*. График изобарного процесса называется *изобарой*. На плоскости переменных температура – объем он представляет собой отрезок прямой, продолжение которого проходит через начало координат.

Изменение агрегатного состояния вещества. В различных интервалах температур и давлений большинство веществ может находиться в разных состояниях – *газообразном, жидком и твердом*. Эти состояния вещества называются агрегатными. Молекулярно-кинетическая теория позволяет объяснить процесс перехода вещества из одного агрегатного состояния в другое.

Парообразование. Испарение. Насыщенный пар. Зависимость плотности и давления насыщенного пара от температуры. Взаимные превращения жидкостей и газов описываются процессами парообразования и конденсации. *Парообразованием* называется процесс перехода вещества из жидкого состояния в газообразное. Парообразование, происходящее при любой температуре со свободной поверхности жидкости, называется *испарением*. Совокупность молекул, вылетевших из жидкости при парообразовании, называется паром данной жидкости. Образование пара происходит не только у жидкостей, но и у твердых тел. Из поверхностного слоя жидкости вылетают молекулы, обладающие наибольшей скоростью и, следовательно, кинетической энергией теплового движения, поэтому в результате испарения жидкость охлаждается.

Если процесс парообразования происходит в закрытом сосуде, то по истечении некоторого времени количество жидкости перестает убывать, хотя молекулы жидкости, способные покинуть ее поверхность, продолжают переходить в пар. В этом случае наряду с процессом парообразования определяющую роль начинает играть компенсирующий его обратный процесс – конденсация, т.е. превращение пара в жидкость. Концентрация вещества в газообразном состоянии достигает такого значения, при котором число молекул, возвращающихся в жидкость, становится равным числу молекул, покидающих поверхность жидкости за то же время, иными словами, становятся равными скорости парообразования и конденсации. Устанавливается динамическое равновесие между процессами испарения и конденсации. Пар, находящийся в состоянии динамического равновесия со своей жидкостью, называется *насыщенным паром*. Пар, находящийся при давлении ниже давления насыщенного пара, является ненасыщенным.

Давление насыщенного пара $p_н$ зависит только от его химического состава и температуры и не зависит от величины свободного от жидкости объема сосуда, в котором находится пар. Это объясняется тем, что при сжатии насыщенного пара концентрация молекул пара увеличивается, равновесие между процессами испарения и конденсации нарушается, и часть пара превращается в жидкость. При расширении насыщенного пара, наоборот, часть жидкости превращается в пар.

Интенсивность процесса испарения увеличивается с возрастанием температуры жидкости. Поэтому динамическое равновесие между испарением и конденсацией при повышении температуры устанавливается при больших концентрациях молекул пара, т.е. при больших его давлениях.

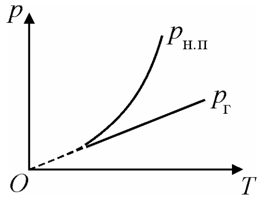


Рис. 2.1.1. Зависимость давления насыщенного пара и идеального газа от температуры

Давление идеального газа при постоянной концентрации молекул возрастает прямо пропорционально абсолютной температуре. Так как в насыщенном паре при возрастании температуры концентрация молекул увеличивается, давление насыщенного пара с повышением температуры возрастает быстрее, чем давление идеального газа с постоянной концентрацией молекул (рис. 2.1.1).

Кипение. Процесс парообразования может происходить не только с поверхности жидкости, но и внутри жидкости. Если давление насыщенного пара равно давлению в жидкости или превышает его, пузырьки пара внутри жидкости расширяются и всплывают на поверхность. Процесс интенсивного парообразования не только со свободной поверхности жидкости, но и по всему ее объему внутрь образующихся при этом пузырьков пара называется *кипением*.

Зависимость температуры кипения от давления. *Температурой* (*точкой*) *кипения* называется температура жидкости, при которой давление ее насыщенного пара равно внешнему давлению. При понижении внешнего давления температура кипения жидкости понижается, при повышении давления – повышается. В частности, при температуре $100\,^\circ\mathrm{C}$ давление насыщенного водяного пара равно нормальному атмосферному давлению и кипение воды происходит при $100\,^\circ\mathrm{C}$. Если давление над водой уменьшить до половины нормального атмосферного давления, вода закипит при $80\,^\circ\mathrm{C}$. При давлении, в 2 раза превышающем нормальное атмосферное давление, температура кипения воды равна $120\,^\circ\mathrm{C}$.

Удельная теплота парообразования. Если внешнее давление не изменяется, в процессе кипения температура жидкости остается постоянной. Теплота, которая извне подводится к жидкости, расходуется на парообразование. Количество теплоты r, необходимое для превращения в пар единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения, называется *удельной теплотой парообразования*. Из закона сохранения энергии следует, что при обратном процессе – конденсации пара в жидкость – выделяется то же количество теплоты.

Критическая температура. При увеличении температуры жидкости увеличивается давление насыщенного пара и одновременно растет его плотность. Плотность жидкости, находящейся в равновесии со своим паром, уменьшается вследствие теплового расширения. Графики зависимости от температуры плотностей насыщенного пара и жидкости пересекаются в некоторой точке, называемой критической (рис. 2.1.2). В критической точке плотность жидкости равна плотности насыщенного пара, находящегося в равновесии с жидкостью. При *критической температуре* плотность и давление насыщенного пара становятся максимальными, а плотность жидкости, находящейся в равновесии с паром, минимальной. Критическая температура для воды равна $t_{\text{кр}} = 374\ ^\circ\text{C}$.

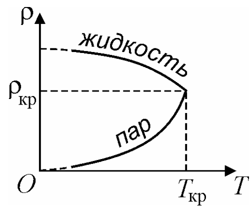


Рис. 2.1.2. Зависимость плотности насыщенного пара и жидкости от температуры

Особое значение критической температуры состоит в том, что при температуре выше критической газ нельзя превратить в жидкость ни при каких давлениях.

Влажность. Относительная влажность. Содержание водяного пара в воздухе можно характеризовать несколькими величинами. *Абсолютной влажностью воздуха* (или просто влажностью воздуха) ρ называют плотность водяных паров, содержащихся в воздухе при данных условиях. Обычно влажность выражают в г/м^3. Поскольку в атмосферном воздухе интенсивность испарения воды зависит от того, насколько близко давление паров воды к давлению насыщенных паров при данной температуре, важно также знать относительную влажность. *Относительной влажностью воздуха* f называется отношение парциального давления водяного пара p, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению $p_{\text{н}}$ насыщенного водяного пара при той же температуре, выраженное в процентах:

$$f = \frac{p}{p_{\text{н}}} \cdot 100\% . \qquad (2.1.19)$$

Так как давление насыщенного пара тем меньше, чем ниже температура, то при охлаждении воздуха находящийся в нем водяной пар при некоторой температуре становится насыщенным. Температура $t_{\text{р}}$, при которой находящийся в воздухе водяной пар становится насыщенным, называется *точкой росы*. При температуре воздуха, равной точке росы или более низкой, испарение воды прекращается.

Кристаллическое и аморфное состояния вещества. Твердые тела по своим свойствам и внутреннему строению делятся на *кристаллические* и *аморфные*.

Кристаллы – это твердые тела, атомы или молекулы которых занимают определенные, упорядоченные положения в пространстве. Кристаллические твердые тела обладают анизотропией – зависимостью физических свойств от направления внутри кристалла. К числу таких свойств относятся механическая прочность, коэффициент теплового расширения, электро- и теплопроводность, показатель преломления света и пр.

Различаются следующие четыре типа твердых кристаллов:

1. *Ионные кристаллы* – большинство неорганических соединений, например соли (NaCl и др.), окиси металлов и т.д. В узлах кристаллических решеток ионных кристаллов размещаются правильно чередующиеся положительные и отрицательные ионы, между которыми действуют главным образом силы электростатического взаимодействия, осуществляющие ионную связь. В процессе кристаллизации одни атомы (например, Na) теряют электроны, которые присоединяются к другим атомам (например, Cl), и возникают два противоположно заряженных иона.

2. *Атомные* (*валентные*) *кристаллы* – кристаллические решетки полупроводников (Te, Ge и др.), многие органические твердые тела. Типичными примерами таких кристаллов являются разновидности углерода – алмаз и графит. В узлах кристаллических решеток атомных кристаллов находятся электрически нейтральные атомы, чаще всего одинаковые, между которыми осуществляется особая ковалентная связь, имеющая квантово-механическое происхождение.

3. *Молекулярные кристаллы* – Br_2, I_2, CH_4, нафталин, парафин, многие твердые органические соединения. В узлах кристаллических решеток таких кристаллов находятся молекулы, сохраняющие свою «индивидуальность». Между этими молекулами действуют силы притяжения, характерные для взаимодействия молекул. Относительно малая устойчивость молекулярных кристаллов, их низкие температуры плавления объясняются тем, что силы притяжения между их молекулами меньше, чем у кристаллов других типов.

4. *Металлические кристаллы* (*металлы*). При кристаллизации металлов происходит отщепление от атомов внешних (валентных) электронов и образуются положительные ионы, которые располагаются в узлах кристаллической решетки. Валентные электроны становятся «коллективизированными» – они принадлежат всему кристаллу в целом, образуя электронный газ. Металлическая связь в кристаллической решетке металлов обеспечивается притяжением между положительно заряженными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки, и отрицательно заряженным электронным газом. Коллективизированные электроны металлов как бы «стягивают» положительные ионы, уравновешивая отталкивание между ними. При расстояниях между ионами, равных периоду кристаллической решетки, возникает устойчивая конфигурация ионов. Наличием электронного газа объясняется хорошая электропроводность металлов.

Кристаллические тела делятся на *монокристаллы* и *поликристаллы*. Монокристаллы часто обладают геометрически правильной внешней формой, но главный признак монокристалла – периодически повторяющаяся внутренняя структура во всем объеме. Поликристаллическое тело представляет собой совокупность сросшихся друг с другом хаотически ориентированных маленьких кристаллов. Каждый маленький монокристалл анизотропен, но поликристаллическое тело, как правило, изотропно.

Наряду с кристаллическими в природе существуют также *аморфные тела*. У аморфных тел нет строгого порядка в расположении атомов. Все аморфные тела изотропны, т.е. их физические свойства одинаковы по всем направлениям. К аморфным телам относятся стекло, смола, канифоль, плавленый сахар и др. При внешних воздействиях аморфные тела обнаруживают одновременно упругие свойства, подобно кристаллам, и текучесть, подобно жидкости. Упругие свойства аморфных тел проявляются при низких температурах. При повышении температуры они постепенно размягчаются и по свойствам все более приближаются к жидкостям. Определенной температуры плавления у аморфных тел, в отличие от кристаллических, нет.

Удельная теплота плавления. Взаимные превращения кристаллических твердых тел и жидкостей описываются процессами плавления и кристаллизации (отвердевания). *Плавлением твердых тел* называется их переход из твердого состояния в жидкое. В результате плавления происходит разрушение кристаллической решетки твердого тела. Плавление происходит при определенной температуре, называемой *температурой* (*точкой*) *плавления* $T_{пл}$. Как правило, плавление твердых тел сопровождается уменьшением плотности. Исключение составляют лед и висмут, у которых плавление сопровождается увеличением плотности.

В процессе плавления твердого тела оно существует одновременно и в твердом и в жидком состояниях. Температура тела не изменяется при плавлении и остается все время равной $T_{пл}$. Все количество теплоты, которое подводится к твердому телу, расходуется на разрушение кристаллической решетки. Количество теплоты, необходимое для перевода единицы массы твердого тела, находящегося при температуре плавления, в жидкое состояние называется *удельной теплотой плавления* λ.

Переход вещества из жидкого в твердое кристаллическое состояние называется *кристаллизацией* (затвердеванием). Для любой химически чистой жидкости этот процесс идет при постоянной температуре кристаллизации, которая совпадает с температурой плавления $T_{пл}$. Кристаллизация единицы массы жидкости сопровождается выделением некоторого количества теплоты – удельной теплоты кристаллизации, – равной удельной теплоте плавления.

Уравнение теплового баланса. Если внутри теплоизолированной системы не совершается механической работы, то для нее справедливо *уравнение теплового баланса*:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_n = 0, \qquad (2.1.20)$$

где ΔQ_1, ΔQ_2, …, ΔQ_n – количества теплоты, полученные (положительные) или отданные (отрицательные) телами системы (см. раздел 2.2). Эти количества теплоты рассчитываются по следующим формулам.

При изменении температуры тела массой m количество переданной ему теплоты

$$\Delta Q = cm(t_2 - t_1), \qquad (2.1.21)$$

где c – удельная теплоемкость вещества, t_1 и t_2 – начальная и конечная температуры.

При превращении жидкости, находящейся при температуре кипения, в пар количество теплоты, переданной жидкости,

$$\Delta Q = rm, \qquad (2.1.22)$$

где r – удельная теплота парообразования. При конденсации пара выделяется такое же количество теплоты.

Плавление кристаллического тела, нагретого до температуры плавления, требует передачи ему количества теплоты

$$\Delta Q = \lambda m, \qquad (2.1.23)$$

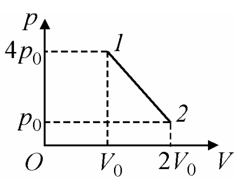
где λ – удельная теплота плавления. При кристаллизации выделяется то же количество теплоты.

Примеры решения задач

Пример 1. Атмосферное давление на пике Ленина (высота 7134 м над уровнем моря) $p_1 = 3{,}8 \cdot 10^4$ Па. Определить плотность воздуха ρ_1 на вершине при температуре $t_1 = -10$ °С, , если при нормальных условиях ($t_0 = 0$ °С, $p_0 = 10^5$ Па) плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}29$ кг/м^3.

Решение. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона) можно записать в следующей форме: $\rho = \dfrac{pM}{RT}$, где $\rho = \dfrac{m}{V}$ – плотность газа, p – давление, M – молярная масса, T – абсолютная температура. Учитывая, что $\rho_0 = \dfrac{p_0 M}{RT_0}$, $\rho_1 = \dfrac{p_1 M}{RT_1}$, где $T_0 = t_0 + 273$ °С, $T_1 = t_1 + 273$ °С, получаем искомую величину $\rho_1 = \rho_0 \dfrac{p_1 T_0}{p_0 T_1} = 0{,}51$ кг/м^3.

Ответ. $\rho_1 = \rho_0 \dfrac{p_1 T_0}{p_0 T_1} = 0{,}51$ кг/м^3.



Пример 2. С идеальным одноатомным газом проводят процесс *1 – 2*, показанный на рисунке. Во сколько раз α при этом изменится средняя кинетическая энергия одной молекулы?

Решение. Поскольку средняя кинетическая энергия молекулы одноатомного газа $\overline{E}_к = \dfrac{3}{2}kT$, искомое отношение энергий равно отношению абсолютных температур газа в состояниях *2* и *1*, т.е. $\alpha = T_2 / T_1$. Записывая уравнение Менделеева–Клапейрона для этих состояний, имеем $V_0 \cdot 4p_0 = \nu RT_1$, $2V_0 \cdot p_0 = \nu RT_2$, где ν – количество молей газа, R – универсальная газовая постоянная. Отсюда видно, что $T_2 / T_1 = 1/2$. Следовательно, $\alpha = \dfrac{1}{2}$, т.е. средняя кинетическая энергия молекулы газа в процессе *1 – 2* уменьшится в 2 раза.

Ответ. $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Пример 3. Горизонтальный цилиндр с газом разделен на три камеры двумя неподвижными поршнями. Температура газа во всех камерах одинакова и равна T_0. Давление газа в первой камере p_1, объем V_1, во второй p_2, V_2, в третьей соответственно p_3, V_3. Каково будет давление p в камерах после того как, освободив поршни, дать им возможность свободно двигаться, а температуру газа сделать равной T?

Решение. Запишем уравнения состояния для порций газа в камерах: $p_1V_1 = \nu_1RT_0$, $p_2V_2 = \nu_2RT_0$, $p_3V_3 = \nu_3RT_0$. Отсюда найдем количества газа в каждой камере: $\nu_1 = \dfrac{p_1V_1}{RT_0}$, $\nu_2 = \dfrac{p_2V_2}{RT_0}$, $\nu_3 = \dfrac{p_3V_3}{RT_0}$. Когда поршни освободят, давление во всех камерах станет одинаковым и уравнение состояния газа примет вид $p(V_1+V_2+V_3) = (\nu_1+\nu_2+\nu_3)RT$. Подставляя сюда найденные выше количества газа, получаем

$$p = \frac{(p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3)T}{(V_1+V_2+V_3)T_0}.$$

Ответ. $p = \dfrac{(p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3)T}{(V_1+V_2+V_3)T_0}$.

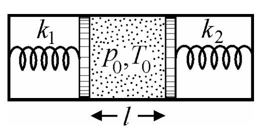
Пример 4. Баллон, содержащий $m_1 = 1$ кг азота, при испытании на прочность взорвался при температуре $t_1 = 327$ °С. Какую массу водорода m_2 можно было бы хранить в таком баллоне при температуре $t_2 = 27$ °С, имея пятикратный запас прочности? Молярная масса азота $M_1 = 28$ г/моль, водорода $M_2 = 2$ г/моль.

Решение. Из уравнения состояния азота следует, что давление, при котором взорвался баллон, $p_1 = \dfrac{m_1}{M_1}\dfrac{RT_1}{V}$, где V – объем баллона, $T_1 = t_1 + 273$ °С. По условию водород можно хранить при давлении $p_2 = p_1/5$. Учитывая, что $p_2 = \dfrac{m_2}{M_2}\dfrac{RT_2}{V}$, получаем

$$m_2 = \frac{m_1}{5}\frac{M_2}{M_1}\frac{t_1 + 273\,°\text{C}}{t_2 + 273\,°\text{C}} \approx 28 \text{ г.}$$

Ответ. $m_2 = \dfrac{m_1}{5}\dfrac{M_2}{M_1}\dfrac{t_1 + 273\,°\text{C}}{t_2 + 273\,°\text{C}} \approx 28$ г.

Пример 5. В цилиндре с площадью основания $S = 10$ см^2 могут без трения скользить два поршня. Между поршнями находится идеальный газ, а справа и слева от них – вакуум. Поршни соединены со стенками сосуда пружинами жесткостями $k_1 = 100$ Н/м и $k_2 = 50$ Н/м, как показано на рисунке. При температуре $T_0 = 300$ К давление газа $p_0 = 0{,}5 \cdot 10^4$ Па и расстояние между поршнями $l = 10$ см. Найти температуру газа T, при которой расстояние между поршнями увеличится до $L = 12$ см.



Решение. Уравнения начального и конечного состояния газа имеют вид: $p_0 lS = \nu RT_0$, $pLS = \nu RT$, откуда $T = T_0 \dfrac{pL}{p_0 l}$. Из условия равновесия поршней имеем: $(p - p_0)S = k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2$, где Δl_1 и Δl_2 – смещения левого и правого поршней соответственно, причем $\Delta l_1 + \Delta l_2 = L - l$. Отсюда $\Delta l_1 = \dfrac{(L-l)k_2}{k_1 + k_2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $T = T_0 \dfrac{L}{l}\left[1 + \dfrac{(L-l)k_1 k_2}{Sp_0(k_1 + k_2)}\right] = 417{,}6$ К.

Ответ. $T = T_0 \dfrac{L}{l}\left[1 + \dfrac{(L-l)k_1 k_2}{Sp_0(k_1 + k_2)}\right] = 417{,}6$ К.

Пример 6. Сосуд, содержащий идеальный газ при температуре $t = 27$ °С, снабжен клапаном, открывающимся при перепаде давлений $p_к = 400$ кПа. Газ нагревают до температуры $t_1 = 127$ °С, при этом часть газа выходит из сосуда через клапан. Найти давление p, которое установится в сосуде после охлаждения газа до начальной температуры t. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

Решение. При нагревании газа в сосуде его давление будет повышаться до величины $p' = p_0 + p_к$, после чего давление будет оставаться постоянным и равным p', а излишек газа будет выходить наружу. Из уравнения состояния газа в конце нагрева $(p_0 + p_к)V = \nu RT_1$ можно найти количество газа, оставшегося в сосуде: $\nu = \dfrac{(p_0 + p_к)V}{RT_1}$, где $T_1 = t_1 + 273$ °С. Записывая уравнение состояния этого количества газа при температуре $T = t + 273$ °С, т.е. $pV = \nu RT = \dfrac{(p_0 + p_к)V}{T_1} \cdot T$, получаем $p = (p_к + p_0)\dfrac{(t + 273\text{ °C})}{(t_1 + 273\text{ °C})} = 375$ кПа.

Ответ. $p = (p_к + p_0)\dfrac{(t + 273\text{ °C})}{(t_1 + 273\text{ °C})} = 375$ кПа.

Пример 7. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под поршнем находится идеальный газ. Сосуд помещается в лифт. Когда лифт неподвижен, расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 12$ см. При движении лифта с постоянным ускорением расстояние между поршнем и дном цилиндра оказалось равным $x = 10$ см. Найти модуль ускорения лифта a. Температуру считать постоянной, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2, атмосферное давление не учитывать.

Решение. Пусть M – масса поршня, S – его площадь. Когда лифт покоится, давление газа в сосуде $p = \dfrac{Mg}{S}$. В ускоренно движущемся лифте для поршня справедливо уравнение $Ma = p_1 S - Mg$. Следовательно, давление газа в движущемся сосуде $p_1 = \dfrac{M(g+a)}{S}$. По закону Бойля–Мариотта $phS = p_1 xS$, откуда вытекает равенство $gh = (g+a)x$. Отсюда следует, что $a = g\left(\dfrac{h}{x} - 1\right) = 2$ м/с^2.

Ответ. $a = g\left(\dfrac{h}{x} - 1\right) = 2$ м/с^2.

Пример 8. Сферу массой $m = 80$ г взвешивают в воздухе. При температуре воздуха $t = 47$ °C вес сферы оказался равным $P = 0{,}1$ Н. При какой температуре воздуха t_1 сфера перестанет давить на чашку весов? Изменением объема сферы пренебречь, давление воздуха считать неизменным, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. По закону Архимеда вес сферы при температуре воздуха $T = t + 273$ °C равен $P = mg - \rho V g$, где $\rho = \dfrac{pM}{RT}$ – плотность воздуха при этой температуре, p – давление воздуха, M – его молярная масса. При температуре $T_1 = t_1 + 273$ °C, при которой сфера не давит на чашку весов, $mg = \rho_1 V g$, где $\rho_1 = \dfrac{pM}{RT_1}$. Объединяя записанные выражения, получаем $t_1 = \left(1 - \dfrac{P}{mg}\right)(t + 273\text{ °C}) - 273\text{ °C} = 7$ °C.

Ответ. $t_1 = \left(1 - \dfrac{P}{mg}\right)(t + 273\text{ °C}) - 273\text{ °C} = 7$ °C.

Пример 9. Относительная влажность воздуха в комнате объемом $V = 40$ м^3 равна $f = 70\%$. Найти массу m водяных паров в комнате, если температура воздуха $t = 20$ °C, а давление насыщенного пара при этой температуре $p_{\text{н}} = 2330$ Па. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), молярная масса воды $M = 0{,}018$ кг/моль.

Решение. Парциальное давление водяного пара равно $p = fp_{\text{н}}/100\%$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона $pV = \dfrac{m}{M}R(t + 273\text{ °C})$, записанного для водяного пара, получаем $m = \dfrac{fMp_{\text{н}}V}{100\% R(t + 273\text{°C})} = 0{,}48$ кг.

Ответ. $m = \dfrac{fMp_{\text{н}}V}{100\% R(t + 273°\text{C})} = 0{,}48$ кг.

Пример 10. В комнате при температуре $t = 20$ °C относительная влажность воздуха $f_1 = 20\%$. Какую массу Δm воды нужно испарить для увеличения влажности до величины $f_2 = 60\%$ при той же температуре? Объем комнаты $V = 50$ м^3, плотность насыщенных паров воды при температуре $t = 20$ °C равна $\rho_{\text{н}} = 1{,}73 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3.

Решение. Исходная масса водяных паров в комнате $m = f_1\rho_{\text{н}}V/100\%$, конечная масса $m + \Delta m = f_2\rho_{\text{н}}V/100\%$. Следовательно, $\Delta m = \dfrac{(f_2 - f_1)}{100\%}\rho_{\text{н}}V = 346$ г.

Ответ. $\Delta m = \dfrac{(f_2 - f_1)}{100\%}\rho_{\text{н}}V = 346$ г.

Пример 11. Относительная влажность воздуха при температуре $t_1 = 27$ °C равна $f_1 = 75\%$. Во сколько раз n изменится относительная влажность, если температура упадет до $t_2 = 10$ °C? Давление насыщенного пара при $t_1 = 27$ °C равно $p_{1\text{н}} = 27$ мм рт. ст., при $t_2 = 10$ °C равно $p_{2\text{н}} = 9{,}2$ мм рт. ст.

Решение. Парциальное давление водяного пара при температуре $t_1 = 27$ °C равно $p_1 = f_1 p_{1\text{н}} = 20{,}25$ мм рт. ст. Ненасыщенный пар обладает свойствами идеального газа, поэтому его давление при понижении температуры меняется незначительно. В то же время, давление насыщенного пара сильно зависит от температуры и в температурном диапазоне от $t_1 = 27$ °C до $t_2 = 10$ °C уменьшается почти в 3 раза. Поскольку $p_{2\text{н}} < p_1$, при некоторой температуре, называемой точкой росы, наступает стопроцентная влажность, которая при дальнейшем понижении температуры не меняется, а излишек влаги выделяется в виде росы. Откуда находим $n = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$.

Ответ. $n \approx 1{,}33$.

Пример 12. Горизонтально расположенный цилиндр разделен подвижным поршнем массой $m = 5$ кг на две равные части объемом $V = 1$ л каждая. С одной стороны от поршня находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 100$ °C, с другой – воздух при той же температуре. Цилиндр поставили вертикально так, что снизу оказался пар. На какое расстояние x опустится поршень, если температуру в обеих частях цилиндра поддерживают неизменной? Площадь основания цилиндра $S = 0{,}01$ м^2, давление насыщенного пара при температуре $t = 100\,^\circ\text{C}$ равно $p_\text{н} = 10^5$ Па. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Решение. Когда цилиндр расположен горизонтально, давление воздуха равно давлению насыщенного водяного пара $p_\text{н}$. Записывая уравнение состояния воздуха, имеем $p_\text{н}V = \nu_\text{в}RT$, откуда количество молей воздуха $\nu_\text{в} = \dfrac{p_\text{н}V}{RT}$. Когда цилиндр поставили вертикально, давление водяного пара осталось прежним, а давление воздуха, как это следует из уравнения равновесия поршня, стало равным $p_\text{н} - mg/S$. При перемещении поршня на расстояние x объем воздуха увеличился на xS и уравнение состояния воздуха приняло вид $\left(p_\text{н} - \dfrac{mg}{S}\right)(V + xS) = \nu_\text{в}RT = p_\text{н}V$. Из последнего соотношения легко найти величину x, а именно $x = \dfrac{MgV}{S(p_\text{н}S - Mg)}$. Анализ этого выражения показывает, что оно теряет смысл при $Mg \geq p_\text{н}S/2$. Действительно, максимально возможное перемещение поршня (когда он опустится до дна сосуда и весь пар сконденсируется) составляет V/S. При этом мы пренебрегаем объемом образовавшейся из пара воды, который, как показывает расчет, оказывается очень малым. В самом деле, подставляя в уравнение начального состояния пара числовые данные из условия, находим, что масса пара равна примерно 0,6 г. Следовательно, объем воды, образовавшейся при конденсации всего пара, составит около 0,06% от объема сосуда. Ответ к задаче следует сформулировать следующим образом: $x = \dfrac{V}{S}\cdot\dfrac{mg}{p_\text{н}S - mg}$ при $m < \dfrac{p_\text{н}S}{2g}$; $x = \dfrac{V}{S}$ при $m \geq \dfrac{p_\text{н}S}{2g}$. При данных из условия задачи $x = 5{,}3$ мм.

Ответ. $x = 5{,}3$ мм.

Пример 13. В калориметре находилось $m_1 = 400$ г воды при температуре $t_1 = 5\,^\circ\text{C}$. К ней долили еще $m_2 = 200$ г воды при температуре $t_2 = 10\,^\circ\text{C}$ и положили $m_3 = 400$ г льда при температуре $t_3 = -60\,^\circ\text{C}$. Какая масса m льда оказалась в калориметре после установления теплового равновесия? Удельные теплоемкости воды и льда, соответственно, $c_\text{в} = 4{,}2$ Дж/(г·К), $c_\text{л} = 2{,}1$ Дж/(г·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ Дж/г. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

Решение. Решение задач такого типа необходимо начинать с числовых оценок количеств теплоты, которыми обмениваются различные компоненты системы при установлении теплового равновесия. Определим вначале количество теплоты, которое может отдать вода при остывании до температуры плавления льда ($0\,^\circ\text{C}$): $Q_1 = m_1c_\text{в}t_1 + m_2c_\text{в}t_2 = 16{,}8$ кДж. Количество теплоты, требующееся для нагревания льда до температуры плавления, равно $Q_2 = m_3 c_л |t_3| = 50{,}4$ кДж. Сравнивая эти величины, видим, что количества теплоты, отдаваемой водой при остывании, недостаточно для нагревания льда до $0\ °C$. В то же время количество теплоты, которое может отдать вся вода при замерзании, $Q_3 = (m_1 + m_2)\lambda = 198$ кДж, явно превышает количество теплоты, требующееся для нагревания льда до температуры плавления. Следовательно, при установлении теплового равновесия в калориметре вода остынет до $0\ °C$, часть ее замерзнет и весь лед будет иметь температуру плавления. Обозначив через m_x массу замерзшей воды, запишем уравнение теплового баланса: $m_x \lambda = Q_2 - Q_1$, откуда $m_x = \dfrac{Q_2 - Q_1}{\lambda} \approx 102$ г. Таким образом, после установления теплового равновесия в калориметре образуется смесь воды и льда при нулевой температуре, причем масса льда $m \approx 502$ г.

Ответ. $m \approx 502$ г.

Пример 14. В стакане находится некоторое количество воды, нагретой до температуры $t_1 = 80\ °C$. Когда в стакан кладут металлический шарик, имеющий температуру $t_0 = 20\ °C$, в стакане устанавливается температура $t_2 = 60\ °C$. Какая температура t_3 установится в стакане после того, как в него опустят еще один такой же шарик, имеющий температуру $t_0 = 20\ °C$? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение. Обозначим через $C_в$ и $C_ш$ теплоемкости стакана с водой и шарика соответственно. Уравнения теплового баланса для двух процессов теплообмена имеют вид $C_в(t_1 - t_2) = C_ш(t_2 - t_0)$ (когда положили первый шарик), $C_в(t_2 - t_3) + C_ш(t_2 - t_3) = = C_ш(t_3 - t_0)$ (когда положили второй шарик). Исключая из этих соотношений $C_в$ и $C_ш$, получаем $t_3 = \dfrac{t_2(t_1 - t_0) + t_0(t_1 - t_2)}{2t_1 - t_2 - t_0} = 50\ °C$.

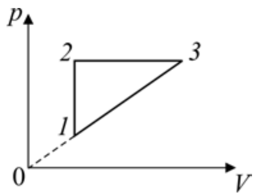
Ответ. $t_3 = \dfrac{t_2(t_1 - t_0) + t_0(t_1 - t_2)}{2t_1 - t_2 - t_0} = 50\ °C$.

Задачи

1. При повышении температуры идеального одноатомного газа на $\Delta T_1 = 150$ К среднеквадратичная скорость его молекул возросла от $v_1 = 400$ м/с до $v_2 = 500$ м/с. На какую величину ΔT_2 нужно дополнительно повысить температуру этого газа, чтобы увеличить среднеквадратичную скорость его молекул от $v_2 = 500$ м/с до $v_3 = 600$ м/с?

2. Плотность смеси азота и кислорода при температуре $t = 17\,°C$ и давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho = 1{,}2$ кг/м^3. Найдите концентрации n_1 и n_2 молекул азота и кислорода в смеси. Молярная масса азота $M_1 = 28$ г/моль, кислорода $M_2 = 32$ г/моль. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

3. На рисунке показан циклический процесс, совершаемый над идеальным газом, причем *1 – 2* – изохорный, *2 – 3* – изобарный процессы. Температуры газа в точках *1* и *3* равны соответственно $T_1 = 300$ К и $T_3 = 400$ К. Найти температуру T_2 газа в точке *2*. Масса газа постоянна.



4. Два одинаковых сосуда, соединенные трубкой, содержат идеальный газ общей массой $m = 6{,}6$ г. Первоначально температура газа в обоих сосудах одинакова. Затем газ в первом сосуде нагревают и поддерживают при температуре $t_1 = 27\,°C$, а газ во втором сосуде нагревают и поддерживают при температуре $t_2 = 87\,°C$. На какую величину Δm изменится масса газа в первом сосуде? Объем трубки не учитывать.

5. В комнате объемом $V = 60$ м^3 температура с $t_1 = 17\,°C$ поднялась до $t_2 = 27\,°C$. На какую величину Δm изменилась масса воздуха в комнате, если атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па? Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

6. Закрытый с обоих концов горизонтальный цилиндр заполнен идеальным газом при температуре $t = 27\,°C$ и разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные части длиной $L = 50$ см каждая. На какую величину Δt нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние $l = 20$ см при неизменной температуре газа во второй половине цилиндра?

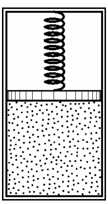
7. Закрытый сосуд заполнен газом при температуре $T_0 = 300$ К и давлении $p_0 = 150$ кПа. Сосуд снабжен предохранительным клапаном, открывающимся при давлении, превышающем $p_м = 200$ кПа. Сосуд нагрели до температуры $T_1 = 600$ К. При этом из него вышло $m = 10$ г газа. Определить массу m_0 газа в сосуде до его нагрева.

8. В вертикально расположенном цилиндре постоянного сечения под невесомым подвижным поршнем находится воздух. На поршень помещают гирю массой $m = 10$ кг. На какую величину Δh переместится поршень, если температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, площадь поршня $S = 100$ см^2, расстояние от ненагруженного поршня до дна цилиндра $h_0 = 100$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

9. В цилиндре под подвижным поршнем находится идеальный газ, поддерживаемый при постоянной температуре. Когда на поршень положили груз массой M_1, объем газа уменьшился в n раз. Какой массы M_2 груз нужно положить на поршень дополнительно, чтобы объем газа уменьшился еще в k раз?

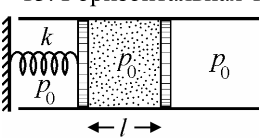
10. Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. В обеих частях сосуда содержится один и тот же идеальный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H_1 = 30$ см. Сосуд переворачивают так, что дном становится его верхняя плоскость. В новом положении расстояние между дном сосуда и поршнем составляет $H_2 = 20$ см. Найти отношение α массы газа, содержавшегося в той части сосуда, которая первоначально находилась вверху, к массе газа, содержавшегося в другой части сосуда. Высота сосуда $L = 60$ см. Температуру считать постоянной, толщиной поршня пренебречь.

11. В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При некоторой температуре, одинаковой во всем цилиндре, объем V_1 нижней части цилиндра равен объему V_2 верхней части. Каким будет отношение объемов $\alpha = V_1/V_2$, если температуру газа увеличить в $n = 2$ раза? Толщиной поршня пренебречь.



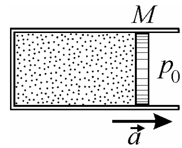
12. В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится идеальный газ. В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии пружиной, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра, причем пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. Во сколько раз n возрастет объем газа, если увеличить его температуру в $m = 2$ раза? Толщиной поршня пренебречь.

13. Горизонтальная трубка площадью сечения S, открытая с двух концов, закреплена неподвижно. В ней находятся два поршня, один из которых соединен пружиной жесткостью k с неподвижной стенкой. В исходном состоянии давление воздуха между поршнями равно атмосферному давлению p_0, пружина не деформирована и расстояние между поршнями равно l. Правый поршень медленно переместили вправо на расстояние l. Какое давление воздуха p_1 установилось при этом между поршнями? Температуру воздуха считать постоянной, трением пренебречь.



14. В баллоне, снабженном предохранительным клапаном, находится идеальный газ под давлением $p = 0{,}5 \cdot 10^6$ Па при температуре $t = 27$ °С. Клапан открывается, если давление в баллоне превышает $p_1 = 0{,}6 \cdot 10^6$ Па. До какой температуры t_1 нужно нагреть баллон, чтобы из него вытекла часть газа, масса которой составляет $\beta = 0{,}01$ первоначальной массы?

15. В горизонтальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой $M = 20$ кг и площадью $S = 100$ см^2 находится идеальный газ. Расстояние от поршня до дна сосуда $l = 55$ см. На какое расстояние Δl и в какую сторону переместится поршень, если цилиндр начать двигать с ускорением $a = 5$ м/с^2, как показано на рисунке. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температура газа не изменяется. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь. Считать, что при сообщении цилиндру ускорения колебания поршня не возникают.



16. Какой массой m должно обладать сферическое тело радиуса $r = 1$ м, чтобы оно могло плавать в атмосфере Венеры? Атмосфера Венеры состоит из углекислого газа, давление у поверхности $p_0 = 9$ МПа, температура $t = 527$ °С. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Молярная масса углекислого газа $M = 44$ г/моль.

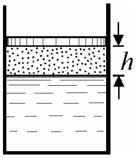
17. Воздух в комнате объемом $V = 50$ м^3 имеет температуру $t = 27$ °С и относительную влажность $f_1 = 30\%$. Сколько времени τ должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\mu = 2$ кг/ч, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $f_2 = 70\%$? Давление насыщенных паров воды при $t = 27$ °С равно $p_н = 3665$ Па, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), молярная масса воды $M = 18$ г/моль.

18. Определить массу воды m, которую теряет человек за $\tau = 1$ ч в процессе дыхания, исходя из следующих данных. Относительная влажность вдыхаемого воздуха $f_1 = 60\%$, относительная влажность выдыхаемого воздуха $f_2 = 100\%$. Человек делает в среднем $n = 15$ вдохов в минуту, вдыхая каждый раз $V = 2{,}5$ л воздуха. Температуру вдыхаемого и выдыхаемого воздуха принять $t = 36$ °С; давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_н = 5{,}9$ кПа. Молярная масса воды $M = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

19. В стеклянную банку объемом 1 л налили 0,5 л воды при температуре $t_1 = 20$ °С и герметично закрыли завинчивающейся крышкой. Затем банку нагрели до температуры $t_2 = 100$ °С. Найти силу взаимодействия F между банкой и крышкой при достижении этой температуры. Площадь крышки $S = 50$ см^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Влажностью атмосферного воздуха, а также массой крышки пренебречь.

20. Трубка с поперечным сечением S, заполненная водяным паром под давлением p, запаяна с двух концов и расположена горизонтально. При этом находящийся в трубке поршень делит трубку на две равные части. Трубку ставят вертикально, в результате чего поршень смещается, и объем под ним уменьшается в четыре раза. Найти массу поршня m, если давление насыщенного водяного пара равно $2p$. Трением и толщиной поршня пренебречь, температуру пара считать постоянной. Ускорение свободного падения g.

21. В вертикальном цилиндре, наполовину заполненном водой, под подвижным поршнем заключен воздух. Поршень находится в равновесии, когда давление внутри цилиндра равно утроенному атмосферному давлению. При температуре $t_1 = 6$ °С расстояние между поршнем и поверхностью воды $h = 10$ см. На каком расстоянии H от поверхности воды окажется поршень, если цилиндр нагреть до температуры $t_2 = 100$ °С? Атмосферное давление считать нормальным. Давлением водяных паров при температуре $t_1 = 6$ °С и изменением объема воды за счет испарения пренебречь.



22. В чайник налили воды при температуре $t = 10$ °С и поставили на электроплитку. Через время $\tau_1 = 10$ мин. вода закипела. Через какое время τ_2 вода полностью выкипит? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}3$ МДж/кг. Температура кипения воды $t_к = 100$ °С. Теплоемкостью чайника и потерями теплоты пренебречь.

23. В теплоизолированном сосуде в начальный момент находится одноатомный газ при температуре $T_0 = 300$ К и кусочек железа массой $m = 0{,}2$ кг, нагретый до температуры $T_1 = 500$ К. Начальное давление газа $p_0 = 10^5$ Па, его объем $V_0 = 1000$ см^3, удельная теплоемкость железа $c = 0{,}45$ кДж/(кг·К). Найти давление газа в равновесном состоянии, считая объем газа неизменным.

24. Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $W = 500$ Вт. При включении нагревателя на время $t_1 = 2$ мин. температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении понизилась за время $t_2 = 1$ мин. на ту же величину ΔT. Какова масса m нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

25. В стакане находится некоторое количество воды, нагретой до температуры $t_1 = 60$ °С. В стакан кладут металлический шарик, имеющий температуру $t_0 = 20$ °С, а некоторое время спустя – еще два таких же шарика при той же температуре. В результате в стакане устанавливается температура $t_3 = 50$ °С. Какова была установившаяся температура t_2 в стакане после того, как в него был опущен первый шарик? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

2.2. Термодинамика

Теоретический материал

Термодинамика – это наука о наиболее общих тепловых свойствах макроскопических тел. Термодинамический подход не требует каких-либо конкретных предположений о строении вещества, поэтому выводы термодинамики имеют универсальный характер. Законы термодинамики справедливы для всех тел независимо от их внутреннего строения.

Термодинамическая система – это совокупность макроскопических тел, которые могут взаимодействовать между собой и другими телами (внешней средой). Термодинамическая система состоит из настолько большого числа структурных частиц (атомов и молекул), чтобы ее состояние можно было характеризовать макроскопическими параметрами – плотностью, давлением, концентрацией веществ, образующих систему, и т.д.

Термодинамическая система находится в равновесии, если ее параметры не меняются во времени и в системе нет потоков энергии и вещества. Для равновесных термодинамических систем вводится понятие температуры как параметра состояния, имеющего одинаковое значение для всех макроскопических частей системы.

Термодинамические системы, не обменивающиеся с другими системами ни энергией, ни веществом, называются изолированными. Если система не изолирована, то ее состояние может меняться; изменение состояния системы называется термодинамическим процессом.

Внутренняя энергия системы. Все макроскопические тела наряду с механической энергией обладают также энергией, зависящей от внутреннего состояния тел. Эту энергию называют внутренней. С точки зрения молекулярно-кинетической теории *внутренняя энергия* макроскопического тела равна сумме кинетических энергий *хаотического* движения всех молекул (или атомов) и потенциальных энергий взаимодействия молекул *друг с другом* (но не с молекулами других тел).

Внутренняя энергия идеального газа равна *кинетической энергии* хаотического движения молекул, поскольку потенциальная энергия взаимодействия молекул равна нулю. Наиболее просто рассчитывается внутренняя энергия *одноатомных газов*, состоящих из отдельных атомов, а не молекул. Одноатомными являются инертные газы – гелий, неон, аргон и др. С точки зрения механики одноатомный газ представляет собой систему частиц, которые совершают только поступательное движение. Молекулы двух- (и более) атомных газов могут совершать и другие виды движения – вращательное и колебательное, – с которыми тоже связана определенная энергия.

Поскольку средняя кинетическая энергия молекулы одноатомного газа равна $\overline{E} = \frac{3}{2}kT$, внутренняя энергия одного моля такого газа

$$U = \frac{3}{2}N_{\text{A}}kT = \frac{3}{2}RT. \tag{2.2.1}$$

Для $\nu = \frac{m}{M}$ молей идеального одноатомного газа внутренняя энергия

$$U = \frac{3}{2}\nu RT. \qquad (2.2.2)$$

Внутренняя энергия данной массы идеального газа зависит только от температуры и не зависит ни от давления, ни от объема газа. Для неидеальных газов, а также других веществ это, вообще говоря, неверно.

Количество теплоты и работа как меры изменения внутренней энергии. Расчет работы газа с помощью pV-диаграмм. Понятия об энергии и мере ее изменения – работе, введенные в механике, получают в термодинамике дальнейшее развитие.

Необходимым условием совершения телом (или системой тел) работы является перемещение тела под действием сил. О работе можно говорить только тогда, когда происходит изменение механического состояния тела (или системы), причем речь идет о перемещении макроскопических частей системы относительно друг друга.

Различают работу A, которую совершает система над внешними телами, и работу A', которая совершается внешними телами над системой. Работа A принимается положительной, работа A' – отрицательной, причем $A = -A'$.

Рассмотрим работу расширения газа, т.е. работу, которую газ совершает против внешнего давления, создаваемого поршнем. Элементарная работа ΔA определяется формулой

$$\Delta A = p \cdot \Delta V, \qquad (2.2.3)$$

где p – внешнее давление, ΔV – приращение объема газа. Такой же формулой выражается элементарная работа, совершаемая не только газом, но и любым телом против внешнего давления.

При расширении газ совершает положительную работу против внешних сил ($\Delta V > 0$). При сжатии газа совершается отрицательная работа ($\Delta V < 0$). Она совершается теми внешними телами, которые создали внешнее давление.

Работа расширения при изменении объема газа от V_1 до V_2 равна сумме элементарных работ. Например, в случае изобарного процесса, при котором $p = \text{const}$, работа расширения

$$A = p \cdot (V_2 - V_1), \qquad (2.2.4)$$

где V_1 и V_2 – начальный и конечный объемы газа. При изобарном расширении работа изображается на pV-диаграмме площадью прямоугольника (см. рис. 2.2.1).

Работа расширения при любом процессе измеряется площадью на pV-диаграмме, ограниченной кривой процесса, осью абсцисс и вертикальными прямыми $V = V_1$ и $V = V_2$ (см. рис. 2.2.2).

Работа, совершенная системой в том или ином процессе, является *мерой изменения ее энергии* в этом процессе. Если над телом совершается работа, то это может привести к увеличению любого вида энергии данного тела, как внутренней, так и энергии упорядоченного (поступательного) движения.

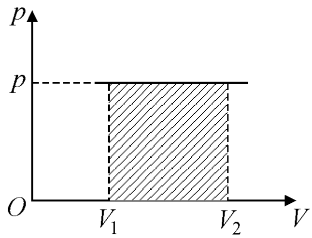


Рис. 2.2.1. Работа газа
при изобарном процессе

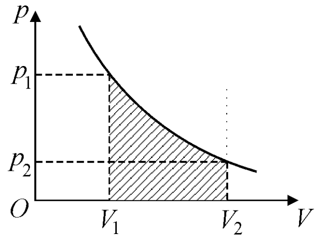


Рис. 2.2.2. Работа газа
при произвольном процессе

Существует также другая форма передачи энергии, при которой осуществляется непосредственный обмен энергией между хаотически движущимися частицами взаимодействующих тел. Процесс передачи энергии без совершения работы называется теплообменом. *Мерой энергии*, переданной в форме теплоты *в процессе теплообмена*, служит величина, называемая *количеством теплоты*.

Теплота, как и работа, является не видом энергии, а формой ее передачи. Теплота и работа обладают тем общим свойством, что они определены лишь в процессе передачи, и их численные значения зависят от вида этого процесса.

Теплоемкостью тела называется физическая величина, равная количеству теплоты ΔQ, которое необходимо сообщить телу для нагревания его на один градус:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \qquad (2.2.5)$$

Теплоемкость тела зависит от его массы, химического состава, термодинамического состояния и вида того процесса, в котором телу передается энергия в форме теплоты.

Удельной теплоемкостью c называется теплоемкость единицы массы однородного вещества

$$c = \frac{C}{m}, \qquad (2.2.6)$$

где m – масса вещества. *Молярной теплоемкостью* $C_{\text{М}}$ называется теплоемкость одного моля вещества:

$$C_{\text{М}} = cM, \qquad (2.2.7)$$

где M – молярная масса вещества. Удельная и молярная теплоемкости не являются постоянными величинами и в таблицах теплоемкостей указываются условия, при которых данные таблиц справедливы.

Понятие об адиабатическом процессе. *Адиабатическим процессом* называется термодинамический процесс, который осуществляется в системе без теплообмена ее с внешними телами. При адиабатическом процессе $\Delta Q = 0$; теплоемкость вещества в таком процессе равна нулю.

Первый закон термодинамики – это закон сохранения энергии, обобщенный на тепловые явления. Согласно этому закону, количество теплоты, полученное системой, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил:

$$\Delta Q = \Delta U + A. \tag{2.2.8}$$

Применение первого закона термодинамики к изотермическому, изохорному и изобарному процессам. Теплоемкость одноатомного идеального газа при изохорном и изобарном процессах. Первый закон термодинамики применительно к *изотермическому* процессу в идеальном газе имеет вид $\Delta Q = A.$ Внутренняя энергия идеального газа при этом не меняется, поскольку $\Delta T = 0$ и $\Delta U = 0.$ Вся подведенная теплота расходуется на работу газа против внешнего давления.

При *изохорном* процессе количество теплоты ΔQ идет только на увеличение внутренней энергии газа: $\Delta Q = \Delta U,$ поскольку работу газ не совершает. Теплоемкость газа в таком процессе называется *теплоемкостью при постоянном объеме* и обозначается $C_V.$ Для идеального одноатомного газа

$$C_V = \frac{3}{2}\nu R. \tag{2.2.9}$$

При изобарном процессе количество теплоты, подводимое к газу, расходуется и на увеличение внутренней энергии, и на работу расширения, которую совершает газ против внешнего давления. Поскольку $A = p\cdot(V_2 - V_1) = \nu RT_2 - \nu RT_1 = \nu R\Delta T,$ теплоемкость идеального газа в таком процессе, называемая *теплоемкостью при постоянном давлении* $C_p,$

$$C_p = \frac{3}{2}\nu R + \nu R = \frac{5}{2}\nu R. \tag{2.2.10}$$

Теплоемкость газа в изобарном процессе превышает его теплоемкость в изохорном процессе на величину работы расширения. Для одного моля идеального газа разность этих теплоемкостей равна универсальной газовой постоянной $R.$

При адиабатическом процессе первый закон термодинамики принимает вид $A = -\Delta U.$ В отсутствие теплообмена с внешней средой работа, которую совершает газ против внешнего давления, происходит за счет убыли его внутренней энергии. Адиабатически расширяющийся идеальный газ охлаждается.

Необратимость процессов в природе. В термодинамике большую роль играет понятие обратимого процесса. Обратимым процессом называется такое изменение состояния термодинамической системы, которое, будучи проведено в обратном направлении, возвращает ее в исходное состояние так, чтобы система прошла через те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе, но в обратной последовательности, а состояние всех тел вне системы, с которыми она взаимодействовала, осталось в итоге неизменным. Важно, что при совершении обратимого процесса сначала в прямом, а затем в обратном направлении в исходное состояние возвращается не только система, но и все внешние тела, взаимодействовавшие с системой. Необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность.

Равновесный процесс – это идеализированный процесс, при проведении которого в каждый момент не нарушается равновесие термодинамической системы. Он может быть представлен как непрерывная последовательность равновесных состояний. Это означает, что процесс должен быть медленным по сравнению с процессами установления термодинамического равновесия в системе. Строго говоря, только бесконечно медленные процессы являются равновесными.

Все реальные термодинамические процессы протекают с конечной скоростью и поэтому являются неравновесными. Они сопровождаются трением, диффузией и теплообменом с внешней средой при конечной разности температур системы и внешней среды. Следовательно, *все реальные процессы необратимы.*

Второй закон термодинамики. Многочисленные наблюдения позволили установить, что тепловым процессам присуща определенная направленность, которая не вытекает из первого закона термодинамики. Например, в результате теплообмена между по-разному нагретыми телами всегда происходит выравнивание их температур, хотя с точки зрения первого закона термодинамики одинаково возможен как переход теплоты от более нагретого тела к менее нагретому, так и обратный переход. Первый закон термодинамики формально допускает создание вечного двигателя второго рода. Так называется двигатель, в котором рабочее тело, совершая круговой процесс, получает энергию в форме теплоты от одного внешнего тела и целиком передает ее в форме работы другому внешнему телу.

Невозможность создания вечного двигателя второго рода является утверждением, вытекающим из обобщения многочисленных опытов. Оно называется *вторым законом термодинамики* и имеет несколько эквивалентных формулировок. Приведем одну из них:

Невозможен периодический процесс, *единственным результатом* которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

Второй закон термодинамики указывает на необратимость процесса превращения работы в теплоту. В формулировке этого закона особое значение имеют слова «единственным результатом». Запреты, которые накладываются вторым законом термодинамики, снимаются, если процессы, о которых идет речь, не являются единственными. Например, передача тепла от менее нагретого тела более нагретому возможна, если при этом происходит как минимум еще один процесс (в холодильной установке).

Физические основы работы тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение. *Тепловым двигателем* называется устройство, которое превращает внутреннюю энергию топлива в механическую энергию. Энергия, которая выделяется при сгорании топлива, передается путем теплообмена рабочему телу (обычно газу). При расширении рабочего тела совершается работа против внешних сил и приводится в движение соответствующий механизм.

Основой тепловых двигателей являются круговые процессы. Круговым процессом или циклом называется термодинамический процесс, в результате которого рабочее тело возвращается в исходное состояние. На диаграммах состояния (pV-, pT-, VT-диаграммах) циклические процессы изображаются в виде замкнутых кривых.

Работа против внешнего давления, которую совершает рабочее тело в произвольном круговом процессе, измеряется площадью, ограниченной кривой этого процесса на pV-диаграмме. Прямым циклом называется круговой процесс, в котором рабочее тело совершает положительную работу за счет сообщенной ему теплоты. На pV-диаграмме прямой цикл изображается замкнутой кривой, которая обходится по часовой стрелке. Обратным циклом называется круговой процесс, в котором над рабочим телом совершается работа и от него отводится эквивалентное количество теплоты. На pV-диаграмме обратный цикл изображается замкнутой кривой, которая обходится против часовой стрелки.

В тепловом двигателе рабочее тело совершает прямой цикл, а в холодильной установке – обратный.

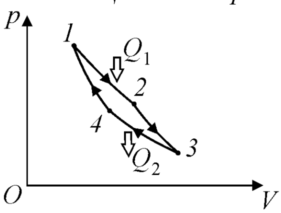


Рис. 2.2.3. Цикл Карно

Циклом Карно называется прямой обратимый круговой процесс (см. рис. 2.2.3), состоящий из двух изотерм $1-2$ и $3-4$ и двух адиабат $2-3$ и $4-1$. При изотермическом расширении $1-2$ рабочее тело получает от *нагревателя* – источника энергии с постоянной температурой T_1 – количество теплоты Q_1. При изотермическом сжатии $3-4$ рабочее тело отдает *холодильнику*, имеющему постоянную температуру T_2 ($T_2 < T_1$), количество теплоты Q_2. При адиабатических расширении и сжатии энергия к рабочему телу извне не поступает и эти процессы происходят за счет изменения его внутренней энергии.

Коэффициентом полезного действия (*КПД*) произвольного цикла называется отношение работы A, совершенной рабочим телом в прямом цикле, к количеству теплоты Q_1, сообщенному рабочему телу нагревателем:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}. \qquad (2.2.11)$$

КПД обратимого цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и определяется только температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2:

$$\eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (2.2.12)$$

Согласно теореме Карно, КПД произвольного обратимого цикла не может превышать КПД обратимого цикла Карно, осуществленного с теми же температурами T_1 и T_2 нагревателя и холодильника. КПД произвольного необратимого цикла всегда меньше КПД обратимого цикла Карно, проведенного между температурами T_1 и T_2.

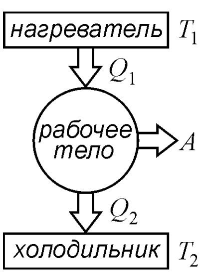


Рис. 2.2.4. Схема теплового двигателя

Любой тепловой двигатель независимо от его конструктивных особенностей состоит из трех основных частей – рабочего тела, нагревателя и холодильника (см. рис. 2.2.4). Рабочее тело – газ или пар – при расширении совершает работу, получая от нагревателя некоторое количество теплоты Q_1. Температура T_1 нагревателя остается при этом постоянной за счет сгорания топлива. При сжатии рабочее тело передает некоторое количество теплоты Q_2 холодильнику – телу постоянной температуры T_2, меньшей, чем T_1. Давление газа при сжатии ниже, чем при расширении, что обеспечивает полезную работу двигателя.

Реальные тепловые двигатели работают по разомкнутому циклу: после расширения газ выбрасывается и сжимается новая порция. Однако тепловые процессы в рассмотренном выше замкнутом цикле, когда сжимается и расширяется одна и та же порция газа, являются хорошей аппроксимацией для процессов в реальном двигателе и могут быть использованы для расчета его КПД.

Примеры решения задач

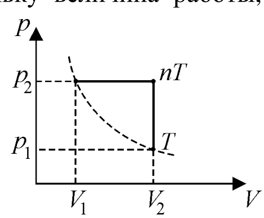
Пример 1. В сосуде емкостью $V = 5$ л находится гелий под давлением $p = 0{,}3$ МПа. Какова внутренняя энергия U газа в сосуде?

Решение. Из уравнения состояния газа $pV = \nu RT$ находим его температуру: $T = \dfrac{pV}{\nu R}$. Поскольку гелий – одноатомный газ, его внутренняя энергия $U = \dfrac{3}{2}\nu RT$. Следовательно, $U = \dfrac{3}{2}pV = 2{,}25$ кДж.

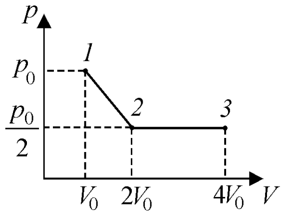
Ответ. $U = \dfrac{3}{2}pV = 2{,}25$ кДж.

Пример 2. Газ, взятый в количестве $\nu = 5$ моль, сначала нагревают при постоянном объеме так, что абсолютная температура газа возрастает в $n = 3$ раза, а затем сжимают при постоянном давлении, доводя температуру до первоначальной $T = 100$ К. Какая работа A совершена при сжатии? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Решение. График процесса изображен на рисунке. Поскольку величина работы, совершенной над газом, численно равна площади под кривой зависимости давления от объема, в нашем случае имеем $A = p_2(V_1 - V_2) = p_2V_1 - p_2V_2$. Из уравнения состояния газа следует, что $p_1V_1 = \nu RT$, $p_2V_1 = n\nu RT$, $p_2V_2 = \nu RT$. Объединяя записанные выражения, получаем $A = (n-1)\nu RT = 8310$ Дж.



Ответ. $A = (n-1)\nu RT = 8310$ Дж.



Пример 3. Найти работу A, совершенную идеальным газом в ходе процесса $1-2-3$. В состоянии 1 давление газа равно $p_0 = 10^5$ Па, а объем $V_0 = 1$ л. В состоянии 2 давление газа вдвое меньше, а объем вдвое больше. Процесс 2 – 3 представляет собой изобарное расширение до объема $4V_0$.

Решение. Работа газа численно равна площади под кривой, отображающей рассматриваемый процесс на pV-диаграмме. Используя формулы для площади треугольника и прямоугольника, получаем $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{p_0V_0}{2} + \frac{p_0}{2}3V_0$, или $A = \frac{7}{4}p_0V_0 = 175$ Дж.

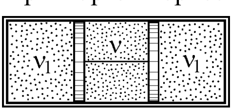
Ответ. $A = \frac{7}{4}p_0V_0 = 175$ Дж.

Пример 4. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде, закрытом подвижным поршнем массой $m = 4$ кг, содержится один моль одноатомного газа. На какую величину Δh передвинется поршень, если газу сообщить количество теплоты $Q = 9{,}8$ Дж? Массой газа по сравнению с массой поршня пренебречь, атмосферное давление не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Поскольку расширение газа происходит при постоянном давлении, $Q = \frac{5}{2}R\Delta T$, где ΔT – изменение температуры газа. Из уравнения изобарного процесса следует, что $R\Delta T = p\Delta V$, где $p = \frac{mg}{S}$ – давление газа, $\Delta V = S\Delta h$ – изменение его объема. Объединяя записанные выражения, получаем $\Delta h = \frac{2Q}{5mg} = 0{,}1$ м.

Ответ. $\Delta h = 0{,}1$ м.

Пример 5. Горизонтально расположенный цилиндр разделен двумя подвижными



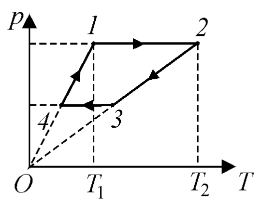
поршнями, связанными нитью, на три равные части объемом $V = 8{,}3$ л каждая. В центральной части находится $\nu = 0{,}533$ моля гелия, а в левой и правой частях – по $\nu_1 = 0{,}5$ моля азота ($\nu_1 < \nu$). Температура всех газов равна $T_0 = 300$ К. Когда гелию сообщили количество теплоты $Q = 100$ Дж, поддерживая температуру азота постоянной, нить оборвалась. Найти максимальное натяжение $F_{\max}$, которое выдерживает нить. Площади поршней $S = 50$ см^2, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(К·моль). Трение между поршнями и цилиндром пренебрежимо мало.

Решение. Поскольку нагрев гелия происходит при постоянном объеме, сообщенное ему количество тепла идет на увеличение его внутренней энергии: $Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$. Следовательно, изменение его температуры $\Delta T = \frac{2Q}{3\nu R}$. Давление азота $p_1 = \frac{\nu_1 R}{V}T_0$, давление гелия после нагревания $p = \frac{\nu R}{V}(T_0 + \Delta T)$. Из условия равновесия поршней следует, что сила натяжения нити $F = S(p - p_1)$. Объединяя записанные выражения, получаем $F_{\max} = \frac{SR}{V}\left[(\nu - \nu_1)T_0 + \frac{2Q}{3R}\right] = 90$ Н.

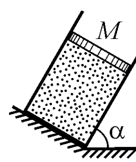
Ответ. $F_{\max} = \frac{SR}{V}\left[(\nu - \nu_1)T_0 + \frac{2Q}{3R}\right] = 90$ Н.

Задачи

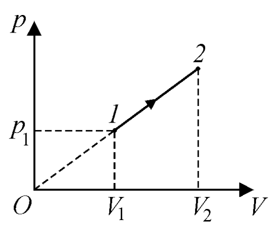
1. С массой $m = 80$ г идеального газа, молярная масса которого $M = 28$ г/моль, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Какую работу A совершает такой двигатель за один цикл, если $T_1 = 300$ К, $T_2 = 1000$ К, а при нагревании на участке *4 – 1* давление газа увеличивается в 2 раза? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).



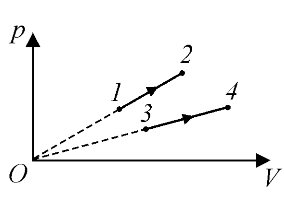
2. В закрепленном под углом $\alpha = 60°$ к горизонту цилиндре может без трения двигаться поршень массой $M = 10$ кг и площадью $S = 50$ см^2. Под поршнем находится идеальный одноатомный газ. Газ нагревают так, что поршень перемещается на расстояние $l = 5$ см. Какое количество теплоты Q было сообщено газу? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



3. Найти количество теплоты ΔQ, переданное идеальному одноатомному газу при переводе его из состояния *1* в состояние *2*, как показано на рисунке. При расчете принять $p_1 = 100$ кПа, $V_1 = 2$ л, $V_2 = 4$ л.

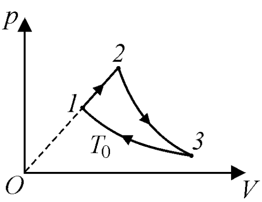


4. На рисунке изображены pV-диаграммы двух процессов, проводимых над одним и тем же идеальным одноатомным газом. Масса газа, участвующего в процессе *1 – 2*, в $k = 2$ раза больше, чем масса газа, с которым проводится процесс *3 – 4*. Температура в точке *1* равна температуре в точке *3*,



а температура в точке *2* равна температуре в точке *4*. Найти отношение n количеств теплоты, получаемых газом в процессах *1 – 2* и *3 – 4*.

5. С идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс. Из начального состояния $p_2 = 1{,}6$ МПа и $V_1 = 2$ л газ расширяется при постоянном давлении до объема $V_2 = 16$ л. Затем при постоянном объеме V_2 давление газа уменьшается до такой величины $p_1 = 50$ кПа, что из состояния p_1, V_2 газ приводится в начальное состояние адиабатическим сжатием. Найти работу A, совершенную газом за цикл.



6. С одним молем идеального одноатомного газа проводят цикл, показанный на рисунке. На участке *1 – 2* объем газа увеличивается в $m = 2$ раза. Процесс *2 – 3* – адиабатическое расширение, процесс *3 – 1* – изотермическое сжатие при температуре $T_0 = 300$ К. Найти работу A газа на участке *2 – 3*. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

7. Идеальный газ переводят из состояния p_1, V_1 в состояние p_2, V_2 двумя разными способами. В первый раз переход совершается сначала по изобаре, а затем по изохоре, а во второй – сначала по изохоре, а затем по изобаре. Найти разность количеств теплоты ΔQ, выделившихся при этих переходах. При расчетах положить $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, $V_1 = 4$ м^3, $p_2 = 10^5$ Па, $V_2 = 2$ м^3.

8. С идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс. Масса газа $m = 60$ г, его молярная масса $M = 20$ г/моль. Из начального состояния газ адиабатически расширяется, причем его температура изменяется от $T_1 = 400$ К до $T_2 = 64$ К. Затем газ изобарически сжимают при давлении $p_0 = 200$ кПа до первоначального объема $V_0 = 500$ см^3. Цикл замыкается изохорой $V = V_0$. Каково суммарное количество теплоты Q, которое газ получил и отдал за цикл?

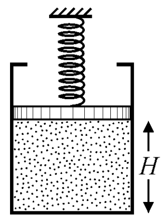
9. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 0{,}5$ м^3 содержит одноатомный газ, молярная масса которого $M = 4$ г/моль. В сосуд вводится дополнительно $m = 1$ г такого же газа при температуре $T = 400$ К. На какую величину Δp изменится давление? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

10. Два сосуда содержат одноатомный идеальный газ. Масса газа в первом сосуде $m_1 = 20$ г, его температура $T_1 = 300$ К. Второй сосуд содержит такой же газ массой $m_2 = 30$ г при температуре $T_2 = 400$ К. Сосуды соединяют трубкой. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом с окружающей средой, найти температуру газа T, установившуюся в сосудах.

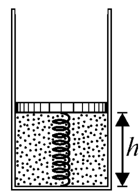
11. Сосуд содержит $m = 1{,}28$ г гелия при температуре $t = 27$ °С. Во сколько раз β изменится среднеквадратичная скорость молекул гелия, если при его адиабатическом сжатии совершить работу $A = 252$ Дж? Молярная масса гелия $M = 4$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

12. Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое количество атомов гелия, соединены трубкой с краном. В первом сосуде среднеквадратичная скорость атомов равна $\upsilon_1 = 500$ м/с, во втором – $\upsilon_2 = 1000$ м/с. Какова будет среднеквадратичная скорость υ_3 атомов гелия, если открыть кран и сделать сосуды сообщающимися? Сосуды и трубка теплоизолированы.

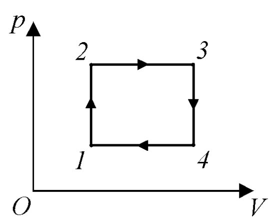
13. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под поршнем весом $P = 20$ Н содержится идеальный одноатомный газ. Между поршнем и неподвижной опорой располагается пружина, жесткость которой $k = 200$ Н/м. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H = 30$ см, при этом пружина не деформирована. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы поршень переместился на расстояние $\Delta h = 10$ см? Атмосферное давление не учитывать.



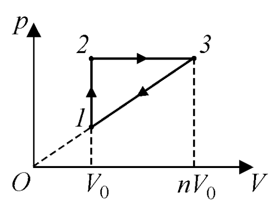
14. Невесомый поршень соединен с дном цилиндрического сосуда пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. В сосуде под поршнем находится идеальный одноатомный газ. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда составляет $h = 0{,}2$ м. Найти количество теплоты ΔQ, которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда удвоилось. Считать, что пружина не деформирована при $h = 0$. Атмосферное давление не учитывать.



15. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Отношение максимальной температуры газа к минимальной в этом цикле равно $n = 4$, температуры в точках *2* и *4* совпадают. Найти коэффициент полезного действия двигателя η.



16. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Отношение максимального объема газа к минимальному в этом цикле равно $n = 3$. Найти коэффициент полезного действия двигателя η.



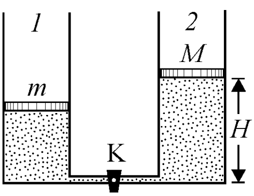
17. Температура нагревателя идеальной тепловой машины $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К, количество теплоты, получаемое от нагревателя за цикл

$Q = 400$ Дж, число циклов в секунду $n = 2.$ С какой скоростью v будет перемещаться по горизонтальной дороге тележка, приводимая в движение такой машиной, если сила сопротивления $F = 100$ Н? Скорость тележки считать постоянной.

18. Тепловая машина с максимально возможным КПД имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой при $t_1 = 100\,°\mathrm{C}$, а в качестве холодильника – сосуд со льдом при $t_2 = 0\,°\mathrm{C}$. Какая масса льда m растает при совершении машиной работы $A = 10$ Дж? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ Дж/г.

19. Когда легковой автомобиль едет с постоянной скоростью по горизонтальному шоссе, расход бензина составляет $\mu_1 = 7$ л/100 км. Каков будет расход бензина μ_2, если этот автомобиль поедет с той же скоростью вверх по наклонному участку шоссе, образующему угол $\alpha = 0{,}01$ рад с горизонтом? Качество дорожного покрытия на горизонтальном и наклонном участках шоссе одинаково. Масса автомобиля $M = 1000$ кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$, удельная теплота сгорания бензина $q = 42$ МДж/кг, плотность бензина $\rho = 0{,}7$ кг/л. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. При расчетах положить $\sin\alpha \approx \alpha$.

20. В цилиндрическом сосуде *1* под поршнем массой $m = 5$ кг находится одноатомный идеальный газ. Сосуд *1* соединен трубкой, снабженной краном, с таким же сосудом *2*, в котором под поршнем массой $M = 10$ кг находится такой же газ. Сосуды и трубка теплоизолированы. В начальном состоянии кран К закрыт, температура газа в обоих сосудах одинакова, поршень в сосуде *2* расположен на высоте $H = 10$ см от дна. На какое расстояние Δh передвинется поршень в сосуде *1* после открывания крана? Объемом трубки с краном пренебречь, атмосферное давление не учитывать.



3. Электродинамика

3.1. Электрическое поле

Теоретический материал

Электростатикой называется раздел электродинамики, в котором рассматриваются взаимодействия неподвижных в инерциальной системе отсчета электрически заряженных тел или частиц.

Электрические заряды. Элементарный электрический заряд. Физическая величина, характеризующая свойство тел или частиц вступать в электромагнитные взаимодействия и определяющая значения сил, возникающих при таких взаимодействиях, называется *электрическим зарядом*. Электрические заряды делятся на *положительные* и *отрицательные*. Положительный заряд возникает, например, на стекле, натертом кожей, отрицательный – на янтаре, натертом шерстью.

Носителями электрических зарядов являются элементарные частицы и их античастицы. Стабильными носителями положительного заряда являются протон и позитрон, отрицательного – электрон и антипротон. Другие элементарные частицы, имеющие электрические заряды, являются нестабильными, их время «жизни» чрезвычайно мало.

В Международной системе за единицу заряда принят *кулон* (Кл). Кулон – это заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 ампер (А). (Определение единицы силы тока 1 А будет дано в разделе 3.3).

Электрический заряд протона и электрона по абсолютному значению равен $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл. Массы протона и электрона равны соответственно $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг и $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Электрический заряд протона и электрона называется *элементарным зарядом*.

Электрический заряд любого заряженного тела равен целому числу элементарных зарядов. В электрически нейтральном (незаряженном) теле содержится равное число элементарных зарядов противоположного знака. Электрически нейтральными являются неионизованные атомы и молекулы.

Если электрическая нейтральность тела нарушена, то оно называется *наэлектризованным* или заряженным. Для электризации тела необходимо, чтобы на нем был создан избыток (недостаток) элементарных зарядов того или другого знака. Электризация тел осуществляется различными способами, простейшим из которых является электризация соприкосновением. Этот способ основан на том, что при соприкосновении некоторых тел, когда происходит контакт между разнородными веществами, валентные электроны могут переходить из одного вещества в другое.

Закон сохранения электрического заряда. При всех явлениях, связанных с перераспределением электрических зарядов в изолированной системе взаимодействующих тел, алгебраическая сумма электрических зарядов остается постоянной. Этот закон, носящий название *закона сохранения электрического заряда*, является таким же фундаментальным законом физики, как и другие законы сохранения – энергии, импульса и др.

Проводники и диэлектрики. *Проводниками* называются вещества, в которых может происходить упорядоченное перемещение электрических зарядов (электрический ток). Проводниками являются металлы, водные растворы солей, кислот и др., ионизованные газы. В частности, в металлах валентные электроны взаимодействующих друг с другом атомов отщепляются и становятся *свободными*, т.е. способными свободно перемещаться в объеме металла. Эти электроны, называемые также электронами проводимости, и обеспечивают электропроводность металлов. Механизмы электропроводности других проводящих веществ будут подробно рассмотрены в следующем разделе.

Диэлектриками называются вещества, которые не проводят электрического тока. В диэлектриках практически отсутствуют свободные электроны, и упорядоченное движение электрических зарядов в обычных условиях невозможно. К диэлектрикам относятся некоторые твердые вещества (стекло, фарфор, ряд кристаллов и др.), жидкости (химически чистая вода, керосин, минеральное масло и др.) и большинство газов. Валентные электроны в атомах диэлектриков прочно связаны со своими ядрами и в обычных условиях не могут отщепляться от них.

Электрометр и электроскоп. Для обнаружения зарядов и измерения их величины служат электрометры и электроскопы. Простейший *электрометр* (рис. 3.1.1) содержит легкую алюминиевую стрелку, укрепленную на металлическом стержне с помощью горизонтальной оси. Центр тяжести стрелки находится ниже оси, поэтому у незаряженного электрометра стрелка располагается вертикально. Стержень со стрелкой помещен в металлический корпус, изолированный от стержня. Это делается для того, чтобы внешнее электрическое поле не влияло на показания прибора. Наблюдения за стрелкой проводятся через смотровое окно. Если прикоснуться к шарику электрометра заряженным телом, то на стержне и стрелке возникнут одноименные заряды, которые отталкиваются друг от друга, и подвижная стрелка отклонится. Электрометры обычно градуируют, что позволяет достаточно просто и точно проводить измерения зарядов и разности потенциалов между проводниками. *Электроскоп* отличается от электрометра тем, что не имеет металлического корпуса, а вместо подвижной стрелки используются две полоски тонкой фольги, подвешенные к нижнему концу стержня. Электроскоп обычно применяют как демонстрационный прибор для обнаружения электрического заряда. При сообщении стержню электроскопа заряда полоски расходятся в разные стороны; по углу между ними можно также грубо оценивать величину заряда.

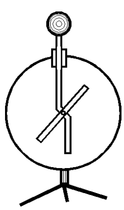


Рис. 3.1.1. Электрометр

Взаимодействие электрически заряженных тел. Точечный заряд. Закон Кулона. Силы электростатического взаимодействия зависят от формы и размеров наэлектризованных тел, а также от распределения зарядов на этих телах. Электрические заряды называются *точечными*, если они располагаются на телах, размеры которых значительно меньше, чем расстояние между ними. В этом случае ни форма, ни размеры заряженных тел существенно не влияют на взаимодействие между ними.

Количественные характеристики взаимодействия точечных зарядов устанавливает *закон Кулона*: величина силы электрического взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме пропорциональна произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,, \qquad (3.1.1)$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Силы, действующие между точечными зарядами, направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды. Эти силы называются *кулоновскими*. Заряды одного знака отталкиваются, а заряды разных знаков притягиваются.

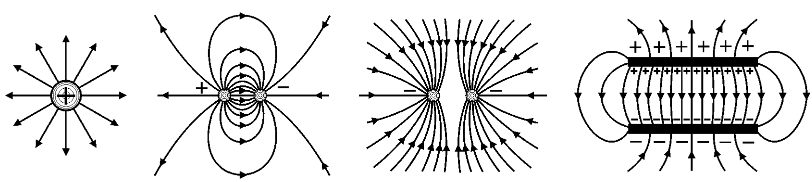
Сила взаимодействия зарядов в диэлектрике по сравнению с их взаимодействием в вакууме уменьшается. Это уменьшение характеризуется диэлектрической проницаемостью вещества ε. Закон Кулона для зарядов, находящихся в диэлектрике, имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,. \qquad (3.1.2)$$

Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Любой неподвижный электрический заряд создает вокруг себя электростатическое поле, которое в каждой точке пространства характеризуется векторной физической величиной – *напряженностью* $\vec{E}(\vec{r})$. Напряженность электрического поля определяется как сила, действующая в данной точке пространства на единичный положительный точечный заряд. В Международной системе единицей напряженности электрического поля является *вольт на метр* (В/м). Определение единицы напряжения (разности потенциалов) 1 В будет дано ниже.

Линии напряженности электрического поля (силовые линии). Электрическое поле изображают с помощью *линий напряженности* (силовых линий). Касательные к этим линиям указывают направление силы, действующей на положительный заряд в каждой точке поля. Силовые линии электростатического поля не замкнуты, они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Силовые линии непрерывны и не пересекаются. Они всегда перпендикулярны поверхности проводника. Распределение силовых линий в пространстве отображает величину поля: их густота в окрестности какой-либо точки пропорциональна величине напряженности поля в этой точке.

Примеры силовых линий полей, создаваемых некоторыми простейшими системами электрических зарядов, представлены на рис. 3.1.2. Там изображены силовые линии следующих полей: положительно заряженного шарика (рис. 3.1.2, *а*); двух разноименно заряженных шариков (рис. 3.1.2, *б*); двух одноименно заряженных шариков (рис. 3.1.2, *в*); двух пластин, заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку (рис. 3.1.2, *г*).



а *б* *в* *г*

Рис. 3.1.2. Электрические поля систем зарядов

Однородное электрическое поле. Из рис. 3.1.2, *г* видно, что в пространстве между пластинами вдали от краев пластин силовые линии практически параллельны: электрическое поле здесь одинаково во всех точках.

Электрическое поле, напряженность которого одинакова во всех точках пространства, называется *однородным*. Силовые линии однородного поля параллельны и располагаются на равных расстояниях друг от друга. В ограниченной области пространства электрическое поле можно считать приблизительно однородным, если напряженность поля внутри этой области меняется незначительно.

Напряженность электростатического поля точечного заряда. В соответствии с законом Кулона (3.1.1) вектор напряженности поля точечного заряда q направлен по прямой, соединяющей точку нахождения заряда и точку наблюдения. Модуль напряженности этого поля в вакууме

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (3.1.3)$$

Принцип суперпозиции полей. Опыт показывает, что если на электрический заряд q действуют одновременно электрические поля нескольких зарядов, то результирующая сила оказывается равной геометрической сумме сил, действующих со стороны каждого поля в отдельности. Это свойство электрических полей означает, что они подчиняются *принципу суперпозиции*: если в данной точке пространства различные заряды создают электрические поля с напряженностью $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и т. д., то вектор напряженности результирующего электрического поля равен сумме векторов напряженности всех электрических полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \qquad (3.1.4)$$

где N – число зарядов в системе.

Теорема Гаусса. Основная теорема электростатики – теорема Гаусса – базируется на физической величине, называемой потоком напряженности электрического поля.

Выделим в электрическом поле элемент воображаемой поверхности площадью ΔS. Этот элемент должен быть настолько малым, чтобы напряженность электрического поля во всех его точках можно было считать одинаковой. Проведем нормаль $\vec{n}$ к элементу и обозначим угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$ через α (см. рис. 3.1.3). Тогда по определению потоком ΔN напряженности электрического поля $\vec{E}$ через элемент поверхности ΔS называется произведение площади ΔS на проекцию напряженности электрического поля E_n на нормаль к элементу:

$$\Delta N = E_n \Delta S = E \cdot \Delta S \cos\alpha. \qquad (3.1.5)$$

Для вычисления потока через произвольную поверхность нужно разбить всю поверхность на малые элементы площадью ΔS_i (см. рис. 3.1.4), вычислить потоки напряженности через каждый из элементов, а затем просуммировать потоки через все элементы:

$$N = \sum_i E_{ni} \Delta S_i . \qquad (3.1.6)$$

Так же определяется поток через замкнутую поверхность, причем за положительную нормаль к любому элементу в этом случае выбирается внешняя нормаль, т. е. нормаль, направленная наружу.

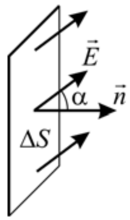


Рис. 3.1.3.
К вычислению потока вектора $\vec{E}$

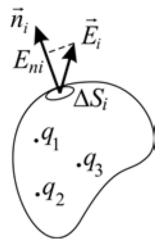


Рис. 3.1.4.
К теореме Гаусса

Согласно *теореме Гаусса*, поток напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную:

$$N = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_j q_j . \qquad (3.1.7)$$

Если замкнутая поверхность не содержит внутри себя электрических зарядов, то поток напряженности электрического поля через нее равен нулю.

Используя теорему Гаусса, можно легко вычислить напряженность электрического поля вокруг заряженного тела, если имеется какая-либо симметрия поля, например симметрия относительно плоскости или центра.

Электростатическое поле равномерно заряженных плоскости, сферы и шара. Напряженность поля, создаваемого *бесконечной равномерно заряженной плоскостью*, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} , \qquad (3.1.8)$$

где σ – заряд единицы поверхности (поверхностная плотность зарядов). Линии напряженности перпендикулярны плоскости и направлены от нее в разные стороны (рис. 3.1.5). Две равномерно (с одинаковой плотностью σ) и разноименно заряженные бесконечные плоскости создают однородное электростатическое поле, напряженность которого в пространстве между плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \qquad (3.1.9)$$

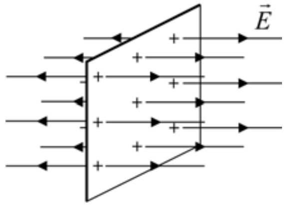


Рис. 3.1.5. Поле заряженной плоскости

В остальном пространстве электрическое поле рассматриваемой системы равно нулю.

Напряженность поля *равномерно заряженной проводящей сферы* радиуса R, несущей на поверхности заряд q, равна

$$E = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

График зависимости $E(r)$ для заряженной проводящей сферы см. на рис. 3.1.6, *а*.

Напряженность поля, создаваемого *шаром*, *равномерно заряженным по объему*, равна

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & \text{при } r < R, \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \tag{3.1.11}$$

Здесь q – полный заряд шара, R – его радиус. График зависимости $E(r)$ для равномерно заряженного шара изображен на рис. 3.1.6, *б*.

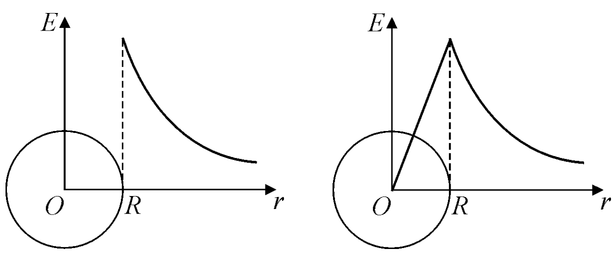


Рис. 3.1.6. Поле заряженных сферы и шара

Совокупность двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, называется электрическим диполем. Диполь характеризуется *электрическим моментом* $\vec{p}_\text{e} = q\vec{l}$, где вектор $\vec{l}$ направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному. Помещенный в *неоднородное* внешнее поле диполь втягивается в область более сильного поля. В *однородном* внешнем поле на диполь действует момент сил, пытающийся развернуть диполь так, чтобы его дипольный момент был направлен вдоль силовых линий.

Работа сил электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Работа электростатических сил по перемещению зарядов не зависит от формы траектории и определяется только величиной заряда и положением начальной и конечной точек траектории. Следовательно, электростатические силы потенциальны. Это дает возможность ввести энергетическую характеристику электростатического поля – *потенциал* $\varphi(\vec{r})$.

Потенциал – это работа, которую совершают силы электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки пространства в точку, потенциал которой принят за нуль. Очевидно, что потенциал также равен работе, которую нужно совершить против электростатических сил, чтобы перенести единичный положительный заряд из точки, в которой потенциал принят за нуль, в данную точку пространства

Физический смысл имеет *разность потенциалов* между двумя точками, а не значения потенциалов в этих точках. Поэтому выбор точки с нулевым потенциалом определяется соображениями простоты и удобства решения задач. Чаще всего выбирают равным нулю потенциал либо бесконечно удаленной точки, либо потенциал Земли.

Работа поля по перемещению заряда из одной точки пространства в другую равна

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU. \qquad (3.1.12)$$

где $U = (\varphi_1 - \varphi_2)$ – *напряжение* (разность потенциалов) между точками *1* и *2*. Единица напряжения и разности потенциалов в СИ называется *вольтом* (В). 1 В = 1 Дж/1 Кл.

Связь разности потенциалов с напряженностью электростатического поля. Разность потенциалов (напряжение) U между двумя точками в однородном электрическом поле, расположенными на одной линии напряженности на расстоянии d друг от друга, определяется формулой

$$U = Ed, \qquad (3.1.13)$$

где E – модуль напряженности поля. В однородном диэлектрике разность потенциалов (как и напряженность электростатического поля) уменьшается в ε раз по сравнению с этими величинами в вакууме.

Потенциал поля точечного заряда. Потенциал поля точечного заряда q_0 в вакууме

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3.1.14)$$

Потенциал положительного заряда положителен и убывает с расстоянием от заряда, а потенциал отрицательного заряда отрицателен и увеличивается при удалении от заряда. При наличии нескольких точечных зарядов общий потенциал в некоторой точке поля равен алгебраической сумме потенциалов, созданных отдельными зарядами.

Потенциал проводящей заряженной сферы радиуса *R*, несущей на поверхности заряд *q*, равен

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & \text{при } r < R, \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

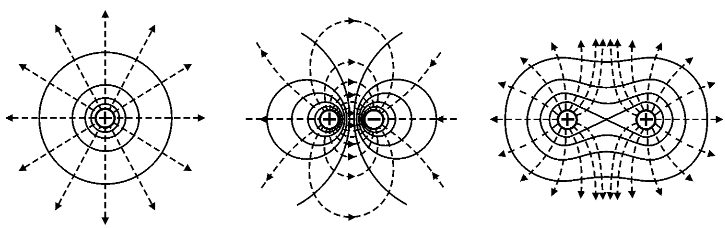
Эквипотенциальные поверхности. Геометрическое место точек электростатического поля с одинаковыми потенциалами называется *эквипотенциальной поверхностью*. Эквипотенциальные поверхности имеют следующие свойства:

1) в каждой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности поля перпендикулярен к ней и направлен в сторону убывания потенциала;

2) работа по перемещению заряда по одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю.

Одной из эквипотенциальных поверхностей является поверхность заряженного проводника.

Наряду с силовыми линиями эквипотенциальные поверхности являются удобным средством для графического изображения электростатического поля. Обычно их проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними поверхностями были одинаковыми. В качестве примера см. рис. 3.1.7, на котором изображены эквипотенциальные поверхности полей, создаваемых простейшими электрическими системами – положительно заряженным шариком (рис. 3.1.7, *а*); двумя разноименно заряженными шариками (рис. 3.1.7, *б*), двумя одноименно заряженными шариками (рис. 3.1.7, *в*).



а *б* *в*

Рис. 3.1.7. Эквипотенциальные поверхности

Проводники и диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрическая проницаемость вещества. Если металлический *проводник* поместить во внешнее электрическое поле, то под действием этого поля помимо теплового, хаотического движения свободных электронов возникнет их упорядоченное движение, в результате которого они будут перемещаться в направлении, противоположном напряженности поля. На поверхности проводника, обращенной навстречу силовым линиям поля, появится избыточный отрицательный заряд, на противоположной поверхности – избыточный положительный. Заряды, появляющиеся на поверхностях проводника, создают внутри него электрическое поле, вектор напряженности которого противоположен вектору напряженности внешнего поля. Упорядоченное движение электронов в проводнике прекратится, когда внутреннее поле станет равным по величине внешнему полю. Под действием внешнего электростатического поля электроны проводимости в проводнике перераспределяются так, что напряженность результирующего поля в любой точке внутри проводника становится равной нулю; некомпенсированные заряды располагаются неподвижно только на поверхности проводника. Явление перераспределения зарядов в проводнике во внешнем электростатическом поле называется *электростатической индукцией*.

При помещении в электростатическое поле *диэлектрика* в нем происходят несколько иные процессы. Молекулы диэлектрика электрически нейтральны – суммарные положительные заряды их ядер и отрицательные заряды всех электронов равны друг другу. В зависимости от строения молекул различаются *полярные* и *неполярные диэлектрики*.

Если в отсутствие внешнего электрического поля центры положительных и отрицательных зарядов в молекуле диэлектрика совпадают, то он называется *неполярным*. В отсутствие внешнего поля дипольный момент молекулы неполярного диэлектрика равен нулю. Если молекулу неполярного диэлектрика поместить во внешнее электрическое поле, то произойдет ее деформация и возникнет *индуцированный* дипольный момент.

В молекулах *полярных* диэлектриков ядра и электроны расположены таким образом, что центры положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Такие молекулы независимо от внешних электрических полей ведут себя как *жесткие диполи*, обладающие электрическим моментом, модуль которого постоянен. Если внешнее электрическое поле не приложено, то из-за теплового хаотического движения молекул в расположении жестких диполей отсутствует упорядоченность. Поэтому, хотя каждый диполь создает свое электрическое поле, суммарная напряженность поля всех хаотически движущихся диполей диэлектрика равна нулю.

При внесении диэлектрика *во внешнее поле* происходит его *поляризация*. Поляризацией диэлектрика называется переход его в такое состояние, когда внутри его объема геометрическая сумма векторов дипольных моментов молекул становится отличной от нуля. Механизм явления поляризации для полярных и неполярных диэлектриков различен, но приводит к сходным макроскопическим эффектам.

Если однородный *неполярный* диэлектрик внесен во внешнее электрическое поле, то в его молекулах происходит смещение положительных и отрицательных зарядов. На поверхностях, ограничивающих диэлектрик, появляются *поверхностные связанные заряды*. Связанные заряды не проявляют себя внутри любого объема диэлектрика: суммарный электрический заряд молекул в любом объеме равен нулю. Но на поверхностях диэлектрика связанные заряды не скомпенсированы и создают собственное электрическое поле диэлектрика. Вектор напряженности этого поля противоположен напряженности внешнего поля, вызвавшего поляризацию. Поэтому результирующее электрическое поле в однородном изотропном диэлектрике имеет напряженность в ε раз меньшую, чем в вакууме. Поляризация диэлектрика с неполярными молекулами, состоящая в возникновении у молекул индуцированного электрического момента, называется *электронной* или *деформационной поляризацией*. Поляризация этого типа не зависит от температуры диэлектрика.

При внесении однородного *полярного* диэлектрика во внешнее электрическое поле каждая молекула – жесткий диполь – будет испытывать ориентирующее влияние поля и будет стремиться развернуться так, чтобы вектор ее дипольного момента был направлен параллельно внешнему полю. Тепловое движение молекул разрушает упорядоченную ориентацию молекул, вследствие чего суммарный дипольный момент молекул диэлектрика в некотором диапазоне изменения внешнего поля оказывается пропорциональным напряженности внешнего поля. На граничных поверхностях поляризованного диэлектрика возникают нескомпенсированные связанные заряды. Как и в случае неполярного диэлектрика, эти заряды создают собственное электрическое поле, ослабляющее внешнее поле в ε раз. Поляризацию описанного типа называется *ориентационной поляризацией*. Ориентационная поляризация уменьшается с повышением температуры.

Электроемкость. Когда на проводнике увеличивается заряд q, то прямо пропорционально заряду возрастает потенциал проводника φ. Это справедливо для проводников любой геометрической формы. Отношение заряда проводника к его потенциалу не зависит от величины заряда, находящегося на проводнике, и определяется свойствами самого проводника, а также среды, в которой он находится. Характеристикой электрических свойств проводника, определяющей возможность накопления зарядов на нем, является *электроемкость* (или просто емкость).

Емкостью уединенного проводника называется коэффициент пропорциональности между зарядом, находящимся на этом проводнике, и его потенциалом

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (3.1.16)$$

Емкость уединенного шара радиуса R равна

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \qquad (3.1.17)$$

Конденсаторы. Два изолированных друг от друга проводника, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами, образуют *конденсатор*. Проводники конденсатора называются обкладками.

Поле плоского конденсатора. Электроемкость плоского конденсатора. *Плоский* конденсатор представляет собой две параллельные металлические пластины, разделенные слоем диэлектрика. Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их поперечным размером, то практически все электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора и является однородным за исключением небольших областей вблизи краев пластин (см. рис. 3.1.2, *г*). Это поле равно сумме полей, создаваемых положительно и отрицательно заряженными обкладками (см. формулу (3.1.9)). Емкость плоского конденсатора, площадь каждой из пластин которого S, а расстояние между пластинами d, равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (3.1.18)$$

Емкость конденсатора с *диэлектриком*, заполняющим пространство между обкладками, в ε раз *больше* емкости пустого (незаполненного) конденсатора.

Единица электроемкости в Международной системе – *фарад* (Ф). Электроемкостью 1 Ф обладает такой конденсатор, напряжение между обкладками которого равно 1 В при сообщении обкладкам разноименных зарядов по 1 Кл: 1 Ф = 1 Кл/1 В.

Последовательное и параллельное соединение конденсаторов. При *последовательном* соединении нескольких конденсаторов общая емкость определяется формулой

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_N} \ . \tag{3.1.19}$$

При *параллельном* соединении конденсаторов общая емкость равна

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_N. \tag{3.1.20}$$

Энергия электрического поля заряженного конденсатора. Согласно современной теории, энергия любых заряженных тел сосредоточена в электрическом поле, создаваемом этими телами. Поэтому говорят об *энергии электрического поля*, причем считается, что энергия источников поля – заряженных тел – распределена по всему пространству, где имеется электрическое поле. Например, в плоском конденсаторе энергия сосредоточена в пространстве между его обкладками. Эта энергия равна

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} \ . \tag{3.1.21}$$

Энергия однородного электрического поля, сосредоточенного в некотором объеме однородной среды, пропорциональна этому объему. Это дает возможность ввести понятие *плотности энергии* электрического поля, т.е. энергии, сосредоточенной в единице объема. Плотность энергии электрического поля вычисляется по формуле

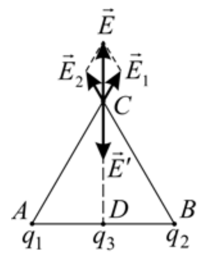
$$w_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \ . \tag{3.1.22}$$

Это выражение справедливо не только для однородного поля, но и для произвольных, в том числе и изменяющихся во времени, электрических полей в однородном изотропном диэлектрике.

Примеры решения задач

Пример 1. В двух вершинах равностороннего треугольника помещены одинаковые заряды $q_1 = q_2 = q = 4$ мкКл. Какой точечный заряд q_3 необходимо поместить в середину стороны, соединяющей заряды q_1 и q_2, чтобы напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника оказалась равной нулю?

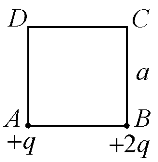
Решение. Заряды q_1 и q_2 создают в вершине *C* электрические поля $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, направленные вдоль сторон *AC* и *BC* соответственно (см. рисунок), причем $E_1 = E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$, где *a* – сторона треугольника. Векторная сумма этих полей $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ направлена вдоль высоты треугольника *CD* и по величине равна $E = 2E_1 \cos 30° = \sqrt{3}E_1 = \dfrac{\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$. Суммарное поле в точке *C* будет равно нулю, если в точку *D* поместить



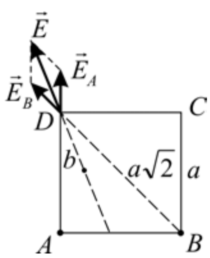
отрицательный заряд q_3, создающий в точке C поле $\vec{E}' = -\vec{E}$. Учитывая, что расстояние между точками C и D равно $x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, имеем $\frac{|q_3|}{3\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$. Отсюда находим $q_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{4}q = -5{,}2$ мкКл.

Ответ. $q_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{4}q = -5{,}2$ мкКл.

Пример 2. Два точечных заряда $+q$ и $+2q$, расположенные соответственно в вершинах A и B квадрата $ABCD$ со стороной $a = 1$ м, создают в вершине D электрическое поле напряженностью $\vec{E}$. В какую точку нужно поместить третий точечный заряд $-q$, чтобы напряженность суммарного электрического поля, создаваемого всеми тремя зарядами в вершине D, стала равна равной $-\vec{E}$?



Решение. Заряды, расположенные в точках A и B, создают в точке D электрические поля, модули которых равны: $E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$, $E_B = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 \left(a\sqrt{2}\right)^2} = E_A$. Сумма этих полей направлена вдоль биссектрисы $\angle ADB$ (см. рисунок) и по модулю равна $E = 2E_A \cos\frac{\pi}{8}$. Для того чтобы поле в точке D, оставаясь тем же самым по величине, переменило знак на противоположный, заряд $-q$ должен создать в этой точке поле $-2\vec{E}$, направленное против поля $\vec{E}$. Следовательно, этот заряд нужно поместить внутри квадрата на биссектрисе $\angle ADB$ на таком расстоянии b от точки D, чтобы выполнялось равенство $2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot 2\cos\frac{\pi}{8} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$.

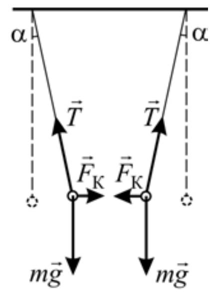


Отсюда находим искомое расстояние $b = \frac{a}{2\sqrt{\cos\pi/8}}$. В итоге приходим к ответу, который формулируется следующим образом: заряд $-q$ нужно поместить внутри квадрата на биссектрисе $\angle ADB$ на расстоянии $b = \frac{a}{2\sqrt{\cos\pi/8}} = \frac{a}{\sqrt[4]{8+4\sqrt{2}}} \approx 0{,}5$ м от точки D.

Ответ. Заряд $-q$ нужно поместить внутри квадрата на биссектрисе $\angle ADB$ на расстоянии $b = \frac{a}{2\sqrt{\cos\pi/8}} = \frac{a}{\sqrt[4]{8+4\sqrt{2}}} \approx 0{,}5$ м от точки D.

Пример 3. К нитям длиной *l*, точки подвеса которых находятся на одном уровне на расстоянии L друг от друга, подвешены два одинаковых маленьких шарика массами m каждый. При сообщении им одинаковых по величине разноименных зарядов шарики сблизились до расстояния L_1. Определить величину сообщенных шарикам зарядов q. Ускорение свободного падения g.

Решение. Шарики находятся в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где через mg обозначен модуль силы тяжести, через T – модуль силы натяжения нитей, а через $F_К$ – модуль кулоновской силы, действующей на каждый из шариков и равный $F_К = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L_1^2}$. Вводя угол α между нитью и вертикалью, запишем условия равновесия шариков в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси: $F_К = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$. Исключая отсюда T, получаем $F_К = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = mg\dfrac{L-L_1}{\sqrt{4l^2-(L-L_1)^2}}$. Используя для кулоновской силы записанное выше выражение, находим $q = 2L_1\sqrt{\pi\varepsilon_0\dfrac{mg(L-L_1)}{\sqrt{4l^2-(L-L_1)^2}}}$.



Ответ. $q = 2L_1\sqrt{\pi\varepsilon_0\dfrac{mg(L-L_1)}{\sqrt{4l^2-(L-L_1)^2}}}$.

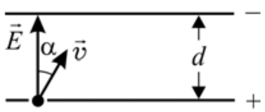
Пример 4. Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусов $r_1 = 5$ см и $r_2 = 10$ см, несущие заряды $q_1 = 2\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2 = -10^{-9}$ Кл соответственно, соединяют тонким проводом. Какой заряд q протечет при этом по проводу?

Решение. Поскольку по условию задачи шары достаточно удалены друг от друга, их потенциалы до соединения проводом можно определить по формуле для потенциала уединенной заряженной сферы. Имеем $\varphi_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$, $\varphi_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$. После соединения шаров проводом заряды на них перераспределятся так, что потенциалы шаров станут равными друг другу, т.е. $\varphi_1' = \dfrac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \varphi_2' = \dfrac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$. Следовательно, $\dfrac{q_1'}{r_1} = \dfrac{q_2'}{r_2}$. Пренебрегая емкостью провода, запишем закон сохранения заряда в системе: $q_1' + q_2' = q_1 + q_2$. Из последних двух уравнений находим заряды на шарах после их соединения:

$q_1' = \dfrac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} r_1$, $q_2' = \dfrac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} r_2$. По проводу протечет заряд $q = q_1 - q_1' = q_2' - q_2$. Следовательно, $q = \dfrac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{r_1 + r_2} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Ответ. $q = \dfrac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{r_1 + r_2} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Пример 5. Электрон влетает со скоростью $v = 10^7$ м/с в отверстие в нижней пластине плоского конденсатора. Между пластинами поддерживается разность потенциалов $U = 425$ В. Определить максимальное удаление h электрона от нижней пластины конденсатора, если угол, который составляет вектор начальной скорости электрона с вектором напряженности электрического поля конденсатора, $\alpha = 30°$, расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см, отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Считать электрическое поле внутри конденсатора однородным, силу тяжести не учитывать.



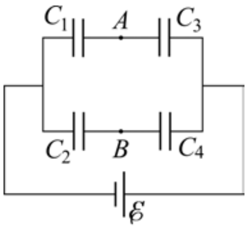
Решение. Составляющая скорости электрона $v_\parallel = v \sin\alpha$, параллельная пластинам, будет оставаться постоянной. Составляющая скорости, перпендикулярная пластинам, при максимальном удалении h электрона от нижней пластины обратится в нуль. Поскольку электростатические силы потенциальны, полная механическая энергия электрона при движении внутри конденсатора сохраняется. Обозначив через m массу электрона, а через e – модуль его заряда, имеем $\dfrac{mv^2}{2} = e\dfrac{U}{d}h + \dfrac{mv^2 \sin^2\alpha}{2}$. Отсюда получаем $h = d\dfrac{V^2 \cos^2\alpha}{2\gamma U} \approx 5$ мм.

Ответ. $h = d\dfrac{V^2 \cos^2\alpha}{2\gamma U} \approx 5$ мм.

Пример 6. Обкладки плоского воздушного конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, притягиваются с силой F_0. Какая сила F будет действовать на обкладки, если в зазор параллельно им вставить металлическую пластинку толщина, которой в $n = 2$ раза меньше величины зазора, а остальные размеры совпадают с размерами обкладок?

Решение. Найдем вначале силу, с которой притягиваются друг к другу обкладки пустого конденсатора. При этом учтем, что каждая обкладка находится в однородном поле E', создаваемом другой обкладкой и равном по величине половине поля E внутри конденсатора. Следовательно, искомая сила равна $F_0 = qE' = q\dfrac{E}{2} = q\dfrac{U}{2d} = \dfrac{CU^2}{2d}$. Здесь $q = CU$ – величина заряда на обкладках пустого конденсатора; U – напряжение на конденсаторе, равное напряжению на зажимах источника; $C = \varepsilon_0 S/d$ – емкость пустого конденсатора; d – расстояние между обкладками; S – площадь одной из них. При внесении металлической пластины в пространство между обкладками напряжение на конденсаторе не изменится, а напряженность поля возрастет, так как источник доставит на обкладки дополнительные заряды. Поскольку внутри пластины поле всегда равно нулю, внесение ее внутрь конденсатора эквивалентно уменьшению расстояния между обкладками d на величину d/n. В результате емкость конденсатора после внесения пластины станет равной $C' = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d - d/n} = \dfrac{\varepsilon_0 Sn}{d(n-1)} = C\cdot\dfrac{n}{n-1}$. Вследствие этого сила притяжения между обкладками также изменится и примет значение $F = \dfrac{C'U^2}{2(d-d/n)} = \dfrac{CU^2}{2d}\cdot\dfrac{n^2}{(n-1)^2}$. Сравнивая последнее выражение с выражением для F_0, получаем $F = F_0\dfrac{n^2}{(n-1)^2} = 4F_0$.

Ответ. $F = F_0\dfrac{n^2}{(n-1)^2} = 4F_0$.



Пример 7. На рисунке изображена батарея конденсаторов, подключенная к гальваническому элементу с ЭДС $\mathscr{E}$. Емкости конденсаторов равны $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$, $C_4 = 6C$. Чему равна разность потенциалов U между точками A и B? Считать, что до подключения к источнику все конденсаторы были не заряжены.

Решение. Обозначим через U_1, U_2, U_3, U_4 напряжения на конденсаторах C_1, C_2, C_3, C_4 соответственно. Тогда величина искомой разности потенциалов выразится как $U = |U_1 - U_2| = |U_3 - U_4|$. Исходя из этого, найдем напряжения на конденсаторах, зная их емкости и ЭДС источника. Имеем следующую систему уравнений: $U_1 + U_3 = \mathscr{E}$, $C_1U_1 = C_3U_3$, $U_2 + U_4 = \mathscr{E}$, $C_2U_2 = C_4U_4$. Разрешая ее, получаем $U_1 = \dfrac{\mathscr{E}C_3}{C_1 + C_3}$, $U_2 = \dfrac{\mathscr{E}C_4}{C_2 + C_4}$, $U_3 = \dfrac{\mathscr{E}C_1}{C_1 + C_3}$, $U_4 = \dfrac{\mathscr{E}C_2}{C_2 + C_4}$. Отсюда $U = \mathscr{E}\dfrac{|C_2C_3 - C_1C_4|}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)} = 0$.

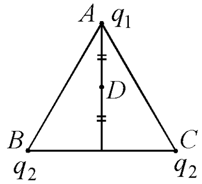
Ответ. $U = \mathscr{E}\dfrac{|C_2C_3 - C_1C_4|}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)} = 0$.

Пример 8. Два плоских конденсатора имеют одинаковую емкость. В один из них вставили пластинку с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 6$, заполняющую весь объем между обкладками, и зарядили этот конденсатор так, что запасенная в нем энергия составила $W_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Дж. Отсоединив источник, пластинку удалили и к заряженному конденсатору подсоединили второй, незаряженный конденсатор. Найти энергию W, которая будет запасена в конденсаторах после их перезарядки.

Решение. Пусть C_0 – емкость пустого конденсатора. Энергия заряженного конденсатора, заполненного диэлектриком, выражается через заряд q на нем как $W_0 = \dfrac{q^2}{2\varepsilon C_0}$. При вытаскивании диэлектрической пластинки из конденсатора, отключенного от источника, заряд на конденсаторе не изменяется, поэтому энергия конденсатора становится равной $W_1 = \dfrac{q^2}{2C_0} = \varepsilon W_0$. Увеличение энергии в ε раз происходит за счет работы, совершенной при удалении пластинки (диэлектрик втягивается внутрь конденсатора). Когда к заряженному конденсатору подсоединили такой же незаряженный, емкость системы удвоилась, а заряд остался прежним. Следовательно, энергия системы в конечном состоянии равна $W = \dfrac{q^2}{2 \cdot 2C_0} = \dfrac{\varepsilon W_0}{2} = 6 \cdot 10^{-6}$ Дж. Уменьшение энергии конденсаторов в процессе их перезарядки связано с выделением теплоты при перемещении зарядов по соединительным проводам.

Ответ. $W = \dfrac{\varepsilon W_0}{2} = 6 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Задачи

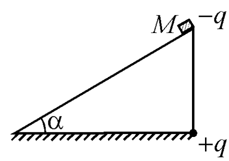


1. Три положительных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника ABC. Величина заряда, находящегося в точке A, равна q_1; величины зарядов в точках B и C равны q_2. Найти отношение $\alpha = q_2 / q_1$, если напряженность электрического поля, создаваемого этими тремя зарядами в точке D, лежащей на середине высоты, опущенной из вершины A на сторону BC, равна нулю.

2. В окружность радиуса $R = 3$ см с центром в точке O вписан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. В шести вершинах восьмиугольника помещены одинаковые положительные заряды так, что вектор $\vec{E}_0$ напряженности в точке O направлен по отрезку OH. Чему равен модуль поля E_0, если величина каждого из зарядов $q = 10^{-9}$ Кл? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

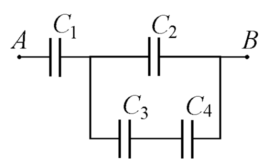
3. Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусов $r_1 = 1$ см и $r_2 = 2$ см, несущие одинаковые заряды, взаимодействуют с силой $F = 10^{-4}$ Н. Какова будет сила взаимодействия этих шаров F', если соединить их друг с другом на короткое время тонким проводом?

4. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонталью, соскальзывает с высоты h небольшое тело, заряженное отрицательным зарядом $-q$. В точке пересечения вертикали, проведенной через начальное положение тела, с основанием наклонной плоскости находится заряд $+q$. Определить скорость v, с которой тело достигнет основания наклонной плоскости. Масса тела M, ускорение свободного падения g. Трением пренебречь.



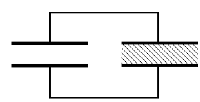
5. На шероховатой горизонтальной непроводящей поверхности закреплен маленький шарик, имеющий заряд q. Маленький брусок массой m, несущий такой же по знаку и величине заряд, помещают на эту поверхность на расстоянии l_0 от закрепленного заряженного шарика. Какой путь l пройдет брусок до остановки, если его отпустить без начальной скорости? Коэффициент трения между бруском и поверхностью μ. Электрическая постоянная ε_0, ускорение свободного падения g.

6. В схеме, показанной на рисунке, емкости конденсаторов равны $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ, $C_4 = 4$ мкФ. Напряжение между точками A и B равно $U = 100$ В. Найти напряжение U_4 на конденсаторе C_4. Первоначально конденсаторы были не заряжены.



7. Два плоских конденсатора заряжены: первый – до разности потенциалов U_1, второй – до разности потенциалов U_2. Площади пластин конденсаторов соответственно S_1 у первого и S_2 у второго, расстояние между пластинами у обоих конденсаторов одинаково. Чему будет равно напряжение на конденсаторах U, если соединить их одноименно заряженные обкладки?

8. Два одинаковых плоских конденсатора, один из которых заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, соединены, как показано на рисунке, заряжены до напряжения U_0 и отсоединены от источника. Какую работу A нужно совершить, чтобы вытащить диэлектрическую пластинку из конденсатора? Емкость пустого конденсатора равна C.



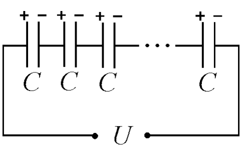
9. Пластины плоского воздушного конденсатора расположены горизонтально. Верхняя пластина сделана подвижной и удерживается в начальном состоянии на высоте $h = 1$ мм над нижней пластиной, которая закреплена. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 1000$ В, отключили от источника и освободили верхнюю пласти-

ну. Какую скорость приобретет падающая пластина к моменту соприкосновения с нижней пластиной? Масса верхней пластины $m = 4{,}4$ г, площадь каждой из пластин $S = 0{,}01$ м^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

10. Два одинаковых плоских конденсатора, соединенных параллельно, зарядили до напряжения $U = 1000$ В и отключили от источника. Затем пластины одного из конденсаторов раздвинули так, что расстояние между ними увеличилось в $k = 3$ раза. После этого пластины конденсатора замкнули проводником. Какая энергия Q выделилась в проводнике? Первоначальная емкость каждого конденсатора $C = 500$ пФ.

11. Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 соединены последовательно и постоянно подключены к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. В некоторый момент времени параллельно конденсатору C_2 подсоединили резистор. Какое количество теплоты Q выделится в этом резисторе в процессе перераспределения зарядов в конденсаторах, если перед подключением резистора заряды на конденсаторах были одинаковы?

12. Конденсатор емкостью $C_0 = 0{,}2$ мкФ заряжают до напряжения $U_0 = 360$ В и отсоединяют от источника. Затем к этому конденсатору подключают незаряженный конденсатор емкостью $C = 1{,}8$ мкФ, в результате чего последний заряжается. Отсоединив зарядившийся конденсатор C, к конденсатору C_0 подключают второй незаряженный конденсатор емкостью C, который отсоединяют после зарядки, и так далее. Всего таким образом от конденсатора C_0 заряжают $n = 20$ одинаковых конденсаторов емкостью C, которые затем соединяют последовательно. Чему равно напряжение U на концах полученной цепи конденсаторов?



3.2. Законы постоянного тока

Теоретический материал

Электрический ток – это упорядоченное движение электрических зарядов. Направлением электрического тока принято считать направление упорядоченного движения положительных зарядов. В металлах свободные заряды (электроны) отрицательны и направление их движения противоположно условно принятому за положительное. В теории электрических цепей это не играет роли, поскольку все законы для квазистационарных токов имеют одну и ту же форму независимо от реального направления движения зарядов.

Силой тока называется скалярная величина I, равная отношению величины заряда Δq, переносимого через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, к этому промежутку:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = en\overline{v}S, \qquad (3.2.1)$$

где e – модуль заряда одной частицы, n – концентрация частиц, $\overline{v}$ – средняя скорость упорядоченного движения частиц, S – площадь поперечного сечения проводника.

Сила тока представляет собой одну из основных величин Международной системы единиц; она измеряется в *амперах* (А). 1 А – это сила такого тока, который, проходя по двум прямолинейным параллельным бесконечным проводникам, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга, вызывает на каждом участке длиной 1 м силу взаимодействия $2\cdot 10^{-7}$ Н.

Условия существования постоянного тока в цепи. Ток, сила и направление которого сохраняются с течением времени неизменными, называется постоянным. Для того чтобы в проводнике мог существовать постоянный ток, необходимо выполнение следующих условий:

1) напряженность электрического поля в проводнике должна быть отлична от нуля и не должна изменяться с течением времени;
2) цепь постоянного тока должна быть замкнутой;
3) на свободные электрические заряды, помимо кулоновских сил, должны действовать неэлектростатические силы, называемые *сторонними силами*.

Сторонние силы создаются источниками тока (гальваническими элементами, аккумуляторами, индукционными генераторами и др.). Под действием сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока в направлении, противоположном действию сил электростатического поля. Благодаря этому на концах внешней цепи поддерживается постоянная разность потенциалов и в цепи идет постоянный ток. Работа, которая нужна для обеспечения постоянного электрического тока в цепи, совершается источником.

Электродвижущей силой (ЭДС) $\mathcal{E}$, действующей на участке цепи, называется физическая величина, численно равная работе, которую совершают сторонние силы по перемещению единичного положительного заряда на этом участке:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}. \qquad (3.2.2)$$

ЭДС источника равна разности потенциалов на его клеммах при разомкнутой внешней цепи.

Напряжение. Участок электрической цепи, на котором электрический ток создается только электростатическим (кулоновским) полем, называется однородным. *Напряжение на однородном участке* цепи равно разности потенциалов его концов:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (3.2.3)$$

Если на участке цепи кроме кулоновских сил на заряды действуют сторонние силы, то он называется неоднородным. *Напряжение на неоднородном участке* цепи равно алгебраической сумме разности потенциалов и ЭДС на этом участке и вычисляется по формуле:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}. \qquad (3.2.4)$$

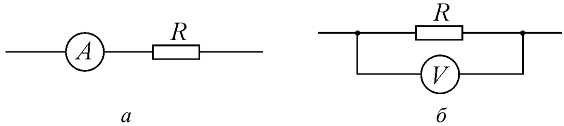
Измерения тока и напряжения в цепи проводятся при помощи специальных приборов: *амперметра* и *вольтметра*. Их работа основывается на магнитном действии тока (см. раздел 3.3).

Для измерения силы тока в цепи амперметр включают в эту цепь *последовательно* (рис. 3.2.1, *а*). Поскольку любой амперметр обладает некоторым сопротивлением, его включение меняет сопротивление цепи и ток в ней. Чтобы амперметр оказывал как можно меньшее влияние на силу тока, измеряемую им, его сопротивление делают очень малым. Для увеличения диапазона измеряемых токов (уменьшения чувствительности амперметра) в m раз параллельно амперметру нужно подключить шунтирующее сопротивление $R_{\text{ш}}$:

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_{\text{A}}}{m-1}, \qquad (3.2.5)$$

где R_{A} – сопротивление амперметра.

Для того чтобы измерить напряжение на участке цепи, к нему *параллельно* подключают вольтметр (рис. 3.2.1, *б*). Напряжение на вольтметре совпадает с напряжением на участке цепи. Однако, поскольку сопротивление любого вольтметра конечно, его включение в цепь меняет сопротивление самого участка цепи. Из-за этого измеряемое напряжение на участке цепи уменьшится.



а *б*

Рис. 3.2.1. Измерение силы тока и напряжения

Для того чтобы вольтметр не вносил заметных искажений в измеряемое напряжение, его сопротивление должно быть как можно больше. Для увеличения диапазона измеряемых напряжений (уменьшения чувствительности вольтметра) в m раз последовательно к вольтметру необходимо подключить дополнительное сопротивление $R_д$:

$$R_д = R_В(m-1), \tag{3.2.6}$$

где $R_В$ – сопротивление вольтметра.

Закон Ома для участка цепи устанавливает зависимость между напряжением U, током на этом участке I и его сопротивлением R. Для участка цепи, не содержащего ЭДС (однородного участка цепи), этот закон имеет вид

$$I = \frac{U}{R}. \tag{3.2.7}$$

В этом случае напряжение U совпадает с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, поддерживаемой на концах участка, поэтому закон Ома можно записать также в виде:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \tag{3.2.8}$$

Величину IR, равную произведению тока на сопротивление однородного участка цепи, называют падением напряжения на этом участке.

Для участка цепи, содержащего ЭДС (неоднородного участка цепи), закон Ома выражается формулой

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R}. \tag{3.2.9}$$

Здесь $\mathcal{E}$ – ЭДС, действующая на участке цепи, R – полное сопротивление участка с учетом внутреннего сопротивления источника. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, часто записывают также в виде:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR - \mathcal{E}. \tag{3.2.10}$$

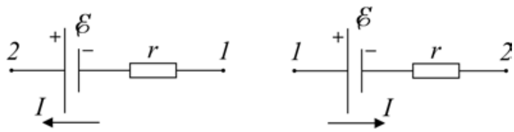
Для того чтобы применять формулы (3.2.9), (3.2.10) на практике, нужно придерживаться следующих правил знаков. ЭДС считается положительной, если заряд внутри источника перемещается от отрицательного полюса к положительному. Знак разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ определяется тем, что больше, φ_1 или φ_2.

Для участка цепи, изображенного на рис. 3.2.2, *а*, ЭДС источника и падение напряжения Ir на внутреннем сопротивлении источника r положительны. При этом потенциал точки *1* (начала участка) ниже потенциала точки *2* (конца участка), поэтому закон Ома для этого участка имеет вид

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E} - Ir. \tag{3.2.11}$$

Если другие участки цепи также содержат источники тока, то на рассматриваемом участке возможно противоположное направление тока внутри источника (рис. 3.2.2, *б*). Для этого участка ЭДС отрицательна, падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника положительно и потенциал точки *1* выше потенциала точки *2*. Закон Ома для такого участка имеет вид

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} + Ir. \qquad (3.2.12)$$



а *б*

Рис. 3.2.2. К закону Ома для неоднородного участка цепи

Омическое сопротивление проводников. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. *Сопротивление* является основной электрической характеристикой проводника. Сопротивление металлического проводника на участке неразветвленной цепи зависит от материала проводника, его геометрической формы и размеров, а также от температуры. Для однородного проводника длиной l и площадью поперечного сечения S сопротивление R равно

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (3.2.13)$$

где ρ – *удельное сопротивление* материала, из которого изготовлен проводник. Удельное сопротивление проводников зависит от температуры следующим образом:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \qquad (3.2.14)$$

где ρ_0 – удельное сопротивление при $0\,°\mathrm{C}$, t – температура по шкале Цельсия, α – температурный коэффициент сопротивления.

Для всех металлов $\alpha > 0$, а для электролитов $\alpha < 0$, т.е. с возрастанием температуры сопротивление металлов возрастает, а электролитов падает.

Единица электрического сопротивления в СИ – *ом* (Ом). Электрическим сопротивлением 1 Ом обладает такой участок цепи, на котором при силе тока 1 А напряжение равно 1 В: 1 Ом = 1 В/1 А.

Сверхпроводимость. Явление *сверхпроводимости*, которое обнаруживается у некоторых металлов и сплавов, заключается в том, что ниже некоторой температуры (температуры $T_{кр}$ перехода в сверхпроводящее состояние) удельное сопротивление этих веществ становится исчезающе малым. Температуры $T_{кр}$ для чистых металлов составляют порядка нескольких градусов по шкале Кельвина. Следует подчеркнуть, что переход в сверхпроводящее состояние происходит не плавно с уменьшением температуры проводника, а скачком при достижении проводником температуры $T_{кр}$.

В настоящее время явление сверхпроводимости используется для получения сверхсильных магнитных полей. На явлении сверхпроводимости основан принцип действия элементов памяти современных суперкомпьютеров. Разрабатываются проекты и других практических применений этого явления.

Последовательное и параллельное соединение проводников. При составлении электрической цепи проводники могут соединяться последовательно и параллельно.

При *последовательном* соединении проводников сила тока во всех частях цепи одинакова, напряжение на концах цепи равно сумме напряжений на отдельных участках, напряжения на отдельных проводниках прямо пропорциональны их сопротивлениям.

Общее сопротивление R_0 цепи, состоящей из n последовательно соединенных проводников, равно *сумме сопротивлений отдельных проводников*:

$$R_0 = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i. \qquad (3.2.15)$$

При *параллельном* соединении проводников сила тока в неразветвленной части цепи равна сумме токов, текущих в разветвлениях, напряжения на параллельно соединенных участках одинаковы, токи в участках разветвленной цепи обратно пропорциональны их сопротивлениям. *Проводимость* (величина, обратная сопротивлению) цепи, состоящей из n параллельно соединенных проводников, равна *сумме проводимостей всех проводников*:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \qquad (3.2.16)$$

Измерение сопротивления какого-либо проводника может быть проведено с помощью источника тока, амперметра и вольтметра. Включив в цепь постоянного тока приборы, соединенные по схеме, изображенной на рис. 3.2.3, *а*, можно по формуле

$$R'_x = \frac{U}{I} \qquad (3.2.17)$$

определить значение сопротивления участка цепи между точками *B* и *C*. Однако R'_x больше искомого сопротивления R_x на величину сопротивления амперметра, так как вольтметр измеряет сумму напряжений на резисторе и амперметре. Эту схему следует применять при измерении сопротивлений, значительно превышающих сопротивление амперметра.

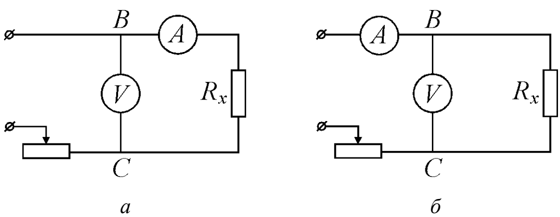


Рис. 3.2.3. Измерение сопротивления

Соединив приборы по схеме, изображенной на рис. 3.2.3, *б*, можно по формуле, аналогичной (3.2.17), определить значение сопротивления R''_x участка цепи *BC*. Однако R''_x теперь меньше искомого сопротивления R_x, так как сила тока, измеряемая амперметром, равна сумме сил токов в резисторе и вольтметре. Этой схемой следует пользоваться при измерении сопротивлений, значительно меньших сопротивления вольтметра.

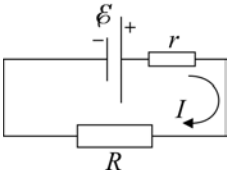


Рис. 3.2.4.
Замкнутая цепь

Закон Ома для полной цепи (рис. 3.2.4), состоящей из источника тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и внешнего сопротивления R, гласит: сила тока в замкнутой цепи равна отношению ЭДС в цепи к полному сопротивлению цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \qquad (3.2.18)$$

Источники тока, их соединение. Источники тока в электрических цепях могут быть соединены по-разному. Наиболее употребительны на практике два способа соединения источников в батарею – последовательное и параллельное соединения.

При *последовательном* соединении источников ЭДС образовавшейся батареи равна алгебраической сумме ЭДС источников, а ее внутреннее сопротивление – сумме внутренних сопротивлений источников. Для определения знака какой-либо ЭДС нужно рассмотреть направление тока, текущего через соответствующий источник. Если ток течет внутри источника от отрицательного полюса к положительному, то ЭДС берется со знаком «+», если наоборот, то со знаком «–».

При *параллельном* соединении обычно используют одинаковые источники, включая их в батарею с одной и той же полярностью. В этом случае ЭДС батареи равна ЭДС одного источника, а внутреннее сопротивление батареи в n раз меньше внутреннего сопротивления источника (здесь n – число источников). Параллельные соединения *разных* источников, как правило, *не используются*.

Правила Кирхгофа. При расчете электрических цепей, содержащих разветвления с включенными в них источниками тока, удобно пользоваться *правилами Кирхгофа*:

1) В каждом узле цепи сумма втекающих токов равна сумме вытекающих токов, иными словами, алгебраическая сумма всех токов в каждом узле равна нулю.

2) В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной цепи, алгебраическая сумма ЭДС источников равна сумме всех падений напряжения, включая падения напряжения внутри источников.

При использовании правил Кирхгофа для каждого контура цепи выбирают произвольное направление обхода. При этом ЭДС источника считается положительной, если обход данного источника производится в направлении от отрицательного полюса к положительному. Ток считается положительным, если он совпадает с направлением обхода контура. Если какой либо-элемент цепи является общим для нескольких контуров, то падение напряжения на этом элементе определяется алгебраической суммой всех токов, протекающих через него.

Произвольные замкнутые контуры выделяются так, чтобы каждый новый контур содержал по крайней мере один участок цепи, не входящий в ранее рассмотренные контуры. При этом число независимых уравнений относительно токов в цепи должно совпасть с числом неизвестных.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля–Ленца. При перемещении зарядов вдоль электрической цепи кулоновские и сторонние силы совершают работу, которую принято называть работой тока. Энергия W, которая выделяется в неподвижном проводнике за время t, равна совершенной током работе A:

$$W = A = qU = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t, \qquad (3.2.19)$$

где q – заряд, перенесенный по проводнику за время t; I – ток в проводнике; R – сопротивление проводника; U – напряжение между его концами. Если на данном участке цепи не совершается механическая работа и ток не производит химического действия, происходит только нагрев проводника. Выделенная энергия необратимо преобразуется в теплоту. Закон, определяющий количество теплоты, которое выделяет проводник с током в окружающую среду, был впервые установлен экспериментально английским ученым Д. Джоулем и русским ученым Э.Х. Ленцем. *Закон Джоуля–Ленца* был сформулирован следующим образом: количество теплоты, выделяемой током, протекающим на некотором участке цепи, равно произведению квадрата силы тока, сопротивления этого участка и времени прохождения тока:

$$Q = I^2Rt. \qquad (3.2.20)$$

Мощность тока, выделяемая на участке цепи,

$$N = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}. \qquad (3.2.21)$$

Мощность, развиваемая источником с ЭДС $\mathcal{E}$, равна

$$N = \mathcal{E}I. \qquad (3.2.22)$$

Коэффициент полезного действия электрической цепи определяется как отношение полезной мощности, выделяемой в нагрузке, к полной мощности, развиваемой источником в цепи.

Электрический ток в металлах. Все металлы в твердом и жидком состоянии являются проводниками электрического тока. Экспериментально установлено, что носителями свободных зарядов в металлах являются свободные электроны. Соответствующие опыты были выполнены в 1913 – 1916 годах русскими физиками Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси, а также американскими физиками Б. Стюартом и Р. Толменом. В этих опытах было обнаружено, что при резкой остановке быстро вращающейся катушки с проводом в ней возникает кратковременный электрический ток. Направление тока говорит о том, что он создается движением отрицательно заряженных частиц. Измерение заряда, протекшего в цепи катушки при торможении, дало возможность определить отношение заряда этих частиц к их массе, которое совпало с соответствующим отношением для электрона, измеренным ранее другим способом.

Концентрация свободных электронов в металлах весьма велика – порядка 10^{22} см$^{-3}$. В отсутствие внешнего электрического поля эти электроны движутся в металле хаотически. Под действием электрического поля они кроме хаотического движения приобретают упорядоченное движение в определенном направлении. Средняя скорость упорядоченного движения электронов составляет доли сантиметров в секунду. Свободные электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки, отдавая им при каждом столкновении часть кинетической энергии, приобретенной при свободном пробеге под действием электрического поля. В результате упорядоченное движение электронов в металле можно рассматривать как равномерное движение с некоторой постоянной скоростью, пропорциональной напряженности внешнего электрического поля и, следовательно, разности потенциалов на концах проводника. В этом состоит качественное объяснение закона Ома на основе электронной теории проводимости металлов. Построить количественную теорию движения электронов в металле на основе законов классической механики невозможно.

Так как часть кинетической энергии электронов, приобретаемой ими под действием электрического поля, передается при столкновениях ионам кристаллической решетки, то при прохождении электрического тока проводник нагревается.

Малые значения скорости упорядоченного движения свободных электронов в проводниках не приводят к запаздыванию возникновения тока в цепи. При замыкании цепи вдоль проводов со скоростью света распространяется электромагнитное поле, которое приводит в движение свободные электроны практически одновременно во всех точках цепи.

Электрический ток в электролитах. *Электролитами* называются вещества, в которых электрический ток осуществляется посредством ионной проводимости, т.е. упорядоченного движения ионов под действием внешнего электрического поля. Электролитами являются растворы кислот, щелочей и солей, а также расплавленные соли. Электрическое поле, вызывающее упорядоченное движение ионов, создается в жидкости электродами – проводниками, соединенными с источником тока. Положительно заряженный электрод называется анодом, отрицательно заряженный – катодом. Положительные ионы (катионы) – ионы металлов и водородные ионы – движутся к катоду, отрицательные ионы (анионы) – кислотные остатки и гидроксильные группы OH – движутся к аноду.

Прохождение электрического тока через электролиты сопровождается *электролизом* – выделением на электродах веществ, входящих в состав электролита. Электролиты иначе называются проводниками II рода. В них ток связан с переносом вещества, в отличие от проводников I рода – металлов, в которых носителями тока являются свободные электроны.

Возникновение ионов в электролитах объясняется явлением электролитической диссоциации – распадом молекул растворенного вещества на положительные и отрицательные ионы в результате взаимодействия с растворителем. Молекулы растворяемых веществ состоят из взаимосвязанных ионов противоположного знака (например, Na^+Cl^-, H^+Cl^-, K^+I^-, $Cu^{++}SO_4^{--}$ и т.д.). Взаимодействие этих молекул с молекулами растворителя (например, воды) приводит к ослаблению взаимного притяжения противоположно заряженных ионов. При тепловом движении молекул растворенных веществ и растворителей происходят их столкновения, которые приводят к распаду молекул на ионы. Одновременно происходит процесс воссоединения (рекомбинации) ионов противоположных знаков в нейтральные молекулы. Между процессами диссоциации и рекомбинации ионов при неизменных внешних условиях устанавливается динамическое равновесие.

Ионы в электролитах движутся хаотически до тех пор, пока к электродам не прикладывается напряжение. Тогда на хаотическое движение ионов накладывается их упорядоченное движение к соответствующим электродам и в жидкости возникает электрический ток. Плотность электрического тока в электролитах подчиняется закону Ома. Однако выражение для удельной электропроводности электролитов имеет более сложный вид, чем для металлов.

Законы электролиза. Первый закон электролиза (первый закон Фарадея) гласит: масса вещества, выделившегося на электроде, прямо пропорциональна электрическому заряду q, прошедшему через электролит:

$$m = kq = kIt, \tag{3.2.23}$$

где k – коэффициент пропорциональности, называемый электрохимическим эквивалентом вещества.

Согласно второму закону электролиза (второму закону Фарадея), электрохимические эквиваленты веществ прямо пропорциональны отношению их атомарных (молярных) масс A к валентности n:

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}. \tag{3.2.24}$$

Величина $F = 9{,}648 \cdot 10^4$ Кл/моль называется постоянной Фарадея. Часто эти два закона формулируют в виде *объединенного закона электролиза* (*закона Фарадея*):

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot It. \tag{3.2.25}$$

Электрический ток в вакууме. *Вакуумом* называется такое разреженное состояние газа, при котором средняя длина свободного пробега молекул превышает размеры сосуда, в котором находится газ. Процессы ионизации молекул газа в состоянии вакуума не могут обеспечить такого числа электронов и положительных ионов, которое необходимо для электропроводности межэлектродного промежутка. Поэтому электрический ток в вакууме возможен лишь при наличии заряженных частиц, возникших в результате их *эмиссии* с электродов.

Термоэлектронная эмиссия. *Термоэлектронной эмиссией* называется испускание электронов с поверхности тел, нагретых до высокой температуры. У многих твердых тел термоэлектронная эмиссия начинается при температурах, при которых испарение самого вещества еще не происходит. Такие вещества и используют для изготовления нагреваемых электродов. Вокруг нагретого электрода, помещенного в вакуум, образуется электронное «облако». Электрод при этом заряжается положительно, и под действием возникающего электрического поля электроны из облака частично возвращаются на электрод. В равновесном состоянии число электронов, покинувших электрод в единицу времени, в среднем равно числу электронов, возвратившихся на электрод за это же время. Чем выше температура электрода, тем выше плотность электронного облака. Для получения достаточно интенсивной эмиссии электроды нагревают до температуры, соответствующей видимому свечению раскаленного металла.

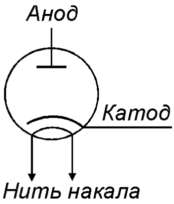


Рис. 3.2.5. Вакуумный диод

Электронная лампа – диод. Термоэлектронная эмиссия используется в различных электронных приборах. Простейший из них – *вакуумный диод*. Этот прибор состоит из стеклянного или керамического баллона, в который вмонтированы два электрода – катод и анод (рис. 3.2.5). Воздух внутри баллона обычно откачивается до давления 10^{-6} – 10^{-7} мм рт. ст. Анод представляет собой металлическую пластину, внутри катода помещена изолированная от него тонкая металлическая проволока, свернутая в спираль (нить накала). Концы спирали имеют выводы для подключения в электрическую цепь. Ток в цепи накала вызывает нагрев катода до достаточно высокой температуры.

Катод обычно покрывают слоем оксидов щелочно-земельных металлов (бария, стронция, кальция). Это связано с тем, что при нагревании поверхность оксидного катода выделяет гораздо больше электронов, чем поверхность чистого металла.

Основное свойство вакуумного диода – это односторонняя проводимость. При подключении источника тока положительным полюсом к аноду и отрицательным полюсом к катоду электроны, испускаемые нагретым катодом, движутся под действием электрического поля к аноду – в цепи течет электрический ток. При подключении к диоду источника с обратной полярностью электрическое поле препятствует движению электронов от катода к аноду и ток в цепи не течет. Свойство односторонней проводимости диода используется для преобразования переменного тока в постоянный (выпрямления переменного тока), а также для других целей.

Электронно-лучевая трубка. Основным элементом телевизора, дисплея и осциллографа является *электронно-лучевая трубка*. Устройство электронно-лучевой трубки показано на рис. 3.2.6.

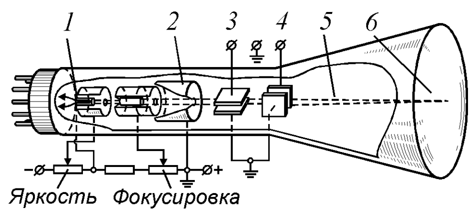


Рис. 3.2.6. Электронно-лучевая трубка

В аноде *2* сделано отверстие, через которое часть электронов, испущенных подогревным катодом *1*, пролетает в пространство за анодом и образует электронный пучок *5*. Форма, расположение и потенциал анода выбираются так, чтобы наряду с ускорением электронов осуществлялась также фокусировка пучка. Внутренняя поверхность стеклянного баллона электронно-лучевой трубки напротив анода покрыта люминофором – веществом, способным светиться при бомбардировке электронами. Эту часть трубки называют экраном *6*. На пути к экрану пучок последовательно проходит между двумя парами управляющих пластин *3*, *4*. Если электрического поля между пластинами нет, то пучок не отклоняется и светящаяся точка располагается в центре экрана. При подаче на управляющие пластины разности потенциалов пучок отклоняется и светящаяся точка на экране смещается в требуемом направлении. Так как масса электронов очень мала, у электронного пучка практически отсутствует инерция и он почти мгновенно реагирует на изменение управляющих разностей потенциалов. Изменение яркости свечения пятна достигается путем управления интенсивностью электронного пучка с помощью специального электрода, расположенного между катодом и анодом. Подобное устройство электронно-лучевой трубки открывает возможности использования ее для получения на экране быстро сменяющихся изображений.

Полупроводники. *Полупроводниками* называются вещества, удельное электрическое сопротивление которых может изменяться в широких пределах и быстро убывает с повышением температуры. Типичными, широко применяемыми полупроводниками являются германий Ge, кремний Si, теллур Te. Эти химические элементы принадлежат к IV и VI группе периодической системы элементов Менделеева. Кристаллы полупроводников имеют атомную кристаллическую решетку. Валентные электроны каждого атома связаны с валентными электронами соседних атомов химическими парноэлектронными связями. Такие связи называются *ковалентными*; для высвобождения электрона из ковалентной связи требуется сравнительно небольшая энергия (не более 1,5–2 электрон-вольт). При комнатной температуре средняя энергия теплового движения атомов в полупроводниковом кристалле составляет около 0,04 электрон-вольта, что значительно меньше энергии, необходимой для отрыва валентного электрона. Однако вследствие флуктуаций энергии теплового движения некоторые атомы полупроводника ионизуются.

Освободившиеся электроны не могут быть захвачены соседними атомами, так как все их валентные связи насыщены. Свободные электроны под действием внешнего электрического поля перемещаются в кристалле, создавая *электронный ток проводимости* (проводимости n-типа). Удаление электрона с внешней оболочки одного из атомов кристаллической решетки приводит к превращению этого атома в положительный ион. Этот ион может нейтрализоваться, захватив электрон у одного из соседних атомов. Далее в результате переходов от атомов к положительным ионам происходит процесс хаотического перемещения в кристалле места с недостающим электроном (*дырки*). При приложении внешнего электрического поля в кристалле возникает упорядоченное движение дырок – *дырочный ток проводимости* (проводимости p-типа).

Собственная и примесная проводимость полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры. В идеальном полупроводниковом кристалле электрический ток создается встречным движением равного количества отрицательно заряженных электронов и положительно заряженных дырок. Такой тип проводимости называется *собственной проводимостью* полупроводников.

Концентрация носителей заряда в полупроводниках при комнатных температурах значительно меньше, чем в металлах. Поэтому удельное сопротивление полупроводников обычно больше, чем металлов. При понижении температуры удельное сопротивление полупроводника увеличивается, он все больше становится похожим на диэлектрик.

Примесной проводимостью полупроводников называется их проводимость, обусловленная внесением в их кристаллические решетки примесей (примесных центров). Примеси бывают двух видов – донорные и акцепторные.

Если, например, в кристалле кремния Si имеется примесь атомов мышьяка As, то эти атомы замещают в узлах кристаллической решетки атомы кремния. Пятивалентный атом мышьяка вступает в ковалентные связи с четырьмя атомами кремния, а его пятый электрон оказывается незанятым в связях. Энергия, необходимая для разрыва связи пятого валентного электрона с атомом мышьяка в кристалле кремния, мала. Поэтому почти все атомы мышьяка лишаются одного из своих электронов и становятся положительными ионами. Так как энергия связи электронов с атомами кремния значительно превышает энергию связи пятого валентного электрона с атомом мышьяка, перемещение электронной вакансии (дырки) не происходит. Примеси, поставляющие электроны проводимости без образования такого же числа дырок, называются *донорными*. В полупроводниковом кристалле, содержащем донорные примеси, электроны являются основными, но не единственными носителями тока, так как небольшая часть собственных атомов кристалла ионизована и часть тока переносится дырками. Полупроводниковые материалы, в которых электроны служат основными носителями тока, а дырки – неосновными, называются *электронными* полупроводниками (полупроводниками *n*-типа).

Если в кристалле кремния часть атомов замещена атомами трехвалентного элемента, например индия In, то атом этого элемента может быть связан только с тремя соседними атомами, а связь с четвертым атомом осуществляется одним электроном. При этих условиях атом индия захватывает электрон у одного из соседних атомов кремния и становится отрицательным ионом. Захват электрона у одного из атомов кремния приводит к возникновению дырки. Примеси, захватывающие электроны и создающие тем самым подвижные дырки, не увеличивая при этом число электронов проводимости, называются *акцепторными*. При комнатных температурах основными носителями тока в полупроводниковом кристалле с акцепторной примесью являются дырки, а неосновными носителями – электроны. Полупроводники, в которых концентрация дырок превышает концентрацию электронов проводимости, называются *дырочными* полупроводниками (полупроводниками *p*-типа).

***P–n*-переход и его свойства.** Полупроводниковые приборы являются основой современной электронной техники. Принцип действия большинства этих приборов базируется на использовании свойств *p–n-перехода*. *P–n*-переходом называется область монокристаллического полупроводника, в которой происходит смена типа проводимости. Такая область создается введением примесей в процессе выращивания кристалла или введением атомов примесей в готовый кристалл.

Через границу, разделяющую области кристалла с разными типами проводимости, происходит диффузия электронов и дырок. Диффузия электронов из *n*-полупроводника в *p*-полупроводник приводит к появлению в электронном полупроводнике нескомпенсированных положительных ионов донорной примеси; в дырочном полупроводнике рекомбинация электронов с дырками приводит к появлению нескомпенсированных зарядов отрицательных ионов акцепторной примеси. Между двумя слоями объемного заряда возникает электрическое поле, напряженность которого возрастает по мере накопления объемного заряда. Это поле начинает препятствовать дальнейшей диффузии электронов и дырок. В результате пограничная область раздела полупроводников различных типов превращается в запирающий слой, который имеет повышенное сопротивление по сравнению с остальными объемами полупроводников.

Внешнее электрическое поле влияет на сопротивление запирающего слоя. Если *n*-полупроводник подключен к отрицательному полюсу источника тока, а *p*-полупроводник соединен с положительным полюсом, то под действием электрического поля электроны в *n*-полупроводнике и дырки в *p*-полупроводнике будут двигаться навстречу друг другу к границе раздела полупроводников, уменьшая его электрическое сопротивление. При таком прямом (пропускном) направлении внешнего поля электрический ток проходит через границу полупроводников. При подключении источника с обратной полярностью электроны в *n*-полупроводнике и дырки в *p*-полупроводнике под действием электрического поля будут перемещаться от границы раздела в противоположные стороны. Это приведет к утолщению запирающего слоя и увеличению его сопротивления. Направление внешнего поля, расширяющее запирающий слой, называется обратным (запирающим). При таком направлении внешнего поля электрический ток через контакт *n*- и *p*-полупроводников практически не проходит.

Полупроводниковый диод. Электронно-дырочный переход обладает односторонней проводимостью, аналогично проводимости вакуумного диода. Это свойство *p*–*n*-перехода используется в *полупроводниковых диодах*, предназначенных для выпрямления переменного тока. Схематическое изображение диода приведено на рис. 3.2.7, где пропускное направление указано стрелкой. Полупроводниковые диоды обладают рядом преимуществ по сравнению с вакуумными: экономичностью, миниатюрностью, высокой надежностью и большим сроком службы. Недостатком полупроводниковых диодов является зависимость их параметров от температуры, а также ограниченность температурного диапазона (от -70 до $+120\,^\circ\mathrm{C}$), в котором они могут работать.

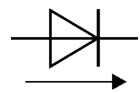


Рис. 3.2.7. Полупроводниковый диод

Транзистор. Чрезвычайно широкое распространение в настоящее время получили также полупроводниковые триоды, или *транзисторы*. По способу изготовления транзисторы мало отличаются от полупроводниковых диодов. Разница заключается в ином распределении примесей в кристалле полупроводника. Это распределение в транзисторе таково, что между областями полупроводника одного типа создается очень тонкая (порядка нескольких микрон) прослойка полупроводника другого типа. В результате в кристалле транзистора образуются два *p*–*n*-перехода, прямые направления которых противоположны. Тонкую прослойку, находящуюся в середине кристалла, называют базой, а две крайние области – эмиттером и коллектором.

Транзисторы, в которых эмиттер и коллектор обладают дырочной проводимостью, а база – электронной, называются транзисторами *p*–*n*–*p*-типа. Транзисторы *n*–*p*–*n*-типа имеют аналогичное устройство, только материал базы в них обладает дырочной проводимостью, а коллектор и эмиттер – электронной. Условные обозначения транзисторов в схемах приведены на рис. 3.2.8.

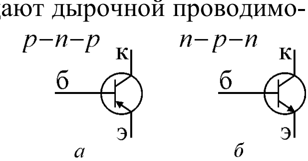


Рис. 3.2.8. Типы транзисторов

В качестве примера рассмотрим включение в цепь транзистора *p*–*n*–*p*-типа (рис. 3.2.9). Для приведения в действие такого транзистора на коллектор подают напряжение отрицательной полярности относительно эмиттера. Напряжение на базе по отношению к эмиттеру может быть как положительным, так и отрицательным. Основным рабочим состоянием транзистора является т.н. активное состояние, при котором к эмиттерному *p*–*n*-переходу

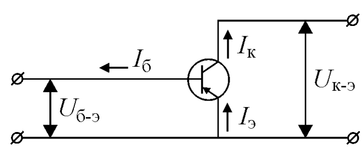


Рис. 3.2.9. Схема подключения транзистора

приложено напряжение в пропускном направлении, а к коллекторному – в запирающем. При этом эмиттерный *p–n*-переход открывается и из эмиттера в базу переходят дырки.

Путем диффузии дырки распространяются из области с высокой концентрацией вблизи эмиттера в область с низкой концентрацией к коллектору. Дырки, достигающие коллекторного *p–n*-перехода, втягиваются его полем и переходят в коллектор. Небольшая доля дырок (1–5%), движущихся от эмиттера к коллектору, встречает на своем пути через базу электроны и рекомбинирует с ними. Убыль электронов в базе за счет рекомбинации восполняется приходом электронов через базовый вывод. Таким образом, ток, протекающий через эмиттерный вывод транзистора $I_{э}$ в активном состоянии, оказывается равным сумме токов через его коллекторный $I_{к}$ и базовый $I_{б}$ выводы.

Соотношение между токами коллектора и базы определяется условиями диффузии и рекомбинации дырок в базе. Эти условия сильно зависят от используемых материалов и конструкции электродов транзистора, но очень слабо зависят от коллекторного и базового напряжений. Поэтому транзистор является прибором, который распределяет ток, протекающий через один из его электродов – эмиттер, в заданном соотношении между двумя другими электродами – базой и коллектором. Эта способность транзистора используется для усиления электрических сигналов. Отношение изменения силы тока в цепи коллектора к изменению тока в цепи базы при постоянном напряжении на коллекторе есть величина, для каждого транзистора постоянная и называемая коэффициентом передачи базового тока. Для транзисторов различных типов значение этого коэффициента лежит в пределах от 20 до 500. Следовательно, вызывая каким-либо способом изменение тока в цепи базы транзистора, можно получить в десятки и сотни раз большие изменения тока в цепи коллектора. В качестве усилительных элементов транзисторы широко используются в научной, промышленной и бытовой аппаратуре.

Изменением знака напряжения, подаваемого между базой и эмиттером, можно включать и выключать ток, протекающий через коллекторный вывод транзистора. В качестве бесконтактных переключательных элементов транзисторы используются в различных устройствах автоматического управления.

Термистор и фоторезистор. Сильная зависимость электрического сопротивления полупроводников температуры используется в приборах, получивших название *термисторов* или терморезисторов. Эти приборы служат для измерения температуры по силе тока в цепи полупроводника. Диапазон измеряемых температур для большинства термисторов лежит в интервале от 170 до 570 К. Существуют также термисторы для измерения очень высоких (порядка 1300 К) и очень низких (порядка 4 – 80 К) температур.

Электрическая проводимость полупроводников повышается не только при нагревании, но и при освещении. Этот эффект связан с тем, что разрыв ковалентных связей и образование свободных электронов и дырок может происходить за счет энергии квантов света, падающего на полупроводник. Приборы, в которых используется фотоэффект в полупроводниках, называются *фоторезисторами*. Миниатюрность и высокая чувствительность фоторезисторов позволяют использовать их в самых различных областях науки и техники для регистрации и измерения слабых световых потоков.

Электрический ток в газах. Газы состоят из электрически нейтральных атомов и молекул и в нормальных условиях не содержат свободных носителей тока (электронов и ионов), т.е. представляют собой диэлектрики. Носители электрического тока в газах могут возникнуть только при ионизации газов – отрыве электронов от атомов или молекул. При этом атомы (молекулы) газов превращаются в положительные ионы. Отрицательные ионы в газах могут возникнуть, если атомы (молекулы) присоединяют к себе электроны. Ионизация газов может происходить под влиянием различных воздействий: сильного нагревания, облучения электромагнитными и радиоактивными излучениями, бомбардировки атомов (молекул) газов быстрыми электронами и ионами.

Самостоятельный и несамостоятельный разряды. Явление прохождения электрического тока через газ, наблюдаемое только при условии какого-либо внешнего воздействия, называется *несамостоятельным газовым разрядом*. Простейший способ вызвать несамостоятельный разряд состоит в нагреве газа. Процесс возникновения свободных электронов и положительных ионов в результате столкновений атомов или молекул газа при высокой температуре называется термической ионизацией. Энергия, необходимая для отрыва электрона от атома или молекулы, может быть также передана фотонами. Ионизация атомов или молекул газа, вызванная поглощением световых квантов, называется *фотоионизацией*.

Наряду с процессом ионизации в газе всегда происходит противоположный ему процесс рекомбинации, т.е. соединения положительных ионов и электронов в нейтральные атомы (молекулы). При неизменном во времени действии внешнего ионизатора между процессами ионизации и рекомбинации устанавливается динамическое равновесие. Если внешний ионизатор перестает действовать, вследствие рекомбинации заряженные частицы исчезают и несамостоятельный разряд прекращается.

При увеличении напряженности электрического поля между электродами до некоторого определенного значения, зависящего от состава газа и его давления, в газе возникает электрический ток и без воздействия внешних ионизаторов. Такой ток называется *самостоятельным газовым разрядом*. В частности, в воздухе при атмосферном давлении самостоятельный разряд возникает при напряженности поля, примерно равной $3 \cdot 10^4$ В/см.

Основной механизм ионизации газа при самостоятельном разряде – это ионизация атомов и молекул вследствие ударов свободных электронов. Этот эффект, называемый ударной ионизацией, состоит в отрыве от атома (молекулы) газа одного или нескольких электронов, вызванном соударением с атомами (или молекулами) газа свободных электронов или ионов, разогнанных электрическим полем в разряде. Он становится возможным, когда свободные электроны или ионы при пробеге во внешнем электрическом поле приобретают кинетическую энергию, превышающую энергию связи электронов с атомом или молекулой.

Развитие самостоятельного разряда происходит лавинообразно, поскольку освобожденные в результате ионизации электроны и образовавшиеся при этом ионы также приобретают ускорение и участвуют в последующих соударениях. Одновременно при ударах положительных ионов о катод, а также под действием света, излучаемого при разряде, с катода могут освобождаться новые электроны. Эти электроны в свою очередь разгоняются электрическим полем разряда и создают новые электронно-ионные лавины. Концентрация электронов и ионов в газе по мере развития самостоятельного разряда увеличивается, а электрическое сопротивление разрядного промежутка уменьшается. Сила тока в цепи самостоятельного разряда обычно определяется лишь внутренним сопротивлением источника тока и сопротивлением других элементов цепи.

В зависимости от давления газа и приложенного к электродам напряжения различается несколько типов самостоятельного разряда в газах. При низких давлениях (обычно от сотых долей до нескольких мм рт. ст.) наблюдается *тлеющий разряд*. Для возбуждения тлеющего разряда достаточно напряжения в несколько десятков или сотен вольт. При тлеющем разряде почти вся трубка, за исключением небольшого участка возле катода, заполнена однородным свечением, называемым положительным столбом. Тлеющий разряд используют в газосветных трубках, лампах дневного света, газовых лазерах.

При нормальном давлении в газе, находящемся в сильно неоднородном электрическом поле (около остриев, проводов линий электропередачи высокого напряжения) наблюдается *коронный разряд*. Ударная ионизация газа и его свечение, напоминающее корону, происходят только в небольшой области, прилегающей к коронирующему электроду.

Искровой разряд, происходящий при нормальном давлении и большой напряженности поля между электродами, имеет вид прерывистых ярких зигзагообразных нитей – каналов ионизованного газа. При этом наблюдается интенсивное свечение газа и выделяется большое количество теплоты. Примером искрового разряда является молния. Главный канал молнии имеет диаметр от 10 до 25 см. Молнии достигают в длину до нескольких километров, в них развивается ток в импульсе до сотен тысяч ампер.

Дуговой разряд происходит при большой плотности тока и сравнительно небольшом напряжении между электродами (порядка нескольких десятков вольт). Основной причиной дугового разряда является интенсивная фотоэлектронная эмиссия раскаленного катода и последующая ударная ионизация. Между электродами возникает столб ярко светящегося газа (электрическая дуга). При атмосферном давлении температура газа в канале дуги достигает $5000\,^\circ\mathrm{C}$. Дуговой разряд используется для сварки и резки металлов, а также как мощный источник света в осветительных приборах.

Понятие о плазме. *Плазмой* называется особое состояние вещества, характеризующееся высокой степенью ионизации его частиц. Степень ионизации плазмы α представляет собой отношение концентрации заряженных частиц к общей концентрации частиц. В зависимости от α плазма подразделяется на слабоионизованную (α составляет доли процента), частично ионизованную (α составляет несколько процентов) и полностью ионизованную (α близка к 100%). Слабоионизованной плазмой в природных условиях являются верхние слои атмосферы Земли. Солнце и другие звезды представляют собой космические тела, состоящие из полностью ионизованной плазмы, которая образуется при очень высокой температуре (свыше 20 000 К), так называемой высокотемпературной плазмы. Под воздействием различных излучений или бомбардировки атомов газа быстрыми заряженными частицами образуется низкотемпературная плазма.

Плазма обладает рядом специфических свойств, позволяющих рассматривать ее как четвертое агрегатное состояние вещества. Заряженные частицы плазмы весьма подвижны и поэтому легко перемещаются под действием электрических и магнитных полей. Любое нарушение электрической нейтральности отдельных областей плазмы быстро компенсируется перемещением заряженных частиц под действием возникающего при этом электрического поля. В отличие от неионизованного газа, между молекулами которого существуют короткодействующие силы, между заряженными частицами плазмы действуют кулоновские силы, сравнительно медленно убывающие с расстоянием. Поэтому каждая заряженная частица в плазме взаимодействует сразу с большим количеством частиц, благодаря чему наряду с хаотическим тепловым движением частицы плазмы могут участвовать в разнообразных упорядоченных (коллективных) движениях. В плазме легко возбуждаются различные типы колебаний и волн. Проводимость плазмы увеличивается по мере роста температуры. Полностью ионизованная плазма по своей проводимости приближается к сверхпроводникам.

Примеры решения задач

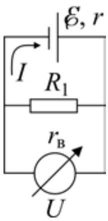
Пример 1. Источник с ЭДС $\mathcal{E} = 50$ В и с внутренним сопротивлением $r = 1{,}2$ Ом должен питать дуговую лампу с сопротивлением $R = 6$ Ом, требующую для нормального горения напряжения $U = 30$ В. Определить сопротивление R_1 резистора, введенного последовательно в цепь лампы для ее нормального горения.

Решение. Согласно закону Ома для полной цепи, ток во всех элементах последовательной цепи равен $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + R_1 + r}$. Напряжение на лампе определяется как $U = IR = \dfrac{\mathcal{E}R}{R + R_1 + r}$. Выражая отсюда R_1, получаем $R_1 = \dfrac{\mathcal{E} - U}{U} R - r = 2{,}8$ Ом.

Ответ. $R_1 = \dfrac{\mathcal{E} - U}{U} R - r = 2{,}8$ Ом.

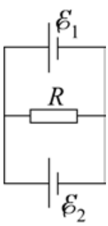
Пример 2. Электрическая цепь состоит из резистора с сопротивлением $R_1 = 10$ Ом и источника с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом. Напряжение на резисторе измеряют вольтметром, внутреннее сопротивление которого $r_в = 20$ Ом. Определить показание U вольтметра, если ЭДС источника $\mathcal{E} = 26$ В.

Решение. Сопротивление участка цепи, содержащего резистор R_1 и параллельно подключенный к нему вольтметр, равно $R_x = \dfrac{R_1 r_в}{R_1 + r_в}$. Полный ток в неразветвленной



цепи рассчитывается по формуле $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_x + r}$. Напряжения на вольтметре и на резисторе R_1 равны друг другу и определяются произведением полного тока на сопротивление этого участка цепи: $U = IR_x$. Объединяя записанные выражения, получаем $U = \dfrac{\mathcal{E}}{r/r_в + r/R_1 + 1} = 20$ В.

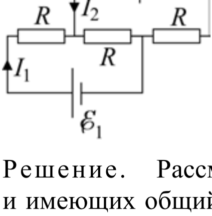
Ответ. $U = \dfrac{\mathcal{E}}{r/r_в + r/R_1 + 1} = 20$ В.



Пример 3. Два гальванических элемента, электродвижущие силы которых $\mathcal{E}_1 = 2$ В и $\mathcal{E}_2 = 1$ В, соединены по схеме, указанной на рисунке. При каком значении сопротивления R ток через гальванический элемент с ЭДС $\mathcal{E}_2$ не пойдет? Внутреннее сопротивление элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1$ равно $r_1 = 1$ Ом.

Решение. По условию ток I течет лишь в контуре, содержащем элемент с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и резистор с сопротивлением R. Выберем за положительное направление обхода в этом контуре направление против часовой стрелки и обозначим через U падение напряжения на резисторе R. Тогда $I = \dfrac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}$, $U = \dfrac{\mathcal{E}_1 R}{R + r_1}$. Отсутствие тока в нижней ветви цепи означает, что электрические заряды здесь находятся в равновесии. Следовательно, внутри элемента $\mathcal{E}_2$ кулоновские силы равны по модулю и противоположны по направлению сторонним силам. Поэтому $|U| = |\mathcal{E}_2|$. Объединяя записанные выражения, получаем $R = \dfrac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = 1$ Ом.

Ответ. $R = \dfrac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = 1$ Ом.



Пример 4. В цепь включены два источника с ЭДС $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и внутренними сопротивлениями r_1, r_2 соответственно и три одинаковых резистора сопротивлениями R. При какой величине R значения токов I_1 и I_2 будут равны друг другу?

Решение. Рассматриваемая цепь состоит из двух контуров, содержащих источники и имеющих общий элемент – резистор R. Запишем для этих контуров второе правило Кирхгофа, учитывая, что ток, текущий через общий резистор, равен сумме токов I_1 и I_2: $I_1 r_1 + I_1 R + (I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_1$ и $I_2 r_2 + I_2 R + (I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_2$. По условию задачи

$I_1 = I_2 = I$. Следовательно, эти уравнения принимают вид $Ir_1 + 3IR = \mathcal{E}_1$, $Ir_2 + 3IR = \mathcal{E}_2$. Отсюда $I = \dfrac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 - r_2}$, $R = \dfrac{\mathcal{E}_1}{3I} - \dfrac{r_1}{3}$. Из последних двух соотношений получаем $R = \dfrac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{3(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}$.

Ответ. $R = \dfrac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{3(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}$.

Пример 5. При подключении к батарее поочередно двух сопротивлений нагрузки $R_1 = 4$ Ом и $R_2 = 1$ Ом выделяющаяся в них мощность оказалась одинаковой и равной $N = 9$ Вт. Чему равна ЭДС $\mathcal{E}$ батареи?

Решение. Обозначив через r внутреннее сопротивление батареи, запишем токи в цепи и мощности, выделяющиеся в резисторах в первом и во втором случае: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + r}$, $N_1 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{(R_1 + r)^2} R_1$, $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_2 + r}$, $N_2 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{(R_2 + r)^2} R_2$. По условию $N_1 = N_2$, откуда следует, что $R_1 (R_2 + r)^2 = R_2 (R_1 + r)^2$, или $\sqrt{R_1}(R_2 + r) = \sqrt{R_2}(R_1 + r)$. Из последнего уравнения легко найти внутреннее сопротивление батареи: $r = \sqrt{R_1 R_2}$. Следовательно, $N = \dfrac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + \sqrt{R_1 R_2})^2} = \dfrac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2 + \sqrt{R_1 R_2})^2}$. Выражая из одного из этих равенств ЭДС батареи $\mathcal{E}$, получаем $\mathcal{E} = \sqrt{N}\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right) = 9$ В.

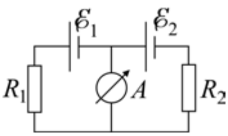
Ответ. $\mathcal{E} = \sqrt{N}\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right) = 9$ В.

Пример 6. Две лампы имеют мощности $N_1 = 20$ Вт и $N_2 = 40$ Вт при стандартном напряжении сети. При их последовательном включении в сеть с другим напряжением оказалось, что в двадцативаттной лампе выделяется та же мощность, что и при стандартном напряжении. Какая мощность N_2' выделяется при этом в другой лампе? Изменением сопротивления нитей ламп с температурой пренебречь.

Решение. Пусть U_0 – стандартное напряжение сети, R_1 и R_2 – сопротивления ламп. Поскольку $N_1 = \dfrac{U_0^2}{R_1}$, $N_2 = \dfrac{U_0^2}{R_2}$, справедливо соотношение $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$. При последовательном подключении ламп в них выделяются мощности $N_1' = R_1 I^2$, $N_2' = R_2 I^2$, где I – ток в цепи. Отсюда следует, что $\frac{N_1'}{N_2'} = \frac{R_1}{R_2}$. Учитывая, что по условию $N_1' = N_1$, получаем $N_2' = \frac{N_1^2}{N_2} = 10$ Вт.

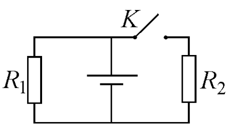
Ответ. $N_2' = \frac{N_1^2}{N_2} = 10$ Вт.

Задачи

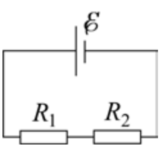


1. В схеме, показанной на рисунке, $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом. Чему равна ЭДС второго источника $\mathcal{E}_2$, если ток через амперметр не течет? Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

2. В схеме, показанной на рисунке, резисторы имеют сопротивления $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом. Определить внутреннее сопротивление батареи r, если известно, что при разомкнутом ключе K через резистор R_1 течет ток $I_1 = 2{,}8$ А, а при замкнутом ключе K через резистор R_2 течет ток $I_2 = 1$ А.

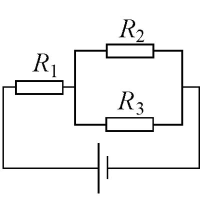


3. Если вольтметр, имеющий конечное сопротивление, подключен параллельно резистору R_1, то он показывает напряжение $U_1 = 6$ В, если параллельно резистору R_2, то – напряжение $U_2 = 4$ В. Каковы будут падения напряжения V_1 и V_2 на резисторах, если вольтметр не подключать? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.



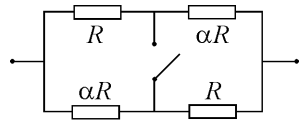
4. При параллельном подключении двух одинаковых нагревателей к источнику с внутренним сопротивлением r они развивают ту же мощность, что и при последовательном подключении. Чему равно сопротивление нагревателя R?

5. Два электронагревателя при параллельном подключении к сети развивают суммарную мощность N_1, а при последовательном – N_2. Каковы номинальные мощности N_{01} и N_{02} этих нагревателей?



6. В схеме, показанной на рисунке, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Известно, что на резисторе с сопротивлением R_1 выделяется мощность $N_1 = 25$ Вт. Какая мощность N_2 выделяется на резисторе с сопротивлением R_2?

7. Нагревательные элементы, сопротивления которых отличаются в α раз, соединены, как показано на рисунке, и подключены к источнику тока с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Найти α, если известно, что при замыкании ключа общая мощность, выделяющаяся в цепи, увеличивается в $k = 2$ раза. Изменением сопротивлений элементов при нагревании пренебречь.

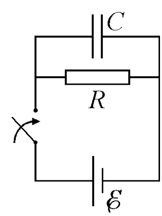


8. Напряжение на зажимах генератора постоянного тока $U_0 = 220$ В, а на зажимах нагрузки $U_1 = 210$ В. Определить мощность $N_л$, выделяющуюся в линии между генератором и нагрузкой, если номинальная мощность нагрузки при напряжении на ней, равном U_0, составляет $N = 10$ кВт.

9. При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом нагревательный элемент развивает мощность $N_1 = 50$ Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила $N_2 = 72$ Вт. Найти сопротивление R нагревателя.

10. Аккумулятор отдает во внешнюю цепь мощность $N_1 = 10$ Вт при токе $I_1 = 4$ А. Какую мощность N_2 отдаст аккумулятор во внешнюю цепь при токе $I_2 = 8$ А? Внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 0{,}1$ Ом.

11. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из конденсатора, резистора, источника тока и ключа. Первоначально ключ был разомкнут. Найти ЭДС источника, если известно, что сила тока через источник сразу после замыкания ключа в $n = 2$ раза больше установившейся силы тока в цепи, а установившееся напряжение на конденсаторе $U = 1{,}75$ В.



12. Заряженный конденсатор емкостью C замыкают на реостат, сопротивление которого плавно изменяется от R_0 до нуля. По какому закону нужно менять во времени сопротивление реостата, чтобы сила тока через него оставалась постоянной вплоть до полной разрядки конденсатора? Сопротивление реостата в начале разрядки равно R_0.

3.3. Магнитное поле

Теоретический материал

Магнитное поле. Индукция магнитного поля (магнитная индукция). Силовое поле, действующее на движущиеся электрические заряды, электрические токи и намагниченные тела (магниты), называется магнитным полем. В свою очередь магнитное поле создается движущимися зарядами, токами и магнитами. Силовой характеристикой магнитного поля является *вектор магнитной индукции* $\vec{B}$. Понятие о векторе магнитной индукции вводится на основании следующих опытных фактов: а) ориентирующее действие магнитного поля на замкнутый плоский контур (рамку) с током, б) существование силы, действующей на проводник с током в магнитном поле, в) отклонение пучка заряженных частиц в магнитном поле.

Действие магнитного поля на рамку с током. На плоскую рамку с током, подвешенную на нити в однородном магнитном поле, действует момент сил, который стремится развернуть ее определенным образом. Ориентирующее действие поля на рамку используется для выбора направления вектора магнитной индукции. С этой целью вводят понятие *положительной нормали* к рамке, которая определяется как единичный вектор, перпендикулярный плоскости рамки и направленный в сторону перемещения буравчика (винта), если вращать его по направлению тока в рамке (рис. 3.3.1). За направление вектора магнитной индукции в данной точке пространства принимается направление положительной нормали к рамке $\vec{n}$, свободно устанавливающейся в магнитном поле в окрестности данной точки. Это направление совпадает с направлением от южного полюса S к северному полюсу N свободно вращающейся магнитной стрелки.

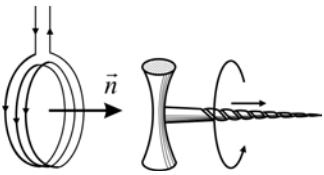


Рис. 3.3.1. Выбор направления вектора $\vec{B}$

Замкнутый контур площадью S с током I, содержащий k витков, создает магнитный момент

$$\vec{p}_m = IkS\vec{n}. \tag{3.3.1}$$

Направление магнитного момента рамки с током, свободно устанавливающейся в магнитном поле, совпадает с направлением вектора магнитной индукции.

Линии магнитной индукции. Графически магнитное поле изображают с помощью *линий магнитной индукции*, которые представляют собой линии, касательные к которым направлены так же, как вектор $\vec{B}$ в данной точке, а густота которых пропорциональна величине поля в данной точке. В качестве примера на рис. 3.3.2 изображены линии магнитной индукции, создаваемой постоянным магнитом. Линии магнитной индукции всегда замкнуты. Представленные на рис. 3.3.2 линии замыкаются внутри магнита.

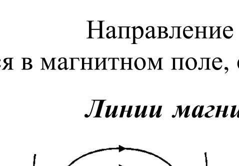


Рис. 3.3.2. Магнитное поле постоянного магнита

Для вычисления магнитного поля электрического тока используют формулу Био–Савара–Лапласа. Согласно этой формуле, магнитная индукция $\Delta\vec{B}$, создаваемая отрезком проводника длиной Δl, по которому течет ток I, равна

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I[\Delta\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}, \text{ или } \Delta B = \frac{\mu\mu_0 I \Delta l \sin\alpha}{4\pi r^2}, \tag{3.3.2}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента Δl в точку наблюдения; α – угол между векторами $\Delta\vec{l}$ и $\vec{r}$ (рис. 3.3.3); μ – магнитная проницаемость среды; μ_0 – магнитная постоянная ($\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ В·с/(А·м)). Символом [...] обозначено векторное произведение. Как следует из формулы (3.3.2), вектор $\Delta\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\Delta\vec{l}$ и $\vec{r}$, и направлен по перемещению буравчика, рукоятку которого поворачивают от вектора $\Delta\vec{l}$ к вектору $\vec{r}$. Например, на рис. 3.3.3 вектор $\Delta\vec{B}$ перпендикулярен плоскости чертежа и направлен от нас.

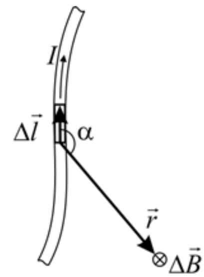


Рис. 3.3.3. К формуле Био–Савара–Лапласа

Картины линий индукции магнитного поля прямого тока и соленоида. Формула (3.3.2) позволяет рассчитать магнитную индукцию $\vec{B}$, созданную проводником с током любой формы. Так, модуль магнитной индукции, создаваемой *бесконечно длинным проводником* с током I в точке, находящейся на расстоянии x от него, равен

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi x}. \tag{3.3.3}$$

Линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности в плоскостях, перпендикулярных проводнику (рис. 3.3.4). Направление магнитной индукции тока определяется правилом буравчика: если поступательное движение буравчика совпадает с направлением тока, то вращение рукоятки буравчика указывает направление магнитного поля.

Магнитное поле внутри длинного *соленоида* (катушки с током) вдали от его концов является однородным (рис. 3.3.5). Магнитная индукция внутри соленоида в точках, удаленных от его концов, равна

$$B = \mu\mu_0 I \frac{N}{L}, \tag{3.3.4}$$

где I – ток, протекающий по виткам, N – число витков, L – длина соленоида.

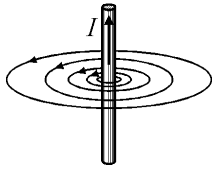


Рис. 3.3.4. Магнитное поле прямого тока

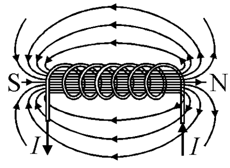


Рис. 3.3.5. Магнитное поле соленоида

Магнитное поле вне соленоида подобно магнитному полю полосового постоянного магнита (ср. с рис. 3.3.2). Конец катушки, из которого выходят линии индукции, аналогичен северному полюсу магнита; другой конец аналогичен южному магнитному полюсу. Расположение полюсов катушки и направление магнитного поля определяются по правилу буравчика: если вращать рукоятку буравчика по току, то перемещение буравчика укажет направление линий магнитной индукции.

Понятие о магнитном поле Земли. Земной шар является естественным постоянным магнитом, вокруг которого существует магнитное поле. Средняя величина магнитной индукции вблизи земной поверхности равна $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Согласно современным представлениям, основная часть магнитного поля Земли (геомагнитного поля) имеет внутриземное происхождение. Это поле создается электрическими токами, протекающими в жидком металлическом ядре планеты. На расстояниях, не превышающих $3R_{\oplus}$ ($R_{\oplus}$ – радиус Земли), геомагнитное поле имеет структуру, изображенную на рис. 3.3.6. Она близка к структуре магнитного поля намагниченного шара (магнитного диполя). Радиус диполя порядка $0{,}25R_{\oplus}$, его центр отстоит от центра Земли в сторону Тихого океана примерно на 450 км, ось диполя наклонена к оси вращения Земли на угол 11,5°.

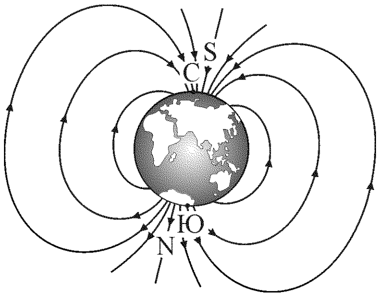


Рис. 3.3.6. Магнитное поле Земли

Магнитные полюса Земли смещены относительно географических, причем в Северном полушарии находится южный магнитный полюс S с координатами $75°53'$ северной широты, $100°23'$ западной долготы, а в Южном полушарии – северный магнитный полюс N с координатами $66°06'$ южной широты, $139°36'$ восточной долготы.

Незначительная часть (около 1%) магнитного поля, окружающего Землю, создается электрическими токами, текущими в ионосфере – ионизованной части верхней атмосферы Земли.

На расстояниях, превышающих $3R_{\oplus}$, структура магнитного поля Земли усложняется. Совместно с солнечным ветром (потоком заряженных частиц, испускаемых Солнцем), магнитное поле Земли формирует магнитосферу – многосвязную систему электрических и магнитных полей и потоков заряженных частиц. Магнитосфера несимметрична относительно дневной и ночной стороны Земли. С дневной стороны магнитосфера сжата солнечным ветром до расстояния $\sim 10R_{\oplus}$, с ночной стороны она образует вытянутый «хвост», простирающийся на многие миллионы километров.

Магнитное поле Земли играет роль своеобразного «щита», защищающего все живое от потоков заряженных космических частиц (космических лучей). На больших расстояниях от Земли магнитное поле невелико, но захватывает громадные области пространства. Действуя на заряженные частицы длительное время, оно существенно изменяет их траектории, отклоняя потоки частиц от Земли. На расстояниях примерно от 500 до 60 000 км заряженные частицы движутся, навиваясь на линии индукции магнитного поля Земли (рис. 3.3.7). Они совершают колебания от одного магнитного полюса к другому с периодом от 0,1 до 1 с. Эта область космического пространства

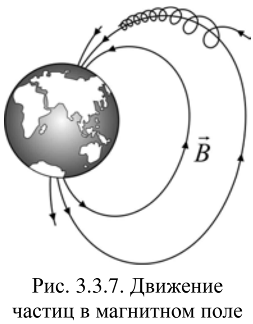


Рис. 3.3.7. Движение частиц в магнитном поле Земли

называется радиационным поясом Земли. Лишь в полярных областях небольшая часть таких частиц вторгается в верхние слои атмосферы из радиационного пояса Земли и вызывает полярные сияния.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера. На проводник с током, находящийся в магнитное поле, действует *сила Ампера*:

$$\vec{F} = I[\Delta\vec{l}, \vec{B}], \text{ или } F = I\Delta lB\sin\alpha = I\Delta lB_{\perp}, \tag{3.3.5}$$

где Δl – длина отрезка проводника с током I, α – угол между направлениями отрезка проводника и вектора магнитной индукции, $B_{\perp}$ – проекция вектора магнитной индукции на нормаль к проводнику.

Направление силы Ампера определяется правилом буравчика: рукоятку буравчика вращают от вектора $\Delta\vec{l}$ к вектору $\vec{B}$, тогда направление его поступательного движения определяет направление силы $\vec{F}$, или правилом левой руки: если левую руку расположить так, чтобы перпендикулярная к проводнику составляющая вектора магнитной индукции $\vec{B}$ входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по току, то отогнутый на $90°$ большой палец покажет направление действующей на участок проводника силы $\vec{F}$.

Между двумя параллельно расположенными бесконечно длинными проводниками, по которым протекают постоянные токи (рис. 3.3.8), возникает сила взаимодействия, направление и величина которой могут быть найдены из закона Ампера. Поскольку проводник с током I_2 находится в поле с индукцией $\vec{B}_1$, созданным проводником с током I_1, сила Ампера $\vec{F}$ направлена, как показано на рисунке. Проводники с одинаково направленными токами притягиваются, с противоположно направленными – отталкиваются. Модуль силы взаимодействия между участками единичной длины двух бесконечных параллельных проводников, расположенных на расстоянии R друг от друга, равен

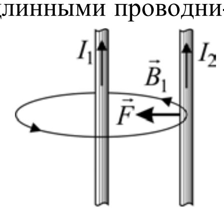


Рис. 3.3.8. Взаимодействие токов

$$F = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi R}. \tag{3.3.6}$$

Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. На заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, действует *сила Лоренца*:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \text{ или } F = qvB_{\perp}, \tag{3.3.7}$$

где $B_{\perp}$ – проекция вектора магнитной индукции на нормаль к скорости частицы. Направление силы Лоренца также определяется правилом левой руки или правилом буравчика.

В однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен скорости заряженной частицы, она движется по окружности с постоянным радиусом

$$R = \frac{m}{q} \cdot \frac{v}{B}, \tag{3.3.8}$$

где m – масса частицы, q – ее заряд, v – модуль скорость частицы, B – магнитная индукция. Движение частицы происходит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$. Сила Лоренца в этом случае играет роль центростремительной силы. Ее работа всегда равна нулю, поскольку сила Лоренца в каждый момент времени перпендикулярна вектору мгновенной скорости частицы.

Магнитные свойства вещества. Гипотеза Ампера. Магнитные взаимодействия зависят от свойств среды, в которой они происходят. Физическая величина, показывающая, во сколько раз индукция магнитного поля B в однородном веществе отличается от индукции B_0 магнитного поля в вакууме, называется *магнитной проницаемостью вещества*:

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \tag{3.3.9}$$

Согласно *гипотезе Ампера*, магнитные свойства вещества определяются замкнутыми электрическими токами внутри него. В соответствии с современными представлениями эти токи связаны с движением электронов в атомах вещества. Каждый электрон, движущийся в атоме вокруг ядра по орбите, представляет собой элементарный электронный ток, магнитный момент которого, называемый орбитальным магнитным моментом, перпендикулярен плоскости орбиты.

Орбитальный магнитный момент атома равен векторной сумме орбитальных магнитных моментов его электронов. Если вещество состоит из молекул, то магнитный момент молекулы является векторной суммой орбитальных магнитных моментов ее атомов. Таким образом, атомы и молекулы в общем случае имеют магнитные моменты и могут создавать магнитное поле.

Магнетиками называются вещества, способные намагничиваться во внешнем магнитном поле, т.е. создавать собственное (внутреннее) магнитное поле самого вещества. По своим свойствам магнетики подразделяются на слабомагнитные и сильномагнитные вещества. К слабомагнитным веществам относятся диамагнетики и парамагнетики. Основную группу сильномагнитных веществ составляют ферромагнетики.

Диамагнетиками называются вещества, у которых атомы или молекулы в отсутствие внешнего магнитного поля не имеют магнитных моментов. Диамагнетиками являются инертные газы, ряд металлов (золото, серебро, ртуть, цинк, медь), вода, стекло, многие органические соединения. При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле в каждом его атоме (или молекуле) индуцируется дополнительный атомный (или молекулярный) ток с некоторым магнитным моментом. Этот ток имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле противоположно внешнему полю. Вектор магнитной индукции внутреннего поля направлен против внешнего поля и ослабляет его. В этом и состоит намагничивание диамагнетиков, для которых $\mu < 1$. Диамагнетизм является очень слабым эффектом. Магнитная проницаемость даже самых сильных диамагнетиков отличается от единицы не более чем на десятитысячные доли.

Атомы (или молекулы), обладающие в отсутствие внешнего поля небольшим магнитным моментом, называются парамагнитными, а состоящие из них вещества – *парамагнетиками*. К парамагнетикам относятся кислород, окись азота, алюминий, платина, щелочные и щелочно-земельные металлы и др. В отсутствие внешнего магнитного поля тепловое движение атомов (молекул) парамагнетика препятствует возникновению упорядоченного расположения магнитных моментов отдельных атомов (молекул), и собственное магнитное поле в веществе не возникает. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле атомные (молекулярные) токи стремятся расположиться так, чтобы их магнитные моменты были параллельны вектору индукции внешнего поля. Совместное действие магнитного поля и теплового движения приводит к тому, что возникает преимущественная ориентация магнитных моментов атомов (молекул) по направлению внешнего поля. В парамагнитном веществе создается собственное (внутреннее) магнитное поле, вектор индукции которого направлен одинаково с вектором индукции внешнего поля. Для парамагнетиков $\mu > 1$, но эффект парамагнетизма очень слаб; магнитная проницаемость даже для наиболее сильных парамагнетиков отличается от единицы не более чем на тысячные доли.

Ферромагнетики. *Ферромагнетиками* называется группа веществ в твердом кристаллическом состоянии, обладающих магнитными свойствами, обусловленными особым взаимодействием атомных носителей магнетизма. К ферромагнетикам относятся железо, никель, кобальт, а также ряд сплавов. Ферромагнетизм объясняется квантовыми магнитными свойствами электронов. Дело в том, что электрон независимо от его пребывания в какой либо системе частиц (атом, молекула, кристалл) обладает собственным моментом импульса (*спином*) и связанным с ним собственным (спиновым) магнитным моментом. Важная особенность спина электрона состоит в том, что в магнитном поле (как во внешнем, так и в созданном атомными и молекулярными токами) спин может быть ориентирован так, чтобы его проекция на направление вектора магнитной индукции принимала только два значения, равные по модулю и противоположные по знаку. В результате этого в некоторых кристаллах, например в кристаллах железа, возникают условия для параллельной ориентации собственных магнитных моментов электронов группы атомов.

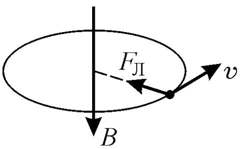
Внутри кристалла ферромагнетика образуются намагниченные области размером порядка $10^{-4} - 10^{-2}$ см, в которых спины электронов параллельны. Эти самопроизвольно намагниченные области называются доменами. В отдельных доменах магнитные поля имеют различные направления и в большом кристалле взаимно компенсируют друг друга. При внесении ферромагнитного образца во внешнее магнитное поле происходит частичное упорядочение ориентации магнитных моментов отдельных доменов и результирующая магнитная индукция в веществе растет. С увеличением магнитной индукции внешнего поля степень упорядоченности доменов повышается. При некотором значении индукции внешнего поля наступает полное упорядочение ориентации доменов и возрастание магнитной индукции в веществе прекращается. Это явление называется магнитным насыщением. В состоянии насыщения магнитная проницаемость ферромагнетиков имеет очень большие значения; например, для железа $\mu_{\max} \approx 5000,$ для пермаллоя (сплав никеля с железом) $\mu_{\max} \approx 100\,000.$ При отключении внешнего магнитного поля значительная часть доменов в ферромагнитном образце сохраняет упорядоченную ориентацию – образец становится постоянным магнитом.

Упорядоченность ориентации доменов в ферромагнетике нарушается тепловыми колебаниями атомов в кристалле. Чем выше температура, тем интенсивнее разрушается порядок в ориентации доменов, в результате чего образец размагничивается. Температура, выше которой вещество теряет свойства ферромагнетика, называется температурой Кюри. Температура Кюри у железа $770\,°\mathrm{C},$ у никеля $356\,°\mathrm{C},$ у кобальта $1130\,°\mathrm{C}.$

Примеры решения задач

Пример 1. Свободная частица массой $m = 10^{-4}$ г, несущая заряд $q = 10^{-7}$ Кл, движется в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 1$ Тл. Найти период обращения частицы *T*. Силу тяжести не учитывать.

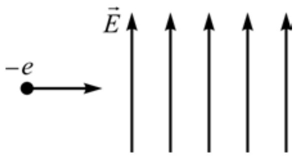
Решение. Со стороны магнитного поля на частицу действует сила Лоренца, перпендикулярная скорости частицы v и магнитной индукции *B*. Под действием этой силы частица совершает движение по окружности радиуса *R*, описываемое уравнением $m\frac{v^2}{R} = qvB$.



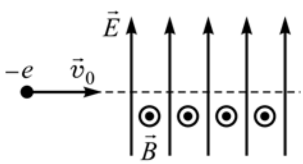
Учитывая, что период обращения частицы связан с ее скоростью и радиусом окружности соотношением $T = \frac{2\pi R}{v}$, получаем $T = \frac{2\pi m}{qB} \approx 6{,}28$ с.

Ответ. $T = \frac{2\pi m}{qB} \approx 6{,}28$ с.

Пример 2. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью $\vec{E}$ перпендикулярно силовым линиям ($E = 6 \cdot 10^4$ В/м). Определить величину и направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$, которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона $E_к = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести пренебречь.



Решение. В однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E}$ электрон будет двигаться под действием кулоновской силы $\vec{F}_К = -|e|\vec{E}$ по параболической траектории (здесь $|e|$ – абсолютная величина заряда электрона). Для того чтобы электрон двигался прямолинейно, нужно создать такое однородное магнитное поле, в котором действующая на электрон сила Лоренца $\vec{F}_Л$ в каждой точке его траектории была бы равна кулоновской силе по величине и противоположна ей по направлению, т.е. $\vec{F}_Л = -\vec{F}_К$. Модуль силы Лоренца $F_Л = |e|v_0 B_\perp$, ее направление определяется правилом левой руки. Здесь v_0 – скорость электрона, $B_\perp$ – модуль составляющей вектора магнитной индукции, перпендикулярной скорости. Очевидно, что сила Лоренца будет направлена против кулоновской силы в том случае, если магнитная индукция направлена перпендикулярно начальной скорости электрона и напряженности электрического поля. Применяя правило левой руки с учетом того, что заряд электрона отрицателен, находим, что вектор магнитной индук-

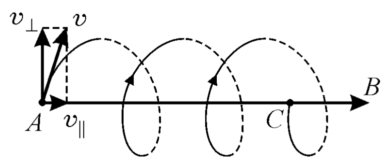


ции $\vec{B}$ должен быть перпендикулярным плоскости рисунка и направлен на нас. Составляя равенство $|e|E = |e| v_0 B$ и учитывая, что $v_0 = \sqrt{2E_к / m}$, получаем $B = E\sqrt{\dfrac{m}{2E_к}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Ответ. $B = E\sqrt{\dfrac{m}{2E_к}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Пример 3. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией B. В точке A он имеет скорость v, вектор которой составляет с вектором магнитной индукции угол α. При какой величине магнитной индукции B электрон попадет при своем движении в точку C, находящуюся на одной силовой линии с точкой A? Расстояние $AC = L$, модуль заряда электрона e, его масса m.

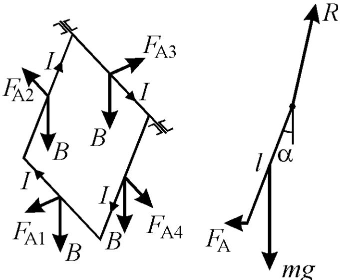
Решение. Траектория электрона представляет собой винтовую линию (см. рисунок). Компонента скорости $v_{\parallel} = v\cos\alpha$, параллельная магнитному полю, постоянна. В плоскости, перпендикулярной магнитному полю, электрон движется по окружности радиуса R в соответствии с уравнением $\dfrac{mv_{\perp}^2}{R} = ev_{\perp}B$, где $v_{\perp} = v\sin\alpha$ – перпендикулярная магнитному полю проекция скорости. Период обращения электрона $T = \dfrac{2\pi R}{v_{\perp}} = \dfrac{2\pi m}{eB}$. Для того чтобы электрон попал в точку C, он должен за время $\tau = \dfrac{L}{v_{\parallel}}$ совершить целое число k полных оборотов, т.е. $\tau = kT$, где $k = 1, 2, \ldots$ Из равенства $\dfrac{L}{v\cos\alpha} = k\dfrac{2\pi m}{eB}$ получаем $B = 2\pi k\dfrac{mv\cos\alpha}{eL}$, $k = 1, 2, \ldots$



Ответ. $B = 2\pi k\dfrac{mv\cos\alpha}{eL}$, $k = 1, 2, \ldots$

Пример 4. Квадратная проволочная рамка может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией, направленной вертикально. Когда по рамке течет ток $I = 5$ А, она отклоняется от вертикальной плоскости на угол $\alpha = 30°$. Определить индукцию магнитного поля B, если площадь сечения проволоки, из которой изготовлена рамка, $S = 4$ мм^2, а плотность материала проволоки $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. Модули и направления сил, действующих на отдельные стороны рамки со стороны магнитного поля (сил Ампера F_{A1}, F_{A2}, F_{A3}, F_{A4}), изображены на рисунке *а*. Видно, что отклонение рамки от вертикали вызывает сила F_{A1}, приложенная к нижней горизонтальной стороне рамки. Сила F_{A3} приложена к оси, на которой вращается рамка, а силы F_{A2} и F_{A4} действуют в плоскости рамки и могут вызвать только ее деформацию. Таким образом, рамка находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке *б*,



а *б*

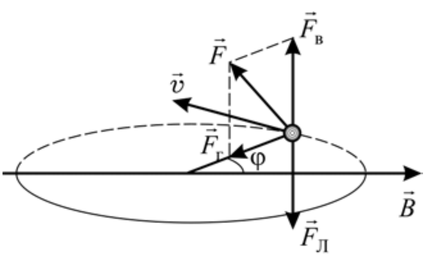
где mg – модуль силы тяжести, $F_A \equiv F_{A1} = IBl$ – модуль силы Ампера, R – модуль силы реакции оси. Здесь $m = 4lS\rho$ – масса рамки, l – длина одной из ее сторон. Уравнение моментов относительно оси вращения рамки имеет вид $F_A l\cos\alpha = mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha$.

Объединяя записанные выражения, получаем $B = \dfrac{2\rho Sg}{I}\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}078$ Тл.

Ответ. $B = \dfrac{2\rho Sg}{I}\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}078$ Тл.

Пример 5. Горизонтально расположенный стержень равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов, с угловой скоростью ω. На другом конце стержня закреплен маленький шарик массой m, несущий заряд q. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле, индукция которого B направлена горизонтально. Найти максимальное значение F_{max} силы F, с которой стержень действует на шарик в процессе движения, если известно, что минимальное значение силы F равно F_{min}. Силу тяжести не учитывать, размером шарика по сравнению с длиной стержня пренебречь.

Решение. Силы, действующие на шарик в некоторой точке его траектории, изображены на рисунке. Здесь через $\vec{F}$ обозначена сила реакции стержня, а через $\vec{F}_Л$ – сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости стержня и вектору магнитной индукции, т.е. вертикально. Силу $\vec{F}$ удобно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие: $\vec{F} = \vec{F}_г + \vec{F}_в$. Тогда $F = \sqrt{F_г^2 + F_в^2}$. Проекции



уравнения движения шарика на горизонтальное и вертикальное направления имеют вид $m\omega^2 l = F_г$, $F_в = F_Л = qvB\cos\varphi$, где $v = \omega l$ – скорость шарика, l – длина стержня,

φ – угол между стержнем и вектором $\vec{B}$. Отсюда $F = \sqrt{(m\omega^2 l)^2 + (q\omega l B \cos\varphi)^2}$. Минимальное значение этой силы достигается при $\varphi = 90°$, $\varphi = 270°$, максимальное – при $\varphi = 0$, $\varphi = 180°$. Следовательно, $F_{\min} = m\omega^2 l$, $F_{\max} = \sqrt{(m\omega^2 l)^2 + (q\omega l B)^2}$. Из этих равенств находим $F_{\max} = F_{\min}\sqrt{1 + \left(\dfrac{qB}{m\omega}\right)^2}$.

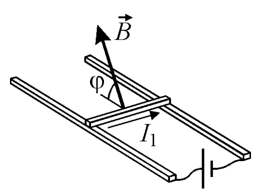
Ответ. $F_{\max} = F_{\min}\sqrt{1 + \left(\dfrac{qB}{m\omega}\right)^2}$.

Задачи

1. Свободная заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией B по окружности радиуса R. В некоторый момент времени включают однородное электрическое поле, напряженность E которого направлена параллельно магнитной индукции. Через какое время Δt после включения электрического поля кинетическая энергия частицы увеличится в $n = 2$ раза? Силу тяжести не учитывать.

2. Заряженная частица массой $m = 6{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг влетает со скоростью $v_0 = 100$ км/с в область с постоянным и однородным магнитным полем, вектор индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен $\vec{v}_0$. На какой угол α отклонится вектор скорости частицы, если область, занимаемая магнитным полем, в котором движется частица, ограничена плоскостями, перпендикулярными $\vec{v}_0$, расстояние между которыми $L = 10$ см? Заряд частицы $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, индукция магнитного поля $B = 0{,}01$ Тл. Силу тяжести не учитывать.

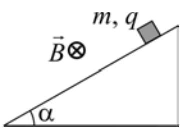
3. На параллельных проводящих рельсах, расположенных в горизонтальной плоскости, покоится проводящий стержень, перпендикулярный рельсам. Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого лежит в вертикальной плоскости, параллельной рельсам, и образует с горизонталью угол φ (см. рисунок). Когда по стержню пропускают постоянный ток в направлении, указанном стрелкой, стержень начинает скользить по рельсам при силе тока, равной I_1. Какой величины I_2 ток нужно пропустить по стержню в противоположном направлении, чтобы стержень вновь пришел в движение? Коэффициент трения между рельсами и стержнем μ.



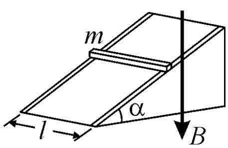
4. Подвешенный горизонтально на двух невесомых нитях прямолинейный проводник находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально. Если по проводнику течет ток $I_1 = 1$ А, то нити отклоняются от вертикали на угол $\alpha_1 = 30°$. При какой силе тока I_2 в проводнике нити отклонятся на угол $\alpha_2 = 60°$?

5. Заряженная бусинка массой $m = 1$ г надета на гладкий горизонтальный стержень, который движется с горизонтальной скоростью $v_{\text{c}} = 1$ м/с, направленной перпендикулярно стержню. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле, индукция которого направлена вертикально. В некоторый момент времени скорость бусинки относительно стержня составляет $v_{\text{oc}} = 2$ м/с, а ее ускорение равно $a = 3$ м/с^2. С какой силой N действует бусинка на стержень в этот момент времени? Силу тяжести не учитывать, трением бусинки о стержень пренебречь.

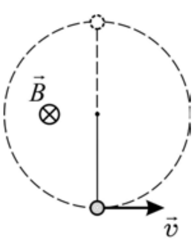
6. Небольшой брусок массой m, несущий положительный заряд q, удерживают на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Брусок отпускают без начальной скорости. Чему равна максимальная скорость бруска $v_{\max}$, если коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью μ? Ускорение свободного падения g.



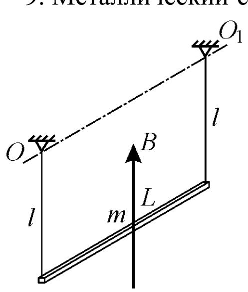
7. Вдоль наклонной плоскости, образующей с горизонталью угол $\alpha = 30°$, проложены рельсы, по которым может скользить проводящий стержень массой $m = 1$ кг. Какой минимальной величины ток $I_{\min}$ нужно пропустить по стержню, чтобы он оставался в покое, если вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл, направленной вертикально? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0{,}2$, расстояние между ними $l = 0{,}5$ м. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



8. Маленький шарик массой m, несущий положительный заряд q, подвешен на нити длиной l и помещен в однородное магнитное поле с индукцией B, направленной горизонтально от нас. Сообщив шарику некоторую скорость, направление которой показано на рисунке, шарик приводят в движение по окружности в вертикальной плоскости, перпендикулярной магнитному полю и совпадающей с плоскостью рисунка. При какой минимальной скорости $v_{\min}$ шарика в нижней точке он сможет совершить полный оборот?



9. Металлический стержень массой m и длиной L подвешен горизонтально на двух невесомых гибких проводниках длиной l каждый. Стержень находится в однородном магнитном поле, индукция B которого направлена вертикально. По стержню пропускают кратковременный импульс постоянного тока силой I_0 и длительностью τ. При каком минимальном значении I_0 стержень совершит полный оборот, двигаясь по окружности вокруг оси OO_1, проходящей через точки подвеса? Считать, что смещение стержня за время τ ничтожно мало.



3.4. Электромагнитная индукция

Теоретический материал

Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции. Английский физик М. Фарадей в 1831 г. обнаружил, что при изменении магнитного поля, пронизывающего замкнутый проводящий контур, в нем возникает электрический ток. Этот ток был назван индукционным током. В своих опытах Фарадей наблюдал возникновение индукционного тока в катушке из металлической проволоки при вдвигании в нее и выдвигании из нее постоянного магнита, а также при изменении силы тока во второй катушке, магнитное поле которой пронизывает первую катушку.

Явление возникновения электрического тока в замкнутом проводящем контуре при изменениях магнитного поля, пронизывающего контур, называется *электромагнитной индукцией*.

Магнитный поток. Для количественного описания этого явления вводится понятие *магнитного потока*. Потоком магнитной индукции (магнитным потоком) через некоторую поверхность площадью S называется величина

$$\Phi = BS\cos\alpha = B_{\perp}S, \qquad (3.4.1)$$

где α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к поверхности S (рис. 3.4.1). Поток магнитной индукции через контур с током будет положительным, если составляющая $\vec{B}_{\perp}$ вектора $\vec{B}$ вдоль нормали к контуру совпадает с положительным направлением нормали, и отрицательным, если составляющая $\overline{B}_{\perp}$ противоположна положительному направлению нормали. Для любого контура положительное направление нормали связано с положительным направлением обхода контура правилом буравчика: если рукоятку буравчика вращать по направлению обхода, то перемещение буравчика укажет положительное направление нормали.

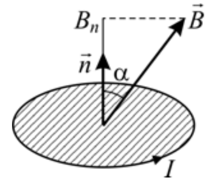


Рис. 3.4.1. Определение магнитного потока

Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца. Появление электрического тока в замкнутом контуре при изменениях магнитного поля, пронизывающего контур, свидетельствует о действии в контуре сторонних сил неэлектрической природы, или о возникновении *ЭДС индукции*. Опыты показывают, что направление ЭДС индукции (и, следовательно, индукционного тока) зависит от того, возрастает или убывает магнитный поток через контур, а также от знака магнитного потока. Общее правило, позволяющее определить направление индукционного тока в контуре, было установлено в 1833 г. русским физиком Э.Х. Ленцем. Согласно *правилу Ленца*, возникающий в замкнутом контуре индукционный ток имеет такое направление, что созданный им магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, стремится компенсировать то изменение магнитного потока, которым вызван данный ток.

Экспериментальные исследования зависимости ЭДС индукции от характера изменения магнитного потока привели к установлению *закона электромагнитной индукции*: При изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в нем возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}$, которая численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока:

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{3.4.2}$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока за время Δt. Знак «–» отражает правило Ленца: если $\Delta\Phi > 0,$ то ЭДС индукции в контуре направлена против положительного направления обхода контура, если $\Delta\Phi < 0,$ то направление ЭДС индукции совпадает с положительным направлением обхода.

В Международной системе единиц закон электромагнитной индукции используют для установления единицы магнитного потока. Эту единицу называют *вебером* (Вб) и определяют следующим образом: магнитный поток через площадь, ограниченную замкнутым контуром, равен 1 Вб, если при равномерном убывании этого потока до нуля за 1 с в контуре возникает ЭДС индукции 1В: 1 Вб = 1 В · 1 с.

Единицу магнитной индукции устанавливают на основе соотношения (3.4.1). Если вектор $\vec{B}$ перпендикулярен поверхности S, то $\Phi = BS$. Отсюда магнитная индукция равна единице, если она создает через площадь 1 м^2 магнитный поток 1 Вб. Эту единицу магнитной индукции называют *тесла* (Тл): 1 Тл = 1 Вб/1 м^2 = 1 Н/(1 А·1 м).

ЭДС индукции возникает как в неподвижном контуре, помещенном в изменяющееся магнитное поле, так и в проводнике, движущемся в магнитном поле, которое может не меняться со временем. Значение ЭДС индукции в обоих случаях определяется законом (3.4.2), но происхождение ЭДС различно.

Если магнитное поле постоянно во времени, но магнитный поток через контур изменяется из-за движения отдельных проводников, образующих контур, то причиной возникновения ЭДС индукции является сила Лоренца, действующая на свободные заряды в движущемся проводнике. При использовании закона электромагнитной индукции в форме (3.4.2) нужно иметь в виду, что изменение магнитного потока связано с изменением площади контура. При движении незамкнутого проводника в магнитном поле, на концах проводника также возникает ЭДС индукции, величина которой определяется магнитным потоком через площадь, «заметаемую» проводником в единицу времени. В частности, при движении в магнитном поле прямолинейного проводника длиной l со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной проводнику, ЭДС индукции на концах проводника равна

$$\mathscr{E} = B_{\perp} l v, \tag{3.4.3}$$

где $B_{\perp}$ – проекция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на направление, перпендикулярное скорости движения проводника.

Вихревое электрическое поле. Физической причиной возникновения ЭДС индукции в неподвижном контуре является действие *вихревого электрического поля*, всегда возникающего в пространстве при изменении магнитного поля. Работа вихревого электрического поля по перемещению единичного заряда в проводнике и представляет собой ЭДС индукции.

Вихревое электрическое поле отличается от электростатического (кулоновского) поля тем, что оно создается не электрическими зарядами, а переменным магнитным полем, причем его силовые линии замкнуты сами на себя, а не начинаются и заканчиваются на зарядах, как в случае кулоновского поля. Работа вихревого электрического поля при перемещении заряда по замкнутой траектории отлична от нуля.

Самоиндукция. Индуктивность. ЭДС самоиндукции. Если магнитное поле вызвано током I, протекающим по какому-либо контуру, то магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром, пропорционален току, т. е. $\Phi = LI$, где L – *индуктивность* контура, которая зависит от его формы и размеров и от магнитных свойств окружающей среды. При изменении магнитного потока через контур вследствие изменения тока, протекающего по этому контуру, в нем возникает *ЭДС самоиндукции*

$$\mathcal{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta T}. \qquad (3.4.4)$$

Единица индуктивности в СИ называется *генри* (Гн). Индуктивность контура равна 1 Гн, если в нем при изменении силы тока на 1 А за 1 с возникает ЭДС самоиндукции 1 В: 1 Гн = 1 В · 1 с/1 А.

Энергия магнитного поля. Для создания тока I в контуре с индуктивностью L необходимо совершить работу по преодолению ЭДС самоиндукции. Собственной энергией тока W_m называется величина, равная этой работе. Если среда, в которой находится контур, не ферромагнитная, то

$$W_m = \frac{LI^2}{2}. \qquad (3.4.5)$$

Собственная энергия тока сосредоточена в магнитном поле, созданном проводником с током, причем эта энергия распределена по всему пространству, где имеется магнитное поле. Энергия однородного магнитного поля, сосредоточенного в объеме V изотропной и неферромагнитной среды,

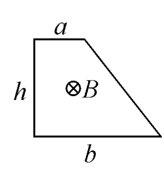
$$W_m = \frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{\mu\mu_0}V. \qquad (3.4.6)$$

Объемной плотностью энергии магнитного поля называется энергия, заключенная в единице объема поля:

$$w_m = \frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{\mu\mu_0}. \qquad (3.4.7)$$

Это выражение справедливо не только для однородного поля, но и для произвольных, в том числе неоднородных в пространстве и переменных во времени, магнитных полей.

Примеры решения задач



Пример 1. Замкнутый проводник в виде прямоугольной трапеции находится в магнитном поле с индукцией $B = 6\cdot10^{-2}$ Тл, направленной перпендикулярно плоскости трапеции от нас. Сопротивление единицы длины проводника $\rho = 0{,}023$ Ом/м. Найти величину и направление тока

I, текущего в проводнике при равномерном уменьшении поля до нуля в течение $\tau = 3$ с. Размеры отрезков проводника $a = 0{,}2$ м, $b = 0{,}5$ м, $h = 0{,}4$ м.

Решение. Для определения направления ЭДС индукции выберем нормаль к плоскости контура, совпадающую по направлению с магнитным полем (от нас). Тогда магнитный поток через контур будет положительным. Выбранной нормали соответствует направление обхода контура по часовой стрелке. Поскольку поле убывает со временем, изменение магнитного потока отрицательно: $\Delta\Phi < 0$. Из закона электромагнитной индукции $\mathcal{E} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ вытекает, что ЭДС индукции положительна, т.е. направлена по часовой стрелке. Туда же будет направлен и индукционный ток. Величина тока определяется отношением ЭДС индукции $\mathcal{E} = BS/\tau$ к сопротивлению проводника $R = \rho P$. Здесь $P = a + b + h + \sqrt{h^2 + (b-a)^2}$ – периметр трапеции, $S = (a+b)h/2$ – ее площадь. Окончательно получаем $I = \dfrac{B(a+b)h}{2\rho\tau(a+b+h+\sqrt{h^2+(a-b)^2})} = 76$ мА. Индукционный ток течет по часовой стрелке.

Ответ. $I = \dfrac{B(a+b)h}{2\rho\tau(a+b+h+\sqrt{h^2+(a-b)^2})} = 76$ мА, индукционный ток течет по часовой стрелке.

Пример 2. Катушка из n одинаковых витков площадью S каждый присоединена к баллистическому гальванометру. Вначале катушка находилась между полюсами магнита в однородном магнитном поле с индукцией B, параллельной оси катушки. Затем катушку переместили в пространство, где магнитное поле отсутствует. Какое количество электричества q протекло через гальванометр? Сопротивление всей цепи R.

Решение. Магнитный поток, пронизывающий катушку в начальный момент, равен $\Phi = nSB$. Пусть катушка удаляется из магнитного поля за время Δt. Поскольку изменение магнитного потока за это время $\Delta\Phi = \Phi$, величина ЭДС индукции $\mathcal{E} = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \dfrac{nSB}{\Delta t}$. Ток в цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$; протекший за время Δt заряд $q = I\Delta t = \dfrac{BSn}{R}$. Это количество электричества и будет зарегистрировано баллистическим гальванометром, который измеряет прошедший через него заряд.

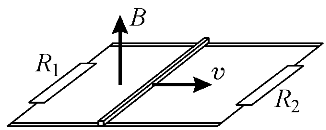
Ответ. $q = \dfrac{BSn}{R}$.

Пример 3. При равномерном изменении силы тока через проволочную катушку в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = 10$ В. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Какой заряд q протечет за время $\Delta t = 0{,}05$ с через замкнутый проволочный виток, надетый на катушку так, что его плоскость перпендикулярна оси катушки? Сопротивление витка $R = 0{,}2$ Ом.

Решение. Величина ЭДС самоиндукции равна $\mathcal{E} = L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$, где L – индуктивность катушки. Поскольку L пропорциональна числу витков катушки, индуктивность одного витка $L_1 = L/N$. Поэтому индукционный ток в витке $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{NR}$. Заряд, протекший через виток за время Δt, равен $q = I_1\Delta t = \dfrac{\mathcal{E}\Delta t}{NR} = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ Кл.

Ответ. $q = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ Кл.

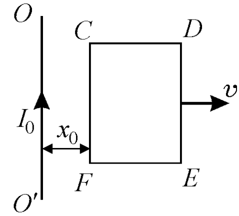
Пример 4. По двум параллельным проводам со скоростью $v = 20$ см/с, направленной вдоль проводов, движется проводящий стержень. Между концами проводов включены резисторы $R_1 = 2$ Ом и $R_2 = 4$ Ом. Расстояние между проводами $d = 10$ см. Провода помещены в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 10$ Тл перпендикулярна плоскости, проходящей через провода. Найти силу тока *I*, текущего по стержню. Сопротивлением проводов, стержня и контактов между ними пренебречь.



Решение. При движении в магнитном поле проводящего стержня в нем возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = Bvd$. В левом и правом контурах, образованных стержнем и неподвижными проводниками, текут токи $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1}$ и $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_2}$. Ток, текущий по стержню, $I = I_1 + I_2$. Следовательно, $I = Bvd\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = 0{,}15$ А.

Ответ. $I = Bvd\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) = 0{,}15$ А.

Пример 5. Прямоугольный контур *CDEF* перемещается поступательно с постоянной скоростью v в магнитном поле тока I_0, текущего по длинному прямому проводу OO'. Стороны *CF* и *DE* параллельны проводу. Определить величину и направление тока, индуцированного в контуре в тот момент, когда сторона *CF* находится на расстоянии x_0 от провода. $CF = DE = a$, $CD = EF = b$. Сопротивление контура *R*.



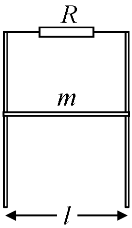
Решение. Линии магнитной индукции, создаваемой током I_0, текущим в проводе OO', представляют собой концентрические окружности, охватывающие этот провод. Следовательно, магнитная индукция перпендикулярна плоскости контура и в занимаемой им области направлена от нас. Величина магнитной индукции в окрестности отрезков контура CF и DE равна соответственно $B_{CF} = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi x_0}$, $B_{DE} = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi(x_0+b)}$. При движении контура со скоростью v на концах отрезков CF и DE возникает ЭДС индукции, обусловленная действием силы Лоренца на свободные заряды в движущихся проводниках. Направления сил Лоренца в обоих отрезках одинаковы: от F к C и от E к D, а величины создаваемых ими ЭДС индукции различны: $\mathcal{E}_{CF} = B_{CF} vl = \dfrac{\mu_0 I_0 vl}{2\pi x_0}$, $\mathcal{E}_{DE} = B_{DE} vl = \dfrac{\mu_0 I_0 vl}{2\pi(x_0+b)}$. Очевидно, что $\mathcal{E}_{CF} > \mathcal{E}_{DE}$, поэтому суммарная работа сил Лоренца положительна при обходе контура по часовой стрелке. В этом же направлении будет течь индукционный ток, величина которого $I = \dfrac{\mathcal{E}_{CF} - \mathcal{E}_{DE}}{R}$. Объединяя записанные выражения, получаем $I = \dfrac{\mu_0 ab I_0 v}{2\pi x_0 (x_0+b) R}$.

Ответ. $I = \dfrac{\mu_0 ab I_0 v}{2\pi x_0 (x_0+b) R}$.

Задачи

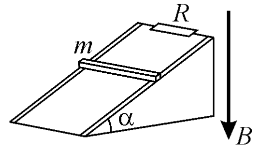
1. Кольцо радиуса $r = 1$ м, сделанное из тонкой проволоки, находится в однородном магнитном поле, индукция которого увеличивается пропорционально времени t по закону $B = kt$. Определить мощность N, выделяющуюся в кольце, если известно, что сопротивление кольца равно $R = 1$ Ом, вектор индукции $\vec{B}$ составляет с нормалью к плоскости кольца угол $\alpha = 60°$, $k = 1$ Тл/с.

2. Катушку индуктивностью $L = 0{,}3$ Гн подключают к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}5$ В. Через какой промежуток времени Δt сила тока в цепи будет равна $I = 5$ А? Омическим сопротивлением катушки и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

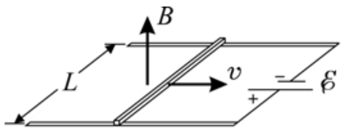


3. По двум вертикальным проводящим рейкам, находящимся на расстоянии l и соединенным резистором с сопротивлением R, под действием силы тяжести начинает скользить проводник, длина которого l и масса m. Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого B перпендикулярна плоскости рисунка. Какова установившаяся скорость v движения проводника? Сопротивлением самого проводника и реек, а также трением пренебречь. Ускорение свободного падения g.

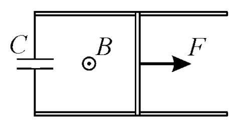
4. По параллельным рельсам, наклоненным под углом $\alpha = 30°$ к горизонтали, соскальзывает без трения проводящий брусок массой $m = 100$ г. В верхней части рельсы замкнуты резистором с сопротивлением $R = 20$ Ом. Вся система находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Чему равна сила тока I, текущего по бруску, если известно, что он движется с постоянной скоростью $v = 1$ м/с? Сопротивлением бруска и рельсов пренебречь, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



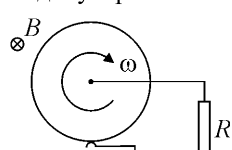
5. В магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл, направленной вертикально вверх, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длиной $L = 0{,}4$ м со скоростью $v = 5$ м/с. Концы рельсов присоединены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом. Какое количество теплоты Q выделится в стержне за время $\tau = 10$ с, если его сопротивление $R = 10$ Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.



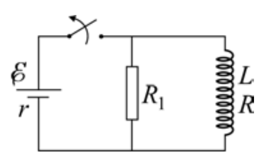
6. По двум металлическим параллельным рейкам, расположенным в горизонтальной плоскости и замкнутым на конденсатор емкостью C, может без трения двигаться металлический стержень массой m и длиной l. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вверх. К середине стержня перпендикулярно ему и параллельно рейкам приложена сила F. Определить ускорение стержня. Сопротивлением реек, стержня и подводящих проводов пренебречь. В начальный момент скорость стержня равна нулю.



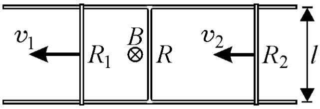
7. Металлический диск радиуса $r = 10$ см, расположенный перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией $B = 1$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью $\omega = 628$ рад/с. Два скользящих контакта, один на оси диска, другой на краю, соединяют диск с резистором сопротивлением $R = 5$ Ом. Какая мощность N выделяется на резисторе? Сопротивлением диска и соединительных проводов пренебречь.



8. Катушка индуктивностью $L = 0{,}4$ Гн с сопротивлением обмотки $R = 2$ Ом подключена параллельно с резистором сопротивлением $R_1 = 8$ Ом к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом. Какое количество теплоты Q выделится в резисторе R_1 после отключения источника?



9. Два параллельных металлических стержня расположены на расстоянии l друг от друга в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией B. Стержни соединены неподвижным проводником сопротивлением R. Два других проводника сопротивлениями R_1 и R_2 находятся слева и справа от неподвижного проводника и скользят по стержням в одну и ту же сторону со скоростями v_1 и v_2. Какой ток I течет по неподвижному проводнику? Сопротивление стержней пренебрежимо мало.



3.5. Электромагнитные колебания и волны

Теоретический материал

Переменный электрический ток. Переменным называется ток, величина и направление которого периодически меняются во времени. Наибольшее практическое значение имеет переменный ток, изменяющийся по гармоническому закону (т.е. по закону синуса или косинуса). Как и любое гармоническое колебание, такой ток может быть описан формулой

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{3.5.1}$$

где I – значение силы тока в данный момент времени t, I_0 – амплитуда тока, ω – круговая частота, φ_0 – начальная фаза. Круговая частота ω связана с частотой ν и периодом T формулами $\omega = 2\pi\nu$, $\omega = 2\pi/T$.

Амплитудное и действующее (эффективное) значение периодически изменяющегося напряжения и тока. Если переменный гармонический ток проходит через резистор, то напряжение на нем также меняется по гармоническому закону, причем в той же фазе, что и ток:

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{3.5.2}$$

где U_0 – амплитуда напряжения. Мгновенная мощность переменного тока в резисторе определяется выражением

$$N = IU = I_0 U_0 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \tag{3.5.3}$$

Средняя за период мощность равна

$$\overline{N} = \frac{I_0 U_0}{2}. \tag{3.5.4}$$

Формула (3.5.4) дает возможность сравнивать переменный и постоянный токи по их тепловому действию. Эффективным (действующим) значением переменного тока называется сила постоянного тока, выделяющего в проводнике такое же количество теплоты, что и данный переменный ток за то же время. В соответствии с этим, действующее значение силы тока равно $I_д = I_0/\sqrt{2}$. Аналогично действующее значение переменного напряжения определяется как $U_д = U_0/\sqrt{2}$.

Получение переменного тока с помощью индукционных генераторов. Переменный ток находит широкое применение на практике благодаря простым и экономичным способам его получения (с помощью индукционных генераторов) и преобразования переменного напряжения (с помощью трансформаторов). Принцип действия генератора переменного тока основан на явлении электромагнитной индукции, приводящем к возникновению переменной ЭДС при вращении проволочного витка в магнитном поле (рис. 3.5.1).

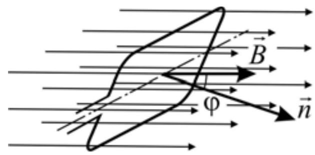


Рис. 3.5.1. Рамка, вращающаяся в магнитном поле

Магнитный поток однородного поля через плоский виток равен произведению площади контура S на индукцию магнитного поля B, пронизывающего контур, и на косинус угла φ между направлением индукции и нормалью к площадке, ограниченной контуром:

$$\Phi = BS\cos\varphi. \tag{3.5.5}$$

Если виток из проволоки равномерно вращается с угловой скоростью ω в магнитном поле, то угол φ между направлением магнитной индукции и нормалью к плоскости рамки будет меняться по закону $\varphi = \omega t$, что вызовет появление переменного магнитного потока $\Phi = BS\cos\omega t$ через площадку, ограниченную контуром. В результате в контуре возникнет переменная ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = BS\omega\sin\omega t = \mathcal{E}_0\sin\omega t, \tag{3.5.6}$$

где $\dot{\Phi}$ – производная магнитного потока по времени, $\mathcal{E}_0 = BS\omega$ – амплитудное значение ЭДС индукции. Если в магнитном поле вращается контур, состоящий из n последовательных витков, намотанных на сердечник с магнитной проницаемостью μ, то амплитуда ЭДС индукции равна $\mu n\mathcal{E}_0$.

Для подключения витка к внешней цепи используются скользящие контакты, состоящие из контактных колец, подсоединенных к выводам витка, и неподвижных пластин (щеток), прижатых к кольцам. На практике вместо одного витка используется целая система обмоток, размещенных в пазах железного сердечника. В мощных генераторах обмотки обычно неподвижны, а вращается источник магнитного поля. Это позволяет существенно упростить проблему отвода тока, вырабатываемого генератором, к потребителю.

Трансформатор. Трансформатор представляет собой устройство для преобразования переменного напряжения. Он состоит из замкнутого железного сердечника, на который намотаны две обмотки – первичная и вторичная (рис. 3.5.2). К первичной обмотке прикладывается переменное напряжение. Оно вызывает в обмотке переменный ток, который в свою очередь порождает переменный магнитный поток в сердечнике трансформатора. Переменный магнитный поток пронизывает витки вторичной обмотки трансформатора и в соответствии с законом электромагнитной индукции порождает во вторичной обмотке ЭДС индукции. Для ненагруженного трансформатора отношение напряжения на вторичной обмотке (выходного напряжения U_2) к напряжению на первичной обмотке (входному напряжению U_1) равно отношению числа витков во вторичной обмотке к числу витков в первичной обмотке:

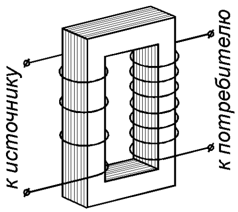


Рис. 3.5.2.
Трансформатор

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{3.5.7}$$

Если число витков вторичной обмотки больше числа витков первичной обмотки трансформатора, то выходное напряжение больше входного и трансформатор называется повышающим. В противном случае трансформатор называется понижающим. Так как при преобразовании переменного тока трансформатором потери очень малы, произведение силы тока на напряжение одинаково для обеих обмоток: $I_1U_1 = I_2U_2$. Отсюда следует, что $I_1 / I_2 = U_2 / U_1$.

Передача электрической энергии. Передача электрической энергии на расстояние сопряжена с потерей энергии в проводах, по которым течет ток. Мощность потерь есть I^2R, где I – сила тока, R – сопротивление провода. Для уменьшения мощности потерь необходимо уменьшать величину силы тока в проводе I (так как возможности уменьшения сопротивления проводов R пока ограничены). При этом для сохранения величины полезной мощности передаваемого тока, равной произведению тока на напряжение IU, необходимо повышать напряжение U. Поэтому на практике при необходимости передать электроэнергию на большое расстояние поступают следующим образом. Сначала повышают напряжение переменного тока с помощью повышающего трансформатора (до напряжений в десятки – сотни киловольт), затем передают ток по линии электропередачи, а затем понижают напряжение с помощью понижающего трансформатора.

Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Колебательный контур представляет собой электрическую цепь, состоящую из конденсатора и катушки индуктивности, соединенных между собой (рис. 3.5.3). Если зарядить конденсатор, а затем замкнуть его на катушку индуктивности, то через нее потечет ток. Ток в катушке вызовет появление магнитного поля и магнитного потока через витки катушки. В момент, когда конденсатор полностью разрядится и напряжение на нем станет равным нулю, ток в катушке достигнет максимума. Затем сила тока начнет уменьшаться. Это вызовет изменение магнитного потока через витки катушки и как следствие электродвижущую силу в контуре, которая будет стремиться поддержать убывающий ток. В итоге ток будет еще некоторое время течь в прежнем направлении, что приведет к зарядке конденсатора. В момент прекращения тока конденсатор снова окажется заряженным (с полярностью, обратной по отношению к первоначальной). После этого ток потечет в противоположном направлении, и весь процесс повторится снова.

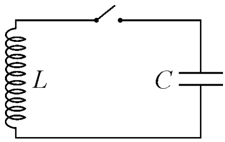


Рис. 3.5.3.
Колебательный контур

Превращение энергии в колебательном контуре. Энергия в контуре периодически меняет свою форму, превращаясь из энергии заряженного конденсатора (энергия электрического поля) в энергию катушки с током (энергия магнитного поля) и наоборот. Превращение энергии в контуре аналогично превращению энергии при колебаниях маятника, когда энергия периодически превращается из потенциальной в кинетическую и обратно.

Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре, и его решение. Формула Томсона для периода колебаний. Свободные колебания в контуре описываются уравнением

$$\ddot{q}+\frac{1}{LC}q=0, \qquad (3.5.8)$$

где q – заряд конденсатора, C – емкость конденсатора, L – индуктивность катушки, $\ddot{q}$ – вторая производная заряда конденсатора по времени. Решение этого уравнения имеет вид:

$$q(t)=Q\cos(\omega_0 t+\varphi_0). \qquad (3.5.9)$$

Здесь Q – амплитудное значение заряда (т.е. максимальная величина заряда на конденсаторе), φ_0 – начальная фаза колебаний, $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ – круговая частота. Период свободных колебаний в контуре выражается формулой Томсона

$$T=2\pi\sqrt{LC}. \qquad (3.5.10)$$

Значения Q и φ_0 определяются начальными условиями. В частности, при отсутствии тока в катушке в момент подключения к ней заряженного конденсатора $\varphi_0=0$, а Q равно начальному заряду конденсатора.

Ток в контуре равен производной заряда по времени:

$$I=\dot{q}=-Q\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)=-I_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0), \qquad (3.5.11)$$

где $I_0=\sqrt{\frac{C}{L}}U_0$ – амплитуда тока, $U_0=\frac{Q}{C}$ – амплитуда напряжения.

Затухающие электромагнитные колебания. Наличие сопротивления соединительных проводов и катушки в реальном контуре приводит к тому, что свободные электромагнитные колебания постепенно затухают. При этом энергия колебаний переходит в тепловую энергию, вызывая нагрев проводов и катушки.

Вынужденные колебания в электрических цепях. Переменный электрический ток в промышленных и бытовых электрических цепях является результатом возбуждения в них вынужденных электромагнитных колебаний под действием периодически изменяющейся ЭДС. В общем случае цепь переменного тока можно рассматривать как колебательный контур, к которому приложена внешняя синусоидальная ЭДС (рис. 3.5.4). Колебания тока и напряжения в такой цепи происходят на частоте ω внешней ЭДС.

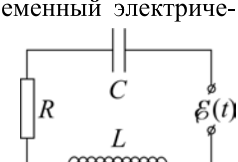


Рис. 3.5.4. Цепь переменного тока

Активное, емкостное и индуктивное сопротивления в цепи гармонического тока. Пусть замкнутая электрическая цепь, изображенная на рис. 3.5.4, содержит резистор, конденсатор, катушку индуктивности и источник переменной ЭДС

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \sin \omega t. \tag{3.5.12}$$

Эта ЭДС вызывает в цепи переменный ток

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi), \tag{3.5.13}$$

где I_0 – амплитуда переменного тока, а φ – сдвиг по фазе между колебаниями тока в цепи и ЭДС.

Напряжения на отдельных элементах цепи и токи, протекающие в них, колеблются с одинаковой частотой, хотя могут быть сдвинуты по фазе (рис. 3.5.5).

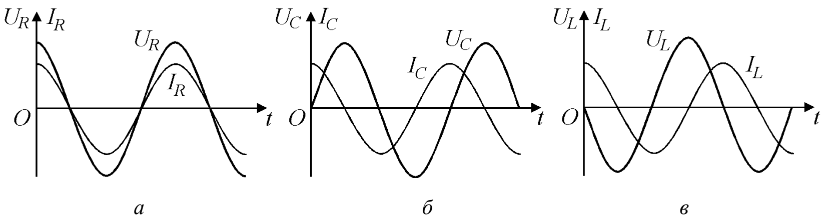


Рис. 3.5.5. Напряжения и токи через резистор (*а*), конденсатор (*б*) и катушку (*в*)

Отношение амплитуды колебаний напряжения к амплитуде колебаний тока на данном элементе цепи называется сопротивлением данного элемента переменному току.

Для резистора сопротивление переменному току равно обычному омическому сопротивлению R (такому же, как и для постоянного тока). Это сопротивление связано с нагреванием резистора током, т.е. с переходом энергии тока в тепловую энергию, и называется активным. Для конденсатора сопротивление равно $X_C = 1/(\omega C)$ и называется емкостным. Для катушки индуктивности сопротивление равно $X_L = \omega L$ и называется индуктивным.

На омическом (активном) сопротивлении R ток и напряжение колеблются в одинаковой фазе ($\varphi = 0$). На конденсаторе C ток опережает напряжение на $90°$ ($\varphi = \pi/2$). На катушке индуктивности L колебания тока отстают от колебаний напряжения на $90°$ ($\varphi = -\pi/2$).

В цепи переменного тока напряжения на отдельных последовательно включенных элементах могут быть сдвинуты по фазе относительно друг друга (рис. 3.5.6). Амплитуду и фазу результирующего колебания напряжения можно легко определить, пользуясь методом векторных диаграмм. Данный метод основан на том, что любое гармоническое колебание наглядно представимо в виде проекции на некоторое направление вектора, вращающегося с заданной угловой частотой ω, длина которого равна амплитуде

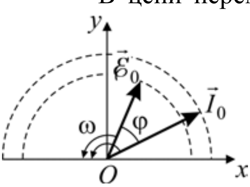


Рис. 3.5.6. К методу векторных диаграмм

колебаний. При этом сложение колебаний сводится к нахождению суммы соответствующих векторов. Колебания переменного тока и напряжения изображают в виде векторов $\vec{I}_0$ и $\vec{\mathcal{E}}_0$, вращающихся с одинаковой частотой ω против часовой стрелки и отличающихся амплитудой и сдвигом фаз

Таким образом, векторы тока и напряжения при вращении не меняют своего взаимного расположения, т. е. сохраняют постоянную разность фаз. Для схемы, состоящей из последовательно включенных элементов R, L, C, векторная диаграмма изображена на рис. 3.5.7. Сдвиг фаз для этой схемы определяется по формуле

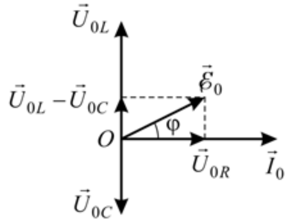


Рис. 3.5.7.
Векторная диаграмма цепи

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \tag{3.5.14}$$

а полное сопротивление цепи равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,. \tag{3.5.15}$$

Закон Ома для цепи переменного тока имеет вид

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}\,. \tag{3.5.16}$$

Средняя мощность, выделяемая источником в цепи переменного тока, равна

$$\overline{N} = \frac{I_0 \mathcal{E}_0}{2}\cos\varphi = I_д \mathcal{E}_д \cos\varphi, \tag{3.5.17}$$

где $I_д$, $\mathcal{E}_д$ – действующие значения тока и ЭДС. Множитель $\cos\varphi$ называется коэффициентом мощности.

Резонанс в электрических цепях. Резонанс в электрической цепи наступает при приближении частоты вынужденных колебаний ω к частоте собственных колебаний контура ω_0. При резонансе резко возрастают амплитуды колебаний токов и напряжений на элементах схемы. Так, для контура, изображенного на рис. 3.5.4, резонансная амплитуда тока равна $I_0 = \mathcal{E}_0 / R$ и при малом сопротивлении R может достигать весьма больших величин даже при небольших значениях ЭДС. Зависимость амплитуды силы тока от частоты при различных сопротивлениях ($R_1 < R_2 < R_3$) показана на рис. 3.5.8. Одновременно с ростом силы тока при резонансе резко возрастают напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности. Эти напряжения становятся одинаковыми по величине:

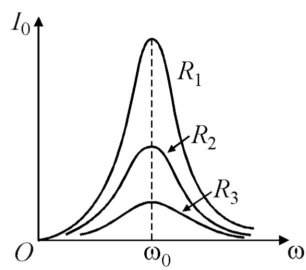


Рис. 3.5.8.
Резонансные кривые

$$U_{0C} = U_{0L} = I_0\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{3.5.18}$$

и могут во много раз превосходить ЭДС.

Явление резонанса широко используется в радиотехнике. Так, настройкой частоты колебательного контура радиоприемника на частоту передающей радиостанции можно добиться значительного увеличения амплитуды электромагнитных колебаний в контуре.

Открытый колебательный контур. Обычный (его можно назвать закрытым) колебательный контур практически не излучает электромагнитные волны, поскольку энергия электромагнитных колебаний сосредоточена в очень малой области пространства. Так, энергия электрического поля заключена внутри конденсатора, а энергия магнитного поля – внутри катушки индуктивности. Чтобы излучение электромагнитных волн стало достаточно интенсивным, нужно обеспечить существование переменного электрического поля в большой области пространства, не экранированной металлическими пластинами. Этого можно добиться, раздвигая пластины конденсатора и уменьшая их размеры. Заменив одновременно катушку индуктивности прямым проводником, мы получим так называемый открытый колебательный контур. В простейшем случае открытый контур представляет собой стержень с шариками на концах, разделенный посередине небольшим разрядным промежутком. Если зарядить шарики достаточно большими зарядами противоположного знака, то в разрядном промежутке произойдет пробой воздуха и в контуре возникнут электромагнитные колебания высокой частоты. Механизм возникновения колебаний такой же, как и в закрытом контуре, однако емкость теперь определяется емкостью шариков, а индуктивность – индуктивностью стержня.

Опыты Герца. В 1881 – 1888 годах немецкий физик Генрих Герц проводил опыты с разрядом, создаваемым мощной индукционной катушкой в искровом промежутке открытого колебательного контура. Ему удалось получить сверхбыстрые колебания электрического тока в прямолинейном отрезке проводника с периодом колебаний тока около 10^{-8} секунды. Продолжая опыты, Герц установил, что быстрые колебания тока в одном проводнике способны вызвать колебания тока в другом проводнике, удаленном от первого на некоторое расстояние. Так были открыты электромагнитные волны. Используя зеркала из цинковой жести, Герц сумел продемонстрировать отражение и фокусировку электромагнитных волн. С помощью призмы, изготовленной из смолы, он наблюдал преломление электромагнитных волн, подобное преломлению светового луча в стеклянной призме. Наконец, с помощью проволочной сетки он убедился в поляризации электромагнитных волн. Подводя итог своим исследованиям, он написал: «… описанные опыты доказывают идентичность света, тепловых лучей и электродинамического волнового движения».

Электромагнитные волны. Их свойства. Согласно современным представлениям, электромагнитная волна представляет собой колебания электрического и магнитного полей, распространяющиеся в пространстве со скоростью света c ($c \approx 3\cdot 10^8$ м/с). Источниками электромагнитных волн являются изменяющиеся во времени электрические токи, а также отдельные ускоренно движущиеся заряженные частицы. Электромагнитная волна характеризуется векторами напряженности $\vec{E}$ электрического и индукции $\vec{B}$ магнитного полей, составляющих единое электромагнитное поле. Возможность существования электромагнитных волн обусловлена тем, что имеется связь между меняющимися во времени электрическим и магнитным полями. Переменное магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле, а переменное во времени электрическое поле порождает вихревое магнитное поле. Однажды начавшийся процесс взаимного порождения магнитного и электрического полей далее продолжается и захватывает новые области в окружающем пространстве.

Свойства электромагнитных волн во многом сходны со свойствами механических волн. На границе раздела двух сред электромагнитные волны частично отражаются, частично проходят во вторую среду. При этом угол отражения равен углу падения; падающий, отраженный и преломленный лучи и нормаль к поверхности раздела сред лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления является величиной, постоянной для двух данных сред и равной отношению скоростей распространения волн в первой и второй средах. У края преграды или при прохождении электромагнитных волн через отверстие наблюдается явление дифракции волн, т.е. отклонение направления их распространения от прямолинейного. Для волн, излучаемых когерентными источниками, наблюдается явление интерференции.

Электромагнитные волны являются поперечными. Векторы напряженности $\vec{E}$ электрического и индукции $\vec{B}$ магнитного полей перпендикулярны направлению распространения волны и взаимно перпендикулярны между собой (рис. 3.5.9).

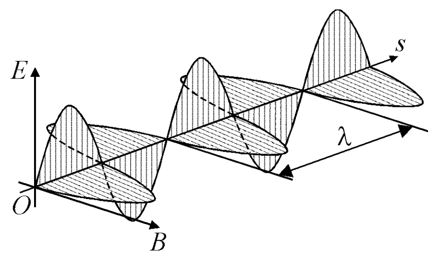


Рис. 3.5.9.
Электромагнитная волна

Излученные электромагнитные волны несут с собой энергию. Одной из главных энергетических характеристик излучения является плотность потока излучения J. Так называется электромагнитная энергия, проходящая за единицу времени через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Плотность потока излучения в СИ измеряется в ваттах на квадратный метр (Вт/м^2). Эту величину часто называют также интенсивностью волны.

Для плотности потока излучения (интенсивности) электромагнитной волны справедливо выражение

$$J = wc, \qquad (3.5.19)$$

где

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0} \qquad (3.5.20)$$

– плотность электромагнитной энергии, c – скорость света.

При излучении гармонической электромагнитной волны напряженность электрического поля и магнитная индукция в волне пропорциональны квадрату частоты колебаний зарядов в открытом колебательном контуре. Поэтому интенсивность гармонической волны пропорциональна четвертой степени частоты волны.

Шкала электромагнитных волн. Классификацию электромагнитных волн обычно проводят исходя либо из длины волны λ, либо из частоты ν, связанных между собой соотношением $\lambda = c/\nu$. Длинноволновые электромагнитные излучения ($\lambda = 5 \cdot 10^5 \ldots 3 \cdot 10^{-3}$ м) относят к диапазону радиоволн, которые возбуждаются переменными токами и электронными потоками. Инфракрасные волны ($\lambda = 3 \cdot 10^{-3} \ldots 8 \cdot 10^{-7}$ м) излучают молекулы и атомы при тепловых и электрических воздействиях. Видимый свет занимает диапазон $\lambda = 8 \cdot 10^{-7} \ldots 4 \cdot 10^{-7}$ м и излучается при переходах внешних электронов атомов с одного энергетического уровня на другой. Ультрафиолетовое излучение ($\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \ldots 10^{-9}$ м) возникает при воздействиях на атомы ускоренных электронов. Рентгеновские лучи ($\lambda = 10^{-9} \ldots 10^{-12}$ м) порождаются атомными процессами при воздействии ускоренных заряженных частиц. Наконец, гамма-излучение ($\lambda = 10^{-12} \ldots 10^{-15}$ м) возникает при ядерных процессах, в том числе при радиоактивном распаде.

Излучение и прием электромагнитных волн. Как показали опыты Герца, металлический стержень, в котором возбуждены высокочастотные колебания электрического тока, является источником электромагнитной волны. Если на своем пути электромагнитная волна встречает другой металлический стержень, то в нем возбуждаются вынужденные электромагнитные колебания, которые можно зарегистрировать. На практике излучение и прием электромагнитных волн осуществляются с помощью передающих и приемных антенн.

Принципы радиосвязи. Радиосвязью называется передача информации с помощью электромагнитных волн, частоты которых охватывают диапазон от $3 \cdot 10^4$ до $3 \cdot 10^{11}$ Гц. Важную роль в современной жизни играет так называемая радиотелефонная связь, с помощью которой передаются речь, музыка и другие звуковые сигналы.

Поскольку плотность потока излучения электромагнитных волн пропорциональна четвертой степени частоты колебаний тока в антенне, возбудить достаточно интенсивные для радиосвязи электромагнитные волны на звуковых частотах практически невозможно. Поэтому для осуществления радиотелефонной связи обычно используются электромагнитные волны с частотами от сотен килогерц до сотен мегагерц. Для того чтобы с помощью высокочастотных электромагнитных волн можно было передать низкочастотные звуковые сигналы, гармонические колебания высокой частоты в радиопередатчике подвергают изменению во времени (модуляции). В результате при радиопередаче антенна излучает модулированную высокочастотную электромагнитную волну.

Простейший способ модуляции состоит в изменении амплитуды высокочастотных колебаний в соответствии с низкочастотным сигналом, полученным с помощью микрофона. Такой способ, называемый амплитудной модуляцией, проиллюстрирован на рис. 3.5.10, где изображены три графика: *а* – график колебаний высокой частоты, которую называют несущей частотой; *б* – график колебаний звуковой частоты, т.е. модулирующих колебаний; *в* – график модулированных по амплитуде высокочастотных колебаний.

В современном радиовещании используются также другие виды модуляции. Процесс плавного изменения несущей частоты в соответствии с управляющим сигналом называется частотной модуляцией, а изменения фазы высокочастотных колебаний – фазовой модуляцией. Это более сложные способы модуляции. Их преимуществом является бóльшая устойчивость к помехам.

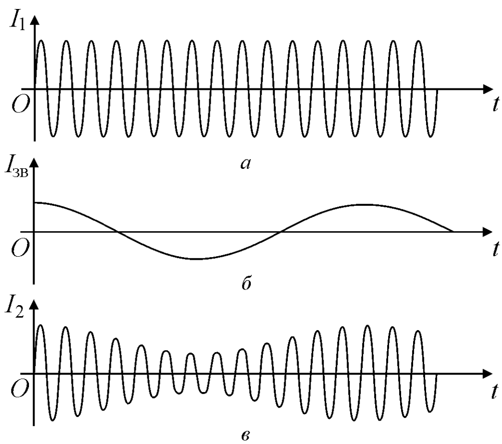


Рис. 3.5.10. Амплитудная модуляция

Электромагнитные волны, излученные одновременно разными радиостанциями, возбуждают в антенне радиоприемника вынужденные колебания тока на разных несущих частотах. Для того чтобы выделить сигнал от требуемой радиостанции, электрические колебания с антенны подают на колебательный контур с изменяющейся собственной частотой. Изменение собственной частоты колебаний в контуре приемника обычно производится путем изменения емкости переменного конденсатора. При совпадении частоты вынужденных колебаний в антенне с собственной частотой контура наступает резонанс, при котором амплитуда вынужденных колебаний напряжения на обкладках конденсатора достигает максимального значения. Таким образом, из большого числа электромагнитных колебаний, возбуждаемых в антенне, выделяются колебания нужной частоты.

С колебательного контура приемника модулированные колебания высокой частоты поступают на элемент с односторонней проводимостью – детектор. Детектором может служить полупроводниковый или вакуумный диод.

На рис. 3.5.11, *а* изображена схема детектирующей цепи, на вход которой поданы высокочастотные модулированные колебания. В цепь последовательно включены детектор (диод) и резистор (нагрузка). Резистор R шунтирован конденсатором C, играющим роль сглаживающего фильтра. Пренебрегая обратным током через диод, вольтамперную характеристику цепи диод – резистор можно приближенно представить в виде, изображенном на рис. 3.5.11, *б*.

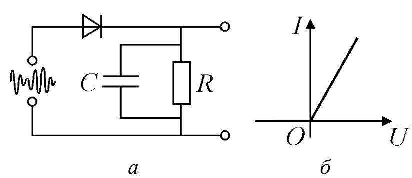


Рис. 3.5.11. Детектирующая цепь

В отсутствие конденсатора ток цепи детектора изменяется во времени по закону, представленному на рис. 3.5.12, *а*. Конденсатор сглаживает пульсации тока, заряжаясь в те моменты времени, когда диод пропускает ток, и частично разряжаясь через нагрузку, когда диод заперт. Если значения емкости конденсатора и сопротивления резистора подобраны надлежащим образом, то через резистор будет протекать ток, изменяющийся во времени со звуковой частотой, использованной при модуляции высокочастотных колебаний в радиопередатчике (рис. 3.5.12, *б*). Для преобразования электрических колебаний в звуковые переменное напряжение звуковой частоты подается на телефон или громкоговоритель.

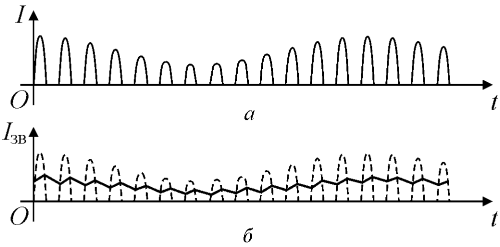


Рис. 3.5.12. Ток в детектирующей цепи

Основные принципы радиотелефонной связи иллюстрирует схема, изображенная на рис. 3.5.13.

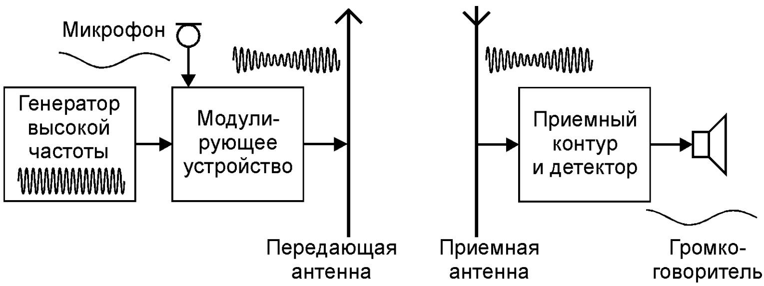


Рис. 3.5.13. Принцип радиотелефонной связи

Примеры решения задач

Пример 1. В колебательном контуре с индуктивностью L и емкостью C конденсатор заряжен до максимального напряжения U_m. Каким будет ток I в контуре в тот момент, когда напряжение на конденсаторе уменьшится в два раза? Колебания считать незатухающими.

Решение. В отсутствие затухания суммарная энергия электрического и магнитного полей в контуре сохраняется. Следовательно, в каждый момент времени справедливо равенство $\frac{LI^2}{2}+\frac{CU^2}{2}=\frac{CU_m^2}{2}$, откуда $I=\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\sqrt{U_m^2-U^2}$. По условию задачи $U=U_m/2$. Ток в контуре в этот момент времени равен $I=U_m\sqrt{\frac{3C}{4L}}$.

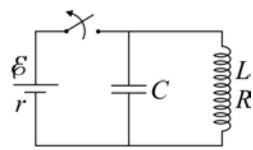
Ответ. $I=U_m\sqrt{\frac{3C}{4L}}$.

Пример 2. На какую длину волны λ настроен колебательный контур с индуктивностью L, если максимальный ток в контуре I_m, а максимальное напряжение на конденсаторе U_m? Скорость распространения электромагнитных волн c. Активным сопротивлением в контуре пренебречь.

Решение. Длина электромагнитной волны, на которую настроен контур, $\lambda = cT$, где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – период собственных колебаний в контуре. Из закона сохранения энергии в колебательном контуре без потерь следует равенство $\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}$. Отсюда емкость конденсатора $C = L\frac{I_m^2}{U_m^2}$. Следовательно, $\lambda = 2\pi c\frac{LI_m}{U_m}$.

Ответ. $\lambda = 2\pi c\frac{LI_m}{U_m}$.

Пример 3. Катушка индуктивностью $L = 2$ мГн с сопротивлением обмотки $R = 10$ Ом и конденсатор емкостью $C = 10^{-5}$ Ф подключены параллельно к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом. Какое количество теплоты Q выделится в контуре после отключения источника?



Решение. При замкнутом достаточно долгое время ключе в цепи устанавливается ток через источник и катушку, величина которого равна $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Напряжение на конденсаторе, равное напряжению на катушке, будет $U = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}$. Суммарная энергия заряженного конденсатора и катушки с током $W = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2}$. После отключения источника в контуре, состоящем из катушки и конденсатора, возникнут затухающие электромагнитные колебания, в результате которых вся начальная энергия перейдет в теплоту. Следовательно, $Q = W = \frac{\mathcal{E}^2}{2(r+R)^2}(L + CR^2) = 37{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

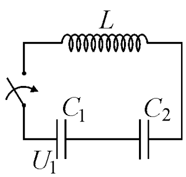
Ответ. $Q = W = \frac{\mathcal{E}^2}{2(r+R)^2}(L + CR^2) = 37{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Пример 4. Конденсатор емкостью $C = 0{,}1$ мкФ, заряженный до напряжения $U = 100$ В, подсоединяют к катушке индуктивностью $L = 1$ мГн. Чему равна величина тока I через катушку спустя время $t_0 = 0{,}785 \cdot 10^{-5}$ с после подключения конденсатора? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

Р е ш е н и е. При подключении заряженного конденсатора к катушке в образовавшемся контуре возникают электромагнитные колебания с частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. При этом заряд на конденсаторе меняется во времени по закону $q = q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$, где $q_0 = CU$ – начальный заряд на конденсаторе. Поскольку сопротивление катушки и соединительных проводов пренебрежимо мало, суммарная энергия электрического и магнитного полей в контуре сохраняется. Из закона сохранения энергии следует, что $\frac{q_0^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$. Выражая отсюда ток через катушку, имеем $I(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{q_0^2 - q^2} = \sqrt{\frac{C}{L}} U \sqrt{1 - \cos^2 \frac{t}{\sqrt{LC}}}$. Величина силы тока в момент времени $t = t_0$ равна $I = \sqrt{\frac{C}{L}} U \sin \frac{t_0}{\sqrt{LC}} \approx 0{,}71$ А.

О т в е т. $I = \sqrt{\frac{C}{L}} U \sin \frac{t_0}{\sqrt{LC}} \approx 0{,}71$ А.

П р и м е р 5. В цепи, показанной на рисунке, конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-5}$ Ф вначале заряжен до напряжения $U_1 = 200$ В, а конденсатор емкостью $C_2 = 10^{-6}$ Ф разряжен. До какого максимального напряжения $U_{2\max}$ может зарядиться конденсатор C_2 в процессе колебаний, возникающих в цепи после замыкания ключа? Потерями в соединительных проводах и в катушке индуктивности пренебречь.

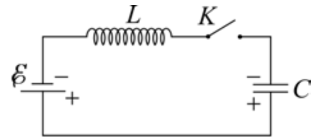


Р е ш е н и е. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания, в процессе которых происходит периодическая перезарядка конденсаторов. В каждый момент времени суммарное напряжение на конденсаторах равно напряжению на катушке, которое в свою очередь опережает по фазе ток в цепи на $\pi/2$. В момент достижения максимального напряжения на конденсаторах ток в цепи обратится в нуль, следовательно, вся энергия будет сосредоточена в конденсаторах. При этом на конденсатор C_2 перетечет из конденсатора C_1 некоторый заряд q, а на конденсаторе C_1 останется заряд $C_1U_1 - q$. Величину заряда q на конденсаторе C_2 можно найти из закона сохранения энергии в контуре. Поскольку в рассматриваемый момент времени магнитная энергия обращается в нуль, справедливо равенство $\frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{(C_1U_1 - q)^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}$.

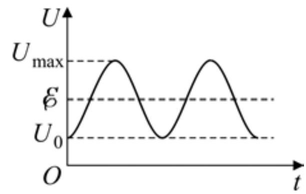
Отсюда $q = 2U_1 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Учитывая, что $U_2 = \frac{q}{C_2}$, получаем $U_{2\max} = \frac{2U_1 C_1}{C_1 + C_2} \approx 364$ В.

О т в е т. $U_{2\max} = \frac{2U_1 C_1}{C_1 + C_2} \approx 364$ В.

Пример 6. Цепь, изображенная на рисунке, состоит из конденсатора, катушки, источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также ключа K. В начальный момент времени ключ разомкнут, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 с полярностью, указанной на рисунке. Какого максимального значения $U_{\max}$ может достичь напряжение на конденсаторе после замыкания ключа? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.



Решение. После замыкания ключа в контуре возникнут гармонические колебания со смещенным положением равновесия. Пусть $\mathcal{E} > U_0$. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени изображена на рисунке. Начальная энергия конденсатора $W_0 = \dfrac{CU_0^2}{2}$, работа источника по зарядке конденсатора до максимального напряжения $A = C(U_{\max} - U_0)\mathcal{E}$, энергия контура в момент достижения максимального напряжения $W_{\max} = \dfrac{CU_{\max}^2}{2}$ (ток через катушку в этот момент равен нулю). По закону сохранения энергии $W_0 + A = W_{\max}$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно $U_{\max}$, а именно, $U_{\max}^2 - 2\mathcal{E}U_{\max} + 2\mathcal{E}U_0 - U_0^2 = 0$. Корни этого уравнения $U_{\max} = 2\mathcal{E} - U_0$, $U_{\max} = U_0$. Следовательно, $U_{\max} = 2\mathcal{E} - U_0$ при $U_0 < \mathcal{E}$, $U_{\max} = U_0$ при $U_0 \geq \mathcal{E}$.



Ответ. $U_{\max} = 2\mathcal{E} - U_0$ при $U_0 < \mathcal{E}$, $U_{\max} = U_0$ при $U_0 \geq \mathcal{E}$.

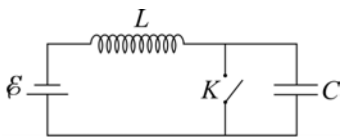
Задачи

1. В колебательном контуре конденсатору емкостью $C = 10$ мкФ сообщили заряд $q = 1$ мкКл, после чего возникли затухающие электромагнитные колебания. Какое количество теплоты Q выделится к моменту, когда максимальное напряжение на конденсаторе станет меньше начального максимального напряжения в $n = 4$ раза?

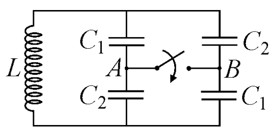
2. В колебательном контуре конденсатор емкостью C заряжен до максимального напряжения U_m. Определить резонансную частоту ν_0 колебаний в контуре, если максимальный ток в нем I_m. Активным сопротивлением в контуре пренебречь.

3. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний в контуре T_1. Каков будет период T_2 колебаний в контуре, если конденсаторы включить последовательно?

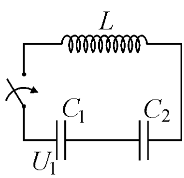
4. Цепь, изображенная на рисунке, состоит из конденсатора емкостью C, катушки индуктивностью L, источника с ЭДС $\mathscr{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также ключа K, первоначально находящегося в разомкнутом состоянии. В некоторый момент времени ключ замкнули и держали в замкнутом состоянии в течение времени τ, а затем разомкнули. До какого максимального напряжения $U_{\max}$ может зарядиться конденсатор после этого? Считать, что в момент замыкания ключа ток в цепи был равен нулю. Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

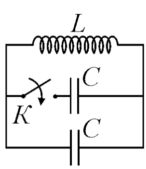


5. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и четырех конденсаторов, соединенных, как показано на рисунке. Во сколько раз α изменится период собственных колебаний в контуре, если замкнуть ключ, соединяющий точки A и B? Емкости конденсаторов $C_1 = 10^{-8}$ Ф, $C_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ Ф.



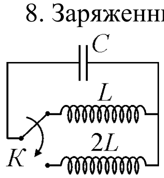
6. Катушка индуктивностью $L = 3$ мГн подключена к двум последовательно соединенным конденсаторам (см. рисунок), один из которых, емкостью $C_1 = 10^{-7}$ Ф, заряжен вначале до напряжения $U_1 = 150$ В, а второй, емкостью $C_2 = 3 \cdot 10^{-7}$ Ф, разряжен. Чему будет равна максимальная сила тока $I_{\max}$ в цепи после замыкания ключа? Потерями в соединительных проводах и в катушке индуктивности пренебречь.





7. Заряженный конденсатор подключили к катушке, в результате чего в цепи возникли гармонические колебания. В момент, когда напряжение на конденсаторе обратилось в нуль, к нему с помощью ключа K подсоединили еще один такой же конденсатор. Во сколько раз изменились амплитуды колебаний тока и напряжения на катушке после этого?

8. Заряженный конденсатор подключили к катушке, в результате чего в цепи возникли гармонические колебания. В момент, когда ток через катушку обратился в нуль, с помощью ключа K отсоединили эту катушку и вместо нее подсоединили катушку с вдвое большей индуктивностью. Во сколько раз изменились амплитуды колебаний тока и напряжения на катушке после этого?



3.6. Оптика

Теоретический материал

Развитие взглядов на природу света. Первые попытки понимания природы света на основе опытных данных относятся к XVII веку (Ньютон, Гюйгенс). Великий английский физик Исаак Ньютон полагал, что свет представляет собой поток частиц («корпускул» – отсюда термины «корпускулярная модель света», «корпускулярная теория света»). Приблизительно в это же время голландский ученый Христиан Гюйгенс высказал идею о том, что свет имеет волновую природу.

В 1801 году английский оптик Томас Юнг впервые наблюдал явление интерференции света, т.е. явление образования картины темных и светлых линий при наложении двух световых пучков. Это явление можно объяснить только на основе представления о свете как о волне. Так была доказана волновая природа света.

В 1861 году английский физик Джеймс Клерк Максвелл вывел систему уравнений для электрического и магнитного полей, из которой следовала возможность существования электромагнитной волны. Максвелл вычислил скорость распространения электромагнитной волны и получил величину, близкую к скорости света (около 300 000 км/с). Это позволило Максвеллу сделать вывод о том, что свет представляет собой электромагнитную волну.

В 1888 году немецкий физик Генрих Герц экспериментально обнаружил предсказанные Максвеллом электромагнитные волны и исследовал их свойства. Герц установил, что электромагнитные волны способны испытывать отражение и преломление, т.е. обладают такими же свойствами, как и свет. Этот факт послужил доказательством электромагнитной природы света.

Наконец, в 1900 году немецкий физик Макс Планк пришел к выводу о существовании элементарных неделимых порций света («световые кванты» или «фотоны»). В настоящее время считается, что свет имеет двоякую природу: в одних явлениях он проявляет себя как волна (интерференция, дифракция света), а в других явлениях – как поток частиц (фотоэффект).

Закон прямолинейного распространения света. Понятие луча. В геометрической оптике рассматриваются законы распространения света в прозрачных средах на основе представления о свете как о совокупности *световых лучей* – линий, вдоль которых распространяется энергия световых волн. Представление о световом луче можно получить, например, если пропустить солнечный свет через небольшое отверстие в ставне и наблюдать его распространение в темной комнате. Уменьшая диаметр отверстия, можно до определенного предела уточнять направление распространения света. Однако получить сколь угодно тонкий пучок света невозможно, так как, когда диаметр отверстия окажется сравнимым с длиной волны, пучок начнет сильно расширяться за счет дифракции. Световой луч – это геометрическое понятие, вводимое для того, чтобы приближенно описать распространение света в пространстве, пользуясь законами геометрической оптики. Эти законы были установлены экспериментально задолго до выяснения природы света. В то же время они вытекают из волновой теории света как приближение, справедливое, если длина волны света исчезающе мала по сравнению с размерами препятствий на пути света.

Наблюдения показывают, что в оптически однородной среде т.е. в среде, в которой показатель преломления везде одинаков, свет распространяется прямолинейно. В однородной среде световые лучи представляют собой прямые линии.

Интенсивность* (*плотность потока*) *излучения. Воздействие света на глаз или какой-либо регистрирующий прибор состоит прежде всего в передаче этому прибору энергии, переносимой световой волной. Важной энергетической характеристикой световой волны является введенная ранее для электромагнитных волн *плотность потока излучения* (см. раздел 3.5). Так называется электромагнитная энергия, проходящая за единицу времени через площадку единичной площади, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Эту величину часто называют также *интенсивностью* волны. Плотность потока излучения в СИ измеряется в ваттах на квадратный метр (Вт/м^2).

Плотность потока (интенсивность) излучения пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в волне (см. раздел 3.5).

Поток излучения через какую-либо поверхность определяется как энергия, переносимая электромагнитной волной через эту поверхность в единицу времени. Эта величина измеряется в ваттах (Вт).

Световой поток. Для восприятия световой энергии человеком особое значение имеет не полная энергия, переносимая электромагнитными волнами, а лишь та ее часть, которая непосредственно воздействует на глаз.

Глаз человека воспринимает электромагнитное излучение в сравнительно небольшом интервале длин волн – примерно от $4\cdot10^{-7}$ до $8\cdot10^{-7}$ м. Наиболее чувствителен глаз к желто-зеленым лучам с длиной волны $\lambda_з \approx 5\cdot10^{-7}$ м. У разных людей чувствительность глаза к излучениям различных длин волн различна. Но в среднем различия оказываются небольшими, и можно говорить о вполне определенной (усредненной) спектральной чувствительности здорового глаза.

Для оценки световой энергии введена особая физическая величина – световой поток. *Световым потоком* Φ через некоторую поверхность называется световая энергия, протекающая через эту поверхность в единицу времени и оцениваемая непосредственно человеческим глазом. Для оценки этой величины выбирают эталонный источник света. Световой поток от этого источника с помощью глаза сравнивают со световыми потоками от других источников.

За единицу светового потока в СИ принимается *люмен* (лм). Световой поток в 1 лм соответствует потоку энергии электромагнитного излучения в $1/683$ Вт при частоте $5{,}4\cdot10^{14}$ Гц ($\lambda \approx 5\cdot10^{-7}$ м).

Освещенность. Световой поток создается источником света и действует на окружающие источник тела. Для характеристики источника вводят специальную величину – силу света, а для характеристики действия света на поверхность тел – освещенность.

Сила света источника определяется как световой поток, созданный им в единичном телесном угле. Если источник создает в телесном угле $\Delta\Omega$ световой поток $\Delta\Phi$, то сила света источника I по определению равна

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}. \tag{3.6.1}$$

Сила света точечного источника, создающего равномерный по всем направления световой поток Ф, одинакова по всем направлениям и равна

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}. \tag{3.6.2}$$

Единицей силы света в СИ является *кандела* (кд). Кандела равна силе света в заданном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $5{,}4 \cdot 10^{14}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср.

Освещенностью E называется отношение светового потока $\Delta\Phi$, падающего на некоторый участок поверхности, к площади ΔS этого участка:

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \tag{3.6.3}$$

Единица освещенности в СИ называется *люксом* (лк). Люкс равен освещенности поверхности площадью 1 м^2 при световом потоке падающего на него излучения, равном 1 лм.

Для фотометрических расчетов важно знать, как зависит освещенность E какой-либо поверхности от ее расположения по отношению к падающим лучам, от расстояния R до источника света и от силы света I источника. При этом направление падающих на поверхность лучей принято характеризовать углом падения, т.е. углом между лучом и перпендикуляром, восстановленным к поверхности в точке падения луча.

Освещенность поверхности, создаваемая точечным источником, подчиняется следующему простому закону. Она прямо пропорциональна силе света источника I, косинусу угла падения лучей α и обратно пропорциональна квадрату расстояния R от источника до поверхности:

$$E = \frac{I}{R^2}\cos\alpha. \tag{3.6.4}$$

Если источников несколько, то общая освещенность равна сумме освещенностей, создаваемых каждым источником в отдельности.

Законы отражения света. Плоское зеркало. Пусть световой луч падает на плоскую поверхность, зеркально отражающую свет, – *плоское зеркало*. Направления падающего и отраженного от зеркала лучей характеризуются углами падения и отражения, которые образуют соответственно падающий и отраженный лучи и перпендикуляр к зеркалу, восстановленный в точке падения. Плоскостью падения называется плоскость, содержащая падающий луч и тот же перпендикуляр. В опытах с зеркалами и тонкими световыми пучками установлены следующие *законы отражения света*:

1) падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к зеркалу, восстановленный в точке падения, лежат в одной плоскости (плоскости падения);

2) угол падения равен углу отражения.

Построение изображений в плоском зеркале. На рис. 3.6.1 показано построение изображения S' светящейся точки S в плоском зеркале. Это изображение является мнимым, так как оно образовано пересечением не самих отраженных лучей, а их продолжениями (на рисунке показаны пунктиром). Из рисунка видно, что изображение светящейся точки в плоском зеркале лежит на продолжении перпендикуляра, проведенного от источника к зеркалу, а расстояние от зеркала до изображения равно расстоянию от источника до зеркала.

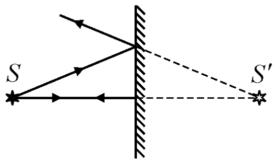


Рис. 3.6.1. Построение изображения в плоском зеркале

Сферическое зеркало. *Сферическим зеркалом* называют поверхность тела, имеющую форму сферического сегмента и зеркально отражающую свет. Если лучи отражаются от внутренней поверхности сферического сегмента, то зеркало называют *вогнутым*. В случае отражения лучей от наружной поверхности зеркало называется *выпуклым*.

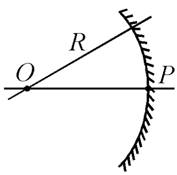


Рис. 3.6.2. Сферическое зеркало

Центр сферы, из которой вырезан сегмент, называют *оптическим центром* зеркала (точка O на рис. 3.6.2). Вершину сферического сегмента (точка P) называют *полюсом* зеркала. Любую прямую, проходящую через оптический центр, называют *оптической осью* зеркала. Прямую, проходящую через оптический центр и полюс зеркала (прямая OP на рис. 3.6.2), называют *главной оптической осью* зеркала. Главная оптическая ось отличается от остальных (побочных) оптических осей зеркала только своим симметричным расположением по отношению к краям зеркала.

При описании свойств сферических зеркал будем рассматривать лишь так называемые *параксиальные* (приосевые) пучки света, т.е. пучки, образованные лучами, проходящими на малом расстоянии от главной оптической оси зеркала и образующими с ней малые углы. Необходимо помнить, что все перечисленные ниже простые свойства сферических зеркал справедливы только для параксиальных пучков.

Если на вогнутое сферическое зеркало падает параллельно главной оптической оси узкий пучок параллельных лучей (рис. 3.6.3, *а*), то после отражения от зеркала все лучи пересекаются в одной точке F, называемой главным фокусом зеркала. Расстояние от полюса зеркала до главного фокуса называется фокусным расстоянием F. Оно равно половине радиуса кривизны зеркала R:

$$F = \frac{R}{2}. \qquad (3.6.5)$$

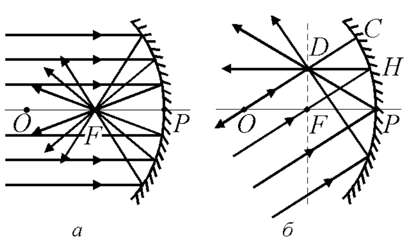


Рис. 3.6.3. Падение узкого пучка лучей на вогнутое зеркало

При падении на вогнутое зеркало параллельного пучка лучей, распространяющегося параллельно какой-либо побочной оптической оси (рис. 3.6.3, *б*), все отраженные лучи сойдутся в точке, удаленной от зеркала на такое же расстояние, что и главный фокус. Совокупность всех подобных точек образует определенную поверхность. Рассматривая лишь малые углы между главной и побочной осями, можно приближенно считать эту поверхность плоскостью, перпендикулярной главной оптической оси. Она называется фокальной плоскостью зеркала (штриховая линия на рис. 3.6.3, *б*).

Если направить узкий параллельный пучок лучей параллельно главной оптической оси на выпуклое зеркало, то отраженные лучи будут расходящимися (рис. 3.6.4). Их продолжения пересекаются в определенной точке, находящейся за зеркалом. Эту точку называют главным фокусом выпуклого зеркала. Поскольку в фокусе выпуклого зеркала пересекаются не сами лучи, а их продолжения, фокус в данном случае является мнимым. Фокусное расстояние выпуклого зеркала вычисляется по формуле (3.6.5), где под R, как и ранее, понимается радиус кривизны зеркала. Для выпуклого зеркала также используется понятие фокальной плоскости, которая в данном случае является мнимой.

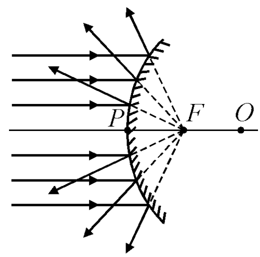
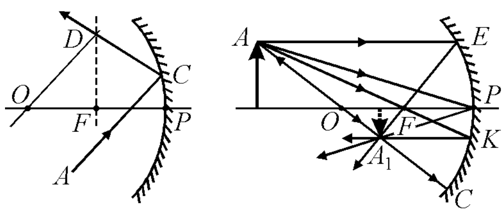


Рис. 3.6.4. Падение узкого пучка лучей на выпуклое зеркало

Построение изображений в сферическом зеркале. Все лучи, исходящие из какой-либо светящейся точки и идущие под малыми углами к оптической оси зеркала, после отражения от зеркала либо пересекаются в одной точке, либо расходятся так, что в одной точке пересекаются их продолжения. Поэтому сферические зеркала обладают свойством формировать *изображения* светящихся предметов.

Задача *построения изображения* сводится к нахождению направления произвольного луча после отражения его от зеркала в некоторой точке. Простой способ такого построения показан на рис. 3.6.5, *а*, где AC – падающий луч, OD – параллельная ему побочная оптическая ось, FD – фокальная плоскость, CD – отраженный луч.



а *б*

Рис. 3.6.5. Построение действительного изображения в вогнутом зеркале

Для построения изображения какой-либо точки A предмета наиболее удобны следующие лучи (рис. 3.6.5, *б*):

1) луч AOC, проходящий через оптический центр зеркала; отраженный луч COA идет по той же прямой;
2) луч AFK, проходящий через фокус зеркала; отраженный луч параллелен главной оптической оси;
3) луч AP, падающий на зеркало в его полюсе; отраженный луч симметричен с падающим относительно главной оптической оси;
4) луч AE, параллельный главной оптической оси зеркала; отраженный луч EF проходит через фокус зеркала.

Все отраженные лучи проходят через точку A_1, являющуюся изображением точки A. Поэтому для построения точки A_1 можно взять любые два из перечисленных лучей. Чтобы построить изображение предмета, лежащего в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, достаточно построить изображения крайних точек этого предмета.

Таким же образом строится изображение предмета, расположенного ближе фокуса вогнутого зеркала (рис. 3.6.6), а также изображение предмета в выпуклом зеркале (рис. 3.6.7). В обоих этих случаях изображение оказывается мнимым.

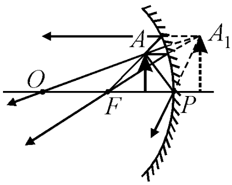


Рис. 3.6.6.
Мнимое изображение
в вогнутом зеркале

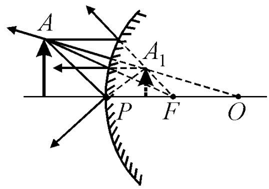


Рис. 3.6.7.
Мнимое изображение
в выпуклом зеркале

Заметим, что выпуклое зеркало дает только мнимое уменьшенное изображение предмета, расположенное между мнимым фокусом и полюсом.

Мнимые изображения всегда являются прямыми (неперевернутыми), а действительные изображения, наоборот, всегда перевернуты по отношению к предмету.

Расстояние a от светящейся точки до зеркала, расстояние b от зеркала до изображения этой точки и фокусное расстояние зеркала $F = R/2$ связаны между собой соотношением, которое называется формулой сферического зеркала. Эту формулу легко получить, например, построив изображение S_1 светящейся точки S, расположенной на главной оптической оси OP вогнутого зеркала (рис. 3.6.8). В самом деле, применяя теорему о внешнем угле треугольника для ΔSBO и ΔOBS_1 и учитывая, что по закону отражения $\gamma = \alpha$, приходим к соотношению: $\varphi + \theta = 2\beta$. Так как все рассматриваемые углы малы, справедливы приближенные равенства

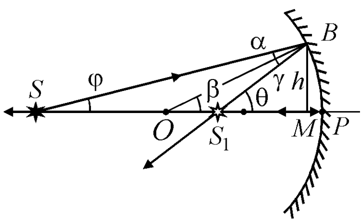


Рис. 3.6.8. К выводу формулы сферического зеркала

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{SM} \approx \frac{h}{a}, \qquad \beta \approx \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{OM} \approx \frac{h}{R} = \frac{h}{2F}, \qquad \theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{h}{S_1M} \approx \frac{h}{b}.$$

Подставляя эти значения углов в записанное выше соотношение и сокращая на h, получаем

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{3.6.6}$$

Равенство (3.6.6) называется *формулой сферического зеркала*. В таком виде она справедлива, если изображение и фокус являются действительными. При практическом использовании этой формулы нужно соблюдать следующее правило: если изображение или фокус являются мнимыми, то перед соответствующими членами в (3.6.6) нужно ставить знак «минус».

Сказанное о знаках для b и F относится и к величине a. Мнимым источником называют точку, в которой пересекаются продолжения лучей, падающих на зеркало сходящимся пучком. Для мнимого источника $a < 0$.

Законы преломления света. Из опыта известно, что если световой луч падает на границу раздела двух сред, то он меняет направление распространения. Это явление получило название *преломления света*. Преломление света происходит на границах раздела таких сред, как воздух и вода, воздух и стекло, стекло и вода и т.п. Углом падения называется угол между падающим лучом и перпендикуляром к границе раздела, восстановленным в точке падения. Углом преломления называется угол между перпендикуляром к границе раздела, восстановленным в точке падения, и преломленным лучом. Плоскостью падения называется плоскость, содержащая падающий луч и перпендикуляр к границе раздела, восстановленный в точке падения. Опытным путем установлены следующие законы преломления света:

1) падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела, восстановленный в точке падения, лежат в одной плоскости;
2) отношение синуса угла падения к синусу угла преломления не зависит от угла падения, если преломленный луч существует (закон Снеллиуса).

Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления зависит от того, какие среды образуют границу раздела, и называется относительным показателем преломления второй среды (т.е. среды, в которой распространяется преломленный луч) по отношению к первой. Если луч света падает на границу среды из вакуума, то отношение синуса угла падения к синусу угла преломления называется абсолютным показателем преломления или просто показателем преломления среды. Математически закон Снеллиуса записывается следующим образом:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \tag{3.6.7}$$

Картина преломления светового луча на границе раздела двух сред показана на рис. 3.6.9, где α_1 – угол падения, α_2 – угол преломления, n_1 – абсолютный показатель преломления первой среды, n_2 – абсолютный показатель преломления второй среды. Величина n_2 / n_1 – это относительный показатель преломления второй среды по отношению к первой. Абсолютный показатель преломления среды равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в среде:

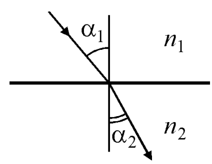


Рис. 3.6.9. Преломление света

$$n = \frac{c}{v}. \tag{3.6.8}$$

Ход лучей в призме. Преломление светового луча стеклянной призмой показано на рис. 3.6.10. Изменение направления луча на границах призмы определяется на основании закона преломления света. Угол θ, на который призма отклоняет световой луч, зависит от преломляющего угла призмы (обозначен на рисунке буквой φ), угла падения α и показателя преломления стекла, из которого изготовлена призма.

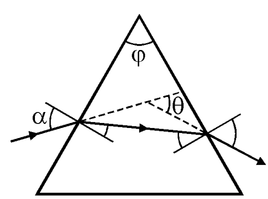


Рис. 3.6.10. Ход лучей в призме

Показатель преломления стекла зависит от длины волны падающего света (дисперсия света). Поэтому, если на призму падает пучок белого света, она разлагает его на цветные компоненты (разлагает в спектр). При этом коротковолновое излучение (фиолетовый цвет) преломляется призмой сильнее, чем длинноволновое (красный цвет).

Явление полного (внутреннего) отражения. Рассмотрим преломление светового луча на границе раздела двух сред в условиях, когда луч переходит из среды с большим показателем преломления (n_1) в среду с меньшим показателем преломления (n_2), т.е. из оптически более плотной среды в менее плотную. Согласно формуле (3.6.7), в этом случае угол преломления будет больше угла падения. Угол падения, при котором угол преломления равен прямому углу, называется критическим углом падения. Критический угол падения выражается формулой

$$\alpha_{\text{кр}} = \arcsin(n_2 / n_1). \tag{3.6.9}$$

Если угол падения больше критического, то преломленный луч отсутствует и падающий луч полностью отражается от границы раздела.

Тонкие линзы. *Линза* представляет собой прозрачное тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями. В частном случае одна из поверхностей может быть плоской. Примеры линз показаны на рис. 3.6.11. Линза, которая в середине толще, чем у краев, называется *выпуклой* или *собирающей* (рис. 3.6.11, *а*, *б*, *в*). Линза, которая у краев толще, чем в середине, называется вогнутой или *рассеивающей* (рис. 3.6.11, *г*, *д*, *е*).

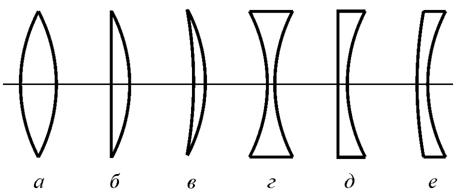


Рис. 3.6.11.
Собирающие и рассеивающие линзы

Проходящие через линзу лучи преломляются дважды. Однако, если толщина линзы много меньше, чем радиусы кривизны ограничивающих ее поверхностей, при построении хода лучей преломление на обеих поверхностях можно приближенно заменить одним преломлением в так называемой *главной плоскости линзы*. Идеализированные линзы, удовлетворяющие такому условию, называются *тонкими линзами*. Для тонкой линзы вершины преломляющих поверхностей сливаются в одну точку, называемую *центром* линзы. Обозначения тонких линз в оптических схемах представлены на рис. 3.6.12.

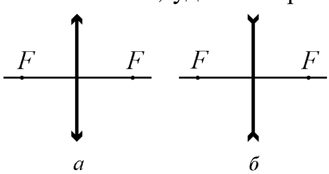


Рис. 3.6.12.
Обозначения тонких линз:
а – собирающая, *б* – рассеивающая

Прямая, проходящая через центр линзы, называется *оптической осью* линзы. Оптическая ось, пересекающая главную плоскость линзы по нормали к ней, называется *главной оптической осью* линзы. Остальные оси называются *побочными*.

Фокусное расстояние и оптическая сила линзы. Если на тонкую *собирающую* линзу направить пучок света, параллельный ее главной оптической оси, то после преломления в линзе все лучи, образующие пучок, пройдут через одну точку на главной оптической оси за линзой. Эта точка называется главным фокусом собирающей линзы.

Все лучи, параллельные главной оптической оси *рассеивающей* линзы, после преломления в ней отклоняются от оптической оси так, что их продолжения пересекаются в одной точке на главной оптической оси перед линзой. Эта точка называется главным фокусом рассеивающей линзы. Главные фокусы рассеивающей линзы мнимые, так как в действительности лучи света в них не собираются.

Расстояние от фокуса до центра линзы называется *фокусным расстоянием* линзы. Фокусное расстояние обозначают буквой f или F и измеряют в метрах. Величина, обратная фокусному расстоянию, $D = 1/F$, называется *оптической силой* линзы и измеряется в диоптриях (дптр). Одна диоптрия – это оптическая сила линзы с фокусным расстоянием в один метр. Оптическая сила собирающей линзы положительна, оптическая сила рассеивающей линзы отрицательна.

Два главных фокуса любой линзы лежат на главной оптической оси на одинаковом расстоянии от центра линзы по разные стороны от нее. Плоскости, проходящие через главные фокусы линзы перпендикулярно главной оптической оси, называются фокальными плоскостями. Линза обладает двумя фокальными плоскостями, расположенными симметрично относительно линзы по разные стороны от нее.

Лучи, параллельные побочной оптической оси собирающей линзы, сходятся в точке пересечения побочной оси с фокальной плоскостью. Лучи, параллельные побочной оптической оси рассеивающей линзы, преломляются так, что их продолжения сходятся в точке пересечения побочной оси с фокальной плоскостью перед линзой.

Построение изображения в собирающих и рассеивающих линзах. Световые лучи, исходящие из какой-либо светящейся точки, линза преломляет таким образом, что все они (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Таким образом, линза строит изображение светящейся точки. Произвольный объект можно рассматривать как совокупность светящихся точек. Поэтому линза строит также и изображение произвольного объекта.

Изображение, создаваемое линзой, называется *действительным*, если оно образовано пересечением световых лучей, прошедших через линзу. При этом в пространстве возникает область концентрации световой интенсивности, геометрически подобная светящемуся объекту. Ее можно наблюдать на экране, регистрировать с помощью фотоэмульсии и т.п. В противоположность этому изображение называется *мнимым*, если оно образовано пересечением не самих световых лучей, а их продолжений. Мнимое изображение не является областью концентрации световой интенсивности. Для его наблюдения или регистрации необходим по крайней мере еще один оптический прибор, например глаз человека.

Изображение может быть прямым или обратным (перевернутым) в зависимости от взаимной ориентации объекта и изображения. Для характеристики размера изображения вводят величину *линейного увеличения*, даваемого линзой. По определению линейное увеличение есть отношение размера изображения к размеру объекта.

При *построении изображений* в линзах следует руководствоваться следующими правилами:

1) световой луч, падающий на линзу параллельно ее главной оптической оси, линза преломляет таким образом, что прошедший луч (или его продолжение) пересекает главную оптическую ось линзы в фокусе (рис. 3.6.13);
2) если световой луч (или его продолжение) проходит через фокус линзы, то преломленный луч распространяется параллельно ее главной оптической оси (рис. 3.6.14);
3) луч, проходящий через центр линзы, не преломляется (рис. 3.6.15).

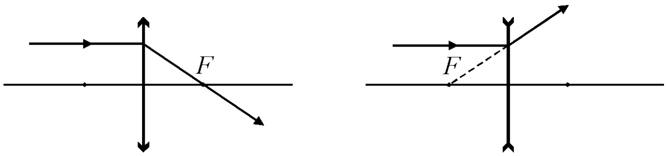


Рис. 3.6.13. Преломление луча, параллельного главной оптической оси

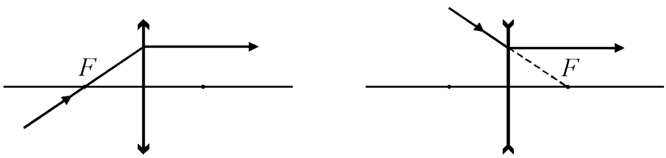


Рис. 3.6.14. Преломление луча, проходящего через фокус линзы

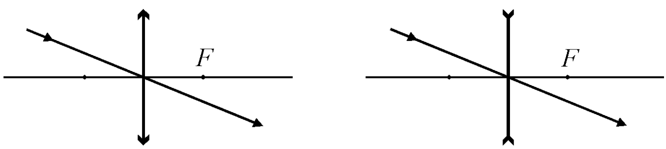


Рис. 3.6.15. Прохождение луча через оптический центр линзы

Формула линзы. Увеличение, даваемое линзами. Пример построения изображения в собирающей линзе показан на рис. 3.6.16. Линза строит действительное перевернутое увеличенное изображение объекта (стрелки). Используя рисунок, нетрудно вывести формулы для *увеличения, даваемого линзой*:

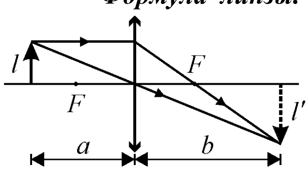


Рис. 3.6.16.
Построение изображения в собирающей линзе

$$M = \frac{l'}{l} = \frac{F}{a-F} = \frac{b-F}{F}, \qquad (3.6.10)$$

а также соотношение между фокусным расстоянием линзы F, расстоянием от объекта до линзы a и расстоянием от линзы до изображения b. Это соотношение имеет вид

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \qquad (3.6.11)$$

и называется *формулой линзы*. На основе сформулированных выше правил построения изображений в линзах аналогичные формулы могут быть получены и для других случаев – рассеивающей линзы, мнимого изображения и т.п.

Оптические приборы: лупа, фотоаппарат, проекционный аппарат, микроскоп. Ход лучей в этих приборах. Глаз. *Лупа* предназначена для рассматривания мелких объектов (построения увеличенных изображений). Она представляет собой собирающую линзу, вставленную в оправу с ручкой. Ход лучей в лупе показан на рис. 3.6.17. Как видно из рисунка, лупа строит мнимое прямое увеличенное изображение объекта. Объект следует располагать между линзой и фокусом вблизи фокуса. При этом лучи, исходящие из одной точки предмета, не собираются в одну точку за линзой, а выходят из нее расходящимся пучком. Расходящийся пучок света при попадании в глаз человека воспринимается исходящим из одной точки, в которой пересекаются продолжения лучей. Эта точка является мнимым изображением соответствующей точки объекта. Увеличение, даваемое лупой,

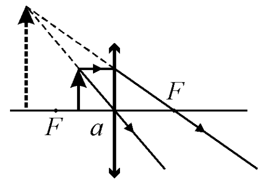


Рис. 3.6.17.
Ход лучей в лупе

$$M = \frac{l'}{l} = \frac{F}{F-a}\,. \qquad (3.6.12)$$

Оно тем больше, чем ближе к фокусу расположен объект.

Фотоаппарат предназначен для фотографической регистрации изображений объектов. Он представляет собой камеру с объективом. Фотопленка располагается вблизи задней стенки камеры. Объектив строит на пленке сильно уменьшенное действительное перевернутое изображение объекта. В простейшем случае объектив представляет собой собирающую линзу, фокусное расстояние которой примерно равно расстоянию от линзы до плоскости, в которой расположена фотопленка. Ход лучей в фотоаппарате показан на рис. 3.6.18.

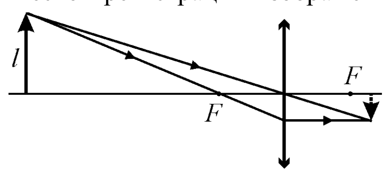


Рис. 3.6.18.
Ход лучей в фотоаппарате

Проекционный аппарат предназначен для формирования сильно увеличенных действительных изображений объектов (обычно снятых на пленку). Ход лучей в проекционном аппарате иллюстрирует предыдущий рисунок, только объектом теперь следует считать стрелку l', а изображением – стрелку l.

Микроскоп предназначен для получения сильно увеличенных мнимых изображений очень мелких объектов. В микроскопе реализуется предельное увеличение, достижимое в оптике. Минимальный размер объекта, который можно рассмотреть в микроскоп, имеет порядок длины световой волны, т.е. около 10^{-6} м. Микроскоп состоит из объектива и окуляра. В простейшем случае и объектив и окуляр представляют собой собирающие линзы. Объектив обращен к объекту, через окуляр глазом наблюдают изображение объекта. Ход лучей в микроскопе показан на рис. 3.6.19.

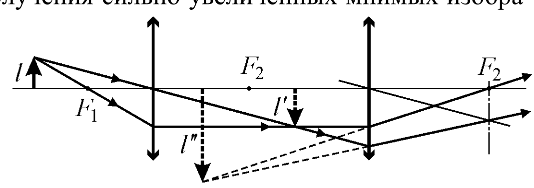


Рис. 3.6.19. Ход лучей в микроскопе

Глаз. Оптическая система глаза человека подобна оптической системе фотоаппарата. При формировании изображения предметов на сетчатке *4* глаза (рис. 3.6.20) основную роль играет преломление света на сферической поверхности границы раздела «роговица – воздух» *1*, дополнительное преломление осуществляется хрусталиком *2*, находящимся за радужной оболочкой *5*. Хрусталик имеет форму двояковыпуклой линзы. Радиус кривизны хрусталика

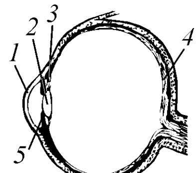


Рис. 3.6.20. Глаз

изменяется под действием специальной мышцы *3*. Этот процесс называется аккомодацией. Путем аккомодации изменяется фокусное расстояние оптической системы глаза и получается четкое изображение на сетчатке.

Волновые свойства света проявляются в эффектах, присущих любому волновому движению. К таким эффектам в первую очередь относятся интерференция и дифракция света.

Электромагнитная природа света. На основе многочисленных экспериментов установлено, что свет и электромагнитные волны имеют ряд общих свойств: одинаковую скорость распространения, наличие поляризации, способность испытывать отражение и преломление и т.п. Это позволило сделать вывод о том, что свет имеет *электромагнитную природу*, т.е. представляет собой электромагнитные волны определенного частотного диапазона. Длины волн видимого света в вакууме лежат в диапазоне от 0,39 микрона (фиолетовый свет) до 0,77 микрона (красный свет).

Поляризацией света называется физическая характеристика оптического излучения, связанная с зависимостью свойств света от направления в плоскости фронта световой волны. Поляризованными могут быть только поперечные волны. Поперечность световых волн доказана многочисленными экспериментами по распространению света в кристаллах.

Свет называется линейно-поляризованным, если в световой волне направления колебаний электрического и магнитного полей строго фиксированы и перпендикулярны направлению распространения. Естественный свет не поляризован, направления колебаний электрического и магнитного полей в нем хаотически меняются, так что все направления колебаний в плоскости, перпендикулярной лучу, равновероятны.

Существуют различные способы получения поляризованного света. Устройства (как правило, прозрачные кристаллы), с помощью которых из естественного света выделяют поляризованный свет, называются поляризаторами. Для обнаружения поляризации служат анализаторы, которые по своему принципу действия идентичны поляризаторам. Поляризатор пропускает свет только с определенным направлением колебаний электрического (и соответственно магнитного) поля. В зависимости от ориентации анализатора поляризованный свет либо проходит, либо не проходит через него. При скрещенном положении поляризатора и анализатора, когда они повернуты относительно друг друга на $90°$, световые волны через них не проходят.

Скорость света в однородной среде определяется формулой

$$v = \frac{c}{n}, \tag{3.6.13}$$

где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, n – показатель преломления среды. Длина световой волны λ в веществе с показателем преломления n уменьшается по сравнению с длиной волны λ_0 в вакууме: $\lambda = \lambda_0 / n$. На расстоянии d, которое проходит в веществе световая волна, укладывается в n раз большее число длин волн, чем в вакууме.

Дисперсией света называется явление зависимости показателя преломления среды от частоты (длины волны) света. Из (3.6.13) вытекает, что дисперсия света может определяться также как явление зависимости скорости распространения световой волны в веществе от ее частоты (длины волны).

Спектроскоп – это прибор для наблюдения спектрального состава света (рис. 3.6.21). Простейшим спектроскопом служит стеклянная призма, с помощью которой можно наблюдать разложение белого света в спектр, т.е. на составляющие с различными длинами волн.

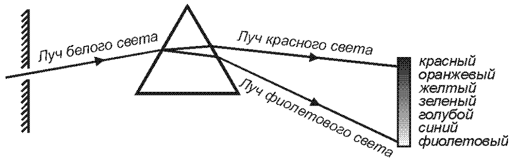


Рис. 3.6.21. Спектроскоп

Инфракрасное излучение – невидимое электромагнитное излучение, длина волны которого превышает длину волны красного света. Инфракрасные волны имеют длины волн в диапазоне $3\cdot10^{-3}-7{,}7\cdot10^{-7}$ м.

Ультрафиолетовое излучение – невидимое электромагнитное излучение, длина волны которого меньше длины волны фиолетового света и лежит в диапазоне $3{,}9\cdot10^{-7}-10^{-9}$ м.

Интерференция света – это пространственное перераспределение энергии светового излучения при наложении двух или нескольких световых волн. Правильное объяснение интерференции света как типично волнового явления было дано в начале XIX века Т. Юнгом и О. Френелем. Интерференция света характеризуется образованием стационарной (постоянной во времени) интерференционной картины – регулярного чередования в пространстве областей повышенной и пониженной интенсивности света, получающейся в результате наложения *когерентных* световых волн, т.е. волн одинаковой частоты, имеющих постоянную разность фаз. Добиться постоянной разности фаз волн от независимых источников практически невозможно. Поэтому для получения когерентных световых волн обычно используется следующий способ: свет от одного источника каким-либо образом разделяют на два или несколько пучков и, пустив их по разным путям, сводят затем вместе.

Интерференция наблюдается также при отражении света от тонкой мыльной пленки, от нефтяных пленок на поверхности воды. Интерференционная картина при этом образуется за счет наложения световых волн, отраженных от наружной и внутренней поверхностей пленки. Когерентность интерферирующих волн обеспечивается тем, что обе они испущены от одного источника.

Простая для наблюдения интерференционная картина возникает в тонкой прослойке воздуха между стеклянной пластикой и прижатой к ней плоско-выпуклой линзой большого радиуса кривизны. Эта картина имеет вид концентрических колец, получивших название колец Ньютона.

Максимум в интерференционной картине наблюдается при условии, что световые волны от когерентных источников приходят в точку наблюдения в одной и той же фазе (оптическая разность хода лучей от источников до данной точки равна при этом четному числу полуволн). ***Минимум*** в интерференционной картине наблюдается при условии, что световые волны от когерентных источников приходят в точку наблюдения в противофазе (когда оптическая разность хода лучей равна нечетному числу полуволн).

При наблюдении интерференции в монохроматическом свете с определенной длиной волны интерференционная картина на экране представляет собой чередование светлых и темных мест. Интерференционная картина в белом свете является окрашенной, ибо каждая составляющая белого света дает усиления и ослабления света в своих местах на экране.

Дифракция света – это огибание лучами света границы непрозрачных тел, в том числе проникновение света в область геометрической тени. Впервые дифракцию света наблюдал Ф. Гримальди в середине XVII века. Совместное проявление интерференции и дифракции света наблюдалось в классическом ***опыте Юнга***, поставленном им в 1802 году. Схема опыта изображена на рис. 3.6.22. Свет, прошедший через маленькое отверстие A в непрозрачной ширме, падал на другую ширму с двумя близко расположенными маленькими отверстиями B и C. Сферическая волна от отверстия A возбуждала в отверстиях B и C когерентные световые колебания. В результате интерференции волн от отверстий B и C на экране появлялись чередующиеся темные и светлые полосы. Закрывая одно из отверстий Юнг, обнаруживал, что интерференционные полосы исчезали. С помощью этого опыта Юнгом были весьма точно измерены длины волн, соответствующие световым лучам разного цвета.

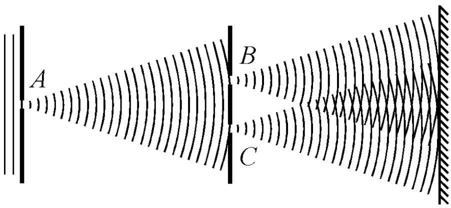


Рис. 3.6.22. Схема опыта Юнга

Принципиальное значение опыта Юнга состоит в том, что он дал первое неопровержимое доказательство волновой природы света.

Принцип Гюйгенса–Френеля является основным принципом волновой оптики. Он используется для решения дифракционных задач – отыскания распределения интенсивности световой волны, распространяющейся в среде с препятствиями (непрозрачными телами). Согласно этому принципу, каждая точка пространства, которой достигла в настоящий момент распространяющаяся волна, становится источником элементарных сферических волн. Световое поле в следующий момент времени образуется в результате интерференции элементарных волн, излучаемых точками волновой поверхности в направлении распространения волны (элементарные волны, излучаемые точками волновой поверхности в обратном направлении, во внимание не принимаются).

В отличие от принципа Гюйгенса, областью применимости которого является геометрическая оптика, дающая лишь направление распространения световых лучей, принцип Гюйгенса–Френеля позволяет найти амплитуду и фазу световой волны в любой точке пространства. С его помощью Френелю удалось объяснить дифракцию света на отверстии, на диске, на краю экрана и в других задачах.

Исследования явлений дифракции отчетливо показывают приближенный характер законов геометрической оптики. Эти законы выполняются достаточно точно лишь в том случае, когда поперечные размеры непрозрачных препятствий на пути распространения света намного больше длины световой волны.

Дифракционная решетка – это пространственная периодическая структура, период которой соизмерим с длиной световой волны. В простейшем случае решетка представляет собой систему щелей в непрозрачном экране (см. рис. 3.6.23). Если на решетку падает плоская монохроматическая волна, то дифракционная картина, полученная с помощью линзы на экране, имеет в результате интерференции света от различных щелей вид чередующихся светлых и темных полос. При этом угловые направления на максимумы дифракционной картины определяются уравнением

$$d\sin\varphi = m\lambda. \qquad (3.6.14)$$

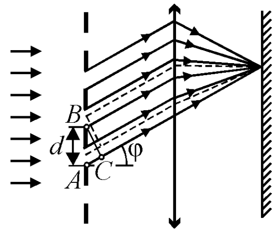
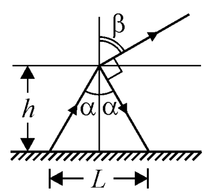


Рис. 3.6.23. Дифракционная решетка

Здесь d – период решетки (т.е. расстояние между соседними щелями), φ – угол между нормалью к решетке и направлением на один из максимумов дифракционной картины, λ – длина световой волны, m – целое число, называемое порядком дифракционного максимума. Если на решетку падает белый свет, то решетка разлагает его в спектр. При этом все максимумы, кроме центрального ($m = 0$), будут окрашены. Дифракционную решетку часто используют как спектральный прибор – проводят с ее помощью измерение длин световых волн и т.п.

Примеры решения задач

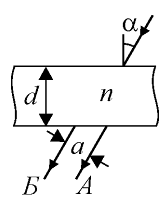
Пример 1. Точечный источник света расположен на дне водоема глубиной $h = 0{,}6$ м. В некоторой точке поверхности воды вышедший в воздух преломленный луч оказался перпендикулярным лучу, отраженному от поверхности воды обратно в воду. На каком расстоянии L от источника на дне водоема достигнет дна отраженный луч? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

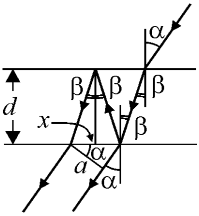


Решение. Ход лучей изображен на рисунке, откуда видно, что искомое расстояние $L = 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha$. По закону преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{1}{n}$. С другой стороны, по условию задачи $\alpha + \beta = \pi/2$. Следовательно, $\sin\beta = \cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = 1/n$. Таким образом, $L = \dfrac{2h}{n} = 0{,}9$ м.

Ответ. $L = \dfrac{2h}{n} = 0{,}9$ м.

Пример 2. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $d = 2$ см под углом $\alpha = 30°$. Каково расстояние a между лучом A, прошедшим пластину без отражения, и лучом $Б$, претерпевшим двукратное отражение от ее граней? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.



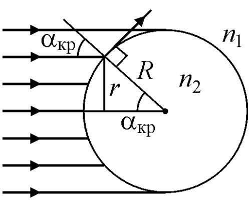


Решение. Ход лучей изображен на рисунке. Учитывая, что $\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha$, длину отрезка x можно выразить следующим образом: $x = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta = 2d\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = 2d\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$. Поскольку искомое расстояние $a = x\cos\alpha$, то $a = d\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \approx 1{,}22$ см.

Ответ. $a = d\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} \approx 1{,}22$ см.

Пример 3. В стекле с показателем преломления $n_1 = 1{,}5$ имеется сферическая полость радиуса $R = 4{,}5$ см, заполненная водой. На полость падает распространяющийся в стекле широкий пучок параллельных световых лучей. Определить радиус r пучка световых лучей, которые проникают в полость. Радиус падающего пучка намного превышает радиус полости. Показатель преломления воды $n_2 = 4/3$.

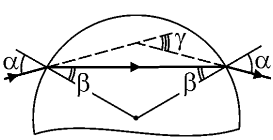
Решение. Поскольку свет переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную ($n_2 < n_1$), для части лучей на границе стекла и воды возникнет полное отражение. Те лучи, угол падения которых на границу раздела превышает критическое значение $\alpha_{кр} = \arcsin(n_2/n_1)$, отразятся от границы и в полость не попадут. Следовательно, радиус пучка лучей, которые проникают внутрь полости, $r = R\sin\alpha_{кр}$. Следовательно, $r = R\frac{n_2}{n_1} = 4$ см.



Ответ. $r = R\frac{n_2}{n_1} = 4$ см.

Пример 4. Световой луч падает на поверхность стеклянного шара. Угол падения луча $\alpha = 45°$, показатель преломления стекла $n = 1{,}41$. Найти угол γ между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара.

Решение. Световой луч испытывает преломление дважды: при входе в стеклянный шар и при выходе из него (см. ход лучей, изображенный на рисунке). При этом нормаль к преломляющей поверхности в точках падения луча совпадает с радиусом шара, проведенным в эти точки. Из рисунка видно, что искомый угол $\gamma = 2(\alpha - \beta)$, где α – угол падения луча на поверхность шара, совпадающий с углом преломления на выходе луча из шара; β – угол преломления на

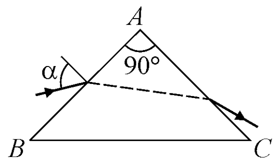


границе «воздух – стекло», совпадающий с углом падения на границу «стекло – воздух». По закону преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$, откуда $\beta = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right)$. Следовательно,

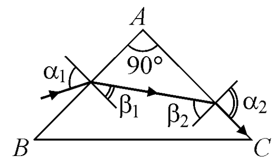
$$\gamma = 2\alpha - 2\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right) = 30°.$$

Ответ. $\gamma = 2\alpha - 2\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right) = 30°.$

Пример 5. Луч света, лежащий в плоскости рисунка, падает на боковую грань AB призмы, имеющей при вершине угол $90°$. В каких пределах лежат возможные значения угла падения α, если известно, что луч выходит из боковой грани AC? Показатель преломления $n = 1{,}25$.



Решение. Для того чтобы луч мог выйти из задней грани призмы (грани AC), нужно, чтобы угол β_2 его падения на эту грань был меньше критического угла полного внутреннего отражения. Поскольку $\beta_1 + \beta_2 = 90°$, то $\sin\beta_2 = \cos\beta_1$. Если β_2 – критический угол ($\alpha_2 = 90°$), то $\cos\beta_1 = 1/n$. Соответствующий угол падения на переднюю грань определяется равенством $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1 =$

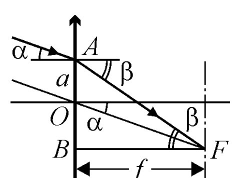


$= n\sqrt{1-\cos^2\beta_1} = \sqrt{n^2-1}$. Легко видеть, что если луч падает на переднюю грань призмы под меньшим углом, то на задней грани призмы произойдет его полное отражение (угол β_1 уменьшится, а угол β_2 возрастет). Наоборот, если угол падения луча на переднюю грань призмы увеличить, то угол β_1 также увеличится, а угол β_2 уменьшится и луч выйдет из задней грани призмы. Таким образом, для того чтобы луч вышел из задней грани, угол падения его на переднюю грань должен удовлетворять условию $\sqrt{n^2-1} < \sin\alpha < 1$, или $0{,}75 < \sin\alpha < 1$, т.е. $48°40' < \alpha < 90°$.

Ответ. $\sqrt{n^2-1} < \sin\alpha < 1$, или $0{,}75 < \sin\alpha < 1$, т.е. $48°40' < \alpha < 90°$.

Пример 6. На поверхность тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием f падает луч света на расстоянии a от центра линзы под углом α к ее главной оптической оси. Под каким углом β к главной оптической оси луч выйдет из линзы?

Решение. Ход падающего и преломленного в линзе луча изображен на рисунке. При построении преломленного луча использован вспомогательный луч OF, параллельный падающему на линзу лучу и проходящий через оптический центр линзы O без преломления. Согласно известному свойству тонкой собирающей линзы, все параллельные лучи, падающие на нее, пересекаются в

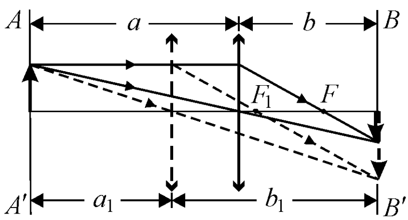


точке F фокальной плоскости. Из треугольников ABF и OBF имеем $f\,\mathrm{tg}\,\beta = a + f\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{a + f\,\mathrm{tg}\,\alpha}{f}$. Следовательно, $\beta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{a}{f} + \mathrm{tg}\,\alpha\right)$.

Ответ. $\beta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{a}{f} + \mathrm{tg}\,\alpha\right)$.

Пример 7. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F = 0{,}4$ м создает на экране увеличенное изображение предмета, который помещен на расстоянии $L = 2{,}5$ м от экрана. Каково расстояние d от предмета до линзы?

Решение. При фиксированном расстоянии между предметом и экраном, превышающем $4F$, существуют два положения линзы, при которых она дает на экране изображение предмета. Это следует из того, что формула тонкой линзы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F}$, связывающая расстояние от предмета до линзы a, расстояние от линзы до изображения b и фокусное расстояние линзы F, симметрична относительно a и b: при замене $a_1 = b$, $b_1 = a$ эта формула остается справедливой. Построение изображения предмета проиллюстрировано на рисунке, где упомянутые положения линзы изображены сплошной и штриховой линиями, а через AA' и BB' обозначены плоскости объекта и изображения соответственно. Видно, что когда линза занимает ближнее к предмету положение, она дает увеличенное изображение (штриховые линии), а если дальнее, то уменьшенное изображение (сплошные линии). По условию задачи $a = d$, $b = L - d$. Подставляя эти значения в формулу линзы, имеем $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{L-d} = \dfrac{1}{F}$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно d, а именно $d^2 - Ld + FL = 0$. Корни этого уравнения имеют вид $d_{1,2} = \dfrac{L}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{4F}{L}}\right)$.



Поскольку линза дает увеличенное изображение, условию задачи удовлетворяет меньший корень, т.е. $d = \dfrac{L}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{4F}{L}}\right) = 0{,}5$ м.

Ответ. $d = \dfrac{L}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{4F}{L}}\right) = 0{,}5$ м.

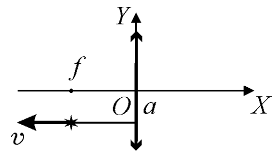
Пример 8. С помощью линзы с фокусным расстоянием $f = 20$ см на экране получено изображение предмета с увеличением $m = 2$. Чему равно расстояние l между предметом и экраном?

Решение. Поскольку увеличение изображения связано с расстоянием a от предмета до линзы и расстоянием b от линзы до изображения соотношением $m = b/a$, формулу линзы можно записать в виде $\frac{1}{a}+\frac{1}{ma}=\frac{1}{f}$. Отсюда $a = f(1+1/m)$, $b = f(m+1)$.

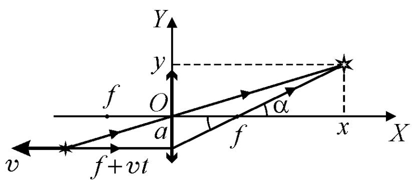
Учитывая, что искомое расстояние $l = a+b$, получаем $l = f\frac{(m+1)^2}{m} = 90$ см.

Ответ. $l = f\frac{(m+1)^2}{m} = 90$ см.

Пример 9. Начало системы координат помещено в центр тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием f, причем ось OX совпадает с главной оптической осью линзы. Точечный источник света удаляется от линзы равномерно со скоростью v по прямой, параллельной оси OX и проходящей на расстоянии a от нее. Найти координаты $x(t)$, $y(t)$ изображения источника в зависимости от времени. При $t = 0$ источник находился в фокальной плоскости линзы.



Решение. Ход лучей при построении изображения источника показан на рисунке. Видно, что изображение источника располагается на прямой, проходящей через правый фокус линзы и через точку пересечения линии, по которой движется источник, с преломляющей плоскостью линзы. В начальный момент времени источник находится в фокальной плоскости линзы и его изображение бесконечно удалено. По мере перемещения источника в направлении от линзы его изображение приближается к линзе.

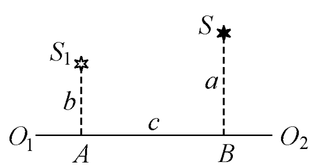


Из подобных треугольников (см. рисунок) находим отношения $\frac{x}{y}=\frac{f+vt}{a}$, $\frac{x-f}{y}=\frac{f}{a}$.

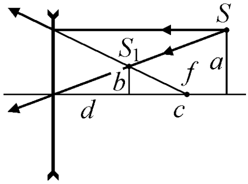
Выражая отсюда x и y, получаем $x(t) = f+\frac{f^2}{vt}$, $y(t)=\frac{af}{vt}$.

Ответ. $x(t) = f+\frac{f^2}{vt}$, $y(t)=\frac{af}{vt}$.

Пример 10. На рисунке представлены светящаяся точка S и ее изображение S_1, даваемое линзой, главная оптическая ось которой – прямая O_1O_2. Расстояния от точек S и S_1 до оптической оси равны соответственно $a = 30$ см и $b = 20$ см, расстояние между точками A и B равно $c = 10$ см. Найти фокусное расстояние линзы f.



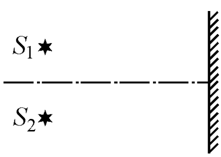
Решение. Поскольку S_1 находится по ту же сторону от главной оптической оси



линзы, что и S, причем $b<a$, изображение объекта уменьшенное и прямое. Такое изображение может дать только рассеивающая линза, причем это изображение является мнимым. Соответствующий ход лучей и найденное построением положение линзы и ее фокуса показаны на рисунке. Из подобия треугольников следует, что $\dfrac{d}{c+d}=\dfrac{b}{a}$. Отсюда $d=\dfrac{bc}{a-b}$, $c+d=\dfrac{ac}{a-b}$. С другой стороны, из формулы линзы, записанной учетом того, что изображение мнимое: $\dfrac{1}{c+d}-\dfrac{1}{d}=-\dfrac{1}{|f|}$, вытекает, что $|f|=\dfrac{d(c+d)}{c}$. Объединяя записанные выражения, получаем $|f|=\dfrac{abc}{(a-b)^2}=60$ см.

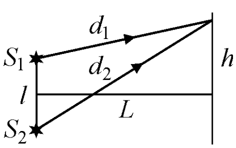
Ответ. $|f|=\dfrac{abc}{(a-b)^2}=60$ см.

Пример 11. Два когерентных источника S_1 и S_2 испускают монохроматический



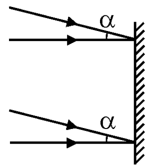
свет с длиной волны $\lambda=0{,}6$ мкм. Определить, на каком расстоянии h от точки, расположенной на экране на равном расстоянии от источников, будет находиться первый максимум освещенности. Экран удален от источников на расстояние $L=3$ м, расстояние между источниками $l=0{,}5$ мм.

Решение. Максимумы освещенности образуются в тех точках на экране, в которых

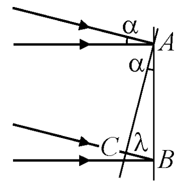


световые волны, пришедшие от источников, оказываются в фазе. Условия максимумов интерференционной картины имеют вид $d_2-d_1=m\lambda$, где d_1 и d_2 – расстояния от источников до данной точки на экране (см. рисунок), m – целое число (порядок интерференционного максимума). Для волн, дающих первый максимум, $m=1$. Из рисунка видно, что $d_1^2=L^2+\left(h-\dfrac{l}{2}\right)^2$, $d_2^2=L^2+\left(h+\dfrac{l}{2}\right)^2$. Отсюда $d_2^2-d_1^2=2hl$. Преобразуем это равенство к виду $(d_2-d_1)(d_2+d_1)=2hl$. Учитывая, что $l<<L$, $h<<L$, можно приближенно положить $d_1+d_2\approx 2L$. Тогда $d_2-d_1\approx hl/L$. Объединяя это равенство с записанным выше условием максимума первого порядка, получаем $h\approx\lambda\dfrac{L}{l}=3{,}6$ мм.

Ответ. $h\approx\lambda\dfrac{L}{l}=3{,}6$ мм.



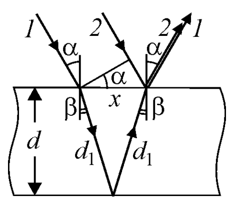
Пример 12. Два когерентных световых пучка падают на экран: один пучок по нормали, а другой – под углом $\alpha = 0{,}01$ рад. Найти период d интерференционной картины, т.е. расстояние между соседними светлыми полосами на экране, если длина световой волны в обоих пучках равна $\lambda = 0{,}5$ мкм.



Решение. На рисунке изображены волновые фронты двух пучков – падающего на экран нормально (AB) и падающего на экран наклонно (AC). Пусть в некоторой точке A наблюдается один из максимумов интерференционной картины. Это означает, что фазы обеих световых волн в этой точке совпадают. Соседний максимум интенсивности находится в точке B, для которой также выполняется условие равенства фаз обеих волн. Это имеет место, если расстояние между точками B и C равно длине световой волны λ. Из треугольника ABC имеем $d\sin\alpha = \lambda$. Учитывая, что $\alpha \ll 1$ $(\sin\alpha \approx \alpha)$, получаем $d = \dfrac{\lambda}{\sin\alpha} \approx \dfrac{\lambda}{\alpha} = 50$ мкм.

Ответ. $d \approx \dfrac{\lambda}{\alpha} = 50$ мкм.

Пример 13. На стеклянную пластинку нанесен тонкий слой прозрачного покрытия, показатель преломления которого $n = 1{,}41$ меньше показателя преломления стекла. На пластинку под углом $\alpha = 30°$ падает пучок белого света. Какова минимальная толщина покрытия $d_{\min}$, при которой в отраженном свете оно кажется зеленым? Длина волны зеленого света $\lambda = 0{,}53$ мкм.



Решение. Покрытие в отраженном свете будет казаться зеленым, если в направлении, в котором проводится наблюдение, в результате интерференции будут усиливаться волны с длиной λ, соответствующей зеленому цвету. Ход двух интерферирующих лучей изображен на рисунке. Один из этих лучей (луч *1*) преломляется на верхней грани покрытия, отражается от его нижней грани и, преломившись второй раз на верхней грани, выходит в воздух. Другой луч (луч *2*) падает на верхнюю грань покрытия в точке выхода первого луча и отражается от этой грани. Оптическая длина пути первого луча в диэлектрике равна $\delta_1 = 2d_1 n = \dfrac{2dn}{\cos\beta} = \dfrac{2dn}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \dfrac{2dn^2}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$. Разность хода первого и второго луча до падения на покрытие (см. рисунок) составляет величину $\delta_2 = x\sin\alpha = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\alpha = \dfrac{2d\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}$. Разность хода между интерферирующими лучами $\delta = \dfrac{2dn^2}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - \dfrac{2d\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}$. Амплитуды волн будут складывать-

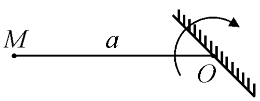
ся, если $\delta = \lambda$. Отсюда получаем, что минимальная толщина покрытия $d_{\min} =$
$= \dfrac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \approx 0{,}2$ мкм.

Ответ. $d_{\min} = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \approx 0{,}2$ мкм.

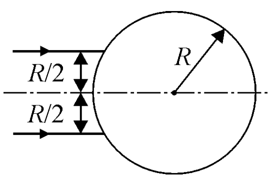
Задачи

1. Луч света падает в центр верхней грани стеклянного кубика. Чему равен максимальный угол падения α, при котором преломленный луч еще попадает на нижнюю грань кубика? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

2. Плоское зеркало вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей по поверхности зеркала. Найти траекторию изображения точки M, расположенной на расстоянии a от оси вращения зеркала.



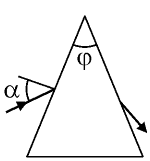
3. На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиуса $R = 1$ м, наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине $H_{\max}$ нужно поместить под центром шара точечный источник света, чтобы ни один световой луч не прошел в воздух? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.



4. Два параллельных луча, расстояние между которыми равно радиусу R круглого прямого прозрачного цилиндра, падают на боковую поверхность этого цилиндра. Лучи параллельны основанию цилиндра. Найти величину показателя преломления материала цилиндра, при которой лучи пересекаются на его поверхности.

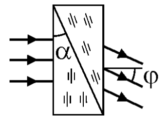
5. На стеклянный шар радиуса R с показателем преломления n падает узкий пучок света, образуя угол α с осью, проведенной через точку падения и центр шара. На каком расстоянии d от этой оси пучок выйдет из шара?

6. На поверхность стеклянного шара с показателем преломления $n < 2$ падает узкий пучок света, образуя малый угол α с осью шара, проведенной через точку падения и центр шара. Под каким углом γ к этой оси пучок выйдет из шара? При расчетах положить $\sin\alpha \approx \alpha$.

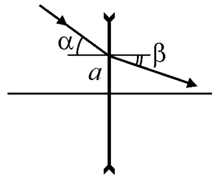


7. Луч света, идущий в плоскости чертежа, падает на переднюю грань стеклянного клина с углом $\varphi = 45°$ при вершине. При каких значениях угла падения α луч выйдет через заднюю грань клина? Показатель преломления стекла $n = \sqrt{2}$.

8. Две призмы с равными углами при вершине $\alpha = 5°$, имеющие разные показатели преломления, плотно прижаты друг к другу и расположены, как показано на рисунке. При освещении этой системы призм параллельным пучком света, падающим нормально на переднюю грань системы, оказалось, что вышедший из нее пучок отклонился от первоначального направления на угол $\varphi = 3°$. Найти разность Δn показателей преломления материалов призм. При расчетах положить $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\varphi \approx \varphi$.

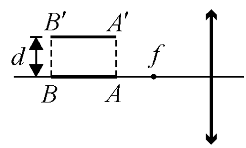


9. На поверхность тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием f падает луч света на расстоянии a от центра линзы под углом α к ее главной оптической оси. Под каким углом β к главной оптической оси луч выйдет из линзы?

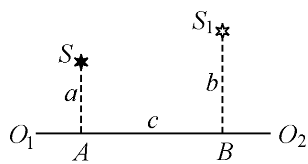


10. Перемещая линзу между экраном и предметом, удается получить два его четких изображения, одно размером $l_1 = 2$ см, а другое размером $l_2 = 8$ см. Каков размер l предмета?

11. Отрезок AB, лежащий на главной оптической оси линзы за ее фокусом f, сместили параллельно самому себе и перпендикулярно оптической оси в положение $A'B'$, как показано на рисунке. Чему равно смещение d, если длина изображения отрезка $A'B'$ больше длины изображения отрезка AB в $k = 2$ раза? Фокусное расстояние линзы $f = 3$ см.



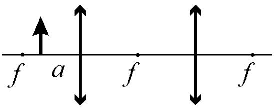
12. На рисунке представлены светящаяся точка S и ее изображение S_1, даваемое линзой, главная оптическая ось которой – прямая O_1O_2. Расстояния от точек S и S_1 до оптической оси равны соответственно $a = 20$ см и $b = 30$ см, расстояние между точками A и B равно $c = 15$ см. Найти фокусное расстояние линзы f.



13. Собирающая линза дает на экране, перпендикулярном ее главной оптической оси, резкое изображение предмета с увеличением $M = 4$. Линзу сдвигают перпендикулярно оптической оси на расстояние $h = 1$ мм. Какова величина H смещения изображения на экране?

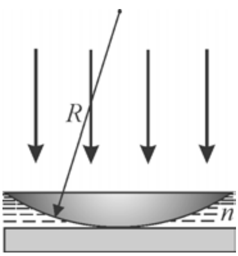
14. Точечный источник света лежит на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 70$ см. Расстояние от источника до центра линзы равно $2F$. На какое расстояние x сместится изображение источника, если линзу повернуть так, чтобы прямая, проведенная от источника к центру линзы, составляла угол $\alpha = 30°$ с главной оптической осью линзы? Центр линзы остается неподвижным.

15. Оптическая система состоит из двух одинаковых собирающих линз с фокусным расстоянием f, расположенных так, что их фокусы совпадают. Предмет находится на расстоянии $a < f$ перед первой линзой. На каком расстоянии b от второй линзы располагается изображение предмета?

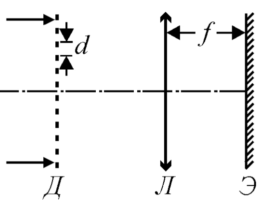


16. Человек, страдающий дальнозоркостью, рассматривает предмет, находящийся на расстоянии $d = 20$ см перед его глазами. При этом изображение предмета оказывается смещенным за поверхность сетчатки глаза на расстояние $\delta = 2{,}2$ мм. Определить оптическую силу D контактной линзы, устраняющей это смещение. Считать, что оптическая система глаза – это тонкая линза с фокусным расстоянием $f = 2$ см, а контактная линза вплотную примыкает к ней.

17. Интерференционная картина «кольца Ньютона» наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 0{,}63$ мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плоско-выпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой. Найдите радиус r первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы $R = 10$ м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола, равный $n = 1{,}5$. Свет падает по нормали к пластинке.



18. С помощью установки, схема которой показана на рисунке, наблюдают дифракцию параллельного пучка белого света на дифракционной решетке *Д*, расположенной перпендикулярно оси пучка. При этом на экране Э, установленном в фокальной плоскости тонкой собирающей линзы *Л*, видны две светлые полосы, вызванные наложением спектральных компонент с длинами волн $\lambda_1 = 460$ нм и $\lambda_2 = 575$ нм. Эти полосы расположены симметрично относительно главной оптической оси линзы на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Найдите минимальный период решетки $d_{\min}$, при котором наблюдается эта картина, если фокусное расстояние линзы $f = 20$ см.



4. Основы специальной теории относительности

Теоретический материал

Релятивистская механика – это механика быстрых частиц, скорости которых близки к скорости света. Такие частицы рождаются в ходе ядерных реакций, они присутствуют в недрах звезд, а также в космических лучах, их получают искусственно на ускорителях. Релятивистскую механику называют иногда теорией относительности, подчеркивая тем самым основополагающую роль принципа относительности в этой теории.

Обобщением результатов наблюдения движений тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, явился принцип относительности Галилея. Согласно этому принципу, никакими механическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Ему можно придать ясную математическую форму: уравнения, выражающие законы механики, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно. Кроме того, время t и t' в этих двух системах отсчета течет одинаково, т.е. $t \equiv t'$. Такие преобразования получили название преобразований Галилея**.**

Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную S и движущуюся S'. Направление движения движущейся со скоростью $\vec{V}$ системы отсчета относительно неподвижной показано на рис. 4.1. Пусть в начальный момент их оси OY и $O'Y'$ совпадают. Тогда расстояние OO' в любой момент времени $t \equiv t'$ равно Vt. Если декартовы координаты некоторой материальной точки в системе S' в момент времени t равны $x', y', z',$ то ее координаты x, y, z в системе S в этот же момент времени в соответствии с преобразованиями Галилея выражаются следующим образом:

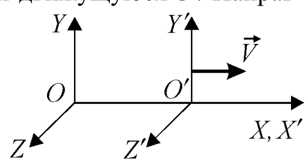


Рис. 4.1. Неподвижная и движущаяся системы отсчета

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{4.1}$$

Из преобразований Галилея нетрудно вывести связь скоростей материальной точки относительно неподвижной и движущейся систем отсчета. Дифференцируя уравнения (4.1) по времени, получаем

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z. \tag{4.2}$$

Формулы (4.2) выражают классический закон сложения скоростей, согласно которому абсолютная скорость материальной точки равна сумме ее относительной скорости и скорости движущейся системы отсчета.

Принцип постоянства скорости света. В конце XIX века опытным путем было показано, что движение Земли по орбите вокруг Солнца не влияет на скорость света относительно Земли (Майкельсон и Морли, 1887). Этот результат позволил сформулировать следующий принцип, получивший название принципа постоянства скорости света: скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета – покоящейся или движущейся – она определяется. Иными словами, абсолютная скорость света равна его относительной скорости по отношению к любой инерциальной системе отсчета. Например, если свет распространяется вдоль оси OX системы S, показанной на рис. 4.1, то для скоростей волнового фронта световой волны относительно систем S и S' можно записать $v_x = v'_x = c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Относительность времени. Предположим теперь, что в момент совпадения начал отсчета подвижной и неподвижной систем (рис. 4.1) в этой точке происходит вспышка света. Согласно принципу постоянства скорости света, свет будет распространяться с одинаковой скоростью c относительно обеих систем отсчета. Координата фронта световой волны в неподвижной системе отсчета в момент времени t равна $x = ct$. Координата фронта той же самой волны относительно движущейся системы отсчета выражается аналогичной формулой $x' = ct'$. Здесь t' – время, отсчитываемое по часам системы отсчета S'. Так как $x \neq x'$ (рис. 4.1), то и $t \neq t'$. Это означает, что время течет по-разному в разных системах отсчета.

Преобразования Лоренца. Относительность времени приводит к необходимости поиска преобразований, описывающих переход от неподвижной системы отсчета к системе, движущейся прямолинейно и равномерно, как преобразований не только координат, но и времени, т.е. преобразований, связывающих x, y, z, t и x', y', z', t'. Эти преобразования впервые были получены Лоренцем (1904) и имеют вид

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{4.3}$$

Они линейны, обратимы, удовлетворяют принципу постоянства скорости света и в пределе при $V/c \to 0$ переходят в преобразования Галилея. Таким образом, преобразования Лоренца можно рассматривать как обобщение преобразований Галилея.

Релятивистский закон сложения скоростей. Пользуясь (4.3), можно получить релятивистский закон сложения скоростей:

$$v_x = \frac{v_{x'} + V}{1 + v_{x'}V/c^2}, \quad v_y = \frac{v_{y'}\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v_{x'}V/c^2}, \quad v_z = \frac{v_{z'}\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v_{x'}V/c^2}. \tag{4.4}$$

Из формул (4.4) видно, что если $v_{x'} = c$, то и $v_x = c$. Этот результат вполне естествен, так как формулы (4.4) получены в конечном счете из условия постоянства скорости света.

Принцип относительности Эйнштейна. К концу XIX века физикой было накоплено много экспериментальных фактов, свидетельствующих о том, что не только механические, но и все физические явления вообще протекают в системе отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно, так, как если бы эта система покоилась. Основываясь на этих данных, Эйнштейн сформулировал следующий принцип: «Никакими физическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчета, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется». Принципу Эйнштейна можно придать математическую форму: уравнения, описывающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца. Заметим, что уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) удовлетворяют этому принципу.

Полная энергия частицы. Одним из важнейших для ядерной физики и физики элементарных частиц следствий теории относительности является взаимосвязь массы тела (частицы) и его полной энергии, выражаемая формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{4.5}$$

где m – масса тела, v – его скорость, c – скорость света. Кинетическая энергия тела при этом определяется выражением

$$E_{\text{к}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right). \tag{4.6}$$

Релятивистское уравнение движения. Уравнение движения материальной точки также должно удовлетворять принципу относительности Эйнштейна. Для заряженной частицы в электромагнитном поле такое уравнение было получено Планком (1906) на основе второго закона Ньютона, принципа относительности и уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла). Это уравнение имеет вид

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}, \tag{4.7}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на заряд в электромагнитном поле (сила Лоренца), а релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{4.8}$$

Связь массы и энергии частицы. Энергия покоя частицы. Выражение $E_0 = mc^2$ представляет собой энергию покоя тела (частицы). Его полная энергия E, энергия покоя E_0 и импульс $\vec{p}$ связаны следующим соотношением:

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2. \tag{4.9}$$

Законы сохранения импульса и энергии в теории относительности. Если сумма внешних сил равна нулю, то релятивистский импульс и релятивистская энергия системы частиц сохраняются:

$$\vec{p} = \sum_i \frac{m_i\vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}, \tag{4.10}$$

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}. \tag{4.11}$$

Суммирование в этих формулах производится по всем частицам системы. Заметим, что в теории относительности эти два закона не являются независимыми – закон сохранения энергии является следствием закона сохранения импульса и принципа относительности.

Преобразования импульса и энергии. Пользуясь (4.4), (4.5) и (4.8) можно получить формулы преобразований импульса и энергии:

$$p_x = \frac{p_{x'} + E'V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad p_y = p_{y'}, \quad p_z = p_{z'}, \quad E = \frac{E' + p_{x'}V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \tag{4.12}$$

широко применяющиеся для решения задач релятивистской механики.

Примеры решения задач

Пример 1. Написать обратные преобразования Лоренца.

Решение. Будем считать показанную на рис. 4.1 систему отсчета S' неподвижной системой. Тогда показанная на том же рисунке система S будет двигаться влево (против оси $O'X'$) со скоростью V. Делая в формулах (4.3) замену V на $-V$ и заменяя координаты и время со штрихом на координаты и время без штриха и наоборот, получим

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{4.13}$$

Формулы (4.13) называются обратными преобразованиями Лоренца. Они позволяют вычислить координаты материальной точки M в системе отсчета S' в некоторый момент времени t', если известны координаты точки M в системе отсчета S в момент времени t. Подстановка формул (4.13) в формулы (4.3) естественно приводит к тождествам.

Ответ. $x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \dfrac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$.

Пример 2. Собственными размерами тела называются его размеры в системе отсчета, где тело покоится. Пусть стержень, имеющий собственную длину L', расположен параллельно оси $O'X'$ в движущейся со скоростью V относительно неподвижной системы отсчета S системе отсчета S' (см. рис. 4.1). Какова его длина L в системе отсчета S, если в системе отсчета S' он покоится?

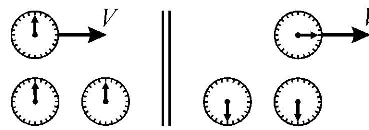
Решение. Собственная длина стержня $L' = x_2' - x_1'$, а его длина в неподвижной системе отсчета $L = x_2 - x_1$. Здесь x_1 и x_2 – координаты концов стержня в системе отсчета S в момент времени t. Из первого уравнения (4.13) следует, что

$$L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

т.е. длина движущегося стержня L меньше его собственной длины L'. Этот эффект иногда называют лоренцевым сокращением длины.

Ответ. $L = L'\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Пример 3. Пусть имеются двое неподвижных часов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга на оси OX неподвижной системы отсчета S, и часы, движущиеся вдоль оси OX со скоростью V (см. рисунок). Пусть все трое часов начинают отсчет времени от момента, когда движущиеся часы проходят мимо левых неподвижных часов (рисунок, *а*). Какое время t' покажут движущиеся часы в момент прохождения ими правых неподвижных часов (рисунок, *б*), если неподвижные часы показывают в этот момент время t?



а *б*

Решение. Выберем начала систем отсчета S и S' (см. рис. 4.1) так, чтобы в начальный момент времени все часы показывали одинаковое время и чтобы левые неподвижные и движущиеся часы имели координату $x = x' = 0$. Если система отсчета S' движется так, что $x'(t') \equiv 0$, то из первой формулы уравнений (4.13) следует, что $x(t) = Vt$. Подставляя $x(t)$ в последнюю формулу уравнений (4.13)? получаем

$$t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = t\sqrt{1 - V^2/c^2} < t,$$

т.е. в движущейся системе отсчета время течет медленнее, чем в неподвижной системе.

Ответ. $t' = t\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Пример 4. Частица, имеющая массу m и заряд q, разгоняется из состояния покоя до релятивистской скорости в однородном электрическом поле, модуль напряженности которого E. Через какое время t ее скорость v достигнет величины kc, где $0 < k < 1$.

Решение. Согласно второму закону Ньютона, $\frac{dp}{dt} = qE$, и, следовательно, $p(t) = qEt$. Подставляя $p(t)$ в формулу (4.8), получаем $qEt = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Отсюда искомое время $t = \frac{mkc}{qE\sqrt{1 - k^2}}$.

Ответ. $t = \dfrac{mkc}{qE\sqrt{1-k^2}}$.

Пример 5. С какой скоростью v движется релятивистская частица, если ее кинетическая энергия $E_к$, а энергия покоя E_0.

Решение. Из формулы $E = E_0 + E_к$, связывающей полную энергию частицы $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ с ее энергией покоя $E_0 = mc^2$ и кинетической энергией $E_к$, получаем $E_к = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) = E_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$. Из этой формулы следует, что скорость релятивистской частицы $v = c\sqrt{\dfrac{E_к^2 + 2E_0E_к^2}{(E_0+E_к)^2}}$.

Ответ. $v = c\sqrt{\dfrac{E_к^2 + 2E_0E_к^2}{(E_0+E_к)^2}}$.

Пример 6. Две частицы массой m каждая летят вдоль прямой навстречу друг другу со скоростями v. В результате столкновения частицы слипаются. Найти массу M образовавшегося тела.

Решение. Из законов сохранения импульса (4.10) и энергии (4.11) для взаимодействующих частиц следует, что

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{MV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \qquad (4.14)$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (4.15)$$

Как видно из (4.14), скорость образовавшегося тела $V = 0$, и формула (4.15) принимает вид $M = \dfrac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Ответ. $M = \dfrac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Задачи

1. На биологической станции космического корабля, летящего со скоростью $\vec{V}$ относительно Земли, находится аквариум, имеющий форму параллелепипеда. Две его противоположные боковые стенки перпендикулярны скорости космического корабля. По одной из них со скоростью v_0 начинает ползти вверх гусеница, вылезающая из отверстия в крышке стоящей в аквариуме закрытой непрозрачной коробки. Определите скорость v, с которой увеличивалась бы видимая с Земли длина части гусеницы, если бы процесс наблюдения был возможен.

2. С какой скоростью V вдоль оси OX неподвижной системы отсчета должна перемещаться квадратная рамка, стороны которой параллельны осям OX и OY, чтобы в этой системе отсчета угол между диагональю рамки и стороной, параллельной направлению движения, был равен $\alpha = 60°$?

3. Две частицы движутся по прямой навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v_0. Найти модуль относительной скорости частиц v.

4. Покоящаяся релятивистская частица распадается на два одинаковых осколка, имеющих скорость u. При какой начальной скорости V этой частицы скорость v'_x одного из образующихся одинаковых осколков окажется при аналогичном распаде равной нулю? Чему равна во втором случае скорость v''_x другого осколка?

5. В неподвижной системе отсчета одна из двух одинаковых частиц покоится, а другая движется с релятивистской скоростью v. Определить скорость u их центра масс.

6. Частица, имеющая массу m и заряд q, разгоняется из состояния покоя до релятивистской скорости v в однородном электрическом поле, модуль напряженности которого E. Какое расстояние L проходит при этом частица?

7. При скорости релятивистской частицы v ее импульс равен p. Во сколько раз η нужно увеличить ее скорость, чтобы импульс частицы стал равным $2p$?

8. Определить импульс p электрона, если его кинетическая энергия равна $E_к$.

9. Определить скорость v релятивистской частицы массой m, если ее кинетическая энергия $E_к$.

10. Движущаяся со скоростью v_1 частица налетает на такую же покоящуюся частицу, в результате чего они слипаются. Определить скорость v образовавшегося тела.

5. Квантовая физика

5.1. Корпускулярно-волновой дуализм

Теоретический материал

Корпускулярные свойства света проявляются в явлениях взаимодействия света с веществом, в частности при испускании и поглощении света атомами. В соответствии с законами квантовой физики атомы способны испускать и поглощать свет не в любых количествах, а лишь строго определенными порциями (квантами). Энергия кванта света определяется формулой Планка

$$E = h\nu. \tag{5.1.1}$$

Здесь ν – частота света, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – *постоянная Планка*.

Фотоэффект. В развитии представлений о природе света важный шаг был сделан при изучении явления, открытого Герцем в 1887 году и тщательно исследованного Столетовым в 1888 году. Это явление, состоящее в испускании электронов веществом под действием света, получило название фотоэффекта.

Схема установки для наблюдения фотоэффекта изображена на рис. 5.1.1. В стеклянный баллон, из которого выкачан воздух, помещены два электрода. На один из электродов свет поступает через кварцевое окно, прозрачное не только для видимого, но и для ультрафиолетового излучения. На электроды подается напряжение, которое можно менять с помощью потенциометра и измерять вольтметром. Ток в цепи измеряется миллиамперметром. Типичный график зависимости силы фототока I от напряжения между катодом и анодом U изображен на рис. 5.1.2.

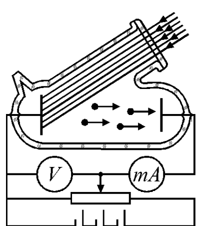


Рис. 5.1.1.
Установка для наблюдения фотоэффекта

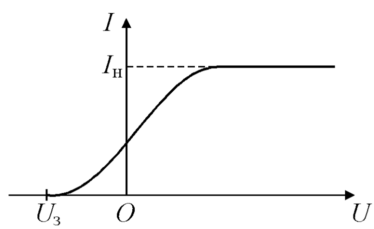


Рис. 5.1.2.
Вольтамперная характеристика фотоэффекта

Исследования, выполненные Столетовым и другими учеными в конце XIX – начале XX века, позволили установить следующие ***законы фотоэффекта***:

1) число электронов, испускаемых поверхностью металла, и сила фототока насыщения пропорциональны освещенности катода;
2) энергия вылетающих при фотоэффекте электронов зависит от частоты света и вещества катода, но не зависит от освещенности катода;
3) Для каждого вещества существует красная граница фотоэффекта – такая наименьшая частота (или наибольшая, «красная» длина волны) падающего света, при которой еще возможен фотоэффект.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотон. Объяснение законов фотоэффекта дал Эйнштейн в 1905 году. Развивая идеи Планка, он предположил, что свет существует в виде элементарных неделимых порций (*фотонов*) с энергией, определяемой формулой (5.1.1). Эйнштейн теоретически обосновал связь между энергией, получаемой фотоэлектроном при его освобождении светом, и частотой этого света. Он допустил, что вся энергия, полученная электроном, доставляется ему светом в виде определенной порции $h\nu$ и поглощается им целиком. При этом электрон не заимствует энергию от атомов катода. Эйнштейн получил для фотоэффекта *уравнение*

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}, \qquad (5.1.2)$$

где $mv^2/2$ – максимальная кинетическая энергия вылетающих электронов, A – работа выхода, т.е. энергия, необходимая для удаления электрона из металла. В 1915 году Милликен экспериментально исследовал зависимость максимальной энергии электронов, испускаемых металлом при фотоэффекте, от частоты падающего света и подтвердил уравнение Эйнштейна.

Энергия фотона. Фотон обладает определенной порцией энергии $h\nu$. Согласно теории относительности энергия всегда связана с массой соотношением $E = mc^2$. Так как энергия фотона равна $h\nu$, то, следовательно, его масса m получается равной

$$m = \frac{h\nu}{c^2}. \qquad (5.1.3)$$

Фотон не существует в состоянии покоя и при рождении сразу приобретает скорость света c. Масса, определяемая приведенной выше формулой, – это масса движущегося фотона.

Импульс фотона. По известной массе и скорости фотона можно найти его импульс

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \qquad (5.1.4)$$

где $\lambda = c/\nu$ – длина волны фотона. Направлен импульс фотона по световому лучу. Чем больше частота, тем больше энергия и импульс фотона и тем отчетливее выражены корпускулярные свойства света.

Гипотеза де Бройля о волновых свойствах частиц. Де Бройль выдвинул гипотезу, согласно которой электрон и любые другие частицы должны иметь волновые свойства наряду с корпускулярными. Предположив, что с движением частиц связано распространение волн, де Бройль сумел найти длину этих волн. Для этого он распространил на все частицы ту связь между длиной волны и импульсом, которая была установлена для фотонов. Согласно де Бройлю, длина волны, связанной с движущейся частицей, импульс которой $\vec{p}$, равна

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{mv}, \qquad (5.1.5)$$

где v – скорость частицы, m – ее масса. После открытия дифракции и интерференции электронов в науку вошла идея о так называемом *корпускулярно-волновом дуализме*.

Сочетание волновых и корпускулярных свойств оказалось присущим любым материальным объектам.

Дифракция электронов. К 20-м годам XX века накопилось достаточно экспериментальных данных, свидетельствующих о том, что электронам присущи волновые свойства. Впервые дифракция электронов при отражении от монокристаллов наблюдалась в 1927 году, а несколько позже – при прохождении пучка электронов сквозь золотую фольгу. Таким образом, наличие волновых свойств у электронов получило неоспоримое экспериментальное подтверждение.

Давление света. Опыты Лебедева по измерению давления света. Важное свойство света состоит в том, что он оказывает давление на непрозрачные тела. Из электромагнитной теории Максвелла следует, что сила давления света определяется формулой

$$F=(1+R)\cdot\frac{N}{c}\,, \tag{5.1.6}$$

где N – мощность света, c – скорость света, R – коэффициент отражения, т.е. отношение интенсивности отраженного света к интенсивности падающего. В квантовой оптике световое давление объясняется тем, что у каждого фотона имеется импульс $p=h\nu/c$, который при столкновении фотона с телом передается атомам или молекулам вещества. Численные оценки по формуле (5.1.6) показывают, что обычно сила светового давления чрезвычайно мала. Поэтому экспериментальное обнаружение сил светового давления представляет собой трудную задачу. Эту задачу решил Лебедев в 1898 году. В его опытах свет мощной дуговой лампы направлялся на легкий каркас с укрепленными на нем тонкими «крылышками» – светлыми и темными дисками из платиновой фольги толщиной от 0,01 до 0,1 мм. Диски располагались симметрично относительно оси, вокруг которой каркас, подвешенный на тонкой стеклянной нити, мог поворачиваться. Система помещалась в сосуд, из которого был выкачан воздух. Свет, падая на светлые и затемненные диски, оказывал на них различное давление, вызывая закручивание нити. Лебедев измерял мощность падающего светового пучка и угловое отклонение каркаса. В результате опытов он установил, что

1) падающий пучок света производит давление как на поглощающие, так и на отражающие поверхности;
2) сила давления света прямо пропорциональна мощности падающего пучка;
3) наблюдаемая сила давления света количественно равна силе, определяемой формулой (5.1.6).

Таким образом, существование сил светового давления было доказано экспериментально.

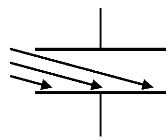
Примеры решения задач

Пример 1. Катод фотоэлемента облучается светом с длиной волны $\lambda=0{,}35$ мкм. Какая энергия E передана выбитым из катода электронам, если в цепи фотоэлемента протек заряд $q = 2 \cdot 10^{-12}$ Кл? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.

Решение. Величина протекшего в цепи заряда равна $q = en$, где n – число выбитых из катода электронов. Отсюда $n = q/e$. Энергия одного светового кванта с длиной волны λ равна hc/λ. Следовательно, электронам передана энергия nhc/λ. Таким образом, $E = \dfrac{qhc}{\lambda e} \approx 7 \cdot 10^{-12}$ Дж.

Ответ. $E = \dfrac{qhc}{\lambda e} \approx 7 \cdot 10^{-12}$ Дж.

Пример 2. Какой максимальный заряд q может быть накоплен на конденсаторе емкостью $C = 2 \cdot 10^{-11}$ Ф, одна из обкладок которого облучается светом с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм? Работа выхода электрона из металла обкладки $A = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.



Решение. Покидающие облучаемую обкладку конденсатора электроны уносят с нее отрицательный заряд, в результате чего эта обкладка заряжается положительно, а противоположная – отрицательно. Между обкладками возникает разность потенциалов $U = q/C$, где q – величина заряда на каждой из обкладок. Электрическое поле конденсатора стремится вернуть электроны на положительно заряженную обкладку. Если потенциальная энергия электронов eU в окрестности отрицательно заряженной обкладки станет равной их начальной кинетической энергии, то все электроны, покидающие облучаемую обкладку, будут возвращаться на нее и зарядка конденсатора прекратится. Таким образом, условие достижения максимального напряжения между обкладками имеет вид: $\dfrac{mv^2}{2} = eU$. Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта, энергия светового кванта расходуется на преодоление работы выхода и на сообщение выбитому из обкладки электрону кинетической энергии $\dfrac{hc}{\lambda} = A + \dfrac{mv^2}{2}$, откуда $\dfrac{hc}{\lambda} - A = \dfrac{mv^2}{2}$, или $\dfrac{hc}{\lambda} - A = e\dfrac{q}{C}$. Следовательно, $q = \dfrac{C}{e}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right) \approx 1{,}2 \cdot 10^{-11}$ Кл.

Ответ. $q = \dfrac{C}{e}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right) \approx 1{,}2 \cdot 10^{-11}$ Кл.

Пример 3. Проводя облучение катода фотоэлемента пучком света мощностью N_1 с длиной волны λ_1, измерили величину тока насыщения. Затем катод фотоэлемента начали облучать светом с длиной волны λ_2. Какой должна быть мощность N_2 падающего на катод света, чтобы ток насыщения достиг той же величины, что и в первом случае? Квантовый выход фотоэффекта, т.е. отношение числа вырванных из катода электронов к числу падающих на его поверхность фотонов, в первом случае равен η_1, а во втором случае равен η_2.

Решение. Для мощности светового излучения справедливо выражение $N = \dfrac{hc}{\lambda} n$, где h – постоянная Планка, c – скорость света, n – число фотонов, падающих на катод в единицу времени. Ток насыщения равен $I_{нас} = e\eta n$, где e – модуль заряда электрона. Следовательно, $N = \dfrac{hc}{\lambda e\eta} I_{нас}$. Из равенства тока насыщения в первом и во втором случае вытекает, что $N_2 = N_1 \dfrac{\lambda_1\eta_1}{\lambda_2\eta_2}$.

Ответ. $N_2 = N_1 \dfrac{\lambda_1\eta_1}{\lambda_2\eta_2}$.

Пример 4. Космический корабль, находящийся в состоянии покоя, обстреливает неприятеля из лазерной пушки, которая в течение одного залпа испускает $n = 10$ коротких световых импульсов с энергией $E = 3$ кДж каждый. Какую скорость v приобретет корабль после залпа пушки, если масса корабля $M = 10$ т? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Влиянием всех небесных тел пренебречь.

Решение. Импульс одного фотона равен $p_1 = \dfrac{E_1}{c}$, где $E_1 = h\nu$ – энергия фотона. Импульс фотонов, испущенных за время залпа в одном направлении, выражается как $p = \dfrac{nE}{c}$. По закону сохранения импульса такой же по величине импульс приобретает корабль. Следовательно, скорость корабля после залпа $v = \dfrac{nE}{Mc} = 10^{-8}$ м/с.

Ответ. $v = 10^{-8}$ м/с.

Пример 5. Пучок электронов, пройдя узкую щель, дал на фотопластинке такую же дифракционную картину, как и монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 55$ нм. Найти скорость v электронов в пучке. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Решение. Пучок электронов даст на фотопластинке такую же дифракционную картину, что и электромагнитное излучение, если дебройлевская длина волны электронов будет совпадать с длиной волны электромагнитного излучения. Используя для импульса электрона классическое выражение $p = mv$, имеем $\lambda = \dfrac{h}{mv}$, откуда $v = \dfrac{h}{m\lambda}$. Подстановка числовых значений дает $v \approx 13{,}2$ км/с. Поскольку скорость электронов в пучке мала по сравнению со скоростью света, классическое выражение для импульса электронов является достаточно точным.

Ответ. $v = \dfrac{h}{m\lambda} \approx 13{,}3$ км/с.

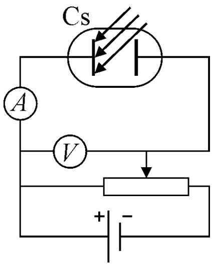
Задачи

1. Катод фотоэлемента облучается светом с длиной волны $\lambda = 0{,}35$ мкм. Какова может быть максимальная величина тока фотоэлемента I, если поглощаемая световая мощность составляет $N = 2$ мВт? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.

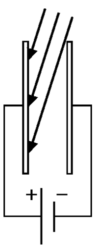
2. Кристалл рубина облучается вспышкой света длительностью $\tau = 10^{-3}$ с и мощностью $N = 200$ кВт. Длина волны света $\lambda = 0{,}7$ мкм, кристалл поглощает $\eta = 10\%$ энергии излучения. Вычислить количество квантов света n, поглощенных кристаллом. Скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

3. Уединенный изолированный металлический шарик радиуса $r = 0{,}5$ см, находящийся в вакууме, освещают ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 250$ нм, которая меньше, чем длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для данного металла. Каково максимальное количество электронов $n_{\max}$, которые могут покинуть шарик после того, как его дополнительно осветят излучением с длиной волны $\lambda_2 = 200$ нм? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

4. На металлическую пластинку сквозь сетку, параллельную пластинке, падает свет с длиной волны $\lambda = 0{,}4$ мкм. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов между пластинкой и сеткой $U = 0{,}95$ В. Определить длину волны $\lambda_{\max}$, соответствующую красной границе фотоэффекта. Скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.



5. Измерения зависимости напряжения отсечки фототока (т.е. напряжения, при котором фототок прекращается) от длины волны света, падающего на цезиевую пластину Cs, производятся по схеме, изображенной на рисунке. При освещении светом с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}4$ мкм напряжение отсечки составило $U_1 = 1{,}19$ В, при $\lambda_2 = 0{,}5$ мкм $U_2 = 0{,}57$ В. Определить по результатам этого опыта длину волны λ_{max}, соответствующую красной границе фотоэффекта для цезия.



6. Две параллельные друг другу металлические пластины, расстояние между которыми $d = 1$ см много меньше их размеров, подключены к источнику с напряжением $U = 12{,}5$ В. Сначала положительно заряженную пластину облучают светом частотой $\nu_1 = 7 \cdot 10^{14}$ Гц, а затем – светом частотой $\nu_2 = 4 \cdot 10^{14}$ Гц. На какую величину Δl изменяется минимальное расстояние, на которое электроны могут приблизиться к поверхности отрицательно заряженной пластины, при изменении частоты света от ν_1 до ν_2? Частота света, соответствующая красной границе фотоэффекта, меньше ν_2. Модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

7. Космический корабль, находящийся в состоянии покоя, проводит сеанс связи с Землей, направляя в ее сторону лазерный луч. На какое расстояние S от первоначального положения сместится корабль к окончанию сеанса связи, если мощность лазерного луча $N = 60$ Вт, масса корабля $M = 10$ т, продолжительность сеанса $\tau = 1$ ч? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Влиянием всех небесных тел пренебречь.

8. Найти дебройлевскую длину волны λ электрона, ускоренного из состояния покоя разностью потенциалов $U = 3$ МВ. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

5.2. Физика атома

Теоретический материал

Опыты Резерфорда по рассеянию α-частиц. Планетарная модель атома. К началу XX века было убедительно показано, что электрон является одной из составных частиц любого вещества. Из классической электромагнитной теории следовало, что размеры электрона не превышают 10^{-15} м (по современным данным – не более 10^{-22} м). Кинетическая теория XIX столетия показала, что размеры атомов имеют порядок $10^{-10}...10^{-9}$ м. Учитывая это, Дж. Дж. Томсон в 1903 году предложил модель, согласно которой атом содержит электроны, которые вкраплены в положительно заряженную среду, заполняющую весь объем атома, масса которой составляет бóльшую часть его массы, а ее заряд нейтрализует суммарный заряд электронов.

Однако уже в 1911 году Эрнест Резерфорд опытным путем доказал, что эта модель несостоятельна. Им были проведены эксперименты по рассеянию α-лучей (α-лучи представляют собой поток α-*частиц*, т.е. дважды ионизованных атомов гелия, имеющих положительный заряд, равный $+2e$ и возникающих в результате *радиоактивного распада* (см. ниже)). Э. Резерфорд с помощью свинцового коллиматора выделял узкий пучок α-лучей и пропускал их через очень тонкую золотую фольгу. Регистрировались α-частицы по вспышкам света на детекторе из сернистого цинка. Было установлено, что почти все α-частицы проходили сквозь фольгу, сохраняя прежнее направление движения или отклоняясь от него на очень малые углы. Однако некоторые α-частицы отклонялись на углы, превышающие $90°$, т.е. они фактически двигались в обратном направлении. Если бы была справедлива модель атома Томсона, то такие события были бы невозможны в принципе: α-частицы должны были бы свободно проходить сквозь атомы золота и только некоторые из них могли слегка отклониться в кулоновском поле электронов. Результатом опытов Резерфорда явилась *ядерная модель атома*: в центре атома находится ядро, имеющее очень малый объем, в котором сосредоточен весь положительный заряд атома; остальную часть атома занимает облако электронов. Линейные размеры ядра составляют $\sim 10^{-14} - 10^{-15}$ м. Практически вся масса атома сосредоточена в ядре.

В этой модели опыты Резерфорда получили простое объяснение. Проходя сквозь электронную оболочку атома, α-частицы не должны испытывать заметное отклонение, поскольку масса электрона намного меньше массы α-частицы, а отрицательный заряд всех электронов распределен по всему объему атома. Однако те немногочисленные частицы, которые пролетают вблизи ядра, испытывают резкие отклонения. В этих опытах была также подтверждена справедливость закона Кулона для очень малых расстояний между зарядами.

Электроны атома, чтобы не упасть на ядро под действием кулоновского притяжения, должны двигаться вокруг ядра по орбитам, подобно планетам, поскольку кулоновские и гравитационные силы одинаково зависят от расстояния. Поэтому модель атома Резерфорда называют *планетарной*. Однако вращающиеся вокруг ядра электроны, согласно классической электродинамике, должны испускать электромагнитные волны, теряя при этом энергию и постепенно приближаясь к ядру, т.е. атом не может быть устойчивым. Спектр излучаемых частот при этом должен быть непрерывным.

Еще в середине XIX века было установлено, что свечение различных газов (в пламени и в электрическом разряде) содержит участки спектра с четко выраженными дискретными линиями. Для частот ν_{mn} линейчатого спектра водорода была получена формула Бальмера–Ридберга

$$\nu_{mn} = R_{\text{H}}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{5.2.1}$$

где $R_{\text{H}} = 3{,}293 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ – постоянная Ридберга, m и n – целые числа, причем $m = n+1$, $n+2$ и т. д.

Квантовые постулаты Бора. Для объяснения наблюдаемых свойств атомов Нильс Бор в 1913 году выдвинул два положения, называемые *постулатами Бора*:

1) В атоме существуют дискретные стационарные состояния, каждому из которых соответствует определенная энергия E_n. При движении вокруг ядра электроны атома, находящегося в стационарном состоянии, не излучают электромагнитные волны.
2) При переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон. Энергия фотона равна разности энергий в двух его стационарных состояниях: $h\nu_{mn} = E_m - E_n$.

Испускание и поглощение энергии атомом. Если $E_m > E_n$, то происходит излучение фотона, если же $E_m < E_n$, то – поглощение фотона. Частота фотона ν_{mn}, который испускается (поглощается) атомом, равна $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/h$. Атом, находящийся в состоянии с наименьшей энергией, не может испустить фотон. Такое состояние атома называется основным, остальные состояния (с большей энергией) называются возбужденными.

Для определения уровней энергии атома водорода Н. Бор предложил гипотезу о том, что в планетарной модели стационарными являются лишь те состояния, при которых момент импульса электрона, движущегося по круговой орбите, принимает дискретные значения:

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}, \tag{5.2.2}$$

где v – скорость электрона, r – радиус орбиты, n – натуральное число. Эта формула называется правилом квантования Бора для круговых орбит. Найденное с ее помощью выражение для частоты излучения полностью совпадает с (5.2.1).

Развитая впоследствии квантовая механика естественным образом объясняет постулаты Бора и полностью описывает движение микрочастиц.

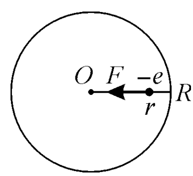
Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ. Спектр излучения и поглощения вещества в газообразном состоянии всегда содержит участок, состоящий из узких дискретных линий, который называется *линейчатым спектром*, и участок, где распределение частот непрерывное (*непрерывный спектр*). Линейчатый спектр у каждого химического элемента и у каждого сорта молекул индивидуален и отражает структуру уровней энергии именно данного вещества. Это обстоятельство используется для определения качественного и количественного состава вещества, т.е. для так называемого *спектрального анализа*. Для получения спектров излучения вещество возбуждают с помощью искрового, дугового или радиочастотного разряда, либо облучением светом от дополнительных источников – газоразрядных ламп, лазеров и т.д. Спектры поглощения получают, пропуская белый свет через исследуемое вещество. В этом случае на сплошном спектре появляются темные линии, обусловленные поглощением света в данном участке спектра.

Спектральный анализ отличается быстротой получения результатов и высокой чувствительностью. Использование лазеров позволяет регистрировать даже единичные атомы или молекулы данного сорта.

Примеры решения задач

Пример 1. Согласно модели Дж. Дж. Томсона (1903), атом водорода представляет собой нейтральную систему, состоящую из положительно заряженного шара, внутри которого находится отрицательный точечный заряд – электрон, причем в невозбужденном атоме электрон покоится в центре шара. Предположим, что электрон сместили от центра шара на некоторое расстояние, не превышающее радиуса шара, и предоставили самому себе. Определить период T возникших при этом свободных колебаний электрона, пренебрегая потерями на излучение при его ускоренном движении. Радиус шара принять равным $R = 3 \cdot 10^{-10}$ м, а его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл считать равномерно распределенным по объему. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение. Пусть r – расстояние от центра заряженного шара (точки O) до электрона. На электрон действует сила $F = eE$, направленная к центру шара. Здесь E – напряженность электрического поля в точке, где расположен электрон.



По теореме Гаусса $4\pi r^2 \cdot E = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e}{R^3} r^3$, откуда $E = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$. Следовательно, $F(r) = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$. Уравнение движения электрона под действием этой силы имеет вид $m\ddot{r} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$, или $\ddot{r} + \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3} r = 0$. Отсюда находим круговую частоту колебаний электрона $\omega = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$. Поскольку период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, то $T = \dfrac{4\pi R}{e}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m R} \approx 2 \cdot 10^{-15}$ с.

Ответ. $T \approx 2 \cdot 10^{-15}$ с.

Пример 2. Определить радиус первой стационарной орбиты атома водорода. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение. Воспользовавшись формулой (5.2.2), найдем скорость v_n электрона, находящегося в атоме водорода на стационарной круговой орбите радиуса r_n. Имеем $v_n = \dfrac{nh}{2\pi m_e r_n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Центростремительное ускорение v^2 / r_n электрона создает действующая на него кулоновская сила $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r_n^2}$. Согласно второму закону Ньютона, $\dfrac{m_e v_n^2}{r_n} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r_n^2}$. Подставив в последнее выражение величину $v_n = \dfrac{nh}{2\pi m_e r_n}$, получим $r_n = \dfrac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e e^2} \cdot n^2 \approx 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м.

Ответ. $r_n = \dfrac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e e^2} \cdot n^2 \approx 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м.

Пример 3. Получить соотношение, определяющее разность энергий электронов, находящихся на n-й и k-й стационарных орбитах атома водорода ($n > k$). Постоянная Планка h, масса электрона m_e, модуль его заряда e, электрическая постоянная ε_0.

Решение. Энергия E_j электрона на j-й стационарной орбите равна сумме его кинетической $\dfrac{m_e v_j^2}{2}$ и потенциальной $\left(-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r_j} \right)$ энергий. Используя найденные в предыдущем примере значения $r_j = \dfrac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e e^2} \cdot j^2$ и $v_j = \dfrac{jh}{2\pi m_e r_j}$, получим формулу для энергии электрона: $E_j = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \dfrac{1}{j^2}$. Искомая разность энергий электронов, находящихся на n-й и k-й стационарных орбитах, имеет вид $E_n - E_k = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{k^2} \right)$.

Ответ. $E_n - E_k = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{k^2} \right)$.

Замечание. Энергия, которую нужно сообщить находящемуся на первой стационарной орбите электрону для того, чтобы он удалился от ядра на очень большое расстояние, называется энергией ионизации. Для атома водорода ее величину, равную

$\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \approx 21{,}7 \cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 13{,}6$ эВ, легко получить, положив в формуле для $E_n - E_k$ $k = 1$ и $n = \infty$.

Пример 4. Найти наибольшую и наименьшую длины волн в серии Пашена спектра излучения атома водорода. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Решение. Согласно постулатам Бора, при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон, энергия которого равна разности энергий атома в двух его стационарных состояниях. Выражение для разности $E_n - E_k$ энергий электронов, находящихся на n-й и k-й стационарных орбитах атома водорода, а именно $E_n - E_k = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{k^2} \right)$, было найдено в предыдущем примере. Из этой формулы можно получить соотношение

$$\frac{1}{\lambda_{nk}} = \frac{\nu_{nk}}{c} = \frac{E_n - E_k}{hc} = -\frac{R_{\text{H}}}{c} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

в которое входят длина испускаемой атомом электромагнитной волны λ_{nk} и постоянная Ридберга $R_{\text{H}} = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \approx 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

Спектральные линии излучения принято объединять в следующие группы:

серия Лаймана ($k = 1$): $\dfrac{1}{\lambda_{n1}} = \dfrac{\nu_{n1}}{c} = -\dfrac{R_{\text{H}}}{c}\left(\dfrac{1}{n^2} - 1 \right)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$;

серия Бальмера ($k = 2$): $\dfrac{1}{\lambda_{n2}} = \dfrac{\nu_{n2}}{c} = -\dfrac{R_{\text{H}}}{c}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2^2} \right)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$;

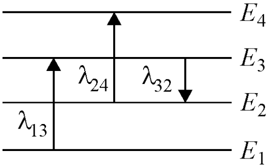
серия Пашена ($k = 3$): $\dfrac{1}{\lambda_{n3}} = \dfrac{\nu_{n3}}{c} = -\dfrac{R_{\text{H}}}{c}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{3^2} \right)$, $n = 4, 5, 6, \ldots$;

серия Брэккета ($k = 4$): $\dfrac{1}{\lambda_{n4}} = \dfrac{\nu_{n4}}{c} = -\dfrac{R_{\text{H}}}{c}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{4^2} \right)$, $n = 5, 6, 7, \ldots$;

серия Пфунда ($k = 5$): $\dfrac{1}{\lambda_{n5}} = \dfrac{\nu_{n5}}{c} = -\dfrac{R_{\text{H}}}{c}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{5^2} \right)$, $n = 6, 7, 8, \ldots$.

Для серии Пашена максимальная и минимальная длины волн соответственно равны $\lambda_{\max} = -\dfrac{c}{R_{\text{H}}} \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4^2} - \dfrac{1}{3^2} \right)} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-6}$ м и $\lambda_{\min} \approx -\dfrac{c}{R_{\text{H}}} \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{3^2} \right)} = 8{,}2 \cdot 10^{-9}$ м.

Ответ. $\lambda_{max} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-6}$ м; $\lambda_{min} \approx 8{,}2 \cdot 10^{-9}$ м.



Пример 5. На рисунке приведена схема энергетических уровней атома и указаны длины волн фотонов, излучаемых и поглощаемых при переходах с одного уровня на другой. Чему равна длина волны λ_{41} для фотонов, излучаемых при переходе с уровня E_4 на уровень E_1, если $\lambda_{13} = 400$ нм, $\lambda_{24} = 500$ нм, $\lambda_{32} = 600$ нм?

Решение. В предыдущем примере было показано, что $\lambda_{nk} = \dfrac{c}{\nu_{nk}} = \dfrac{hc}{E_n - E_k}$. Здесь λ_{nk} – длина испускаемой атомом электромагнитной волны, $E_n - E_k$ – разность энергий электронов, находящихся на n-й и k-й стационарных орбитах, c – скорость света. Искомая длина волны $\lambda_{41} = \dfrac{hc}{E_4 - E_1}$. По условию $E_3 - E_1 = \dfrac{hc}{\lambda_{13}}$, $E_4 - E_2 = \dfrac{hc}{\lambda_{24}}$, $E_3 - E_2 = \dfrac{hc}{\lambda_{32}}$. Из приведенной на рисунке структуры энергетических уровней следует, что $E_4 - E_1 = (E_4 - E_2) + (E_3 - E_1) - (E_3 - E_2) = hc\left(\dfrac{1}{\lambda_{13}} + \dfrac{1}{\lambda_{24}} - \dfrac{1}{\lambda_{32}}\right)$. Отсюда находим, что $\lambda_{41} = \dfrac{\lambda_{13}\lambda_{24}\lambda_{32}}{\lambda_{24}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{32} - \lambda_{13}\lambda_{24}} \approx 353$ нм.

Ответ. $\lambda_{41} = \dfrac{\lambda_{13}\lambda_{24}\lambda_{32}}{\lambda_{24}\lambda_{32} + \lambda_{13}\lambda_{32} - \lambda_{13}\lambda_{24}} \approx 353$ нм.

Задачи

1. Получите формулу для частоты обращения электрона ν_n, находящегося на n-й круговой орбите атома водорода. Вычислите ν_n для $n = 1$. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2. Во сколько раз скорость электрона на первой стационарной орбите атома водорода, отличается от скорости электрона, находящегося на третьей стационарной орбите?

3. Атом водорода, находясь в основном состоянии, возбуждается излучением, частота которого равна $\nu = 2{,}97 \cdot 10^{15}$ Гц. Определить, сколько спектральных линий серии Лаймана можно при этом наблюдать. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса

электрона $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

4. Определить отношение минимальных энергий фотонов в серии Лаймана и в серии Бальмера спектра атома водорода.

5. Определить отношение минимальной и максимальной энергий фотонов в серии Брэккета спектра атома водорода.

6. Определить энергию фотона E_0, способного вырвать электрон с третьей орбиты атома водорода и сообщить ему кинетическую энергию, равную $\tilde{E} = 8 \cdot 10^{-19}$ Дж. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 21{,}7 \cdot 10^{-19}$ Дж.

7. Атом водорода находится в невозбужденном состоянии. Определите диапазон длин волн возбуждающего атом электромагнитного излучения, при котором радиус орбиты электрона увеличивается в 16 раз. Постоянная Ридберга $R_{\text{H}} = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

8. От газоразрядной трубки, заполненной атомарным водородом, на дифракционную решетку нормально ее поверхности падает пучок света. Спектральная линия от перехода электрона в атоме водорода с четвертой на вторую стационарную орбиту наблюдается в $m = 7$ порядке спектра дифракционной решетки под углом $\varphi = 30°$. Определите период d этой дифракционной решетки. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, энергия ионизации атома водорода $E_i = 21{,}7 \cdot 10^{-19}$ Дж.

5.3. Физика атомного ядра

Теоретический материал

Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц. Для *регистрации* радиоактивных излучений используются приборы, основанные на ионизирующем или фотохимическом действии этих излучений.

Камера Вильсона – прибор для наблюдения следов (треков) заряженных частиц. Действие основано на конденсации пересыщенного пара на ионах, образующихся вдоль траектории заряженной частицы. Пересыщенный пар получается быстрым сжатием насыщенного пара воды или спирта, находящегося в стеклянном цилиндре. Частицы могут либо испускаться источником, помещенным внутри камеры, либо попадать в нее извне. Треки фотографируются несколькими фотоаппаратами для получения стереоскопического изображения. Природу и свойства частиц можно определить по длине ее пробега и импульсу, измеряемому по искривлению траекторий частиц в магнитном поле, в которое помещается камера Вильсона.

Пузырьковая камера – прибор для регистрации следов (треков) заряженных частиц высоких энергий. Действие основано на вскипании перегретой жидкости вблизи траектории частицы. Очень чистую жидкость можно нагреть выше точки кипения, но такая жидкость нестабильна. Прохождение заряженной частицы через перегретую жидкость приводит к образованию вдоль следа частицы "зародышевых" центров кипения, которые возникают вследствие ионизации атомов или молекул, входящих в состав жидкости. За время порядка миллисекунды образующиеся пузырьки достигают размеров порядка 50–300 мкм и могут быть сфотографированы.

Счетчик Гейгера – газоразрядный прибор, срабатывающий при прохождении через его рабочий объем заряженных частиц. Счетчик состоит из стеклянной трубки, покрытой внутри металлическим слоем (катод), и тонкой металлической нити, идущей вдоль оси трубки (анод). Трубка заполняется газом, например аргоном. К электродам прикладывается напряжение в несколько сотен вольт. Заряженная частица, пролетая через газ, вырывает из атомов электроны. Электрическое поле между анодом и катодом ускоряет свободные электроны до энергий, при которых они способны ионизировать атомы. Возникает лавина ионов и электронов, и ток между электродами возрастает, что и регистрируется электронной схемой. Величина сигнала (импульса тока) не зависит от энергии частиц, поэтому прибор работает как *счетчик* заряженных частиц.

Фотоэмульсионный метод основан на применении толстослойных фоточувствительных покрытий. Фотоэмульсия содержит большое количество микроскопических кристалликов бромида серебра. Быстрая заряженная частица, проходя через кристаллики, отрывает электроны от отдельных атомов брома. Цепочка таких кристалликов образует скрытое изображение. При проявлении восстанавливается металлическое серебро и трек частицы становится видимым. По длине и толщине трека можно оценить энергию и массу частицы.

Состав ядра атома. Изотопы. *Ядро атома* любого химического элемента состоит из Z положительно заряженных *протонов* и N не имеющих электрического заряда *нейтронов*. Заряд протона по абсолютной величине равен заряду электрона. Протон и нейтрон являются двумя зарядовыми состояниями ядерной частицы, которая называется *нуклоном*. Количество протонов в ядре Z совпадает с атомным номером соответствующего химического элемента в периодической системе Менделеева. Заряд ядра равен Ze.

Массовым числом ядра A называется общее число нуклонов в ядре: $A = Z + N$. Для обозначения ядра данного химического элемента X используется символ $^{A}_{Z}\mathrm{X}$. Ядра с одним и тем же зарядом Ze, но с разными A, называются *изотопами*. Изотопы ядер данного химического элемента отличаются числом нейтронов N. Примеры: изотопы водорода $^{1}_{1}\mathrm{H}$, $^{2}_{1}\mathrm{H}$ (или $^{2}_{1}\mathrm{D}$ – дейтерий), $^{3}_{1}\mathrm{H}$ (или $^{3}_{1}\mathrm{T}$ – тритий); изотопы урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$, $^{238}_{92}\mathrm{U}$.

Масса атома практически совпадает с массой его ядра, поскольку масса электрона m_e составляет всего $1/1836$ от массы протона m_p и $1/1840$ от массы нейтрона m_n (нейтрон несколько тяжелее протона). В атомной и ядерной физике широко используется *атомная единица массы* – а. е. м., которая равна $1/12$ массы ядра углерода $^{12}_{6}\mathrm{C}$, что составляет $1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг.

Нуклоны, т.е. протоны и нейтроны, в ядре связаны между собой ядерными силами, которые намного превышают силу кулоновского отталкивания между протонами (отсюда название – сильные взаимодействия). Ядерные силы действуют только на расстояниях порядка 10^{-15} м.

В атомной и ядерной физике для измерения энергии широко используется внесистемная единица электрон-вольт (эВ); $1\ \text{эВ} = 1{,}60201 \cdot 10^{-19}$ Дж. В ядерной физике энергия часто измеряется также в мегаэлектрон-вольтах (МэВ); $1\ \text{МэВ} = 10^{6}$ эВ.

Энергия связи атомного ядра $\Delta E_{\text{св}}$ по абсолютной величине равна работе, которую надо совершить для расщепления ядра на составляющие его нуклоны без сообщения им кинетической энергии. Из закона сохранения энергии следует, что при образовании ядра из свободных нуклонов должна выделиться энергия, равная $\Delta E_{\text{св}}$. Удельной энергией связи ядра $\Delta\varepsilon_{\text{св}}$ называется величина $\Delta E_{\text{св}} / A$, равная средней энергии связи, приходящейся на один нуклон.

Мерой энергии связи атомного ядра является *дефект массы*. Дефектом массы Δm называется разность между суммарной массой всех нуклонов ядра в свободном состоянии и массой ядра $M_{\text{я}}$:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}. \qquad (5.3.1)$$

Согласно теории относительности, энергия связи данного ядра и его дефект массы связаны соотношением $\Delta E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2$.

Понятие о ядерных реакциях. *Ядерными реакциями* называются превращения атомных ядер, вызванные их взаимодействием с различными частицами или друг с другом. В большинстве случаев в ядерных реакциях участвуют два ядра и две частицы. Символическая запись ядерной реакции: $\mathrm{A} + \mathrm{a} \to \mathrm{B} + \mathrm{b}$, где A и B – исходное и конечное ядра, a и b – исходная и конечная частицы в реакции. Исторически первой была наблюдена ядерная реакция превращения азота под действием α-частиц в кислород: ${}^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\to{}^{17}_{8}\mathrm{O}+{}^{1}_{1}\mathrm{p}$. При всех ядерных реакциях соблюдаются законы сохранения электрического заряда и числа нуклонов.

Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений и их свойства. *Радиоактивность* – способность некоторых атомных ядер самопроизвольно превращаться в другие ядра с испусканием частиц. *Естественная* радиоактивность, как правило, наблюдается у тяжелых ядер. Радиоактивное превращение сопровождается испусканием α-частиц, β-частиц, а также очень коротковолнового электромагнитного излучения (γ-излучения). Состав α-, β- и γ-излучений установлен по их отклонению в магнитном поле. Известно, что α-лучи представляют собой поток ядер гелия, β-лучи – поток быстрых электронов. Превращения атомных ядер, которые сопровождаются испусканием α- и β-частиц, называются соответственно α- и β-распадом.

Большинство встречающихся в природе ядер устойчиво. Однако при значениях массовых чисел вблизи $A = 210$ ядра перестают быть устойчивыми. Это в первую очередь объясняется близкодействующим характером ядерных сил: силы ядерного притяжения действуют только между данным нуклоном и его непосредственными соседями. Вместе с тем, так как кулоновские силы дальнодействующие, между данным протоном и всеми остальными протонами в ядре действует кулоновское отталкивание. Для ядер с достаточно большими атомными номерами кулоновское отталкивание может превысить ядерное притяжение. Действительно, не существует *устойчивых* ядер с $Z > 83$.

Закон радиоактивного распада. Резерфорд опытным путем установил характер зависимости активности (числа распадов в секунду) радиоактивных веществ от времени – *основной закон радиоактивного распада*. Согласно этому закону, для каждого радиоактивного вещества существует определенный интервал времени, на протяжении которого активность убывает в два раза. Этот интервал получил название периода полураспада. Период полураспада – это время, в течение которого распадается половина наличного числа радиоактивных атомов. Пусть N_0 – число радиоактивных атомов в начальный момент времени, а T – период полураспада. Тогда в соответствии с законом радиоактивного распада число радиоактивных атомов в момент времени t будет равно

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}. \tag{5.3.2}$$

Период полураспада – основная величина, характеризующая скорость радиоактивного распада. Чем меньше период полураспада, тем интенсивнее происходит распад.

Цепные ядерные реакции. Ядра урана и ряда трансурановых элементов способны к реакциям *деления ядра*, при которых ядра, возбужденные захватом нейтрона, распадаются на две части, называемые осколками. При этом возможно высвобождение некоторого количества нейтронов. Деление тяжелого ядра сопровождается выделением огромной энергии. Например, при делении ядер, содержащихся в 1 г урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, выделяется энергия порядка $8 \cdot 10^{10}$ Дж. (Удельная теплота сгорания нефти, равная $4{,}3 \cdot 10^{7}$ Дж/кг, примерно в два миллиона раз меньше). В каждом акте деления, помимо осколков, возникают несколько γ-квантов и в среднем 2,5 нейтрона. Если эти нейтроны вызывают другие акты деления, то возникает самоподдерживающийся процесс *цепной ядерной реакции*. Цепные ядерные реакции используются в ядерных реакторах для получения энергии, а также в ядерном оружии.

Термоядерная реакция. Выделение ядерной энергии возможно также в реакциях синтеза (слияния) легких ядер. Для осуществления такой реакции необходимо преодолеть кулоновские силы отталкивания между ядрами, что возможно при достаточно больших скоростях сталкивающихся частиц. Так, синтез гелия из легкого изотопа водорода происходит при температуре около 10^8 К, а для синтеза гелия из дейтерия и трития по схеме ${}^2_1\mathrm{H}+{}^3_1\mathrm{H}\to{}^4_2\mathrm{He}+{}^1_0\mathrm{n}$ требуются температуры порядка $5\cdot10^7$ К. Поэтому такие реакции называются *термоядерными*. При синтезе 1 г гелия из дейтерия и трития выделяется энергия $4{,}2\cdot10^{11}$ Дж. Управляемые термоядерные реакции представляют большой интерес для энергетики будущего.

Биологическое действие радиоактивных излучений. Защита от радиации. Излучения радиоактивных веществ оказывают сильное воздействие на все живые организмы. Даже слабые излучения способны нанести существенные повреждения живым клеткам и вызвать опасные заболевания (лучевая болезнь). Механизм поражающего действия излучений на биологические объекты заключается в основном в ионизации атомов и молекул, что приводит к изменению их химической активности. В результате облучения в тканях образуются свободные радикалы, подавляющие действие ферментов, происходит разрыв хромосом, увеличивается число мутаций. Наиболее чувствительны к излучениям ядра клеток, особенно тех, которые быстро делятся. Поэтому у человека излучения в первую очередь поражают костный мозг, из-за чего нарушается процесс образования крови.

Степень облучения связана с энергией поглощенного излучения. В СИ единицей поглощенной дозы является грэй (Гр). Доза в 1 Гр означает, что облученному веществу массой 1 кг передана энергия ионизирующего излучения 1 Дж. Так как различные виды излучения вызывают разное воздействие на биологическую ткань, то используется также взвешенная поглощенная доза излучения, называемая эквивалентной дозой. Она получается путем умножения поглощенной дозы на условный безразмерный фактор, принятый Международной комиссией по защите от рентгеновского излучения. С 1979 года в системе СИ используется единица эквивалентной дозы излучения, получившая название зиверт (Зв). Эквивалентная доза равна 1 Зв в случае, если доза поглощенного ионизирующего излучения, умноженная на условный безразмерный фактор, составляет 1 Гр.

***Методы защиты от облучения*:** удаление от источников излучения; ограничение времени пребывания на загрязненной местности или вблизи радиоактивных источников; ограждение радиоактивных источников специальными экранами. К защитным мерам относится также дозиметрический контроль окружающей среды и продуктов питания.

Примеры решения задач

Для решения задач данного раздела потребуются численные значения масс протона $m_p = 1{,}00783$ а.е.м., нейтрона $m_n = 1{,}00867$ а.е.м. (1 а.е.м. ≈ $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг), а также ядер изотопов ряда элементов, приведенные в таблице.

Элемент	Изотоп	Масса (а.е.м.)
Водород	$^{1}_{1}H$	1,00783
	$^{2}_{1}H$	2,01410
Гелий	$^{4}_{2}He$	4,00260
Литий	$^{7}_{3}Li$	7,01601
Бериллий	$^{7}_{4}Be$	7,01693
	$^{8}_{4}Be$	8,00311
	$^{9}_{4}Be$	9,01219
Бор	$^{9}_{5}B$	9,01333
	$^{10}_{5}B$	10,01294
Фтор	$^{19}_{9}F$	18,99840
Калий	$^{41}_{19}K$	40,96184
Кальций	$^{44}_{20}Ca$	43,95549
Кислород	$^{18}_{8}O$	17,99916
Натрий	$^{22}_{11}Na$	21,99444
	$^{23}_{11}Na$	22,98977
Полоний	$^{210}_{84}Po$	209,98297
Углерод	$^{12}_{6}C$	12,00000
Уран	$^{235}_{92}U$	235

Пример 1. Определите энергию связи $\Delta E_{св}$ ядра атома фтора $^{19}_{9}F$.

Решение. Согласно теории относительности, энергия связи ядра $\Delta E_{св}$ и его дефект массы Δm связаны соотношением $\Delta E_{св} = \Delta m \cdot c^2$. Дефект массы рассчитывается по формуле $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_я$. Для ядра $^{19}_{9}F$ имеем $Z = 9$ и $A = 19$. Тогда $\Delta E_{св} = [9 \cdot 1{,}00783 + (19 - 9) \cdot 1{,}00867 - 18{,}99840] \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 2{,}37 \cdot 10^{-11}$ Дж.

Ответ. $\Delta E_{св} = 2{,}37 \cdot 10^{-11}$ Дж.

Пример 2. Какую энергию ΔE надо затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$?

Решение. Энергия отрыва ΔE нейтрона от ядра изотопа ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$ равна энергии его связи с ядром изотопа ${}^{9}_{5}\mathrm{B}$, т.е. $\Delta E = [M_{\text{я}\,{}^{9}_{5}\mathrm{B}} + m_n - M_{\text{я}\,{}^{10}_{5}\mathrm{B}}]c^2 =$

$$= [9{,}01333 + 1{,}00866 - 10{,}01294] \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \approx 1{,}35 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}.$$

Ответ. $\Delta E \approx 1{,}35 \cdot 10^{-12}$ Дж.

Пример 3. Рассчитайте энергию, которая выделяется при ядерной реакции ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \to {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{0}n$.

Решение. Выделяющаяся или поглощающаяся при ядерной реакции энергия равна $\Delta E = \Delta m c^2$, где Δm – разность между суммарной массой частиц, вступающих в ядерную реакцию, и суммарной массой частиц, являющихся ее продуктом. Если $\Delta m > 0$, то при протекании реакции выделяется энергия. В противном случае для осуществления ядерной реакции требуется подвод энергии. Пользуясь таблицей, найдем $\Delta m = (7{,}01601 + 2{,}01410 - 8{,}00311 - 1{,}00867) \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \approx 2{,}933 \cdot 10^{-30}$ кг. В реакции выделяется энергия $\Delta E = \Delta m c^2 = 2{,}933 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \approx 2{,}640 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Ответ. $\Delta E \approx 2{,}640 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Пример 4. При делении неподвижного ядра изотопа ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ образовались осколки с массовыми числами $A_1 = 96$ и $A_2 = 138$, причем общая кинетическая энергия осколков составила $E = 25{,}3 \cdot 10^{-12}$ Дж. Найти кинетические энергии E_1 и E_2 каждого из осколков. Импульсом и кинетической энергией нейтронов, выделившихся в ходе реакции, пренебречь.

Решение. Обозначим через m_1 и m_2 массы образующихся осколков, а через v_1 и v_2 – их скорости. Так как ядро урана перед распадом было неподвижным, а импульсом образующихся нейтронов можно пренебречь, то из закона сохранения импульса следует, что $m_1 v_1 = m_2 v_2$. По закону сохранения энергии $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = E$ (кинетической энергией нейтронов также пренебрегаем). Из этих равенств находим $E_1 \equiv \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{E}{(1 + m_1 / m_2)} \approx 14{,}9 \cdot 10^{-12}$ Дж, $E_2 \equiv \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{E}{(1 + m_2 / m_1)} \approx 10{,}4 \cdot 10^{-12}$ Дж.

Ответ. $E_1 = \frac{E}{(1 + A_1 / A_2)} \approx 14{,}9 \cdot 10^{-12}$ Дж, $E_2 = \frac{E}{(1 + A_2 / A_1)} \approx 10{,}4 \cdot 10^{-12}$ Дж.

Пример 5. Находящееся в однородном магнитном поле с индукцией B ядро покоящегося нейтрального атома испытывает α-распад, в результате которого образуются тяжелый ион нового элемента массой $M = 40$ а.е.м. и α-частица, движущаяся по траектории, находящейся в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Начальная часть этой траектории представляет собой дугу окружности радиуса $R = 10$ см. Считая, что выделившаяся при α-распаде энергия $\Delta E = 1{,}6\cdot 10^{-12}$ Дж целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции, определить модуль индукции магнитного поля. Масса α-частицы $m = 4$ а.е.м., ее заряд $q = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение. Поскольку исходный атом неподвижен, из законов сохранения импульса и энергии следуют равенства $mv_1 = Mv_2$, $\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}=\Delta E$, где v_1 и v_2 – скорости α-частицы и иона после распада. Исключая из этих равенств v_2, находим, что $v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta E\cdot M}{m(M+m)}}$. По второму закону Ньютона уравнение движения α-частицы в магнитном поле под действием силы Лоренца имеет вид $\frac{mv_1^2}{R} = qv_1B$. Отсюда $B = \frac{mv_1}{qR}$. Подставляя в это выражение найденную выше скорость α-частицы, получаем $B = \frac{1}{qR}\sqrt{\frac{2\Delta E\cdot Mm}{M+m}} \approx 4{,}3$ Тл.

Ответ. $B = \frac{1}{qR}\sqrt{\frac{2\Delta E\cdot Mm}{M+m}} \approx 4{,}3$ Тл.

Пример 6. При исследовании радиоактивного вещества за время Δt было зарегистрировано ΔN_1 случаев распада. Спустя время $t_1 \gg \Delta t$ за такое же время Δt было зарегистрировано ΔN_2 случаев распада. Определите по этим данным период полураспада T радиоактивного вещества, если известно, что $T \gg t_1 \gg \Delta t$.

Решение. Согласно закону радиоактивного распада, за время Δt, прошедшее с момента времени $t = 0$, претерпевают распад $\Delta N_1 = N_0 - N_1 = N_0(1-2^{-\frac{\Delta t}{T}})$ радиоактивных атомов. Здесь N_0 – число радиоактивных атомов при $t = 0$. Через время t_1, удовлетворяющее условию $T \gg t_1 \gg \Delta t$, останется $N_0\cdot 2^{-\frac{\Delta t+t_1}{T}} \approx N_0\cdot 2^{-\frac{t_1}{T}}$ не распавшихся радиоактивных атомов. Начиная с этого момента за время Δt счетчик зарегистрирует $\Delta N_2 = N_0\cdot 2^{-\frac{t_1}{T}}(1-2^{-\frac{t}{T}})$ случаев распада. Разделив ΔN_1 на ΔN_2, получаем $\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{N_0(1-2^{-\frac{t}{T}})}{N_0\cdot 2^{-\frac{t_1}{T}}(1-2^{-\frac{t}{T}})} = 2^{\frac{t_1}{T}}$, откуда $T = \frac{\ln 2}{\ln \Delta N_1 - \ln N_2}t_1$.

Ответ. $T = \dfrac{\ln 2}{\ln \Delta N_1 - \ln \Delta N_2} t_1.$

Задачи

1. Определить удельную энергию связи ядра ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$.

2. Определить неизвестный продукт и рассчитать энергию ядерной реакции: ${}^{44}_{20}\mathrm{Ca} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{41}_{19}\mathrm{K} + \mathrm{X}$.

3. Какую минимальную энергию ΔE надо затратить для разделения ядра ${}^{18}_{8}\mathrm{O}$ на две одинаковые части?

4. Пренебрегая кинетическими энергиями и суммарным импульсом бериллия и гелия в ядерной реакции ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}n$, определить кинетические энергии E_C и E_n углерода и нейтрона, считая, что вся выделяющаяся в реакции энергия ΔE практически равна $E_\mathrm{C} + E_n$.

5. Находящееся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5$ Тл ядро покоящегося нейтрального атома испытывает α-распад, в результате которого рождается ион нового элемента массой $M = 50$ а.е.м. Его траектория лежит в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, и представляет собой дугу окружности радиуса $R = 5$ см. Найти выделившуюся при α-распаде энергию ΔE, считая, что она целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Масса α-частицы $m = 4$ а.е.м., ее заряд $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

6. Радиоактивный изотоп ${}^{22}_{11}\mathrm{Na}$ при каждом акте распада излучает один γ-квант с энергией $E_\gamma = 2{,}05 \cdot 10^{-13}$ Дж. Определить энергию E, выделяющуюся за время $t = 45$ мин. при распаде $m = 25$ г этого вещества. Период полураспада изотопа $T = 2{,}6$ года.

7. Определить массу m радиоактивного полония ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$, при распаде которого в течение $t = 3$ ч. образовался гелий ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, занимающий при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па объем $V = 4 \cdot 10^{-6}$ м^3. Период полураспада ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$ равен $T = 138$ сут. Молярная масса гелия $M = 0{,}004$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Считать образующийся гелий идеальным газом.

Часть II. Указания и решения

1. Механика

1.1. Кинематика

Задача 1

Эскалатор поднимает стоящего на нем пассажира в течение $t_1 = 1$ мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается пешком на ту же высоту за $t_2 = 3$ мин. За какое время t_3 пассажир достигнет той же высоты, если будет подниматься пешком по движущемуся вверх эскалатору?

Идея. Примените закон сложения скоростей.

Указание 1. Введите скорости эскалатора и пассажира относительно эскалатора, а затем воспользуйтесь законом сложения скоростей.

Указание 2. Введите длину эскалатора и выразите через нее время t_1, t_2 и t_3.

Указание 3. Исключите из записанных равенств скорости эскалатора и пассажира относительно эскалатора.

Решение. Обозначим через $v_э$ скорость эскалатора, а через $v_п$ – скорость пассажира относительно эскалатора. Тогда скорость пассажира, поднимающегося пешком по движущемуся вверх эскалатору, в неподвижной системе отсчета равна $v_э + v_п$. Пусть L – длина эскалатора. Тогда $t_1 = \dfrac{L}{v_э}$, $t_2 = \dfrac{L}{v_п}$, $t_3 = \dfrac{L}{v_э + v_п}$. Исключая из записанных выражений $v_э$ и $v_п$, получаем $t_3 = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 45$ с.

Ответ. $t_3 = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 45$ с.

Задача 2

Пассажир метрополитена наблюдает отправление поезда. Находясь на платформе у начала первого вагона, он замечает, что с момента отправления поезда этот вагон прошел мимо него за время $\tau_1 = 5$ с. Считая движение поезда равноускоренным, найти, за какое время τ_2 мимо пассажира пройдет второй вагон.

Идея. Примените законы прямолинейного равноускоренного движения.

Указание 1. Введите ускорение поезда и длину одного вагона; воспользуйтесь кинематическим уравнением для перемещения поезда за время τ_1 и τ_2.

Указание 2. Исключите из полученных соотношений ускорение поезда и длину вагона и решите квадратное уравнение.

Решение. Пусть a – ускорение поезда, l – длина одного вагона. Из закона движения поезда следуют соотношения $l=\dfrac{a\tau_1^2}{2}$ (для первого вагона), $2l=\dfrac{a(\tau_1+\tau_2)^2}{2}$ (для первого и второго вагона). Исключая из этих соотношений ускорение поезда, получаем квадратное уравнение относительно τ_2: $\tau_2^2+2\tau_1\tau_2-\tau_1^2=0$, откуда $\tau_2=\tau_1\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$. Отбрасывая отрицательный корень, получаем $\tau_2=\tau_1\left(\sqrt{2}-1\right)\approx 2{,}1$ с.

Ответ. $\tau_2=\tau_1\left(\sqrt{2}-1\right)\approx 2{,}1$ с.

Задача 3

В момент, когда опоздавший пассажир вышел на перрон вокзала, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона уходящего поезда. Желая определить, на сколько он опоздал, пассажир измерил время t_1, за которое мимо него прошел предпоследний вагон, и время t_2, за которое мимо него прошел последний вагон. Оказалось, что $t_1=9$ с, а $t_2=8$ с. Считая, что поезд двигался равноускоренно и длина вагонов одинакова, найти, на какое время τ пассажир опоздал к отходу поезда.

Идея. Примените законы прямолинейного равноускоренного движения.

Указание 1. Запишите выражение для перемещения поезда в момент времени τ, когда пассажир вышел на перрон, а также в моменты времени $\tau+t_1$ и $\tau+t_1+t_2$.

Указание 2. Исключите из полученных соотношений ускорение поезда и длину вагона.

Решение. Пусть l – длина вагона, a – ускорение поезда. В момент, когда пассажир вышел на перрон, перемещение поезда составило величину $x_1=a\tau^2/2$. За время $\tau+t_1$ поезд переместился на расстояние $x_2=a(\tau+t_1)^2/2$. Следовательно, для предпоследнего вагона можно записать: $l=x_2-x_1=\dfrac{a(\tau+t_1)^2}{2}-\dfrac{a\tau^2}{2}$. Аналогично для последнего вагона $l=\dfrac{a(\tau+t_1+t_2)^2}{2}-\dfrac{a(\tau+t_1)^2}{2}=\dfrac{at_2}{2}(2\tau+2t_1+t_2)$. Из этих соотношений вытекает равенство $(\tau+t_1)^2-\tau^2=t_2(2\tau+2t_1+t_2)$. Выражая отсюда τ, получаем $\tau=\dfrac{t_2^2+2t_1t_2-t_1^2}{2(t_1-t_2)}=63{,}5$ с.

Ответ. $\tau=\dfrac{t_2^2+2t_1t_2-t_1^2}{2(t_1-t_2)}=63{,}5$ с.

Задача 4

Беговые дорожки легкоатлетического стадиона состоят из двух прямолинейных участков, соединенных двумя полуокружностями. Ширина дорожки $d=1$ м. Линия старта проведена перпендикулярно прямолинейному участку дорожек и совпадает с линией финиша. Два бегуна, находящиеся на первой (внутренней) и второй дорожке, одновременно принимают старт и пробегают до финиша один круг. Они разгоняются равноускоренно, пока не наберут максимальную скорость $v_0=8$ м/с, одинаковую для обоих бегунов, с которой и пробегают оставшуюся часть дистанции. На сколько отличается время разгона бегунов, если, двигаясь каждый по середине своей дорожки, они финишируют одновременно?

Идея. Примените законы прямолинейного равномерного и равноускоренного движения.

Указание 1. Запишите выражения для перемещений бегунов при их равноускоренном и равномерном движении.

Указание 2. Используйте разность длин дистанций, пройденных бегунами.

Решение. Время, за которое бегун пробегает дистанцию, равно $\tau=t_\text{р}+t_0$, где $t_\text{р}=\dfrac{v_0}{a}$ – время разгона, t_0 – время движения с постоянной скоростью, a – ускорение бегуна. За время разгона бегун пробегает расстояние $S_\text{р}=\dfrac{at_\text{р}^2}{2}=\dfrac{v_0^2}{2a}$. Поэтому $t_0=\dfrac{S-S_\text{р}}{v_0}=\dfrac{S}{v_0}-\dfrac{v_0}{2a}$, где S – длина дистанции. Таким образом, $\tau=\dfrac{v_0}{2a}+\dfrac{S}{v_0}$. По условию задачи $\tau_1=\tau_2$, откуда следует, что $\dfrac{v_0}{2a_1}+\dfrac{S_1}{v_0}=\dfrac{v_0}{2a_2}+\dfrac{S_2}{v_0}$, или $\dfrac{t_\text{р1}}{2}+\dfrac{S_1}{v_0}=\dfrac{t_\text{р2}}{2}+\dfrac{S_2}{v_0}$ (индексы относятся к обоим бегунам). Отсюда $\Delta t=t_\text{р1}-t_\text{р2}=\dfrac{2(S_2-S_1)}{v_0}$. Разность длин дистанции S_2-S_1 равна разности длин окружностей радиусов $R+d$ и R, т.е. $S_2-S_1=2\pi d$. Следовательно, $\Delta t=\dfrac{4\pi d}{v_0}\approx 1{,}57$ с.

О т в е т. $\Delta t = \dfrac{4\pi d}{v_0} \approx 1{,}57$ с.

Задача 5

Пуля, летящая со скоростью $v_0 = 400$ м/с, попадает в земляной вал и проникает в него на глубину $l = 20$ см. Какова скорость v_1 пули в момент, когда она находится на глубине $l_1 = 10$ см? Силу сопротивления, действующую на пулю в земле, считать постоянной.

И д е я. Примените законы прямолинейного равноускоренного движения.

У к а з а н и е. Введите ускорение пули и запишите кинематические уравнения, связывающие начальную и конечную скорости пули, ее ускорение и перемещение (см. пример 3 из раздела 1.1).

Р е ш е н и е. Из кинематического уравнения, связывающего начальную и конечную скорости пули, ее ускорение и перемещение, следует, что $l = \dfrac{v_0^2}{2a}$, $l_1 = \dfrac{v_0^2 - v_1^2}{2a}$. Исключая из этих соотношений ускорение пули a, получаем $v_1 = v_0\sqrt{1 - \dfrac{l_1}{l}} \approx 280$ м/с.

О т в е т. $v_1 = v_0\sqrt{1 - \dfrac{l_1}{l}} \approx 280$ м/с.

Задача 6

Ракета запущена вертикально вверх с поверхности Земли и на участке разгона имела постоянное ускорение $a = 19{,}6$ м/с^2. Какое время t_0 падала ракета с ускорением $g = 9{,}8$ м/с^2 после достижения наибольшей в полете высоты, если на участке разгона движение продолжалось в течение времени $\tau = 1$ мин.?

И д е я. Примените законы прямолинейного равноускоренного движения.

У к а з а н и е 1. Найдите высоту и скорость ракеты в конце участка разгона.

У к а з а н и е 2. Найдите максимальную высоту подъема ракеты.

У к а з а н и е 3. Найдите время падения ракеты с этой высоты.

Р е ш е н и е. На участке разгона ракета набрала высоту $y_1 = \dfrac{a\tau^2}{2}$ и приобрела скорость $v_1 = a\tau$. Перемещение ракеты с момента отключения двигателя до момента достижения ею максимальной высоты $\Delta y = \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{a^2\tau^2}{2g}$. Следовательно, максимальная высота подъема ракеты $h = y_1 + \Delta y = \dfrac{a\tau^2}{2}\left(1 + \dfrac{a}{g}\right)$. Время падения с этой высоты $t_0 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Следовательно, $t_0 = \dfrac{\tau}{g}\sqrt{a(a+g)} = 2{,}45$ мин.

Ответ. $t_0 = \dfrac{\tau}{g}\sqrt{a(a+g)} = 2{,}45$ мин.

Задача 7

Шарик бросают вертикально вверх со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Пролетев расстояние $h = 1{,}05$ м, он упруго ударяется о потолок и падает вниз. Через какое время τ после начала движения шарик упадет на пол, если расстояние от пола до потолка $H = 2{,}25$ м? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Идея. Примените законы прямолинейного равноускоренного движения.

Указание 1. Найдите время t_1 движения шарика от момента броска до момента соударения с потолком.

Указание 2. Найдите время t_2 движения шарика от момента удара о потолок до момента падения на пол.

Решение. Время движения шарика от момента броска до момента соударения с потолком равно $t_1 = \dfrac{v_0 - v_1}{g}$, где скорость v_1 шарика непосредственно перед ударом о потолок $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$. Время движения шарика от момента удара о потолок до момента падения на пол равно $t_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{g}$, где скорость шарика непосредственно перед ударом о пол $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gH}$. Объединяя записанные выражения и учитывая, что $\tau = t_1 + t_2$, получаем $\tau = \dfrac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2(H-h)g}{v_0^2}} - 2\sqrt{1 - \dfrac{2gh}{v_0^2}}\right) = 0{,}8$ с.

Ответ. $\tau = \dfrac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2(H-h)g}{v_0^2}} - 2\sqrt{1 - \dfrac{2gh}{v_0^2}}\right) = 0{,}8$ с.

Задача 8

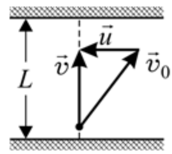
Пловец переплывает реку шириной L по прямой, перпендикулярной берегу, и возвращается обратно, затратив на весь путь время $t_1 = 4$ мин. Проплывая такое же расстояние L вдоль берега реки и возвращаясь обратно, пловец затрачивает время $t_2 = 5$ мин. Во сколько раз α скорость пловца относительно воды превышает скорость течения реки?

Идея. Примените векторный закон сложения скоростей.

Указание 1. Используя векторный закон сложения скоростей, найдите скорость пловца относительно берега (его абсолютную скорость).

Указание 2. Учтите, что абсолютная скорость пловца в первом случае направлена перпендикулярно берегу, а во втором случае – вдоль берега.

Указание 3. Найдите модули скоростей течения и пловца относительно течения.



Решение. Согласно закону сложения скоростей, скорость пловца относительно неподвижной системы отсчета $\vec{v}$ равна векторной сумме его скорости относительно воды $\vec{v}_0$ и скорости течения $\vec{u}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$.

В первом случае, когда пловец пересекает реку по прямой, перпендикулярной берегу, $\vec{v} \perp \vec{u}$ и векторы $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ и $\vec{u}$ образуют прямоугольный треугольник (см. рисунок). Следовательно, в этом случае $v = \sqrt{v_0^2 - u^2}$ и время, за которое пловец переплывает реку туда и обратно, $t_1 = \dfrac{2L}{\sqrt{v_0^2 - u^2}}$. Во втором случае, когда пловец плывет вдоль берега, его скорость в неподвижной системе отсчета равна $v_1 = v_0 + u$ при движении по течению и $v_2 = v_0 - u$ при движении против течения. Следовательно, время, которое пловец затрачивает для того, чтобы проплыть вдоль берега расстояние L и вернуться обратно, $t_2 = \dfrac{L}{v_0 + u} + \dfrac{L}{v_0 - u} = \dfrac{2Lv_0}{v_0^2 - u^2}$. Решая полученную систему уравнений, находим $v_0 = \dfrac{2Lt_2}{t_1^2}$, $u = \dfrac{2L}{t_1^2}\sqrt{t_2^2 - t_1^2}$. Отсюда $\alpha = \dfrac{v_0}{u} = \dfrac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \dfrac{5}{3}$.

Ответ. $\alpha = \dfrac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \dfrac{5}{3}$.

Задача 9

В кабине лифта высотой $H = 2{,}5$ м, движущейся с ускорением $a = 0{,}8$ м/с^2, направленным вниз, с высоты $h = 0{,}5$ м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью v_0 относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

Идея. Примените законы прямолинейного равноускоренного движения.

Указание 1. Введите неподвижную систему отсчета, начало которой совмещено с полом кабины в момент броска шарика, а координатную ось направьте вертикально.

Указание 2. Запишите кинематические уравнения для координат и скоростей шарика и потолка кабины в выбранной неподвижной системе отсчета.

Решение. Пусть в неподвижной системе отсчета, начало которой совмещено с полом кабины в момент броска шарика, а ось OY направлена вертикально вверх, $y_ш$ и v – координата шарика и его скорость, а $y_к$ и u – координата потолка кабины и ее скорость. Предположим, что скорость кабины в момент броска равна u_0 и направлена вверх. Для координат и скоростей шарика и потолка кабины справедливы кинематические уравнения: $y_ш(t) = h + (v_0 + u_0)t - \frac{gt^2}{2}$, $v(t) = v_0 + u_0 - gt$, $y_к(t) = H + u_0 t - \frac{at^2}{2}$, $u(t) = u_0 - at$, причем начало отсчета времени совпадает с моментом броска шарика. Поскольку шарик после броска поднимается точно до потолка кабины, в этот момент времени t_0 справедливы следующие соотношения: $y_ш(t_0) = y_к(t_0)$, $v(t_0) = u(t_0)$. Объединяя записанные выражения, находим $v_0 = \sqrt{2(H-h)(g-a)} = 6$ м/с.

Ответ. $v_0 = \sqrt{2(H-h)(g-a)} = 6$ м/с.

Задача 10

Человек бросает камень через забор высотой $H = 2{,}5$ м. На какое максимальное расстояние S он может отойти от забора, если бросок производится с высоты $h = 2$ м от поверхности земли со скоростью $v_0 = 5$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Идея. Воспользуйтесь законами движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Указание 1. Запишите уравнение траектории камня.

Указание 2. Получите квадратное уравнение относительно горизонтальной координаты камня, при которой высота его полета равна высоте забора.

Решение. Уравнение траектории камня имеет вид $y(x) = h + \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

Полагая $y = H$, получаем квадратное уравнение относительно x, а именно $x^2 - \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}x + \frac{2v_0^2\cos^2\alpha(H-h)}{g} = 0$. Условию задачи удовлетворяет больший по величине корень этого уравнения. Таким образом, искомое расстояние $S = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\left[1+\sqrt{1-\frac{2g(H-h)}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right] \approx 1{,}81$ м.

Ответ. $S = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\left[1+\sqrt{1-\frac{2g(H-h)}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right] \approx 1{,}81$ м.

Задача 11

Дождевальная установка разбрызгивает воду, направляя водяные капли во все стороны с одинаковой скоростью. Какова площадь S орошаемого ею участка, если максимальная высота подъема капель $h = 1$ м? Считать, что капли воды начинают движение непосредственно от поверхности Земли. Сопротивление воздуха не учитывать.

Идея. Воспользуйтесь законами движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Указание 1. Запишите выражения для максимальной высоты подъема и дальности полета тела, брошенного под углом α к горизонту.

Указание 2. Воспользуйтесь тем фактом, что максимальной высоты h достигают капли, вылетевшие вертикально.

Решение. Для решения задачи воспользуемся известными из кинематики криволинейного движения формулами для максимальной высоты подъема и дальности полета тела, брошенного под углом α к горизонту: $H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$, $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Максимальной высоты h достигают капли, вылетевшие вертикально. Следовательно, начальная скорость капель $v_0 = \sqrt{2gh}$. Максимальная дальность полета капель, имеющих такую начальную скорость, достигается при $\alpha = 45°$ и составляет величину $L = \frac{v_0^2}{g} = 2h$. Поскольку площадь орошаемого участка равна $S = \pi L^2$, ответ имеет вид $S = 4\pi h^2 \approx 12{,}6$ м^2.

Ответ. $S = 4\pi h^2 \approx 12{,}6$ м^2.

Задача 12

Граната, брошенная под углом к горизонту, разрывается в верхней точке траектории на два одинаковых осколка. Один из осколков упал на землю через время t_1 после разрыва гранаты. Через какое время t_2 после разрыва окажется на земле второй осколок, упавший позднее первого, если разрыв гранаты произошел на высоте h над поверхностью Земли? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g.

Идея. Воспользуйтесь законом сохранения импульса и законами равноускоренного движения.

Указание 1. По закону сохранения импульса найдите связь между вертикальными составляющими скоростей осколков гранаты после разрыва.

Указание 2. Запишите кинематические уравнения движения осколков в вертикальном направлении.

Указание 3. Исключая скорости осколков после разрыва, получите квадратное уравнение относительно искомого времени t_2.

Решение. Перед разрывом гранаты вертикальная составляющая импульса равна нулю. Пренебрегая импульсом силы тяжести за время разрыва, можно применить закон сохранения импульса. С учетом того что массы осколков одинаковы, из этого закона следует, что вертикальные составляющие скоростей осколков после разрыва гранаты равны по величине и противоположны, причем скорость первого осколка направлена вниз, а скорость второго – вверх. Выбирая начало отсчета в точке разрыва гранаты и направляя координатную ось OY вниз, имеем $v_{1y} = v_0, v_{2y} = -v_0$, где v_0 – модуль вертикальной составляющей скорости осколков. Кинематическое уравнение движения по вертикали, записанное для первого осколка, дает соотношение $v_0 t_1 + \frac{g t_1^2}{2} = h$. Отсюда $v_0 = \frac{h}{t_1} - \frac{g t_1}{2}$. Аналогично, для второго осколка имеем: $-v_0 t_2 + \frac{g t_2^2}{2} = h$. Подставляя сюда найденное v_0, получаем уравнение относительно t_2, а именно $t_2^2 - \left(\frac{2h}{g t_1} - t_1\right) t_2 - \frac{2h}{g} = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень $t_2 = \frac{2h}{g t_1}$.

Ответ. $t_2 = \frac{2h}{g t_1}$.

Задача 13

С вершины холма бросили камень под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. В момент падения камня на склон холма величина угла между направлением скорости камня и горизонталью составила $\beta = 60°$, а разность высот точек бросания и падения $\Delta h = 5$ м. Найти угол α между направлением начальной скорости камня v_0 и горизонтом. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте законы движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Указание 1. Найдите проекции скорости камня на горизонтальную и вертикальную оси координат в момент его падения на склон холма.

Указание 2. Учтите, что вектор скорости тела направлен по касательной к его траектории.

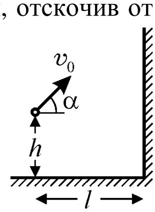
Решение. Горизонтальная проекция скорости камня $v_x = v_0 \cos\alpha$ при его падении остается постоянной. Вертикальная проекция скорости камня меняется во времени по закону $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ и в момент падения на склон холма принимает значение $v_y = \sqrt{v_0^2 \sin^2 + 2g\Delta h}$. Учитывая, что $\cos\beta = \dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h}}$, находим, что

$$\alpha = \arccos\left(\cos\beta\sqrt{1 + \frac{2g\Delta h}{v_0^2}}\right) = 45°.$$

Ответ. $\alpha = \arccos\left(\cos\beta\sqrt{1 + \dfrac{2g\Delta h}{v_0^2}}\right) = 45°.$

Задача 14

Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам. Какова должна быть начальная скорость мяча v_0, если бросок производится с высоты $h = 1{,}5$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту? Расстояние от мальчика до стены $l = 6$ м. Удар мяча о стену считать абсолютно упругим, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



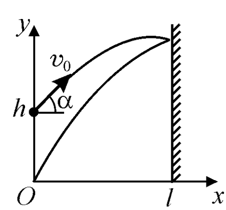
Идея. Используйте законы движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Указание 1. Изобразите траекторию движения мяча, удовлетворяющую условию задачи.

Указание 2. Воспользуйтесь свойствами упругого удара.

Указание 3. Запишите уравнения движения мяча в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат.

Решение. Для того чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к ногам мальчика, траектория мяча должна иметь вид, изображенный на рисунке. При упругом ударе о неподвижную стенку угол между нормалью к стенке и скоростью мяча перед ударом равен по величине углу между нормалью к стенке и скоростью мяча после удара.

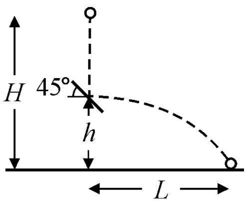


Обозначим через t_0 время полета мяча. За это время он проходит по горизонтали путь $2l$. Горизонтальная составляющая скорости мяча равна $v_0 \cos\alpha$ и при полете не меняется по величине, следовательно, $v_0 \cos\alpha \cdot t_0 = 2l$. С другой стороны, в момент времени t_0 вертикальная координата мяча должна обратиться в нуль:

$h+v_0\sin\alpha\cdot t_0-\dfrac{gt_0^2}{2}=0.$ Исключая из полученных соотношений t_0, находим, что $v_0=\dfrac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{2g}{h+2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}}\approx 10$ м/с.

Ответ. $v_0=\dfrac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{2g}{h+2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}}\approx 10$ м/с.

Задача 15



Маленький шарик падает с высоты $H=2$ м без начальной скорости. На высоте $h=0{,}5$ м над землей шарик испытывает абсолютно упругий удар о закрепленную гладкую площадку, наклоненную под углом $45°$ к горизонту. Найти дальность полета шарика L.

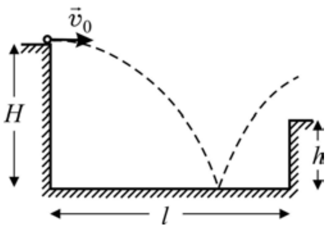
Идея. Используйте законы движения тела, брошенного под углом к горизонту, и законы упругого удара.

Указание. Определите направление и модуль скорости шарика непосредственно после удара о площадку.

Решение. При упругом соударении шарика с неподвижной гладкой площадкой угол между нормалью к площадке и скоростью $\vec{v}_1$ после удара равен углу между нормалью и скоростью $\vec{v}_0$ перед ударом. По условию задачи $\alpha=45°$, поэтому $\vec{v}_1\perp\vec{v}_0$ и скорость шарика непосредственно после удара направлена горизонтально. При падении шарика с высоты $H-h$ модуль его скорости $v_0=\sqrt{2g(H-h)}$. Движение шарика после соударения с площадкой происходит с начальной горизонтальной скоростью $v_1=v_0$. Дальность полета шарика равна $L=v_1\tau$, где $\tau=\sqrt{2h/g}$ – время падения с высоты h. Следовательно, $L=2\sqrt{h(H-h)}\approx 1{,}7$ м.

Ответ. $L=2\sqrt{h(H-h)}\approx 1{,}7$ м.

Задача 16



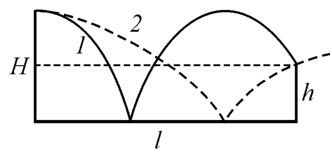
С края бетонированного желоба, сечение которого изображено на рисунке, бросают в горизонтальном направлении маленький шарик. Какие значения может иметь величина начальной скорости шарика v_0 для того, чтобы он, ударившись один раз о дно желоба, выпрыгнул на его противоположную сторону? При расчетах положить $H=0{,}9$ м, $h=0{,}5$ м, $l=2$ м. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Удар шарика о дно желоба считать абсолютно упругим, сопротивлением воздуха пренебречь.

Идея. Используйте законы движения тела, брошенного под углом к горизонту, и законы упругого удара.

Указание 1. Изобразите траектории движения шарика, соответствующие наименьшей и наибольшей начальным скоростям шарика.

Указание 2. Выразите время полета шарика, движущегося с наименьшей и с наибольшей начальными скоростями.

Решение. Траектории *1* и *2*, изображенные на рисунке, соответствуют наименьшей v_1 и наибольшей v_2 скоростям шарика, удовлетворяющим условию задачи. Искомая скорость v_0 очевидно лежит в диапазоне $v_1 \le v_0 \le v_2$. Обозначим через $t_1 = \sqrt{2H/g}$ и $t_2 = \sqrt{2(H-h)/g}$ время падения шарика



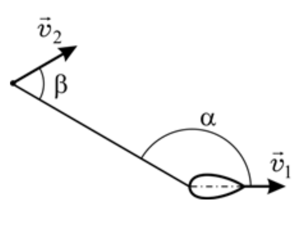
с высоты H и с высоты $(H-h)$ соответственно. Движение шарика по траектории *1* занимает время $\tau_1 = 2t_1 + t_2 = \sqrt{\dfrac{2}{g}}\left[2\sqrt{H} + \sqrt{H-h}\right]$, а по траектории *2* – время $\tau_2 = t_1 + (t_1 - t_2) = \sqrt{\dfrac{2}{g}}\left[2\sqrt{H} - \sqrt{H-h}\right]$. Поскольку $v_1\tau_1 = l$, $v_2\tau_2 = l$, имеем $v_1 = \dfrac{l}{2t_1 + t_2}$, $v_2 = \dfrac{l}{2t_1 - t_2}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ

$$\frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2}(2\sqrt{H} + \sqrt{H-h})} \le v_0 \le \frac{l\sqrt{g}}{\sqrt{2}(2\sqrt{H} - \sqrt{H-h})}$$, или $1{,}75$ м/с $\le v_0 \le 3{,}5$ м/с.

Ответ. $1{,}75$ м/с $\le v_0 \le 3{,}5$ м/с.

Задача 17

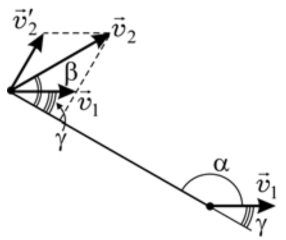
Катер, движущийся со скоростью $v_1 = 30$ км/ч, буксирует спортсмена на водных лыжах. Трос, за который держится спортсмен, составляет с направлением движения катера угол $\alpha = 150°$. Направление движения спортсмена образует с тросом угол $\beta = 60°$. Чему равен модуль скорости спортсмена v_2 в этот момент времени?



Идея. Воспользуйтесь векторным законом сложения скоростей.

Указание 1. Изобразите векторы скоростей катера и спортсмена в неподвижной системе отсчета. Представьте абсолютную скорость спортсмена как сумму его скорости относительно катера и скорости катера.

Указание 2. Учтите, что скорость спортсмена относительно катера направлена перпендикулярно тросу.



Решение. По закону сложения скоростей скорость спортсмена относительно неподвижной системы отсчета (абсолютная скорость) равна $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2'$, где $\vec{v}_2'$ – скорость спортсмена относительно катера (см. рисунок). Поскольку вектор $\vec{v}_2'$ перпендикулярен тросу, проекции скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ на направление троса в каждый момент времени равны друг другу: $v_1 \cos\gamma = v_2 \cos\beta$. Учитывая, что $\gamma = 180° - \alpha$, получаем $v_2 = v_1 \dfrac{\cos(180° - \alpha)}{\cos\beta} \approx 52$ км/ч.

Ответ. $v_2 = v_1 \dfrac{\cos(180° - \alpha)}{\cos\beta} \approx 52$ км/ч.

1.2. Динамика

Задача 1

На материальную точку с массой $m = 1$ кг, которая первоначально покоилась, в момент времени $t = 0$ начинает действовать постоянная по величине сила $F = 1$ Н. До момента времени $t_1 = 5$ с сила сохраняет постоянное направление, а в момент t_1 происходит поворот вектора силы на $90°$, после чего направление силы не меняется. На какое расстояние S удалится материальная точка от своего начального положения к моменту времени $t_2 = 2t_1$, если на нее не действуют никакие другие силы?

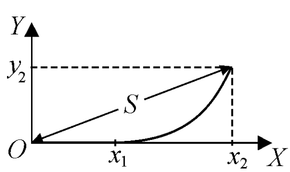
Идея. Примените для движения материальной точки второй закон Ньютона.

Указание 1. Введите координатную систему *XOY* и определите перемещение точки вдоль оси *OX* и ее скорость в момент времени t_1.

Указание 2. Определите перемещение точки вдоль оси *OY* в момент времени t_2.

Указание 3. Для определения суммарного перемещения точки воспользуйтесь теоремой Пифагора.

Решение. Выберем систему координат, изображенную на рисунке, где ось *OX* совпадает с первоначальным направлением силы, а ось *OY* – с повернутым. За время t_1

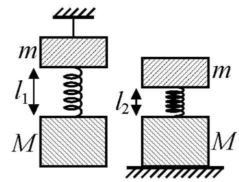


материальная точка сместится от начала координат вдоль оси *OX* на величину $x_1 = \dfrac{F}{m} \cdot \dfrac{t_2^2}{2}$ и приобретет вдоль этой оси скорость $v_1 = \dfrac{F}{m} t_1$. К моменту времени $t_2 = 2t_1$ перемещение точки вдоль оси OX составит $x_2 = x_1 + v_1(t_2 - t_1) = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{m} t_1$, а по оси OY $y_2 = \frac{F}{m} \cdot \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} = \frac{F}{m} \cdot \frac{t_1^2}{2}$. Учитывая, что $S = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, получаем окончательно $S = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t_1^2 \approx 39{,}5$ м.

Ответ. $S = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t_1^2 \approx 39{,}5$ м.

Задача 2

Невесомая пружина скрепляет два груза массами $m = 1$ кг и $M = 3$ кг. Когда эта система подвешена за верхний груз, длина пружины равна $l_1 = 20$ см. Если систему поставить на подставку, длина пружины будет равна $l_2 = 10$ см. Определить длину l_0 ненапряженной пружины.



Идея. Примените второй закон Ньютона и закон Гука.

Указание. Воспользуйтесь условием равновесия грузов.

Решение. Условия равновесия грузов в первом случае (когда пружина растянута) и во втором случае (когда пружина сжата) имеют вид соответственно $Mg = k(l_1 - l_0)$, $mg = k(l_0 - l_2)$. Выражая из этих соотношений l_0, получаем $l_0 = \frac{ml_1 + Ml_2}{m + M} = 12{,}5$ см.

Ответ. $l_0 = \frac{ml_1 + Ml_2}{m + M} = 12{,}5$ см.

Задача 3

Автомобиль трогается с места с ускорением $a_1 = 2$ м/с^2. При скорости $v = 50$ км/ч ускорение автомобиля стало равным $a_2 = 1$ м/с^2. С какой установившейся скоростью v_0 будет двигаться автомобиль, если сила сопротивления пропорциональна скорости? Силу тяги двигателя при движении автомобиля считать постоянной.

Идея. Примените для движения автомобиля второй закон Ньютона.

Указание 1. Определите, какие силы действуют на автомобиль по горизонтали.

Указание 2. Запишите уравнения движения автомобиля для трех случаев, приведенных в условии.

Решение. Автомобиль движется под действием двух сил – силы трения покоя, приложенной к его ведущим колесам со стороны дорожного покрытия, и силы сопротивления воздуха. Первая из этих сил возникает при передаче крутящего момента от двигателя к ведущим колесам и обычно называется силой тяги двигателя. По условию задачи эта сила постоянна. Вторая из сил – это сила вязкого трения, пропорциональная скорости автомобиля. Пусть F – сила тяги двигателя автомобиля, m – его масса, а k – коэффициент вязкого трения. Уравнения движения автомобиля имеют вид: $ma_1 = F$ (когда автомобиль трогается), $ma_2 = F - kv$ (при скорости автомобиля v), $0 = F - kv_0$ (при установившейся скорости v_0). Исключая из этих уравнений F, m и k, находим $v_0 = \dfrac{va_1}{a_1 - a_2} = 100$ км/ч.

Ответ. $v_0 = \dfrac{va_1}{a_1 - a_2} = 100$ км/ч.

Задача 4

За какое время τ тело соскользнет с высоты h по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, если по плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\beta < \alpha$, это тело движется равномерно? Коэффициент трения в обоих случаях один и тот же. Ускорение свободного падения g.

Идея. Примените второй закон Ньютона и формулу для силы трения скольжения.

Указание 1. Определите силы, действующие на тело. Найдите проекции этих сил на направление вдоль наклонной плоскости и направление, перпендикулярное ей.

Указание 2. Запишите уравнения движения тела для первого и во второго случая, приведенных в условии.

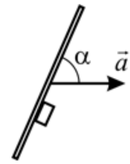
Указание 3. Примените кинематический закон равноускоренного движения.

Решение. Вдоль наклонной плоскости на тело действуют силы, модули которых равны $mg\sin\alpha$ и $F_{тр}$, а перпендикулярно наклонной плоскости – силы, модули которых равны $mg\cos\alpha$ и N. Здесь mg – модуль силы тяжести, N – модуль силы нормального давления, $F_{тр} = \mu N$ – модуль силы трения, μ – коэффициент трения. В проекции на направление наклонной плоскости уравнения движения тела имеют вид $ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ (при ускоренном движении), $mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = 0$ (при равномерном движении), где a – ускорение тела. Из этих уравнений следует, что $\mu = \operatorname{tg}\beta$, $a = g(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)$. Учитывая, что путь, пройденный телом вдоль наклонной плоскости, $l = h/\sin\alpha$, а время движения $\tau = \sqrt{2l/a}$, получаем окончательно $\tau = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g}\cdot\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}}$.

Ответ. $\tau = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g}\cdot\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}}$.

Задача 5

На гладком столе лежит доска, к которой вплотную прижат брусок. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = \sqrt{3}/3 \approx 0{,}577$. Доску начинают поступательно перемещать по столу с некоторым постоянным ускорением. При каком минимальном значении α_{min} угла α между плоскостью доски и вектором ускорения брусок не будет скользить по доске?

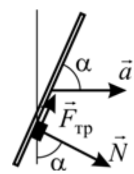


Идея. Применитe второй закон Ньютона и формулу для силы трения скольжения.

Указание 1. Определите, какие силы действуют на тело. Найдите проекции этих сил на направление вдоль доски и направление, перпендикулярное ей.

Указание 2. Воспользуйтесь тем фактом, что минимальное значение угла α достигается, когда сила трения покоя принимает максимальное значение.

Решение. Силы, действующие на брусок в горизонтальной плоскости, показаны на рисунке, где $\vec{F}_{тр}$ – сила трения, $\vec{N}$ – нормальная составляющая силы реакции доски. Брусок не скользит по доске, если проекция суммы этих сил на направление, перпендикулярное ускорению доски, равна нулю: $F_{тр}\sin\alpha - N\cos\alpha = 0$. Минимальное значение угла α достигается, когда сила трения покоя принимает максимальное значение: $F_{тр} = \mu N$. Объединяя записанные выражения, получаем $\alpha_{min} = \operatorname{arctg}(1/\mu) = 60°$.



Ответ. $\alpha_{min} = \operatorname{arctg}(1/\mu) = 60°$.

Задача 6

Санки можно удержать на горке с углом наклона $\alpha = 30°$ минимальной силой $F = 60$ Н, направленной вдоль горки. Предоставленные самим себе, они скатываются с ускорением $a = 3{,}9$ м/с^2. Какую минимальную силу F_1, направленную вдоль горки, нужно приложить к санкам, чтобы тянуть их в горку с постоянной скоростью? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Идея. Примените второй закон Ньютона и формулу для силы трения скольжения.

Указание 1. Определите силы, действующие на санки. Найдите проекции этих сил на направление вдоль наклонной плоскости.

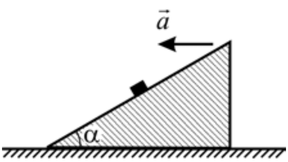
Указание 2. Введите необходимые данные и запишите уравнения движения санок для всех трех случаев, приведенных в условии.

Решение. Пусть m – масса санок, а μ – коэффициент трения между санками и горкой. В проекции на направление горки имеем следующие равенства: $F = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ (когда санки удерживают на горке минимальной силой), $ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ (когда санки скатываются с горки), $F_1 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$ (когда санки равномерно тянут вверх). Исключая отсюда m и μ, получаем $F_1 = F\left(2\frac{g}{a}\sin\alpha - 1\right) = 90$ Н.

Ответ. $F_1 = F\left(2\frac{g}{a}\sin\alpha - 1\right) = 90$ Н.

Задача 7

Наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол $\alpha = 30°$, движется с ускорением $\vec{a}$, направленным влево, как показано на рисунке. При каких значениях a тело, находящееся на наклонной плоскости, будет скользить вверх вдоль нее? Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}3$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

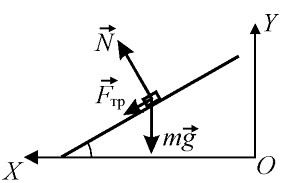


Идея. Примените второй закон Ньютона и формулу для силы трения скольжения.

Указание 1. Запишите уравнение движения тела в неподвижной системе отсчета.

Указание 2. Найдите ускорение тела и проведите анализ полученного выражения.

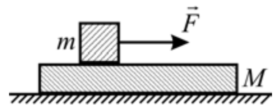
Решение. Пусть ускорение наклонной плоскости таково, что тело не скользит по ней. Тогда в неподвижной системе отсчета сумма сил, действующих на тело (см. рисунок), сообщает ему ускорение $\vec{a}$, направленное горизонтально. Если при этом сила трения покоя достигла своего максимального значения $F_{\text{тр}} = \mu N$, то в проекциях на оси OX и OY неподвижной системы уравнение движения тела имеет вид $ma = N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha$, $0 = N\cos\alpha - mg - \mu N\sin\alpha$. Решая эту систему, находим значение ускорения, при котором тело не скользит, но сила трения покоя достигает максимальной величины: $a = \frac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}g$. Если ускорение наклонной плоскости превышает найденное значение, тело начнет скользить вверх, поскольку сила трения уже не сможет его удерживать. Если же коэффициент трения таков, что $\mu\operatorname{tg}\alpha \geq 1$, тело не будет скользить вверх при любых ускорениях. Следовательно, $a > \frac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}g = 10{,}6$ м/с^2.



Ответ. $a > \dfrac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu \operatorname{tg}\alpha} g = 10{,}6$ м/с^2.

Задача 8

Брусок массой $M = 4$ кг находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит кубик массой $m = 1$ кг, к которому приложена горизонтальная сила F. При каком значении этой силы кубик начнет скользить по бруску? Коэффициент трения между кубиком и бруском $\mu = 0{,}5$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

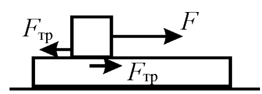


Идея. Примените второй закон Ньютона и формулу для силы трения скольжения.

Указание 1. Определите силы, действующие на брусок и кубик в проекции на горизонтальную ось.

Указание 2. Предположив, что скольжение кубика по бруску отсутствует, запишите уравнения движения этих тел.

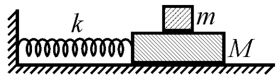
Решение. Кубик и брусок движутся под действием сил, изображенных на рисунке, где через $F_{тр}$ обозначен модуль силы трения. Пусть скольжение кубика по бруску отсутствует. Тогда уравнения движения тел имеют вид: $ma = F - F_{тр}$, $Ma = F_{тр}$. Отсюда находим, что в отсутствие скольжения $F = (m + M)a$. Поскольку сила трения покоя $F_{тр} \le \mu mg$, максимально возможное ускорение бруска $a_{max} = \mu \dfrac{m}{M} g$. Следовательно, скольжение кубика начнется, если $F > (m + M)a_{max}$. Отсюда находим, что $F > \mu mg\left(1 + \dfrac{m}{M}\right) \approx 6{,}1$ Н.



Ответ. $F > \mu mg\left(1 + \dfrac{m}{M}\right) \approx 6{,}1$ Н.

Задача 9

На гладком столе помещен брусок массой $M = 1$ кг, на котором лежит коробок массой $m = 50$ г. Брусок прикреплен к одному из концов невесомой пружины, другой конец которой заделан в неподвижную стенку. Брусок отводят от положения равновесия перпендикулярно стенке на расстояние Δl и отпускают без начальной скорости. При каком значении Δl коробок начнет скользить по бруску? Коэффициент трения коробка́ о брусок $\mu = 0{,}2$, жесткость пружины $k = 500$ Н/м. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Трением бруска о стол пренебречь.

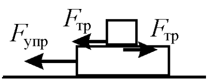


Идея. Примените второй закон Ньютона, закон Гука и формулу для силы трения скольжения.

Указание 1. Определите силы, действующие на брусок и коробок в проекции на горизонтальную ось.

Указание 2. Предположив, что скольжение коробка́ по бруску отсутствует, запишите уравнения движения этих тел.

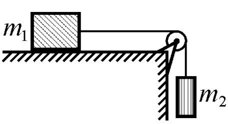
Решение. Пусть брусок сместили от положения равновесия на расстояние Δl вправо. Силы, действующие на тела в момент, когда брусок отпустили, изображены на рисунке, где $F_{упр} = k\Delta l$ – модуль силы упругости, $F_{тр}$ – модуль силы трения. Пусть скольжение коробка́ по бруску отсутствует. Тогда уравнения движения тел имеют вид $Ma = k\Delta l - F_{тр}$, $ma = F_{тр}$. Отсюда находим, что в отсутствие скольжения $k\Delta l = (m+M)a$. Поскольку сила трения покоя $F_{тр} \le \mu mg$, максимально возможное ускорение коробка́ $a_{max} = \mu g$. Следовательно, скольжение коробка́ начнется, если $k\Delta l > (m+M)a_{max}$. Отсюда находим $\Delta l > \dfrac{(M+m)}{k} \cdot \mu g = 4{,}2$ мм.



Ответ. $\Delta l > \dfrac{(M+m)}{k} \cdot \mu g = 4{,}2$ мм.

Задача 10

На горизонтальном столе находится брусок массой m_1, к которому привязана нерастяжимая нить. Второй конец нити перекинут через блок и прикреплен к грузу массой m_2. Коэффициент трения между бруском и столом μ. Пренебрегая массой блока, определить силу F, с которой нить действует на блок. Ускорение свободного падения g.

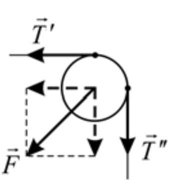


Идея. Примените второй закон Ньютона и формулу для силы трения скольжения.

Указание 1. Учтите, что полная сила, с которой нить действует на блок, равна векторной сумме сил натяжения горизонтального и вертикального отрезков нити.

Указание 2. Предположив, что предоставленные самим себе тела будут двигаться, запишите уравнения их движения.

Указание 3. Найдите значение коэффициента трения, при котором тела будут покоиться.



Решение. Сила $\vec{F}$, с которой нить действует на блок, равна векторной сумме сил натяжения $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$, приложенных в точках схода нити с блока (см. рисунок). Из невесомости нити и блока следует, что натяжение нити во всех точках одинаково: $T' = T'' = T$. Поэтому модуль силы, с которой нить действует на блок, $F = \sqrt{2} \cdot T$. При вычислении натяжения нити нужно учесть, что предоставленная самой себе система придет в движение, если коэффициент трения между грузом m_1 и столом достаточно мал. В этом случае уравнения движения грузов имеют вид $m_1 a = T - m_1 \mu g$, $m_2 a = m_2 g - T$, где a – модуль ускорения тел. Отсюда $T = \dfrac{m_1 m_2 (1+\mu) g}{m_1 + m_2}$. Если трение между грузом m_1 и столом велико, то система находится в покое и $T = m_2 g$. Значение коэффициента трения, при котором предоставленные самим себе грузы покоятся, определяется из условия $m_1 \mu g \ge m_2 g$. Таким образом, $F = \sqrt{2} \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1+\mu) g$ при $\mu < \dfrac{m_2}{m_1}$, $F = \sqrt{2} m_2 g$ при $\mu \ge \dfrac{m_2}{m_1}$.

Ответ. $F = \sqrt{2} \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1+\mu) g$ при $\mu < \dfrac{m_2}{m_1}$, $F = \sqrt{2} m_2 g$ при $\mu \ge \dfrac{m_2}{m_1}$.

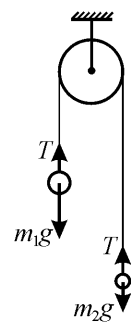
Задача 11

Два шарика с массами $m_1 = 600$ г и $m_2 = 400$ г подвешены на легкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок. В начальный момент времени блок заторможен, а расстояние между шариками по вертикали $l = 49$ см, причем более тяжелый шарик расположен выше. Через какое время τ шарики окажутся на одной горизонтали, если системе позволить двигаться? Блок невесом. Трением пренебречь.

Идея. Примените второй закон Ньютона.

Указание 1. Запишите уравнения движения шариков.

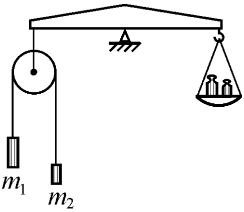
Указание 2. Примените кинематический закон равноускоренного движения.



Решение. Шарики движутся под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где $m_1 g$ и $m_2 g$ – модули сил тяжести, T – модуль силы натяжения нити. Уравнения движения шариков имеют вид: $m_1 a = m_1 g - T$, $m_2 a = T - m_2 g$. Отсюда модуль ускорения шариков $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$. Шарики окажутся на одной горизонтали, если каждый из них переместится на расстояние $S = l/2$. Используя кинематическую формулу $\tau = \sqrt{2S/a}$, получаем $\tau = \sqrt{\dfrac{l}{g} \cdot \dfrac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)}} = 0{,}5$ с.

Ответ. $\tau = \sqrt{\dfrac{l}{g} \cdot \dfrac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)}} = 0{,}5$ с.

Задача 12

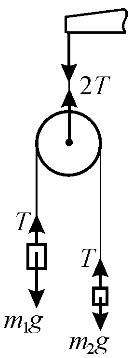


На нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 50$ г. В заторможенном состоянии (когда грузы неподвижны) блок уравновешен на рычажных весах. На какую величину Δm нужно изменить массу гирь на правой чашке, чтобы при освобождении блока (когда грузы придут в движение) сохранить равновесие весов?

Идея. Примените второй закон Ньютона.

Указание 1. Определите силы, действующие на грузы и на блок.

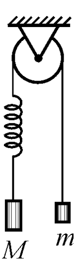
Указание 2. Запишите уравнения движения грузов.



Решение. Когда блок заторможен, сила натяжения верхней нити, удерживающей его в равновесии, равна суммарной силе тяжести, действующей на грузы: $T' = (m_1 + m_2)g$. При освобождении блока грузы придут в движение, и сила натяжения верхней нити станет равной $T'' = 2T$, где T – модуль силы натяжения нижней нити, связывающей грузы (см. рисунок). Чтобы найти T, воспользуемся уравнениями движения грузов: $m_1 a = m_1 g - T$, $m_2 a = T - m_2 g$. Отсюда $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$. Следовательно, при освобождении грузов сила, действующая на левый конец коромысла весов, изменится на величину $\Delta T = T' - T'' = \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g$. Для восстановления равновесия весов с правой чашки нужно снять гири массой $\Delta m = \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} \approx 16{,}7$ г.

Ответ. $\Delta m = \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} \approx 16{,}7$ г.

Задача 13



К грузику массой $M = 300$ г прикреплена пружина, другой конец которой привязан к нити, перекинутой через блок. На втором конце нити подвешен грузик массой $m = 200$ г. Когда блок заторможен, длина пружины $l = 15$ см. Какую длину l_1 будет иметь пружина, если блок освободить? Считать, что колебания в системе не возникнут, т.е. грузики будут двигаться с постоянным ускорением. Длина недеформированной пружины $l_0 = 10$ см. Массой пружины, нити и блока, а также трением в блоке пренебречь.

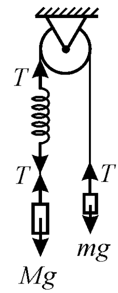
Идея. Примените второй закон Ньютона и закон Гука.

Указание 1. Определите силы, действующие на грузы и на пружину.

Указание 2. Запишите уравнения движения грузов.

Указание 3. Приравняйте силу натяжения нити силе упругости растянутой пружины.

Решение. Когда блок заторможен, сила, с которой растянута пружина, равна весу подвешенного к ней грузика. Из закона Гука следует, что $k(l-l_0)=Mg$, откуда $k=Mg/(l-l_0)$. Если блок освободить, то грузики придут в движение. В общем случае оно будет представлять собой суперпозицию равноускоренного и колебательного движений. Но, задав в системе определенные начальные условия, можно добиться того, чтобы колебания в системе не возникли и движение грузиков происходило с постоянным ускорением. В этом случае сила, с которой растянута пружина, будет постоянной. Поскольку эта сила равна силе натяжения нити T, одинаковой во всех точках, для ее нахождения воспользуемся законами динамики. Уравнения движения грузиков имеют вид $Ma=Mg-T$, $ma=T-mg$, где a – ускорение в системе. Отсюда $T=\dfrac{2mM}{m+M}g$. Учитывая, что $T=k(l_1-l_0)$, получаем $l_1=\dfrac{(M-m)l_0+2ml}{M+m}=14$ см.



Ответ. $l_1=\dfrac{(M-m)l_0+2ml}{M+m}=14$ см.

Задача 14

Вокруг планеты, имеющей форму шара радиуса r, по круговой орбите движется спутник. Определить радиус орбиты спутника R, считая известными ускорение свободного падения у поверхности планеты g и период обращения спутника T.

Идея. Примените к движению спутника второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения.

Указание 1. Запишите уравнение движения спутника под действием силы притяжения к планете.

Указание 2. Запишите формулу для ускорения свободного падения у поверхности планеты.

Решение. Пусть m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника по орбите, G – гравитационная постоянная. Уравнение движения спутника имеет вид $\dfrac{mv^2}{R}=G\dfrac{mM}{R^2}$. Учитывая, что $g=G\dfrac{M}{r^2}$ и $T=\dfrac{2\pi R}{v}$, получаем $R=\sqrt[3]{\dfrac{gr^2T^2}{4\pi^2}}$.

Ответ. $R=\sqrt[3]{\dfrac{gr^2T^2}{4\pi^2}}$.

Задача 15

Вес тела на экваторе составляет $\eta = 97\%$ от веса этого же тела на полюсе. Найти период вращения планеты вокруг своей оси T, если плотность вещества планеты $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$. Планету считать однородным шаром.

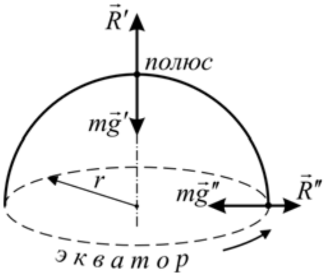
Идея. Используйте второй закон Ньютона и определение веса тела.

Указание 1. Изобразите силы, действующие на тело на полюсе и на экваторе в инерциальной системе отсчета.

Указание 2. Введите угловую скорость вращения планеты, ее радиус и ускорение свободного падения у ее поверхности. Используя второй закон Ньютона, найдите выражения для веса тела на полюсе и экваторе.

Указание 3. Выразите ускорение свободного падения через массу планеты и ее радиус.

Решение. Силы, действующие на тело на полюсе и на экваторе, изображены на рисунке, где $\vec{g}'$ и $\vec{g}''$ – ускорения, вызываемые силой тяжести; $\vec{R}'$ и $\vec{R}''$ – силы реакции опор, на которых покоится тело. Поскольку планета представляет собой однородный шар, ускорения $\vec{g}'$ и $\vec{g}''$ различаются только направлением, а модули их совпадают: $g' = g'' = g$. Для тела, покоящегося на полюсе, сила тяжести и сила реакции опоры уравновешены и его вес по величине равен $P' = R' = mg$. Тело, находящееся на экваторе, движется

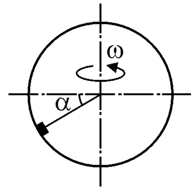


по окружности, радиус которой равен радиусу планеты r. Следовательно, сила тяжести и сила реакции опоры не уравновешены и по второму закону Ньютона $m\omega^2 r = mg - R''$, где ω – угловая скорость вращения планеты. Поэтому вес тела на экваторе по величине равен $P'' = R'' = mg - m\omega^2 r$. По условию $mg - m\omega^2 r = \dfrac{\eta}{100\%} mg$, откуда $\omega^2 = \dfrac{g}{r}\left(1 - \dfrac{\eta}{100\%}\right)$. С другой стороны, $g = \dfrac{GM}{r^2}$, где $M = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ – масса планеты. Отсюда следует, что $\dfrac{g}{r} = \dfrac{4}{3}\pi G\rho$. Учитывая, что период вращения планеты $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, получаем $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho(1 - \eta/100\%)}} \approx 4{,}34 \cdot 10^4 \text{с} \approx 12 \text{ ч}$.

Ответ. $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho(1 - \eta/100\%)}} \approx 4{,}34 \cdot 10^4 \text{с} \approx 12 \text{ ч}$.

Задача 16

На внутренней поверхности сферы радиуса R, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω, располагается маленький брусок массой m. Положение бруска задается углом α между горизонталью и прямой, проведенной к бруску из центра сферы. Считая значение угла α известным, найти модуль силы трения, удерживающей брусок от скольжения по поверхности сферы. Ускорение свободного падения g.

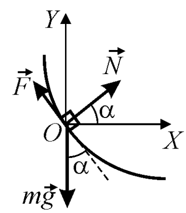


Идея. Примените второй закон Ньютона для движения по окружности.

Указание 1. Определите силы, действующие на брусок.

Указание 2. Запишите уравнения движения бруска в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси неподвижной системы координат.

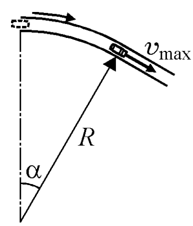
Решение. Брусок движется по горизонтальной окружности под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – нормальная составляющая силы реакции сферы, $\vec{F}$ – сила трения. В проекциях на оси OX и OY неподвижной координатной системы имеем $m\omega^2 R\cos\alpha = N\cos\alpha - F\sin\alpha$, $F\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0$. Исключая отсюда N, находим $F = m\cos\alpha(g - \omega^2 R\sin\alpha)$. Если угловая скорость вращения сферы такова, что $\omega^2 R\sin\alpha > g$, то сила трения направлена противоположно. В общем случае ответ имеет вид $F = m\cos\alpha\,|\,g - \omega^2 R\sin\alpha\,|$.



Ответ. $F = m\cos\alpha\,|\,g - \omega^2 R\sin\alpha\,|$.

Задача 17

Горизонтальный участок шоссе представляет собой дугу окружности радиуса $R = 100$ м с центральным углом $\alpha = 30°$, переходящую в прямолинейный отрезок. Автомобиль со всеми ведущими колесами, стоявший в начале криволинейного участка, начинает разгоняться с постоянным тангенциальным ускорением. С какой максимальной по модулю скоростью v_{max} может выехать автомобиль на прямолинейный участок, если коэффициент трения между шинами автомобиля и полотном шоссе $\mu = 0{,}3$? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

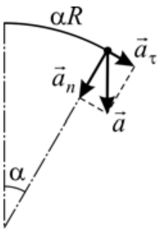


Идея. Используйте определение тангенциального и нормального ускорений.

Указание 1. Воспользуйтесь разложением полного ускорения автомобиля на тангенциальную и нормальную составляющие.

Указание 2. Используйте условие постоянства тангенциального ускорения автомобиля.

Решение. Максимально возможное значение ускорения автомобиля ограничивается максимальной величиной силы трения покоя и составляет $a = \mu g$. Вектор ускорения автомобиля может быть представлен в виде $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, где $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ – нормальная и тангенциальная составляющие ускорения, причем $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$. Нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ максимально в конце пути по дуге, когда скорость автомобиля максимальна. Тангенциальное ускорение по условию постоянно. Поэтому скорость, которую будет иметь автомобиль в конце пути по дуге, равна $v_{\max} = \sqrt{2a_\tau \alpha R}$.



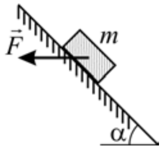
Нормальное ускорение автомобиля в этот момент будет $a_n = 2a_\tau\alpha$. Из условия $a_n^2 + a_\tau^2 = \mu^2 g^2$ находим $a_\tau = \dfrac{\mu g}{\sqrt{4\alpha^2 + 1}}$. Отметим, что $a_\tau \le \mu g$, т.е. при разгоне автомобиль движется без проскальзывания. Отсюда находим $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{2\mu g \alpha R}{\sqrt{4\alpha^2+1}}} =$

$$= \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{(3/\pi)^2 + 1}}} \approx 14{,}7 \text{ м/с}.$$

Ответ. $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{2\mu g \alpha R}{\sqrt{4\alpha^2+1}}} = \sqrt{\dfrac{\mu g R}{\sqrt{(3/\pi)^2 + 1}}} \approx 14{,}7$ м/с.

1.3. Статика

Задача 1

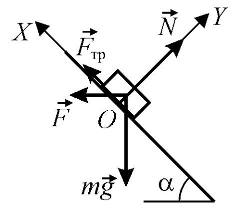


Брусок массой $m = 1$ кг находится на неподвижной наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом. С какой минимальной горизонтальной силой F нужно действовать на брусок, чтобы он покоился? Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}25$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте условия равновесия материальной точки.

Указание. Изобразите силы, действующие на брусок, и запишите условия его равновесия.

Решение. Брусок находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – нормальная составляющая силы реакции наклонной плоскости, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения. Согласно закону сухого трения, проекция силы трения покоя на наклонную плоскость может принимать любые значения из диапазона $-\mu N \le F_{тр} \le \mu N$. Сила F минимальна, если сила трения покоя направлена вдоль наклонной плоскости вверх и ее модуль достигает максимальной величины $F_{тр} = \mu N$. Записывая уравнение равновесия бруска в проекциях на выбранные координатные оси (см. рисунок), получаем $F_{тр} + F\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$, $N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0$, $F_{тр} = \mu N$. Разрешая эту систему относительно F, находим $F = mg\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu}{\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1} = 6$ Н.



Ответ. $F = mg\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu}{\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1} = 6$ Н.

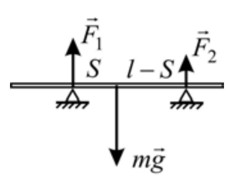
Задача 2

Однородный стержень лежит горизонтально на двух опорах. Расстояние от центра стержня до ближайшей опоры $S = 0{,}3$ м. Найти расстояние между опорами l, если известно, что модули сил, действующих на стержень со стороны опор, отличаются друг от друга на величину, равную $\alpha = 1/5$ веса стержня.

Идея. Используйте условия равновесия твердого тела.

Указание. Изобразите силы, действующие на стержень, и запишите условия его равновесия.

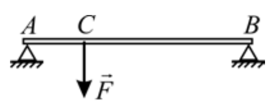
Решение. Стержень находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы реакции опор. Условия равновесия стержня имеют вид $F_1 + F_2 = mg$ (для сил), $F_1 S = F_2(l - S)$ (для моментов сил относительно центра тяжести стержня). Кроме того, по условию $F_1 - F_2 = \alpha mg$. Исключая из этих уравнений m, F_1 и F_2, получаем $l = \dfrac{2S}{1-\alpha} = 0{,}75$ м.



Ответ. $l = \dfrac{2S}{1-\alpha} = 0{,}75$ м.

Задача 3

Невесомый стержень лежит горизонтально на двух опорах A и B. В точке C к стержню приложена сила $\vec{F}$, направленная вертикально вниз. Определить величину этой силы, если извест-

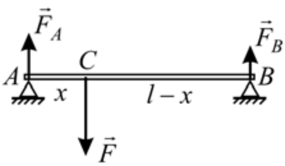


но, что расстояние *CB* в $k = 2{,}5$ раза превышает расстояние *AC*, а нагрузка на опору *A* превышает нагрузку на опору *B* на величину $f = 30$ Н.

Идея. Используйте условия равновесия твердого тела.

Указание. Изобразите силы, действующие на стержень, и запишите условия его равновесия.

Решение. Пусть l – длина стержня. Обозначим через x расстояние *AC*, а через $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$ – силы реакции опор, действующие на стержень в точках *A* и *B*. Условия равновесия стержня имеют вид $F_A + F_B = F$, $F_A x = F_B(l - x)$. Кроме того, по условию задачи $F_A - F_B = f$, $\dfrac{l-x}{x} = k$. Решая эту систему уравнений,



получаем $F = f\dfrac{k+1}{k-1} = 70$ Н.

Ответ. $F = f\dfrac{k+1}{k-1} = 70$ Н.

Задача 4

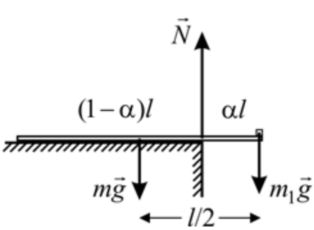
Деревянная линейка выдвинута за край стола на $\alpha = 1/4$ часть своей длины. При этом она не опрокидывается, если на ее свешивающийся конец положить груз массой не более $m_1 = 250$ г. На какую часть длины β можно выдвинуть за край стола эту линейку, если на ее свешивающийся конец положен груз массой $m_2 = 125$ г?

Идея. Используйте условия равновесия твердого тела.

Указание 1. Введите массу и длину линейки и изобразите силы, действующие на нее.

Указание 2. Запишите уравнение моментов относительно оси, проходящей через край стола, для первого и второго случая.

Решение. Пусть m – масса линейки, l – ее длина. Когда на свешивающемся конце линейки лежит груз массой m_1, она находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ и $m_1\vec{g}$ – силы тяжести, $\vec{N}$ – равнодействующая элементарных сил реакции, действующих на линейку со стороны стола. Поскольку по условию линейка не опрокидывается, точка приложения силы $\vec{N}$ совпадает с краем стола. Уравнение моментов, записанное относительно

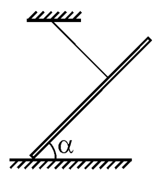


оси, проходящей через край стола, имеет вид $m_1 g\alpha l = mg\left(\frac{l}{2}-\alpha l\right)$. Для случая, когда на конце линейки лежит груз массой m_2, по аналогии имеем $m_2 g\beta l = mg\left(\frac{l}{2}-\beta l\right)$. Разделив второе уравнение на первое, получаем $\frac{m_2\beta}{m_1\alpha}=\frac{1-2\beta}{1-2\alpha}$. Следовательно, $\beta=\frac{m_1\alpha}{m_2+2\alpha(m_1-m_2)}=\frac{1}{3}$.

Ответ. $\beta=\frac{m_1\alpha}{m_2+2\alpha(m_1-m_2)}=\frac{1}{3}$.

Задача 5

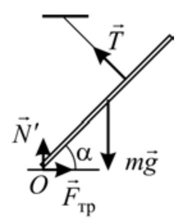
Лестница массой $m=30$ кг удерживается в наклонном положении легкой нерастяжимой веревкой. Веревка привязана к лестнице в точке, отстоящей от верхнего конца лестницы на расстояние, равное $1/3$ длины лестницы. Найти модуль силы нормального давления N лестницы на пол, если лестница составляет с полом угол $\alpha=45°$, а веревка перпендикулярна лестнице. Центр тяжести лестницы находится посередине. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.



Идея. Используйте условия равновесия твердого тела.

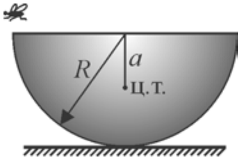
Указание. Изобразите силы, действующие на лестницу, и запишите условия ее равновесия.

Решение. Лестница находится в равновесии под действием сил, указанных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{T}$ – сила натяжения веревки, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения, $\vec{N}'$ – нормальная составляющая реакции пола. Условия равновесия лестницы имеют вид: $mg-N'-T\cos\alpha=0$ (для сил в проекции на вертикальное направление), $mg\frac{L}{2}\cos\alpha-T\frac{2}{3}L=0$ (для моментов сил относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O). Здесь L – длина лестницы. Исключая из этих уравнений T, получаем $N'=mg\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\alpha\right)$. По третьему закону Ньютона модуль искомой силы нормального давления лестницы на пол $N=N'$. Отсюда находим $N=mg\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\alpha\right)=187{,}5$ Н.



Ответ. $N=mg\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\alpha\right)=187{,}5$ Н.

Задача 6



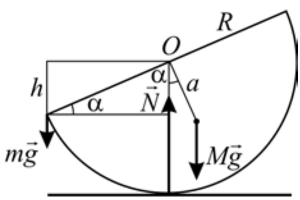
Тонкостенная полусфера массой M и радиуса R покоится на горизонтальном столе. На какую высоту h опустится край полусферы, если на него сядет муха массой m? Центр тяжести полусферы расположен на расстоянии $a = R/2$ от ее центра.

Идея. Используйте условия равновесия твердого тела.

Указание 1. Изобразите силы, действующие на полусферу.

Указание 2. Введите угол, на который наклонится полусфера, и запишите уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку касания полусферы и стола.

Решение. Под действием веса мухи полусфера займет наклонное положение, изображенное на рисунке, где через $\vec{N}$ обозначена сила реакции стола. Уравнение моментов, записанное относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку касания полусферы и стола, имеет вид $Mga\sin\alpha = mgR\cos\alpha$, где α – угол, на который отклонится полусфера. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{mR}{Ma} = 2\dfrac{m}{M}$. Из рисунка видно, что искомая величина $h = R\sin\alpha$. Из записанных соотношений получаем



$$h = \frac{R\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{R}{\sqrt{1+\left(M/(2m)\right)^2}}.$$

Ответ. $h = \dfrac{R}{\sqrt{1+\left(M/(2m)\right)^2}}$.

Задача 7

Автомобиль массой M поднимается с постоянной скоростью вверх по дороге, составляющей угол α с горизонтом. Найти силу F взаимодействия ведущих (задних) колес с поверхностью дороги. Расстояние между осями автомобиля L, центр тяжести находится посередине между осями на расстоянии H от поверхности дороги. Силу трения, действующую на передние колеса, не учитывать. Ускорение свободного падения g.

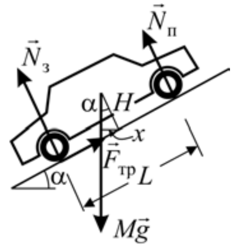
Идея. Перейдите в инерциальную систему отсчета, связанную с автомобилем, и используйте условия его равновесия.

Указание 1. Изобразите силы, действующие на автомобиль.

Указание 2. Запишите уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку соприкосновения передних колес автомобиля с дорогой. Найдите силу нормального давления задних колес на дорогу.

Указание 3. Используя второй закон Ньютона, найдите силу трения между ведущими колесами и дорогой.

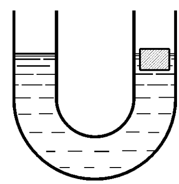
Решение. Поскольку автомобиль движется с постоянной скоростью, связанная с ним система отсчета является инерциальной. В этой системе автомобиль находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $M\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения покоя, действующая со стороны дороги на ведущие (задние) колеса, $\vec{N}_п$ и $\vec{N}_з$ – нормальные составляющие сил реакции дороги, действующие на передние и задние колеса соответственно. Записывая уравнение моментов относительно оси, проходящей через точки соприкосновения передних колес с дорогой, имеем



$Mg\left(\frac{L}{2}\cos\alpha + x\right) = N_з L$, где $x = H\sin\alpha$. Отсюда $N_з = Mg\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{H}{L}\sin\alpha\right)$. Поскольку автомобиль движется с постоянной скоростью, $F_{тр} = Mg\sin\alpha$. Учитывая, что $F = \sqrt{F_{тр}^2 + N_з^2}$, получаем $F = Mg\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{H}{L}\sin\alpha\right)^2}$.

Ответ. $F = Mg\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{H}{L}\sin\alpha\right)^2}$.

Задача 8



В одно из колен U-образной трубки, частично заполненной водой, опускают плавать кусочек дерева массой $m = 10$ г. На какую высоту Δh поднимется уровень воды в трубке, если площадь ее сечения $S = 10$ см^2? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Идея. Используйте условие плавания кусочка дерева.

Указание. Найдите вытесняемый кусочком дерева объем воды.

Решение. Из условия плавания кусочка дерева, а именно $mg = \rho V g$, находим вытесняемый им объем воды $V = \frac{m}{\rho}$. Поскольку площадь сечения трубки постоянна, этот объем поровну распределится между ее коленами. Следовательно, $\Delta h = \frac{m}{2\rho S} = 0{,}5$ см.

Ответ. $\Delta h = \frac{m}{2\rho S} = 0{,}5$ см.

Задача 9

К коромыслу равноплечных весов подвешены два сплошных однородных шарика равной массой, сделанных из разных материалов. Если одновременно один из шариков поместить в жидкость с плотностью $\rho_1 = 10^3$ кг/м^3, а другой – в жидкость с плотностью $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, то равновесие сохранится. Считая, что плотности шариков больше плотностей жидкостей, найти отношение плотностей шариков n.

Идея. Воспользуйтесь законом Архимеда.

Указание 1. Введите плотности шариков и используйте равенство их масс.

Указание 2. Учтите, что выталкивающие силы, действующие на шарики, равны.

Решение. Обозначим плотности шариков через ρ_1' и ρ_2', а их объемы – через V_1 и V_2. Из равенства масс шариков следует, что $V_1\rho_1' = V_2\rho_2'$. Поскольку при погружении шариков в жидкости равновесие весов не нарушается, архимедовы силы, действующие на шарики, равны друг другу, т.е. $V_1\rho_1 g = V_2\rho_2 g$. Отсюда находим $n = \dfrac{\rho_1'}{\rho_2'} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{5}{4}$.

Ответ. $n = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{5}{4}$.

Задача 10

Надводная часть айсберга имеет объем $V = 1000$ м^3. Найти массу айсберга M, если плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, а плотность льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Идея. Воспользуйтесь законом Архимеда.

Указание. Введите объем подводной части айсберга и запишите условие его плавания.

Решение. Обозначим через V_1 объем подводной части айсберга. Условие его плавания имеет вид: $Mg = \rho_в g V_1$. Поскольку $M = \rho_л (V + V_1)$, условие плавания можно переписать следующим образом: $\rho_л (V + V_1) = \rho_в V_1$. Выражая отсюда V_1, получаем $M = V \dfrac{\rho_л \rho_в}{\rho_в - \rho_л} = 9000$ т.

Ответ. $M = V \dfrac{\rho_л \rho_в}{\rho_в - \rho_л} = 9000$ т.

Задача 11

В двух сосудах налиты одинаковые объемы различных жидкостей. Если брусок из пластмассы поместить в первый сосуд, то он плавает в нем, причем сторона бруска, имеющая длину a, перпендикулярна поверхности жидкости и высота выступающей части равна h_1. Если этот брусок поместить во второй сосуд, то высота выступающей части станет h_2. Какой будет величина выступающей части h, если жидкости слить в один сосуд? Считать, что жидкости смешиваются без изменения суммарного объема.

Идея. Воспользуйтесь законом Архимеда.

Указание 1. Запишите условия плавания бруска в обеих жидкостях.

Указание 2. Найдите плотности исходных жидкостей и плотность их смеси. Запишите условия плавания бруска в смеси жидкостей.

Решение. Пусть m – масса бруска, S – площадь его горизонтального сечения, ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкостей в первом и втором сосудах. Тогда условия плавания бруска в этих жидкостях будут иметь вид $mg=(a-h_1)S\rho_1 g$, $mg=(a-h_2)S\rho_2 g$. Отсюда $\rho_1=\dfrac{m}{S(a-h_1)}$, $\rho_2=\dfrac{m}{S(a-h_2)}$. При сливании жидкостей в один сосуд объем образовавшейся смеси по условию равен сумме объемов компонент, которые в свою очередь равны друг другу. Отсюда следует, что плотность смеси $\rho=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}=$ $=\dfrac{m}{2S}\left(\dfrac{1}{a-h_1}+\dfrac{1}{a-h_2}\right)$. Условие плавания бруска в смеси имеет вид $mg=(a-h)S\rho g$. Из последних двух соотношений получаем $h=\dfrac{a(h_1+h_2)-2h_1h_2}{2a-(h_1+h_2)}$.

Ответ. $h=\dfrac{a(h_1+h_2)-2h_1h_2}{2a-(h_1+h_2)}$.

Задача 12

Цилиндрическая пробирка с грузиком, имеющая площадь поперечного сечения $S=1$ см^2, плавает в воде вертикально, причем из воды высовывается часть пробирки высотой $h=5$ см. Какова минимальная плотность жидкости ρ, в которой пробирка с грузиком не утонет, если суммарная масса пробирки и грузика $M=20$ г? Плотность воды $\rho_0=10^3$ кг/м^3.

Идея. Воспользуйтесь законом Архимеда.

Указание. Введите длину пробирки и запишите условия ее плавания в обеих жидкостях.

Решение. Пусть длина пробирки l. Условия плавания пробирки в жидкостях имеют вид $Mg = S(l-h)\rho_0 g$, $Mg = Sl\rho g$. Исключая из этих равенств l, получаем $\rho = \dfrac{M\rho_0}{(M+\rho_0 Sh)} = 0{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ. $\rho = \dfrac{M\rho_0}{(M+\rho_0 Sh)} = 0{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3.

Задача 13

Стеклянная бутылка вместимостью $V = 0{,}5$ л и массой $M = 200$ г плавает в воде. Какое количество воды m нужно налить в бутылку, чтобы она утонула? Плотность стекла $\rho = 2{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3.

Идея. Воспользуйтесь законом Архимеда.

Указание. Найдите наружный объем бутылки и запишите условие плавания бутылки, полностью погруженной в воду.

Решение. Наружный объем бутылки равен $V_0 = V + \dfrac{M}{\rho}$. Условие плавания бутылки, полностью погруженной в воду, имеет вид $(M+m)g = \rho_в V_0 g$. Отсюда находим, что бутылка утонет, если в нее налить воды массой $m > \rho_в V - M\left(1 - \dfrac{\rho_в}{\rho}\right) = 0{,}38$ кг.

Ответ. $m > \rho_в V - M\left(1 - \dfrac{\rho_в}{\rho}\right) = 0{,}38$ кг.

Задача 14

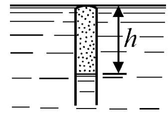
Запаянная с одного конца трубка длиной $L = 110$ см погружается в воду в вертикальном положении открытым концом вниз. Определить давление p воздуха внутри трубки, если ее верхний конец находится на уровне поверхности воды. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температуру воздуха в трубке считать постоянной, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Идея. Воспользуйтесь формулой для гидростатического давления воды и законом Бойля–Мариотта.

Указание 1. Введите высоту воздушного столба в трубке, полностью погруженной в воду, и выразите через нее давление воздуха в трубке.

Указание 2. Запишите для воздуха, находящегося в трубке, закон Бойля–Мариотта.

Р е ш е н и е. Давление воздуха в трубке, полностью погруженной в воду, равно $p = p_0 + \rho g h$, где h – высота объема, занимаемого воздухом. Поскольку температура воздуха в трубке постоянна, для него справедлив закон Бойля–Мариотта $p_0 LS = phS$, где S – площадь сечения трубки. Отсюда $h = \dfrac{p_0}{p} L$. Объединяя записанные выражения, получаем уравнение



$p = p_0 + \rho g \dfrac{p_0}{p} L$, или $p^2 - p_0 p - \rho g L p_0 = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень этого уравнения, а именно $p = \dfrac{p_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4\rho g L}{p_0}}\right) = 1{,}1 \cdot 10^5$ Па.

О т в е т. $p = \dfrac{p_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4\rho g L}{p_0}}\right) = 1{,}1 \cdot 10^5$ Па.

Задача 15

Тонкостенный стакан вместимостью $V_0 = 200$ см^3 и массой $m = 100$ г погружают в воду, держа его дном вверх. На какой глубине h предоставленный самому себе стакан перестанет всплывать? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, температура воды не меняется с глубиной. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. Размерами стакана по сравнению с глубиной его погружения, давлением паров воды, а также объемом стенок стакана пренебречь.

И д е я. Воспользуйтесь формулой для гидростатического давления воды и законом Бойля–Мариотта.

У к а з а н и е 1. Запишите условие равновесия стакана, погруженного в воду.

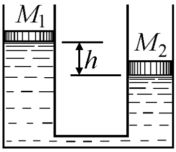
У к а з а н и е 2. Запишите для воздуха, находящегося в стакане, закон Бойля–Мариотта.

Р е ш е н и е. Стакан будет находиться под водой в равновесии при выполнении условия $mg = \rho V g$, где V – объем воздуха в стакане. Отсюда $V = \dfrac{m}{\rho}$. По закону Бойля–Мариотта $p_0 V_0 = pV$, где $p = p_0 + \rho g h$ – давление воды на глубине h. Объединяя записанные выражения, находим $h = \dfrac{p_0}{\rho g m}(\rho V_0 - m)$. При меньшей глубине погружения предоставленный самому себе стакан будет всплывать. Наоборот, при увеличении глубины погружения стакан начнет опускаться вниз, так как с ростом давления воды выталкивающая сила будет уменьшаться.

О т в е т. $h \ge \dfrac{p_0}{\rho g m}(\rho V_0 - m) = 10$ м.

Задача 16

Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с



массами $M_1 = 1$ кг и $M_2 = 2$ кг. В положении равновесия левый поршень расположен выше правого на величину $h = 10$ см. Когда на левый поршень поместили гирю массой $m = 2$ кг, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Какова будет разность высот поршней H, если гирю перенести на правый поршень?

Идея. Используйте формулу для гидростатического давления воды и условие равновесия поршней.

Указание 1. Введите площади поршней и запишите условия их равновесия для трех случаев.

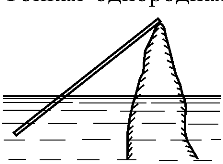
Указание 2. Исключите из полученных равенств площади поршней.

Решение. Пусть S_1 и S_2 – площади поршней, ρ – плотность воды. Из условия равновесия поршней следует: $\frac{M_1 g}{S_1} + \rho g h = \frac{M_2 g}{S_2}$ (в отсутствие гири), $\frac{(M_1 + m)g}{S_1} = \frac{M_2 g}{S_2}$ (когда гиря лежит на левом поршне), $\frac{M_1 g}{S_1} + \rho g H = \frac{(M_2 + m)g}{S_2}$ (когда гиря лежит на правом поршне). Выражая из первого и второго равенства S_1 и S_2, получаем $S_1 = \frac{m}{\rho h}$, $S_2 = \frac{m}{\rho h} \cdot \frac{M_2}{M_1 + m}$. Подставляя найденные S_1 и S_2 в третье равенство, находим $H = h\left(1 + \frac{M_1 + m}{M_2}\right) = \frac{5}{2} h = 25$ см.

Ответ. $H = h\left(1 + \frac{M_1 + m}{M_2}\right) = 25$ см.

Задача 17

Тонкая однородная палочка опирается одним концом о вершину острого камня, вы-

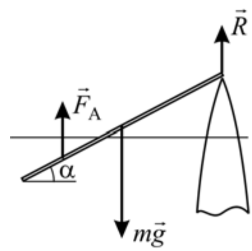


ступающего из воды. Другой конец палочки находится на плаву, причем погруженная в воду часть палочки в n раз меньше всей ее длины. Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3. Найти плотность ρ материала, из которого сделана палочка, если $n = 3$.

Идея. Воспользуйтесь законом Архимеда и уравнением моментов.

Указание. Введите длину палочки и площадь ее поперечного сечения. Запишите уравнение моментов относительно оси, проходящей через вершину камня.

Решение. Палочка находится в равновесии под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{F}_{\text{А}}$ – архимедова сила, $\vec{R}$ – сила реакции камня. Уравнение моментов, записанное относительно оси, проходящей через вершину камня, имеет вид $mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha = F_{\text{А}}\left(l-\dfrac{l}{2n}\right)\cos\alpha$, где l – длина палочки, l/n – длина ее погруженной части. Если S – площадь сечения палочки, то $m=\rho Sl$, $F_{\text{А}}=\rho_0\dfrac{Sl}{n}g.$. Объединяя выражения, получаем, что $\rho=\dfrac{\rho_0}{n}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=0{,}55\cdot 10^3$ кг/м^3.



Ответ. $\rho=\dfrac{\rho_0}{n}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=0{,}55\cdot 10^3$ кг/м^3.

1.4. Законы сохранения в механике

Задача 1

На прямолинейном горизонтальном участке пути стоят $N=5$ одинаковых вагонов. Промежутки между соседними вагонами одинаковы и равны $L=30$ м. К крайнему вагону подкатывается еще один такой же вагон, имеющий скорость $v_0=2$ м/с. В результате N последовательных столкновений, в каждом из которых сталкивающиеся вагоны сцепляются вместе, все $N+1$ вагонов соединяются в один состав. Найти время τ между первым и последним столкновениями. Силами сопротивления движению вагонов пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь законом сохранения импульса.

Указание 1. Примените закон сохранения импульса для каждого столкновения.

Указание 2. Найдите скорость состава после n-го столкновения и время между n-м и (n + 1)-м столкновениями.

Решение. Движущийся и покоящиеся вагоны представляют собой замкнутую механическую систему. Пусть m – масса одного вагона. По закону сохранения импульса для последовательных столкновений вагонов имеем $mv_0=2mv_1$, $2mv_1=3mv_2$, $3mv_2=4mv_3,\ldots$, где v_n – скорость состава после n-го столкновения. Отсюда следует, что $v_n=v_0/(n+1)$. Время, прошедшее между n-м и (n + 1)-м столкновениями, равно $t_n=\dfrac{L}{v_n}=\dfrac{L(n+1)}{v_0}$. Время, прошедшее между первым и последним (т.е. (N – 1)-м) столкновениями, $\tau = t_1 + t_2 + \ldots + t_{N-1} = \dfrac{L}{v_0}(2 + 3 + \ldots + N)$. По формуле для суммы арифметической прогрессии находим $\tau = \dfrac{L(N^2 + N - 2)}{2v_0} = 210$ с.

Ответ. $\tau = \dfrac{L(N^2 + N - 2)}{2v_0} = 210$ с.

Задача 2

Граната массой $m = 1$ кг разорвалась на высоте $h = 6$ м над землей на два осколка. Непосредственно перед разрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и по модулю равна $v = 10$ м/с. Один из осколков массой $m_1 = 0{,}4$ кг полетел вертикально вниз и упал на Землю под местом разрыва со скоростью $v_1 = 40$ м/с. Чему равен модуль скорости v_2 второго осколка сразу после разрыва? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Идея. Воспользуйтесь законом сохранения импульса и кинематическим законом равноускоренного движения.

Указание 1. Используя закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления, найдите скорости осколков сразу после разрыва гранаты.

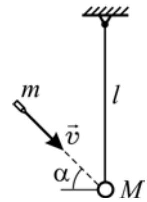
Указание 2. Запишите кинематическую связь между вертикальной проекцией скорости первого осколка сразу после разрыва и у поверхности Земли.

Решение. Обозначим через $v_{1\text{н}}$ модуль скорости первого осколка сразу после разрыва гранаты. Пренебрегая импульсом силы тяжести за время разрыва, по закону сохранения импульса имеем $mv = (m - m_1)v_{2x}$ (в проекции на горизонтальное направление), $m_1 v_{1\text{н}} = (m - m_1)v_{2y}$ (в проекции на вертикальное направление). Отсюда $v_{2x} = \dfrac{mv}{m - m_1}$, $v_{2y} = \dfrac{m_1 v_{1\text{н}}}{m - m_1}$. Скорость падения первого осколка на Землю и его скорость сразу после разрыва гранаты связаны кинематическим соотношением $v_1^2 = v_{1\text{н}}^2 + 2gh$. Следовательно, $v_{1\text{н}}^2 = v_1^2 - 2gh$. Учитывая, что $v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}$, находим $v_2 = \dfrac{1}{m - m_1}\sqrt{m^2 v^2 + m_1^2\left(v_1^2 - 2gh\right)} \approx 30{,}6$ м/с.

Ответ. $v_2 = \dfrac{1}{m - m_1}\sqrt{m^2 v^2 + m_1^2\left(v_1^2 - 2gh\right)} \approx 30{,}6$ м/с.

Задача 3

Шар массой $M = 1$ кг подвешен на невесомом жестком стержне длиной $l = 1{,}25$ м, шарнирно закрепленном за верхний конец. В шар попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 500$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, и застревает в нем. Определить максимальный угол β отклонения стержня от вертикали. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



И д е я. Воспользуйтесь законом сохранения импульса и законом сохранения механической энергии.

У к а з а н и е 1. Используйте закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление.

У к а з а н и е 2. Запишите закон сохранения механической энергии при движении шара с пулей.

Р е ш е н и е. Пусть u – модуль скорости шара с застрявшей в нем пулей непосредственно после соударения. По закону сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление имеем $mv\cos\alpha = (m + M)u$. При движении шара с пулей после соударения сохраняется механическая энергия, откуда следует, что высота подъема шара над нижней точкой $h = \dfrac{u^2}{2g}$. С другой стороны, $h = l(1 - \cos\beta)$. Отсюда находим

$$\beta = \arccos\left[1 - \frac{m^2 v^2 \cos^2\alpha}{2(m + M)^2 gl}\right] \approx 60°.$$

О т в е т. $\beta = \arccos\left[1 - \dfrac{m^2 v^2 \cos^2\alpha}{2(m + M)^2 gl}\right] \approx 60°.$

Задача 4

С горки высотой $h = 2$ м с углом наклона $\alpha = 45°$ начинают скатываться санки с нулевой начальной скоростью. Найти скорость v санок у основания горки, если на верхней половине горки коэффициент трения пренебрежимо мал, а на нижней половине коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

И д е я. Примените закон изменения механической энергии санок.

У к а з а н и е. Найдите работу силы трения.

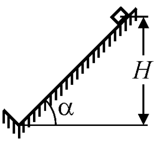
Р е ш е н и е. Длина участка горки, на котором коэффициент трения отличен от нуля, $S = \dfrac{h}{2\sin\alpha}$. Модуль силы трения, действующей на санки на этом участке,

$F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Работа силы трения $A_{тр} = -F_{тр}S = -\frac{1}{2}\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. По закону изменения механической энергии $\frac{mv^2}{2} - mgh = A_{тр}$. Отсюда $v = \sqrt{gh(2-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} \approx 6{,}1$ м/с.

О т в е т. $v = \sqrt{gh(2-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} \approx 6{,}1$ м/с.

Задача 5

С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, соскальзывает без



начальной скорости небольшое тело и ударяется о выступ, перпендикулярный наклонной плоскости. Считая удар о выступ абсолютно упругим, найти, на какую высоту h поднимется тело после удара. Начальная высота тела $H = 1$ м, коэффициент трения $\mu = 0{,}5$.

И д е я. Примените закон изменения механической энергии тела.

У к а з а н и е 1. Найдите работу силы трения.

У к а з а н и е 2. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии.

Р е ш е н и е. Пусть m – масса тела. Модуль силы трения, действующей на тело, $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Путь, пройденный телом по наклонной плоскости от начального до конечного положения, $S = \frac{H+h}{\sin\alpha}$. Следовательно, работа силы трения $A_{тр} = -F_{тр}S = -\mu mg(H+h)\mathrm{ctg}\,\alpha$. Поскольку в начальном и конечном положениях скорость тела равна нулю, по закону изменения механической энергии $mgh - mgH = A_{тр}$. Отсюда находим $h = H\cdot\frac{1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha} \approx 0{,}33$ м.

О т в е т. $h = H\cdot\frac{1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha} \approx 0{,}33$ м.

Задача 6

На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M = 100$ г. В брусок попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v_1 = 800$ м/с, и пробивает его насквозь. Скорость пули после вылета из бруска $v_2 = 200$ м/с. Какое количество энергии Q перешло во внутреннюю энергию тел в процессе удара? Трением бруска о плоскость пренебречь.

Идея. Примените закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Используйте закон сохранения импульса и определите скорость бруска после вылета пули.

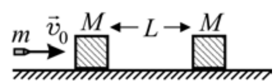
Указание 2. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии.

Решение. По закону сохранения импульса $mv_1 = mv_2 + Mu$, откуда скорость бруска после вылета из него пули $u = \frac{m}{M}(v_1 - v_2)$. По закону изменения механической энергии $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + Q$. Отсюда $Q = \frac{m}{2}(v_1 - v_2) \cdot \left[v_1 + v_2 - \frac{m}{M}(v_1 - v_2) \right] =$ $= 2820$ Дж.

Ответ. $Q = \frac{m}{2}(v_1 - v_2) \cdot \left[v_1 + v_2 - \frac{m}{M}(v_1 - v_2) \right] = 2820$ Дж.

Задача 7

На гладком горизонтальном столе покоятся два одинаковых кубика массой M каждый. В центр левого кубика попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v_0, направленной вдоль линии, соединяющей центры кубиков. Пробив насквозь левый кубик, пуля летит дальше со скоростью $v_0/2$, попадает в правый кубик и застревает в нем. Через какое время τ после попадания пули в левый кубик кубики столкнутся, если начальное расстояние между ними равно L? Размерами кубиков пренебречь.



Идея. Примените закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения импульса при взаимодействии пули с кубиками.

Указание 2. Найдите относительную скорость кубиков после взаимодействия с пулей.

Указание 3. Используйте кинематические уравнения для движения кубиков.

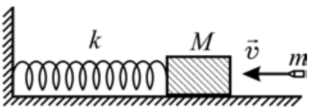
Решение. Пусть u_1 и u_2 – скорости брусков после соударения с пулей. Из закона сохранения импульса при взаимодействии пули с кубиками следуют равенства $mv_0 = Mu_1 + \frac{mv_0}{2}$, $\frac{mv_0}{2} = (m+M)u_2$, Отсюда $u_1 = \frac{m}{M} \cdot \frac{v_0}{2}$, $u_2 = \frac{m}{m+M} \cdot \frac{v_0}{2}$. Время полета пули с момента столкновения с левым кубиком до момента столкновения с правым кубиком равно $t_1 = \frac{2L}{v_0}$. За это время левый кубик сместился на расстояние

$x_1 = u_1 t_1 = \frac{m}{M} L$. Относительная скорость кубиков $u_{\text{отн}} = u_1 - u_2 = \frac{m^2 v_0}{2M(m+M)}$. Время, которое прошло с момента, когда пуля попала в правый кубик, до столкновения кубиков, $t_2 = \frac{L - x_1}{u_{\text{отн}}} = \frac{2L(M^2 - m^2)}{m^2 v_0}$. Искомое время $\tau = t_1 + t_2$. Объединяя записанные выражения, получаем $\tau = \frac{2L}{v_0} \cdot \frac{M^2}{m^2}$.

Ответ. $\tau = \frac{2L}{v_0} \cdot \frac{M^2}{m^2}$.

Задача 8

На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M = 4$ кг, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. В центр бруска попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально и параллельно пружине, и застревает в нем. Определить скорость пули v, если максимальное сжатие пружины после удара составило $\Delta l = 30$ см. Трением бруска о плоскость пренебречь.



Идея. Примените закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения импульса при взаимодействии пули и бруска.

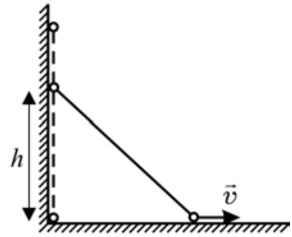
Указание 2. Воспользуйтесь законом сохранения механической энергии для системы тел «брусок – пуля – пружина».

Решение. Поскольку соударение пули с бруском является кратковременным, смещение бруска за время соударения пренебрежимо мало и сила упругости в момент соударения не возникает. Следовательно, суммарный импульс пули и бруска во время соударения сохраняется: $mv = (m + M)u$, где u – скорость бруска с застрявшей в нем пулей сразу после соударения. При последующем движении бруска и пули сохраняется механическая энергия, причем при достижении максимального сжатия пружины брусок с пулей останавливается. Следовательно, $\frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{k\Delta l^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $v = \frac{\Delta l}{m}\sqrt{(M+m)k} = 600$ м/с.

Ответ. $v = \frac{\Delta l}{m}\sqrt{(M+m)k} = 600$ м/с.

Задача 9

Два одинаковых маленьких шарика соединены невесомым жестким стержнем длиной $l = 60$ см. Стержень стоит вертикально вплотную к вертикальной плоскости. При смещении нижнего шарика вправо на малое расстояние система из шариков приходит в движение в плоскости рисунка. Найти модуль скорости нижнего шарика v в момент времени, когда верхний шарик находится на высоте $h = 40$ см над горизонтальной плоскостью. Считать, что при движении шарики не отрываются от плоскостей, трением пренебречь. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

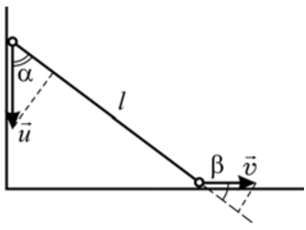


Идея. Примените закон сохранения механической энергии.

Указание 1. Определите связь между модулями скоростей концов стержня и углом, который составляет стержень с вертикальной стенкой.

Указание 2. Используйте закон сохранения механической энергии.

Решение. Поскольку длина стержня постоянна, проекции скоростей шариков на направление стержня в каждый момент времени совпадают. Обозначив через $\vec{u}$ скорость верхнего шарика, имеем (см. рисунок) $u\cos\alpha = v\cos\beta = v\sin\alpha$, откуда $u = v\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h}$.

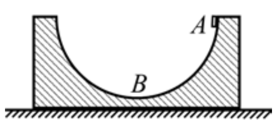


Из закона сохранения механической энергии шариков следует равенство $mgl = mgh + \dfrac{m(u^2 + v^2)}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $v = \dfrac{h}{l}\sqrt{2g(l - h)} \approx 1{,}33$ м/с.

Ответ. $v = \dfrac{h}{l}\sqrt{2g(l - h)} \approx 1{,}33$ м/с.

Задача 10

Сферическая чашка массой $M = 200$ г покоится на гладкой горизонтальной поверхности. По внутренней поверхности чашки из положения A начинает скользить без начальной скорости маленький брусок массой $m = 20$ г. Какую скорость v будет иметь чашка в тот момент, когда брусок достигнет наинизшей точки (положение B), если радиус чашки $R = 8$ см. Трением между всеми поверхностями пренебречь.

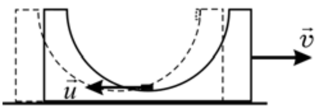


Идея. Примените законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Изобразите положение тел в тот момент, когда брусок достигает низшей точки.

Указание 2. Запишите законы сохранения импульса и энергии.

Решение. Положение тел в момент, когда брусок достигает низшей точки, изображено на рисунке сплошными линиями. Скорость бруска $\vec{u}$ направлена в этот момент горизонтально. Из законов сохранения импульса и механической энергии имеем $mu = Mv$, $mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$. Исключая u, получаем $v = m\sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}} \approx 11{,}9$ см/с.



Ответ. $v = m\sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}} \approx 11{,}9$ см/с.

Задача 11

Человек массой $M = 70$ кг, неподвижно стоявший на коньках, бросил вперед в горизонтальном направлении снежный ком массой $m = 3{,}5$ кг. Какую работу A совершил человек при броске, если после броска он откатился назад на расстояние $S = 0{,}2$ м? Коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0{,}01$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Идея. Примените закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Используйте закон сохранения импульса в системе «человек – снежный ком» при броске.

Указание 2. Запишите закон изменения механической энергии системы при броске снежного кома.

Решение. Пусть v и u – скорости снежного кома и человека сразу после броска. Совершенная при броске работа потрачена на сообщение кинетической энергии как снежному кому, так и самому человеку: $A = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$. Считая бросок кратковременным, можно пренебречь импульсом силы трения за время броска. Поэтому в момент броска сохраняется суммарный импульс снежного кома и человека, откуда следует, что $mv = Mu$. Закон изменения механической энергии при движении человека после броска дает соотношение $\frac{Mu^2}{2} = \mu MgS$. Объединяя записанные равенства, получаем $A = M\left(1 + \frac{M}{m}\right) \cdot \mu gS = 29{,}4$ Дж.

Ответ. $A = M\left(1+\dfrac{M}{m}\right)\cdot \mu g S = 29{,}4$ Дж.

Задача 12

При броске тела от поверхности Земли под некоторым углом к горизонту была совершена работа $A = 58{,}8$ Дж. На каком расстоянии S от места бросания тело упало на Землю, если его масса $m = 1$ кг, а максимальная высота подъема в полете $H = 3$ м? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Идея. Используйте закон изменения механической энергии и кинематические соотношения для движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Указание 1. Примените закон изменения механической энергии и определите модуль начальной скорости тела.

Указание 2. Воспользуйтесь кинематическими соотношениями для движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Решение. Обозначим через v_0 модуль скорости тела после броска. По условию $\dfrac{mv_0^2}{2} = A$, откуда $v_0 = \sqrt{\dfrac{2A}{m}}$. Максимальная высота подъема тела, брошенного под углом α к горизонту, $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$. Отсюда $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{2gH}{v_0^2}} = \sqrt{\dfrac{mgH}{A}}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{mgH}{A}}$. Учитывая, что дальность полета тела $L = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$, находим $S = 4H\sqrt{\dfrac{A}{mgH}-1} = 12$ м.

Ответ. $S = 4H\sqrt{\dfrac{A}{mgH}-1} = 12$ м.

Задача 13

Спутник запущен на круговую орбиту, проходящую на высоте $h = 350$ км над поверхностью Земли. Через некоторое время спутник перевели на другую круговую орбиту, радиус которой меньше на $\Delta h = 25$ км. На какую величину η изменилась при этом кинетическая энергия спутника по отношению к ее первоначальному значению? Радиус Земли $R = 6400$ км.

Идея. Используйте определение кинетической энергии тела.

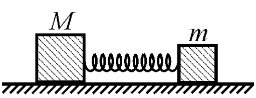
Указание. Для определения скорости движения спутника воспользуйтесь уравнением, описывающим движение тела по окружности, и законом всемирного тяготения.

Решение. Уравнение движения спутника по круговой орбите под действием силы притяжения Земли имеет вид $\frac{mv_1^2}{R+h}=G\frac{mM}{(R+h)^2}$, где m – масса спутника, v_1 – его скорость на первоначальной орбите, M – масса Земли, R – ее радиус, G – гравитационная постоянная. Отсюда $v_1^2=\frac{GM}{R+h}$. Аналогично $v_2^2=\frac{GM}{R+h-\Delta h}$, где v_2 – скорость спутника на новой орбите. Учитывая, что искомая величина $\eta=\frac{E_2-E_1}{E_1}=\frac{v_2^2-v_1^2}{v_1^2}$, получаем ответ: $\eta=\frac{\Delta h}{R+h-\Delta h}=3{,}7\cdot10^{-3}$. В результате этого маневра кинетическая энергия спутника увеличилась.

Ответ. $\eta=\frac{\Delta h}{R+h-\Delta h}=3{,}7\cdot10^{-3}$.

Задача 14

Между двумя кубиками массами m и M находится сжатая пружина. Если кубик массой M удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью v. С какой скоростью v_1 будет двигаться кубик массой m, если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях. Трением и массой пружины пренебречь.



Идея. Воспользуйтесь законами сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Запишите закон сохранения механической энергии для обоих случаев, рассматриваемых в условии задачи.

Указание 2. Примените закон сохранения импульса.

Решение. Обозначим через $E_п$ энергию сжатой пружины. Имеем $E_п=\frac{mv^2}{2}$, $E_п=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}$, где v_1 и v_2 – скорости кубиков, которые они приобретают, когда их отпускают одновременно. По закону сохранения импульса $mv_1=Mv_2$. Объединяя записанные выражения, получаем $v_1=v\sqrt{\frac{M}{m+M}}$.

Ответ. $v_1=v\sqrt{\frac{M}{m+M}}$.

Задача 15

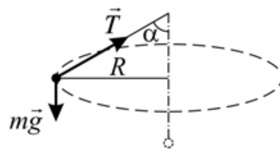
Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Его приводят в движение так, что он обращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, которая находится на расстоянии $l/2$ от точки подвеса. Какую работу A нужно совершить для сообщения шарику такого движения?

Идея. Примените закон изменения механической энергии.

Указание 1. Запишите уравнения движения шарика по окружности.

Указание 2. Найдите кинетическую и потенциальную энергии шарика.

Решение. Шарик движется по горизонтальной окружности под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{T}$ – сила натяжения нити. В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси неподвижной системы координат уравнения движения шарика имеют вид: $\dfrac{mv^2}{R} = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$.

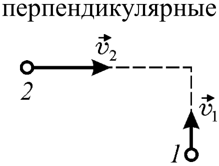


Учитывая, что $R = l\sin\alpha$, находим кинетическую энергию шарика $E_к = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mgl}{2}\text{tg}\,\alpha\sin\alpha$, Потенциальная энергия шарика относительно положения, занимаемого им в неподвижном состоянии, $E_п = mgl\cos\alpha$. По закону изменения механической энергии искомая работа $A = E_к + E_п = mgl\cos\alpha\left(\dfrac{1}{2}\text{tg}^2\,\alpha + 1\right)$. Поскольку по условию $\alpha = 60°$, ответ имеет вид $A = \dfrac{5}{4}mgl \approx 1{,}2$ Дж.

Ответ. $A = \dfrac{5}{4}mgl \approx 1{,}2$ Дж.

Задача 16

Пластилиновые шарики имеют одинаковые массы m и взаимно перпендикулярные скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, лежащие в одной плоскости. В результате столкновения шарики слипаются и движутся как одно целое. Какое количество теплоты Q выделилось при столкновении, если $m = 1$ г, $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 4$ м/с?

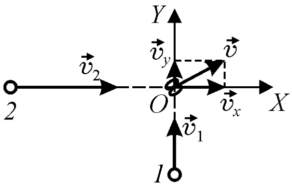


Идея. Примените закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Запишите закон сохранения импульса и найдите скорость слипшихся шариков.

Указание 2. Примените закон изменения механической энергии шариков.

Решение. Поскольку при столкновении шариков сохраняется импульс, в проекциях



на оси OX и OY координатной системы, изображенной на рисунке, имеем: $mv_2 = 2mv_x$, $mv_1 = 2mv_y$. Здесь v_x и v_y – проекции скорости $\vec{v}$ тела, образованного слипшимися шариками после удара. Отсюда $v^2 = \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2)$. По закону изменения механической энергии количество теплоты, выделившееся при ударе, $Q = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{2mv^2}{2} = \frac{1}{4}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) = 5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Ответ. $Q = \frac{1}{4}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) = 5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 17

Два тела массами $m_1 = 3{,}8$ г и $m_2 = 6$ г прикреплены к невесомой нити, перекинутой через блок с неподвижной осью. В начальный момент времени груз массой m_2 находится на высоте $h = 1$ м над горизонтальной поверхностью, и оба груза неподвижны. Затем грузы отпускают. Определить количество теплоты Q, выделившейся при неупругом ударе тела массой m_2 о горизонтальную поверхность, если это тело сразу после удара останавливается. Силами трения пренебречь. Блок считать невесомым.

Идея. Используйте закон сохранения и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения механической энергии при движении шариков.

Указание 2. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии при неупругом ударе.

Решение. По закону сохранения механической энергии при движении шариков имеем $(m_1 + m_2)gh = 2m_1gh + \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}$. Отсюда скорость шариков в конце движения (перед ударом шарика m_2 о горизонтальную поверхность) $v = \sqrt{2gh\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}$. Искомое количество теплоты $Q = \frac{m_2v^2}{2}$. Объединяя полученные выражения, находим

$$Q = m_2 \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot gh = 1{,}32 \cdot 10^{-2} \text{ Дж.}$$

Ответ. $Q = m_2 \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot gh = 1{,}32 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Задача 18

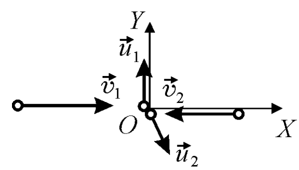
Шарик *1* массой $m = 200$ г движется равномерно со скоростью $v_1 = 10$ м/с. Навстречу ему движется шарик *2* такой же массой со скоростью $v_2 = 8$ м/с. После соударения шарик *1* стал двигаться перпендикулярно направлению его движения до соударения со скоростью $u_1 = 5$ м/с. Какое количество теплоты Q выделилось при соударении шариков?

Идея. Используйте закон сохранения импульса и закон изменения механической энергии.

Указание 1. Запишите закон сохранения импульса в проекции на взаимно перпендикулярные неподвижные координатные оси.

Указание 2. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии.

Решение. Из условия задачи ясно, что шарики испытывают нецентральное соударение (см. рисунок). Введем координатную систему, ось OX которой направим вдоль линии первоначального движения шариков, а ось OY – перпендикулярно этой линии, и запишем закон сохранения импульса в проекции на эти оси $mv_1 - mv_2 = mu_{2x}$, $mu_1 - mu_{2y} = 0$. Выражая отсюда проекции скорости второго шарика после удара $\vec{u}_2$, находим



квадрат ее модуля: $u_2^2 = (v_1 - v_2)^2 + u_1^2$. Выделившееся при ударе количество теплоты равно убыли кинетической энергии шариков: $Q = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \left(\frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}\right)$. Подставляя сюда найденное выше выражение для u_2^2, получаем $Q = m(v_1 v_2 - u_1^2) = 11$ Дж.

Ответ. $Q = m(v_1 v_2 - u_1^2) = 11$ Дж.

Задача 19

На гладком столе покоится брусок массой $M = 20$ г, прикрепленный пружиной жесткостью $k = 50$ Н/м к стене. В брусок ударяется шарик массой $m = 10$ г, движущийся по столу со скоростью $v_0 = 30$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Считая соударение шарика и бруска упругим, найти амплитуду A колебаний бруска после удара.

Идея. Примените законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Используя законы сохранения импульса и механической энергии при упругом ударе, найдите скорость бруска после соударения.

Указание 2. Воспользуйтесь законом сохранения энергии при свободных колебаниях без затухания.

Решение. Пусть после соударения шарик и брусок приобретают скорости u_1 и u_2 соответственно. По законам сохранения импульса и механической энергии имеем $mv_0 = mu_1 + Mu_2$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2}$. Из этой системы находим $u_2 = \frac{2m}{m+M} v_0$. При свободных гармонических колебаниях сохраняется механическая энергия, поэтому $\frac{mu_2^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. Отсюда находим $A = \frac{2v_0}{(1+M/m)}\sqrt{\frac{M}{k}} = 0{,}4$ м.

Ответ. $A = \frac{2v_0}{(1+M/m)}\sqrt{\frac{M}{k}} = 0{,}4$ м.

Задача 20

На горизонтальном участке пути длиной $L = 3$ км скорость поезда увеличилась от $v_1 = 36$ км/ч до $v_2 = 72$ км/ч. Какую массу топлива m израсходовал двигатель локомотива на этом участке? Суммарная масса поезда и локомотива $M = 1000$ т, сила сопротивления движению поезда пропорциональна его весу с коэффициентом пропорциональности $\mu = 0{,}005$, удельная теплота сгорания топлива $h = 42$ МДж/кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте закон изменения механической энергии.

Указание 1. Определите, на что затрачена совершенная двигателем работа.

Указание 2. Выразите работу, совершенную двигателем, через количество теплоты, выделившееся при сгорании топлива, и КПД двигателя.

Решение. Работа двигателя локомотива на данном участке пути затрачена на увеличение кинетической энергии поезда и на преодоление силы сопротивления: $A = \frac{M}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \mu MgL$. С другой стороны, $A = hm\frac{\eta}{100\%}$. Откуда находим $m = \frac{100\%}{\eta h} M\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \mu gL\right) \approx 23{,}8$ кг.

Ответ. $m = \frac{100\%}{\eta h} M\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \mu gL\right) \approx 23{,}8$ кг.

Задача 21

Система из двух шаров массами $m_1 = 0{,}6$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг, соединенных невесомой спицей длиной $l = 0{,}5$ м, вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной спице, с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Найти энергию системы E. Размерами шаров по сравнению с длиной спицы пренебречь.

Идея. Используйте выражение для кинетической энергии системы тел.

Указание 1. Запишите формулу для кинетической энергии шаров.

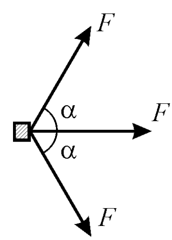
Указание 2. Найдите расстояния от шаров до центра тяжести системы.

Решение. Поскольку центр тяжести системы неподвижен, потенциальная энергия системы не изменяется и ее можно принять равной нулю. Кинетическая энергия шаров рассчитывается по формуле $E = \frac{m_1 v_2^2}{2} + \frac{m_1 v_2^2}{2}$, где $v_1 = \omega l_1$ и $v_2 = \omega l_2$ – линейные скорости шаров, l_1 и l_2 – расстояния от каждого из шаров до центра тяжести системы. Из определения центра тяжести следует, что $m_1 l_1 = m_2 l_2$, а по условию $l_1 + l_2 = l$. Отсюда находим $l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$, $l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \omega^2 l^2 = 0{,}1$ Дж.

Ответ. $E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \omega^2 l^2 = 0{,}1$ Дж.

Задача 22

На горизонтальной шероховатой поверхности находится маленький брусок. Если на брусок подействовать в течение очень короткого промежутка времени горизонтальной силой F, значительно превышающей силу трения скольжения, то после этого брусок пройдет до остановки путь S_0. Какой путь S пройдет до остановки этот брусок, если в течение того же промежутка времени на него одновременно подействовать тремя горизонтальными силами F, две из которых направлены под углами $\alpha = 60°$ к третьей?



Идея. Используйте законы изменения импульса и механической энергии.

Указание 1. Запишите законы изменения импульса и механической энергии в случае действия на брусок одной силы F.

Указание 2. Определите равнодействующую трех сил, действующих на брусок, и снова воспользуйтесь законами изменения импульса и механической энергии.

Решение. Обозначим через τ время действия силы F. По закону изменения импульса имеем $F\tau = mv_0$, где m – масса бруска, v_0 – скорость, которую он приобретает в результате действия силы F (импульсом силы трения за время τ по условию можно пренебречь). По закону изменения механической энергии имеем $\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgS_0$, где μ – коэффициент трения. Величина равнодействующей трех сил, действующих на брусок одновременно и направленных, как показано на рисунке, равна $F_\Sigma = F(1+2\cos\alpha)$. Законы изменения импульса и энергии в этом случае дают равенства $F_\Sigma \tau = mv$, $\frac{mv^2}{2} = \mu mgS$. Объединяя записанные выражения, находим, что $S = (1+2\cos\alpha)^2 S_0 = 4S_0$.

Ответ. $S = (1+2\cos\alpha)^2 S_0 = 4S_0$.

Задача 23

Молекулярный пучок составляют одинаковые молекулы, движущиеся с одинаковыми скоростями $v = 500$ м/с. Масса молекулы $m = 4{,}8\cdot 10^{-26}$ кг. На пути пучка установлен экран, плоскость которого перпендикулярна вектору $\vec{v}$. Найти давление p, оказываемое пучком на экран. Число молекул в единице объема пучка $n = 3\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Удар молекулы об экран считать абсолютно упругим.

Идея. Используйте определение импульса силы и закон изменения импульса при упругом ударе.

Указание 1. Найдите величину изменения импульса при упругом соударении с экраном одной молекулы.

Указание 2. Примените закон изменения импульса для N ударяющихся молекул.

Указание 3. Воспользуйтесь определением давления.

Решение. При абсолютно упругом ударе об экран импульс молекулы меняется на величину, по модулю равную $\Delta p_1 = 2mv$. По второму закону Ньютона модуль импульса силы, действующей на экран со стороны молекул, $F\Delta t = N\Delta p_1$, где $N = nSv\Delta t$ – число молекул, ударяющихся об экран за время Δt, S – площадь экрана. Из записанных равенств следует, что $F = 2mnv^2 S$. Учитывая, что давление $p = F/S$, получаем $p = 2nmv^2 = 720$ кПа.

Ответ. $p = 720$ кПа.

Задача 24

Правая чаша рычажных весов находится под мелким моросящим дождем, а левая укрыта от дождя навесом. Каждая чаша представляет собой тонкостенную цилиндрическую емкость с площадью дна $S = 0{,}05$ м^2 и высотой бортика $h = 1$ мм. Интенсивность равномерно падающего дождя такова, что дождевая вода целиком заполняет предварительно опорожненную чашу весов за время $\tau = 30$ с. Какой массы m гирю нужно положить на левую чашу весов, чтобы уравновесить весы в случае, когда правая чаша заполнена дождевой водой до краев? Капли дождя падают вертикально со скоростью $v = 3$ м/с. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Соударение капель с водой в чаше считать неупругим.

Идея. Используйте закон изменения импульса капель при неупругом соударении с водой.

Указание 1. Запишите закон изменения импульса при неупругом соударении капель с водой, попадающих в чашу за время Δt.

Указание 2. Определите силу, действующую на полностью заполненную чашу весов, учитывающую силу давления падающих капель.

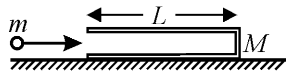
Решение. На правую чашу весов, заполненную водой до краев, действует сила $F = Mg + N$, где $M = \rho Sh$ – масса воды в этой чаше, N – сила давления падающих капель дождя. Поскольку соударение капель с водой, находящейся в чаше, является неупругим, по второму закону Ньютона имеем $\Delta m \cdot v = (N - \Delta m \cdot g)\Delta t$, где $\Delta m = \dfrac{M}{\tau}\Delta t$ – масса дождевых капель, попадающих в чашу за малое время Δt. Отсюда $N\Delta t = \dfrac{Mv}{\tau}\Delta t + \dfrac{Mg}{\tau}\Delta t^2$. Учитывая малость Δt, находим, что приближенно $N \approx \dfrac{Mv}{\tau}$.

Весы будут уравновешены, если масса гири на левой чаше $m = \dfrac{F}{g} = \rho Sh + \dfrac{N}{g}$. Объединяя записанные выражения, получаем $m = \rho Sh\left(1 + \dfrac{v}{g\tau}\right) = 50{,}5$ г.

Ответ. $m = \rho Sh\left(1 + \dfrac{v}{g\tau}\right) = 50{,}5$ г.

Задача 25

На гладком горизонтальном столе покоится трубка массой M и длиной L, закрытая с одного торца. В открытый конец трубки влетает маленький шарик массой m со скоростью, направленной вдоль оси трубки. После упругого удара о закрытый торец трубки шарик вылетает наружу. Какой путь S относительно стола пройдет шарик за время, которое он будет находиться внутри трубки? Размером шарика и трением между всеми поверхностями пренебречь.



Идея. Используйте законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Запишите законы сохранения импульса и кинетической энергии в системе тел «шарик + трубка».

Указание 2. Определите относительную скорость шарика и трубки после удара.

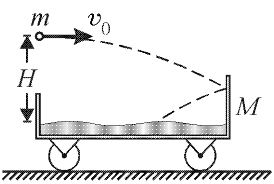
Решение. Пусть начальная скорость шарика v_0. Из законов сохранения импульса и кинетической энергии в системе «шарик + трубка» следует, что $mv_0 = MV + mv$, $mv_0^2 = MV^2 + mv^2$, где V и v – скорости трубки и шарика после соударения. Из этой системы находим $V = \frac{2m}{M+m}v_0$, $v = \frac{m-M}{M+m}v_0$. Поскольку относительная скорость этих тел после удара $V_{\text{отн}} = V - v = v_0$, время, которое шарик движется после соударения внутри трубки, $\tau = \frac{L}{V_{\text{отн}}} = \frac{L}{v_0}$. За это время он проходит путь $S' = |v|\tau = \frac{|m-M|}{M+m}L$.

Полный путь, пройденный шариком, $S = L + S'$. Отсюда находим $S = L\left(1 + \frac{|m-M|}{M+m}\right)$.

Ответ. $S = L\left(1 + \frac{|m-M|}{M+m}\right)$.

Задача 26

На горизонтальных рельсах стоит тележка массой M. В нее бросают шар массой m, который ударяется о правую стенку тележки и падает на ее дно, застревая в насыпанном на дно песке. В момент, когда шар пролетал над левой стенкой тележки, его скорость была равна $v_0 = 4$ м/с и направлена горизонтально, а высота над поверхностью песка составляла $H = 1{,}8$ м. Какой путь S пройдет тележка к моменту падения шара на песок, если длина тележки $L = 2$ м? Удар шара о стенку считать абсолютно упругим, стенку и шар – гладкими, трением при движении тележки и размером шара пренебречь. При расчете положить $m = M/9$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



Идея. Используйте законы сохранения импульса и энергии при ударе шара о стенку тележки.

Указание 1. Запишите закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось и закон сохранения механической энергии. Найдите скорость тележки после удара.

Указание 2. Из кинематических уравнений определите время движения тележки до момента падения шара на песок.

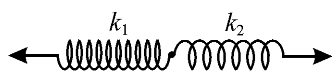
Решение. При упругом ударе шара о правую стенку тележки сохраняются горизонтальная проекция импульса и механическая энергия. Имеем $mv_0 = Mu - mv$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$, где u – скорость тележки, v – горизонтальная проекция скорости шара после удара. Из этой системы находим $u = \frac{2m}{M+m}v_0 = 0{,}2v_0$. Поскольку вертикальная проекция скорости шара при ударе о гладкую стенку не меняется, время τ

движения мяча с момента, когда он пролетает над левой стенкой, до попадания в песок равно времени свободного падения с высоты H: $\tau=\sqrt{2H/g}$. Время движения мяча с момента, когда он пролетает над левой стенкой, до удара о правую стенку $\tau_1=L/v_0$. Приобретя после удара скорость u, тележка пройдет до момента падения шара на песок путь $S=u(\tau-\tau_1)$. Отсюда находим $S=\frac{2mv_0}{M+m}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}-\frac{L}{v_0}\right)=8$ см.

Ответ. $S=\frac{2mv_0}{M+m}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}-\frac{L}{v_0}\right)=8$ см.

Задача 27

Две пружины, соединенные, как показано на рисунке, имеют жесткости $k_1=15$ Н/м и $k_2=10$ Н/м. Пружины растянули за свободные концы в разные стороны, совершив работу $A=1$ Дж. Каковы потенциальные энергии E_1 и E_2 деформации каждой из пружин по отдельности?



Идея. Воспользуйтесь законом Гука и выражением для потенциальной энергии упругой деформации пружины.

Указание 1. Запишите закон Гука для системы пружин.

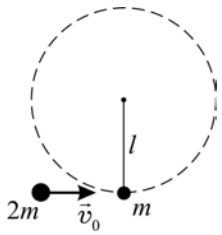
Указание 2. Определите эквивалентную жесткость двух последовательно соединенных пружин и найдите потенциальные энергии деформации каждой пружины.

Решение. При растяжении пружин, соединенных последовательно, возникающие в них силы упругости одинаковы. Следовательно, $k_1\Delta l_1=k_2\Delta l_2$, где Δl_1 и Δl_2 – абсолютные удлинения пружин. Их сумма равна общему удлинению Δl системы: $\Delta l_1+\Delta l_2=\Delta l$. Отсюда $\Delta l_1=\Delta l\frac{k_2}{k_1+k_2}$, $\Delta l_2=\Delta l\frac{k_1}{k_1+k_2}$. Жесткость двух пружин, соединенных последовательно, $k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$. Поэтому работа по их растяжению $A=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{\Delta l^2}{2}$, откуда $\frac{\Delta l^2}{2}=\frac{A(k_1+k_2)}{k_1k_2}$. Потенциальные энергии деформации пружин $E_1=\frac{k_1\Delta l_1^2}{2}$, $E_2=\frac{k_2\Delta l_2^2}{2}$. Объединяя записанные выражения, получаем $E_1=A\frac{k_2}{k_1+k_2}=0{,}4$ Дж, $E_2=A\frac{k_1}{k_1+k_2}=0{,}6$ Дж.

Ответ. $E_1=A\frac{k_2}{k_1+k_2}=0{,}4$ Дж, $E_2=A\frac{k_1}{k_1+k_2}=0{,}6$ Дж.

Задача 28

Шарик массой m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м. В него ударяется шарик массой $2m$, летящий в плоскости рисунка со скоростью $\vec{v}_0$ так, что вектор скорости направлен горизонтально вдоль линии, соединяющей центры шаров. Каким должен быть модуль скорости v_0, чтобы после удара шарик массой m совершил полный оборот по окружности в вертикальной плоскости? Удар считать абсолютно упругим, силы трения не учитывать. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.



Идея. Используйте законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения проекции импульса на горизонтальное направление и законом сохранения механической энергии при соударении шариков.

Указание 2. Запишите закон сохранения механической энергии для шарика, закрепленного на нити, после удара.

Указание 3. Определите условие, при котором скорость, сообщаемая шарику для его полного оборота, будет минимальной.

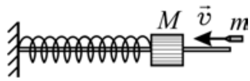
Решение. При соударении шариков сохраняется проекция импульса на горизонтальное направление и кинетическая энергия системы. Обозначив через v_1 и v_2 модули скоростей шариков m и $2m$ после удара, имеем $2mv_0 = mv_1 + 2mv_2$, $2m\dfrac{v_0^2}{2} = m\dfrac{v_1^2}{2} + 2m\dfrac{v_2^2}{2}$. Так как сила натяжения нити T работу не совершает, при движении шарика m после удара сохраняется его полная механическая энергия. Для нижней и верхней точек окружности, по которой движется этот шарик, получаем $m\dfrac{v_1^2}{2} = 2mgl + m\dfrac{u^2}{2}$, где u – модуль скорости шарика в верхней точке. Уравнение движения шарика в верхней точке окружности имеет вид $m\dfrac{u^2}{l} = mg + T$. Отсюда следует, что u минимально, если натяжение нити в верхней точке обращается в нуль, т.е. $m\dfrac{u_{\min}^2}{l} = mg$. Объединяя записанные выражения, получаем $v_0 = \dfrac{3}{4}\sqrt{5gl} = 5{,}25$ м/с.

Ответ. $v_0 = \dfrac{3}{4}\sqrt{5gl} = 5{,}25$ м/с.

1.5. Механические колебания и волны

Задача 1

Тело массой $M = 10$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной с неподвижной стенкой. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль стержня. Тело вместе с застрявшей в нем пулей начинает совершать колебания с амплитудой $A = 10$ см. Найти период T колебаний тела.



Идея. Используйте законы сохранения и формулу для периода колебаний пружинного маятника.

Указание 1. Запишите закон сохранения импульса и найдите скорость тела и пули после соударения.

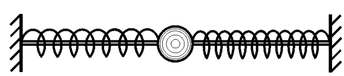
Указание 2. Определите период колебаний тела с застрявшей в нем пулей.

Решение. Полагая длительность взаимодействия пули с телом при соударении пренебрежимо малой, можно применить для соударения закон сохранения импульса $mv = (M + m)u$, где u – скорость тела и пули сразу после соударения. Приобретя такую скорость, тело с застрявшей в нем пулей начинает совершать гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$. По закону сохранения механической энергии $\dfrac{(M+m)u^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}$. Объединяя записанные соотношения, получаем $T = 2\pi\dfrac{M+m}{mv}A \approx$ $\approx 1{,}26$ с.

Ответ. $T = 2\pi\dfrac{M+m}{mv}A \approx 1{,}26$ с.

Задача 2

Шарик, надетый на гладкую горизонтальную спицу, прикреплен к концам двух невесомых пружин. Вторые концы пружин заделаны в неподвижные стенки так, что в положении равновесия шарика пружины не деформированы. Каков период T колебаний шарика, если известно, что при поочередном подвешивании шарика к каждой из пружин по отдельности их удлинения составили $h_1 = 4$ см и $h_2 = 6$ см? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



Идея. Используйте формулу для периода колебаний пружинного маятника.

Указание 1. Из условия равновесия шарика, подвешиваемого к пружинам, выразите их жесткости.

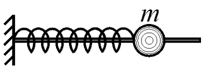
Указание 2. Найдите эквивалентную жесткость пружин, прикрепленных к шарику.

Решение. Пусть m – масса шарика. Из условий равновесия шарика при его поочередном подвешивании на пружинах следует, что $mg = k_1 h_1$, $mg = k_2 h_2$. Отсюда $k_1 = \frac{mg}{h_1}$, $k_2 = \frac{mg}{h_2}$. Когда шарик с прикрепленными к нему пружинами надет на стержень, его смещение от положения равновесия вызывает одинаковые по модулю деформации пружин, причем направления сил упругости, возникающих в пружинах, совпадают. Потому эквивалентная жесткость пружин $k = k_1 + k_2$. Период колебаний шарика на пружине с такой жесткостью равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Объединяя полученные выражения, находим $T = 2\pi\sqrt{\frac{h_1 h_2}{g(h_1 + h_2)}} \approx 0{,}31$ с.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{h_1 h_2}{g(h_1 + h_2)}} \approx 0{,}31$ с.

Задача 3

Тело массой $m = 1$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, совершает сво-



бодные гармонические колебания под действием пружины. Какова полная механическая энергия колебаний E, если амплитуда колебаний $A = 0{,}2$ м, а модуль максимального ускорения тела в процессе колебаний $a_{max} = 3$ м/с^2?

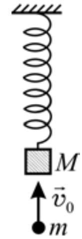
Идея. Воспользуйтесь уравнением движения пружинного маятника.

Указание. Используйте связь между амплитудой смещения и амплитудой ускорения пружинного маятника.

Решение. В проекции на ось, вдоль которой движется тело, уравнение его колебаний под действием пружины жесткостью k имеет вид $ma = -kx$, где a – ускорение тела, x – его смещение от положения равновесия. Отсюда $|a| = \frac{k}{m}|x|$ и, следовательно, $a_{max} = \frac{k}{m}A.$ Учитывая, что полная механическая энергия колебаний равна $E = \frac{kA^2}{2}$, находим $E = \frac{1}{2}mAa_{max} = 0{,}3$ Дж.

Ответ. $E = \frac{1}{2}mAa_{max} = 0{,}3$ Дж.

Задача 4



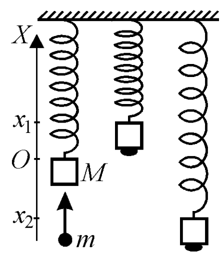
Брусок массой $M = 100$ г подвешен на невесомой пружине жесткостью $k = 1$ Н/м. Снизу в него попадает пластилиновый шарик массой $m = 1$ г, летящий вертикально вверх со скоростью $v_0 = 2{,}5$ м/с, и прилипает к бруску. Найти амплитуду A возникающих при этом гармонических колебаний. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте законы сохранения импульса и механической энергии, а также определение амплитуды колебаний.

Указание 1. Примените закон сохранения импульса и найдите скорость бруска после прилипания к нему пластилинового шарика.

Указание 2. Используйте закон сохранения механической энергии и найдите координаты верхнего и нижнего положения бруска. Воспользуйтесь определением амплитуды колебаний.

Решение. Выберем начало отсчета в положении равновесия бруска до прилипания шарика, ось OX направим вверх. В этом состоянии пружина растянута на величину $x_0 = Mg/k$. По закону сохранения импульса в момент прилипания шарика имеем $mv_0 = (M+m)u$, откуда $u = \dfrac{mv_0}{M+m}$. В точках максимального смещения от нового положения равновесия скорость бруска и шарика равна нулю. Из закона сохранения механической энергии следует равенство $\dfrac{(M+m)u^2}{2} + \dfrac{kx_0^2}{2} = (M+m)gx + \dfrac{k(x-x_0)^2}{2}$. Подставляя в это равенство найденные ранее x_0 и u, получаем квадратное уравнение относительно x, а именно $x^2 + \dfrac{2mg}{k}x - \dfrac{m^2v_0^2}{k(M+m)} = 0$. Разрешая это уравнение, получаем два корня, которые соответствуют координатам верхней и нижней точек движения бруска с шариком: $x_{1,2} = -\dfrac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2 + \dfrac{m^2v_0^2}{k(M+m)}}$.

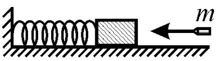


Амплитуда колебаний равна $A = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2) = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1 + \dfrac{k}{M+m}\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2} \approx 1{,}3$ см.

Ответ. $A = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1 + \dfrac{k}{M+m}\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2} \approx 1{,}3$ см.

Задача 5

На гладком горизонтальном столе лежит деревянный брусок, прикрепленный пружиной к вертикальной стенке. В брусок попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально вдоль оси пружины, и застревает в нем. Определить жесткость пружины k, если известно, что время, в течение которого сжималась пружина после попадания пули в брусок, $T = 0{,}1$ с, отношение количества теплоты, выделившейся при взаимодействии пули с бруском, к начальной кинетической энергии пули $\alpha = 0{,}9$. Трением бруска о стол, а также массой пружины пренебречь.



Идея. Воспользуйтесь законами сохранения импульса и изменения механической энергии.

Указание. Используйте формулу для периода колебаний пружинного маятника.

Решение. Обозначим через v скорость пули перед ударом, а через M – массу бруска. Из закона сохранения импульса и закона изменения механической энергии следуют равенства $mv = (M+m)u$, $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{(M+m)u^2}{2} + Q$, где u – скорость пули и бруска после соударения, Q – количество теплоты, выделившейся при взаимодействии пули с бруском, причем по условию $Q = \alpha\dfrac{mv^2}{2}$. Время T, в течение которого сжималась пружина, равно четверти периода колебаний тела массой $(M+m)$ на пружине жесткостью k, т.е. $T = \dfrac{2\pi}{4}\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$. Объединяя записанные выражения, получаем $k = \dfrac{\pi^2 m}{4T^2(1-\alpha)} = 25$ Н/м.

Ответ. $k = \dfrac{\pi^2 m}{4T^2(1-\alpha)} = 25$ Н/м.

Задача 6

Гиря массой $m = 1$ кг, подвешенная на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $A = 0{,}2$ м и периодом $T = 2$ с. Определить силу натяжения пружины F в момент, когда гиря достигает нижней точки. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Идея. Используйте закон Гука и формулу для периода колебаний пружинного маятника.

Указание 1. Определите положение равновесия гири.

Указание 2. Найдите растяжение пружины в тот момент, когда гиря достигает нижней точки, и примените закон Гука.

Решение. Будем отсчитывать координату гири относительно точки подвеса пружины, координатную ось OX направим вниз. Пусть длина недеформированной пружины l_0, а ее жесткость k. Тогда координата положения равновесия гири x_0 определится из условия $mg = k(x_0 - l_0)$, откуда $x_0 = l_0 + mg/k$. Гиря совершает колебания относительно положения равновесия с амплитудой A, поэтому в нижней точке координата гири будет $x_{max} = x_0 + A$. По закону Гука сила растяжения пружины при этом равна $F = k(x_{max} - l_0) = mg + kA$. Поскольку период колебаний гири $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, жесткость пружины $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}$. Объединяя полученные выражения, находим, что $F = m\left(g + \dfrac{4\pi^2 A}{T^2}\right) \approx 11{,}8$ Н.

Ответ. $F = m\left(g + \dfrac{4\pi^2 A}{T^2}\right) \approx 11{,}8$ Н.

Задача 7

Тело массой $m = 1$ кг, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жесткостью $k = 10$ Н/м с неподвижной стенкой. Тело сместили на некоторое расстояние от положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Через какое минимальное время t_0 после начала движения тела его кинетическая энергия будет в $n = 3$ раза больше потенциальной энергии пружины?

Идея. Используйте закон движения пружинного маятника.

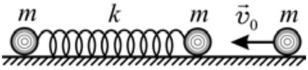
Указание. Найдите зависимость от времени кинетической энергии тела и потенциальной энергии пружины.

Решение. Зависимость смещения колеблющегося тела от времени имеет вид $x = x_0 \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$. Скорость тела меняется по закону $v = -x_0\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$. Следовательно, зависимости кинетической энергии тела и потенциальной энергии пружины от времени таковы: $E_к = \dfrac{mx_0^2}{2}\cdot\dfrac{k}{m}\cdot\sin^2\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$, $E_п = \dfrac{kx_0^2}{2}\cdot\cos^2\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$. По условию задачи $E_к = nE_п$. Следовательно, $\mathrm{tg}\sqrt{\dfrac{k}{m}}t_0 = \sqrt{n}$ и $t_0 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{n} \approx 0{,}1$ с.

Ответ. $t_0 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{n} \approx 0{,}1$ с.

Задача 8

Два одинаковых шарика массой m каждый, связанные пружиной жесткостью k и длиной l, лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий такой же шарик движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры шариков, связанных пружиной, и совершает упругое соударение с одним из них. Определить максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении. Принять, что $v_0 < l\sqrt{2k/m}$. Массой пружины, временем соударения и трением пренебречь.



Идея. Используйте законы сохранения импульса и механической энергии.

Указание 1. Найдите скорости шариков после удара.

Указание 2. Воспользуйтесь связью между скоростями шариков в моменты времени, когда расстояние между ними максимально или минимально.

Решение. Из законов сохранения импульса и энергии, записанных для упругого соударения одинаковых по массе шариков, следует, что они при ударе обмениваются скоростями. Поэтому после соударения двигавшийся шарик остановится, а покоившийся приобретет скорость v_0. При последующем движении шариков, связанных пружиной, также будут сохраняться импульс и энергия. Учитывая, что в моменты времени, когда расстояния между шариками максимальны или минимальны, их относительная скорость обращается в нуль, для этих моментов времени имеем $mv_0 = 2mv$, $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$, где v – скорость шариков, x – удлинение пружины. Исключая из этих соотношений v, находим $x = \pm v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$. Следовательно, $l_{\max} = l + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $l_{\min} = l - v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Ответ. $l_{\max} = l + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $l_{\min} = l - v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Задача 9

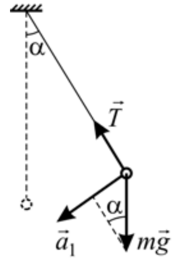
Маленький шарик, подвешенный на нити, отклоняют от положения равновесия и отпускают без начальной скорости. Определить, с каким по модулю ускорением a_1 начнет двигаться шарик, если известно, что в момент прохождения шариком нижней точки траектории модуль его ускорения равен $a_2 = 15$ м/с^2. Нить считать невесомой и нерастяжимой, сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте закон сохранения механической энергии.

Указание 1. Определите направление и величину ускорения шарика в начальный момент времени.

Указание 2. Воспользуйтесь законом сохранения механической энергии и формулой, связывающей ускорение и скорость тела, совершающего движение по окружности.

Решение. Пусть m – масса шарика, l – длина нити, α – начальный угол отклонения маятника. Поскольку ускорение шарика в начальный момент времени направлено по касательной к траектории, модуль ускорения a_1 определяется проекцией силы тяжести $m\vec{g}$ на это направление, т.е. $a_1 = g\sin\alpha$. По закону сохранения энергии $\dfrac{mv^2}{2} = mgl(1-\cos\alpha)$, где v – скорость шарика в нижней точке. Ускорение шарика в этой точке равно $a_2 = \dfrac{v^2}{l}$. Объединяя записанные выражения, получаем $a_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_2(4g-a_2)} \approx 9{,}7$ м/с^2.



Ответ. $a_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_2(4g-a_2)} \approx 9{,}7$ м/с^2.

Задача 10

Математический маятник совершает малые колебания. Известно, что через время $\tau = 0{,}314$ с после прохождения маятником положения равновесия его отклонение составило некоторую величину α_0, а через время 2τ – величину $\sqrt{3}\alpha_0$. Найти длину маятника l, если 2τ меньше полупериода его колебаний. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Идея. Используйте закон движения математического маятника.

Указание. Запишите зависимость угла отклонения маятника от времени.

Решение. Пусть в момент прохождения маятником положения равновесия $t = 0$. Тогда зависимость угла отклонения маятника от времени имеет вид $\alpha(t) = A\sin\omega t$, где A – амплитуда колебаний, ω – угловая частота. По условию $\alpha_0 = A\sin\omega\tau$, $\sqrt{3}\alpha_0 = A\sin 2\omega\tau$. Поскольку $\sin 2\omega\tau = 2\sin\omega\tau\cos\omega\tau$, из этих равенств следует, что $\cos\omega\tau = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, или $\omega\tau = \dfrac{\pi}{6}$. Учитывая, что $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, получаем $l = 36g\left(\dfrac{\tau}{\pi}\right)^2 = 3{,}6$ м.

Ответ. $l = 36g\left(\dfrac{\tau}{\pi}\right)^2 = 3{,}6$ м.

Задача 11

На ракете, взлетающей вертикально с постоянным ускорением $a = 1{,}25g$, установлены маятниковые часы. Точно такие же часы расположены на поверхности Земли. На какое время Δt будут отличаться показания этих часов по истечении $\tau = 1$ мин. после взлета ракеты? Время τ измерено по часам, находящимся на Земле. Зависимостью ускорения свободного падения g от высоты пренебречь.

Идея. Перейдите в систему отсчета, связанную с ракетой.

Указание 1. Определите частоту колебаний маятника часов, установленных на ракете.

Указание 2. Используйте связь между частотой колебаний маятника и показаниями часов.

Решение. По закону сложения ускорений модуль ускорения свободного падения в системе отсчета, связанной с ракетой, равен $g' = g + a$. Следовательно, частота малых колебаний маятника, установленного на ракете, $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g'}{l}} = \sqrt{\dfrac{g+a}{l}}$, где l – длина нити. Частота колебаний маятника, находящегося на Земле, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Так как показания часов пропорциональны числу колебаний маятника за рассматриваемое время, то по истечении времени полета τ часы на ракете покажут время $t_1 = \tau\sqrt{1 + \dfrac{a}{g}}$, т.е. уйдут вперед на $\Delta t = \tau\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{g}} - 1\right) = 0{,}5$ мин.

Ответ. Часы на ракете уйдут вперед на $\Delta t = \tau\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{g}} - 1\right) = 0{,}5$ мин.

Задача 12

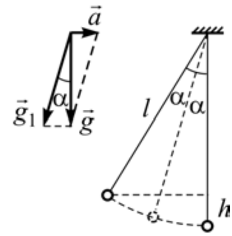
К потолку покоящегося вагона на нити длиной l подвешен маленький шарик. В некоторый момент времени вагон приходит в движение в горизонтальном направлении с постоянным ускорением a. На какую максимальную высоту h относительно своего начального положения поднимется шарик? Ускорение свободного падения g.

Идея. Перейдите в систему отсчета, связанную с вагоном.

Указание 1. Найдите угол, который образует с вертикалью ускорение свободного падения в системе, связанной с вагоном.

Указание 2. Найдите амплитуду колебаний маятника и максимальный угол отклонения маятника от вертикали.

Решение. По закону сложения ускорений ускорение свободного падения относительно системы отсчета, связанной с вагоном, $\vec{g}_1 = \vec{g} - \vec{a}$. Из рисунка видно, что модуль этого ускорения равен $g_1 = \sqrt{a^2 + g^2}$, а само ускорение образует с вертикалью угол α, причем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{g}$. Следовательно, в момент начала движения вагона маятник оказывается отклоненным от первоначального положения равновесия на угол α. В результате возникших колебаний максимальный угол отклонения маятника от вертикали составит 2α. Как видно из рисунка, $h = l(1-\cos 2\alpha) = 2l\sin^2\alpha$. Используя формулу $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, получаем



$$h = \frac{2la^2}{g^2 + a^2}.$$

Ответ. $h = \dfrac{2la^2}{g^2 + a^2}$.

Задача 13

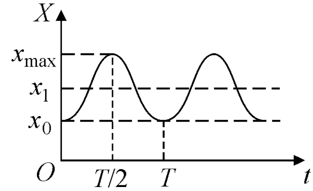
К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью k подвешена гиря массой m. В некоторый момент времени лифт начинает движение вверх с постоянным ускорением a. Какой путь S пройдет кабина лифта к тому моменту, когда длина пружины первый раз станет максимальной?

Идея. Перейдите в систему отсчета, связанную с кабиной лифта.

Указание 1. Найдите положение равновесия гири в системе отсчета, связанной с кабиной.

Указание 2. Определите момент времени, когда длина пружины примет максимальное значение.

Решение. Совместим начало системы отсчета, связанной с кабиной лифта, с нижним концом недеформированной пружины; координатную ось Ox направим вертикально вниз. Когда кабина неподвижна, координата гири в положении равновесия равна $x_0 = mg/k$. В момент начала движения кабины скачком смещается вниз положение равновесия гири, координата которой в равновесии становится равной $x_1 = m(g+a)/k$.



В результате начинаются гармонические колебания гири с периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. График зависимости координаты гири x от времени t изображен на рисунке, на котором $t = 0$ соответствует моменту начала движения кабины. Как видно из рисунка, время τ, за которое длина пружины достигает максимального значения, равно половине периода колебаний гири: $\tau = T/2$. Путь, пройденный кабиной за это время, $S = \dfrac{a\tau^2}{2}$.

Объединяя записанные выражения, получаем $S = \dfrac{\pi^2 am}{2k}$.

Ответ. $S = \dfrac{\pi^2 am}{2k}$.

Задача 14

Математический маятник отклонили от положения равновесия на малый угол $\alpha_0 = 0{,}1$ рад и отпустили без начальной скорости, после чего маятник стал совершать гармонические колебания. Найти максимальную величину $v_{y\max}$ вертикальной составляющей скорости маятника. Длина маятника $l = 0{,}4$ м. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$.

Идея. Используйте закон движения математического маятника.

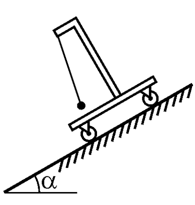
Указание 1. Найдите зависимость от времени угла отклонения и скорости маятника.

Указание 2. Найдите модуль вертикальной составляющей скорости маятника.

Решение. Угол отклонения маятника от вертикали изменяется во времени по закону: $\alpha = \alpha_0 \cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ – циклическая частота. Следовательно, модуль линейной скорости маятника $|v| = l|\dot{\alpha}|$ зависит от времени следующим образом: $|v| = \alpha_0 l\omega|\sin\omega t|$. Модуль вертикальной составляющей скорости маятника равен $|v_y| = |v\sin\alpha| \approx |v\alpha| = \alpha_0^2 l\omega|\sin\omega t\cos\omega t| = \dfrac{\alpha_0^2 l\omega}{2}|\sin 2\omega t|$. Максимальное значение этой величины достигается при $|\sin 2\omega t| = 1$. Следовательно, $v_{y\max} = \dfrac{1}{2}\alpha_0^2\sqrt{gl} = 1$ см/с.

Ответ. $v_{y\max} = \dfrac{1}{2}\alpha_0^2\sqrt{gl} = 1$ см/с.

Задача 15



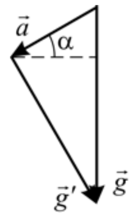
Математический маятник длиной $l = 0{,}5$ м подвешен на штативе, закрепленном на тележке, которая свободно скатывается с наклонной плоскости. Найти период T малых колебаний маятника относительно тележки. Считать, что масса тележки значительно больше массы маятника, а силы трения пренебрежимо малы. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$.

Идея. Используйте закон сложения ускорений и формулу для периода колебаний математического маятника.

Указание 1. Перейдите в систему отсчета, связанную с тележкой.

Указание 2. Определите направление и модуль ускорения свободного падения в этой системе отсчета.

Решение. Рассмотрим колебания маятника в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с тележкой. Обозначив через g' модуль ускорения свободного падения в этой системе, по формуле Гюйгенса находим, что период малых колебаний математического маятника равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}}$.

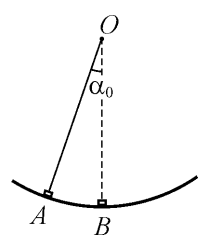


Согласно закону сложения ускорений, $\vec{g} = \vec{g}' + \vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение тележки. Вектор $\vec{a}$ направлен вдоль наклонной плоскости и равен по модулю $a = g\sin\alpha$. Как видно из рисунка, $g'^2 = (a\cos\alpha)^2 + (g - a\sin\alpha)^2$. Отсюда $g' = g\cos\alpha$. Следовательно, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}} \approx 1{,}5$ с.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}} \approx 1{,}5$ с.

Задача 16

По гладкому желобу, имеющему форму дуги окружности, из точки A без начальной скорости начинает скользить маленький брусок. Когда этот брусок проходит половину пути до нижней точки желоба (точки B), из точки A начинает скользить без начальной скорости второй такой же брусок. Найти, какой угол α будет составлять с вертикалью линия, соединяющая второй брусок с центром дуги (точкой O), в момент, когда первый брусок достигнет точки B, если $\angle AOB$ известен и равен α_0 ($\alpha_0 << 1$).



Идея. Используйте закон движения тела, совершающего гармонические колебания.

Указание. Запишите для обоих брусков законы движения, выбрав в качестве величины, задающей положение бруска, угол, который составляет с вертикалью линия, соединяющая центр бруска и центр дуги (точку O).

Решение. При движении первого бруска угол α_1, задающий его положение, меняется во времени по закону $\alpha_1 = \alpha_0\cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ – круговая частота, R – радиус желоба. В момент t_1, когда начинает движение второй брусок, $\alpha_1(t_1) = \dfrac{\alpha_0}{2} = \alpha_0\cos\omega t_1$, откуда $\omega t_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, закон движения второго бруска имеет вид $\alpha_2 = \alpha_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$. Когда первый брусок в момент времени t_2 достигает точки B, $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$. Поскольку искомый угол $\alpha = \alpha_2(t_2)$, то $\alpha = \alpha_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\alpha_0\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $\alpha = \frac{\alpha_0\sqrt{3}}{2}$.

Задача 17

Математический маятник, представляющий собой шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, помещен в электрическое поле плоского конденсатора, заряженного до напряжения U. Пластины конденсатора расположены горизонтально, расстояние между ними d. Заряд шарика положителен и равен q. Определить период T колебаний маятника. Ускорение свободного падения g.

Идея. Используйте формулу для периода колебаний математического маятника.

Указание 1. Найдите суммарную силу, действующую на шарик маятника.

Указание 2. Запишите уравнение малых колебаний маятника и найдите их частоту.

Решение. На шарик кроме силы тяжести и силы натяжения нити действует кулоновская сила. Поскольку электрическое поле внутри плоского конденсатора однородно, эта сила направлена вертикально, а ее модуль равен $F = \frac{qU}{d}$. Если верхняя пластина конденсатора заряжена положительно, то направление кулоновской силы совпадает с направлением силы тяжести, если отрицательно, то противоположно ему. Следовательно, уравнение малых колебаний маятника имеет вид $ml\ddot{\alpha} = -\left(mg \pm \frac{qU}{d}\right)\alpha$, где α – угол отклонения маятника от вертикали. Отсюда циклическая частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 \pm \frac{qU}{mgd}\right)}$, а период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, или $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm qU/(md)}}$, причем знак «плюс» соответствует случаю, когда нижняя пластина конденсатора заряжена отрицательно.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm qU/(md)}}$.

2. Молекулярная физика. Термодинамика

2.1. Молекулярная физика

Задача 1

При повышении температуры идеального одноатомного газа на $\Delta T_1 = 150$ К среднеквадратичная скорость его молекул возросла от $v_1 = 400$ м/с до $v_2 = 500$ м/с. На какую величину ΔT_2 нужно дополнительно повысить температуру этого газа, чтобы увеличить среднеквадратичную скорость его молекул от $v_2 = 500$ м/с до $v_3 = 600$ м/с?

Идея. Используйте формулу для среднеквадратичной скорости молекул газа.

Указание. Выразите приращение температуры газа через разность средних квадратов скоростей молекул.

Решение. Поскольку при температуре T среднеквадратичная скорость молекул газа равна $v = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$, справедливо соотношение $v_2^2 - v_1^2 = \dfrac{3k}{m_0}(T_2 - T_1) = \dfrac{3k}{m_0}\Delta T_1$, где k – постоянная Больцмана, m_0 – масса молекулы. Аналогично $v_3^2 - v_2^2 = \dfrac{3k}{m_0}(T_3 - T_2) = \dfrac{3k}{m_0}\Delta T_2$. Следовательно, $\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \dfrac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2}$, и $\Delta T_2 = \Delta T_1 \dfrac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183{,}3$ К.

Ответ. $\Delta T_2 = \Delta T_1 \dfrac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183{,}3$ К.

Задача 2

Плотность смеси азота и кислорода при температуре $t = 17$ °C и давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho = 1{,}2$ кг/м^3. Найдите концентрации n_1 и n_2 молекул азота и кислорода в смеси. Молярная масса азота $M_1 = 28$ г/моль, кислорода $M_2 = 32$ г/моль. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

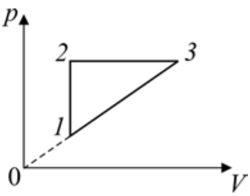
Идея. Используйте формулы для плотности и давления идеального газа.

Указание. Запишите выражения для плотности и давления смеси двух идеальных газов.

Решение. Плотность и давление идеального газа выражаются следующим образом: $\rho = n\dfrac{M}{N_A}$, $p = nkT$, где n – концентрация молекул, M – молярная масса газа, k – постоянная Больцмана, N_A – число Авогадро, T – абсолютная температура. Используя эти выражения, для смеси газов получаем систему уравнений $n_1\dfrac{M_1}{N_A}+n_2\dfrac{M_2}{N_A}=\rho$, $n_1kT+n_2kT=p_0$. Отсюда, учитывая, что $kN_A=R$, находим $n_1=\dfrac{p_0M_2-\rho RT}{kT(M_2-M_1)}\approx$ $\approx 1{,}9\cdot10^{25}$ м$^{-3}$, $n_2=\dfrac{\rho RT-p_0M_1}{kT(M_2-M_1)}\approx 0{,}57\cdot10^{25}$ м$^{-3}$.

Ответ. $n_1=\dfrac{p_0M_2-\rho RT}{kT(M_2-M_1)}\approx 1{,}9\cdot10^{25}$ м$^{-3}$, $n_2=\dfrac{\rho RT-p_0M_1}{kT(M_2-M_1)}\approx 0{,}57\cdot10^{25}$ м$^{-3}$.

Задача 3



На рисунке показан циклический процесс, совершаемый над идеальным газом, причем *1 – 2* – изохорный, *2 – 3* – изобарный процессы. Температуры газа в точках *1* и *3* равны соответственно $T_1=300$ К и $T_3=400$ К. Найти температуру T_2 газа в точке *2*. Масса газа постоянна.

Идея. Примените законы газового состояния.

Указание 1. Для участка *1 – 2* используйте закон Шарля.

Указание 2. Для участка *2 – 3* используйте закон Гей-Люссака.

Указание 3. Учтите, что продолжение прямой *1 – 3* проходит через начало координат.

Решение. Пусть p_1, V_1 – давление и объем газа в точке *1*, p_2 – давление газа в точке *2*, V_3 – объем газа в точке *3*. Для участка *1 – 2* по закону Шарля $\dfrac{p_1}{T_1}=\dfrac{p_2}{T_2}$, для участка *2 – 3* по закону Гей-Люссака $\dfrac{V_1}{T_2}=\dfrac{V_3}{T_3}$. Поскольку продолжение прямой *1 – 3* проходит через начало координат, $\dfrac{p_1}{V_1}=\dfrac{p_2}{V_3}$. Объединяя записанные выражения, получаем $T_2=\sqrt{T_1T_3}\approx 346$ К.

Ответ. $T_2=\sqrt{T_1T_3}\approx 346$ К.

Задача 4

Два одинаковых сосуда, соединенные трубкой, содержат идеальный газ общей массой $m=6{,}6$ г. Первоначально температура газа в обоих сосудах одинакова. Затем газ в первом сосуде нагревают и поддерживают при температуре $t_1=27$ °C, а газ во втором сосуде нагревают и поддерживают при температуре $t_2 = 87$ °C. На какую величину Δm изменится масса газа в первом сосуде? Объем трубки не учитывать.

Идея. Используйте уравнение Менделеева–Клапейрона.

Указание. Учтите, что давление газа в сосудах выравнивается за счет перетекания газа по трубке.

Решение. В начальном состоянии масса газа в каждом сосуде равна $m_0 = m/2$. Уравнения конечного состояния газов имеют вид $pV = \frac{m_1}{M}RT_1$, $pV = \frac{m_2}{M}RT_2$, где p – давление газа, одинаковое в обоих сосудах; V – объем одного из сосудов; m_1 и m_2 – массы газа в первом и втором сосуде; M – их молярная масса; $T_1 = t_1 + 273$ °C; $T_2 = t_2 + 273$ °C. Следовательно, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_2}{T_1}$, $m_1 + m_2 = m$. Отсюда $m_1 = \frac{mT_2}{T_1 + T_2}$. Учитывая, что $\Delta m = m_1 - m_0$, получаем $\Delta m = \frac{m(t_2 - t_1)}{2(t_1 + t_2 + 546\ ^\circ\text{C})} = 0{,}3$ г.

Ответ. $\Delta m = \frac{m(t_2 - t_1)}{2(t_1 + t_2 + 546\ ^\circ\text{C})} = 0{,}3$ г.

Задача 5

В комнате объемом $V = 60$ м^3 температура с $t_1 = 17$ °C поднялась до $t_2 = 27$ °C. На какую величину Δm изменилась масса воздуха в комнате, если атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па? Молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Идея. Примените уравнение Менделеева–Клапейрона.

Указание. Запишите уравнения начального и конечного состояний воздуха в комнате.

Решение. Пусть m_1 и m_2 – массы воздуха в комнате при температурах $T_1 = t_1 + 273$ °C и $T_2 = t_2 + 273$ °C соответственно. Уравнения состояния воздуха в комнате имеют вид $p_0V = \frac{m_1}{M}RT_1$, $p_0V = \frac{m_2}{M}RT_2$. Отсюда $m_{1,2} = \frac{p_0VM}{RT_{1,2}}$, $\Delta m = m_2 - m_1 =$ $= \frac{p_0VM(t_1 - t_2)}{R(t_1 + 273\ ^\circ\text{C})(t_2 + 273\ ^\circ\text{C})} = -2{,}4$ кг. Масса воздуха в комнате уменьшилась.

Ответ. $\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{p_0VM(t_1 - t_2)}{R(t_1 + 273\ ^\circ\text{C})(t_2 + 273\ ^\circ\text{C})} = -2{,}4$ кг.

Задача 6

Закрытый с обоих концов горизонтальный цилиндр заполнен идеальным газом при температуре $t = 27$ °С и разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные части длиной $L = 50$ см каждая. На какую величину Δt нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние $l = 20$ см при неизменной температуре газа во второй половине цилиндра?

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание. Используйте закон Бойля–Мариотта для газа в той части цилиндра, которая имеет постоянную температуру, и уравнение состояния для газа в другой части цилиндра.

Решение. Для части газа, имеющей постоянную температуру, справедлив закон Бойля–Мариотта, согласно которому $pLS = p_1(L-l)S$, где p – первоначальное давление газа в цилиндре, p_1 – давление в цилиндре после нагревания половины газа, S – площадь поршня. Уравнение состояния, записанное для газа в другой части цилиндра, дает соотношение $\dfrac{pLS}{T} = \dfrac{p_1(L+l)S}{T+\Delta T}$. Исключая из этих равенств p и p_1, получаем $\Delta T = \dfrac{2lT}{L-l} = 400$ К.

Ответ. $\Delta T = \dfrac{2lT}{L-l} = 400$ К.

Задача 7

Закрытый сосуд заполнен газом при температуре $T_0 = 300$ К и давлении $p_0 = 150$ кПа. Сосуд снабжен предохранительным клапаном, открывающимся при давлении, превышающем $p_м = 200$ кПа. Сосуд нагрели до температуры $T_1 = 600$ К. При этом из него вышло $m = 10$ г газа. Определить массу m_0 газа в сосуде до его нагрева.

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание 1. Запишите уравнение начального и конечного состояний газа в сосуде.

Указание 2. Учтите, что после того, как давление при нагревании достигнет значения $p_м$, оно остается постоянным.

Решение. Уравнение начального состояния газа в сосуде имеет вид $p_0V = \dfrac{m_0}{M}RT_0$, где V – объем сосуда, M – молярная масса газа. При нагревании сосуда до некоторой температуры, при которой давление газа становится равным $p_м$, клапан открывается, после чего давление газа в сосуде остается постоянным, а излишек газа выходит наружу. Конечное состояние газа описывается уравнением $p_мV = \dfrac{m_0 - m}{M}RT_1$. Исключая V и M, получаем $m_0 = \dfrac{mp_0T_1}{p_0T_1 - p_мT_0} = 30$ г.

Ответ. $m_0 = \dfrac{mp_0T_1}{p_0T_1 - p_{\text{м}}T_0} = 30$ г.

Задача 8

В вертикально расположенном цилиндре постоянного сечения под невесомым подвижным поршнем находится воздух. На поршень помещают гирю массой $m = 10$ кг. На какую величину Δh переместится поршень, если температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, площадь поршня $S = 100$ см^2, расстояние от ненагруженного поршня до дна цилиндра $h_0 = 100$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Идея. Воспользуйтесь законом Бойля–Мариотта.

Указание. Используйте условия равновесия поршня в первом и втором случае.

Решение. Из условия равновесия поршня следует, что давление воздуха в сосуде равно p_0 в начальном состоянии и $p_0 + \dfrac{mg}{S}$, когда на поршень положили гирю. По закону Бойля–Мариотта имеем $p_0V_0 = \left(p_0 + \dfrac{mg}{S}\right)V$, где $V_0 = h_0S$, $V = (h_0 - \Delta h)S$. Отсюда находим $\Delta h = \dfrac{mgh_0}{Sp_0 + mg} = 8{,}9$ см.

Ответ. $\Delta h = \dfrac{mgh_0}{Sp_0 + mg} = 8{,}9$ см.

Задача 9

В цилиндре под подвижным поршнем находится идеальный газ, поддерживаемый при постоянной температуре. Когда на поршень положили груз массой M_1, объем газа уменьшился в n раз. Какой массы M_2 груз нужно положить на поршень дополнительно, чтобы объем газа уменьшился еще в k раз?

Идея. Воспользуйтесь законом Бойля–Мариотта.

Указание. Используйте условия равновесия поршня во всех случаях, перечисленных в условии задачи.

Решение. Пусть m – масса поршня, S – его площадь, p_{A} – атмосферное давление. Обозначив через p_0, p_1 и p_2 давление в цилиндре без груза на поршне, с грузом M_1 и с грузами M_1 и M_2 на поршне соответственно, запишем условия равновесия поршня, справедливые в этих случаях: $mg + p_{\text{A}}S = p_0S$, $(M_1 + m)g + p_{\text{A}}S = p_1S$,

$(M_1 + M_2 + m)g + p_A S = p_2 S$. Поскольку температура газа постоянна, из закона Бойля–Мариотта следует, что $p_1 = np_0$, $p_2 = kp_1 = nkp_0$. Исключая из этих уравнений m, S, p_A и p_0, получаем $M_2 = M_1 \dfrac{n(k-1)}{n-1}$.

Ответ. $M_2 = M_1 \dfrac{n(k-1)}{n-1}$.

Задача 10

Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. В обеих частях сосуда содержится один и тот же идеальный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H_1 = 30$ см. Сосуд переворачивают так, что дном становится его верхняя плоскость. В новом положении расстояние между дном сосуда и поршнем составляет $H_2 = 20$ см. Найти отношение α массы газа, содержавшегося в той части сосуда, которая первоначально находилась вверху, к массе газа, содержавшегося в другой части сосуда. Высота сосуда $L = 60$ см. Температуру считать постоянной, толщиной поршня пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание 1. Запишите уравнения состояния газа, находящегося в верхней и нижней части сосуда.

Указание 2. Используйте условие равновесия поршня.

Решение. Обозначим через m_1, p_1' и m_2, p_2' массы и давление газа, содержащегося соответственно в нижней и верхней частях сосуда в его начальном положении. По условию $\dfrac{m_2}{m_1} = \alpha$, или $m_2 = \alpha m_1$. Из уравнений состояния газов в нижней и верхней частях сосуда следует, что $p_1' = \dfrac{m_1 RT}{MH_1 S}$, $p_2' = \dfrac{\alpha m_1 RT}{M(L - H_1)S}$. Когда сосуд переворачивают вверх дном, в нижней его части оказывается газ массой $m_2 = \alpha m_1$ под давлением p_2'', а в верхней части – газ массой m_1 под давлением p_1'', причем $p_1'' = \dfrac{m_1 RT}{M(L - H_2)S}$, $p_2'' = \dfrac{\alpha m_1 RT}{MH_2 S}$. Из условия равновесия поршня вытекает соотношение $p_1' - p_2' = p_2'' - p_1''$. Подставляя сюда найденные выше значения давления, получаем равенство $\dfrac{1}{H_1} - \dfrac{\alpha}{L - H_1} = \dfrac{\alpha}{H_2} - \dfrac{1}{L - H_2}$. Отсюда находим $\alpha = \dfrac{(L - H_2 + H_1)\cdot(L - H_1)H_2}{(L - H_1 + H_2)\cdot(L - H_2)H_1} = 0{,}7$.

Ответ. $\alpha = \dfrac{(L - H_2 + H_1)\cdot(L - H_1)H_2}{(L - H_1 + H_2)\cdot(L - H_2)H_1} = 0{,}7$.

Задача 11

В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При некоторой температуре, одинаковой во всем цилиндре, объем V_1 нижней части цилиндра равен объему V_2 верхней части. Каким будет отношение объемов $\alpha = V_1/V_2$, если температуру газа увеличить в $n = 2$ раза? Толщиной поршня пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

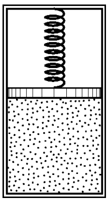
Указание 1. Запишите уравнения состояния газа, находящегося в верхней и нижней части сосуда.

Указание 2. Используйте условие равновесия поршня.

Решение. Обозначим через V объем половины цилиндра. Из соотношений $\frac{V_1}{V_2} = \alpha$, $V_1 + V_2 = 2V$ выражаем $V_1 = \frac{2\alpha V}{\alpha+1}$, $V_2 = \frac{2V}{\alpha+1}$. Используя уравнения состояния газа в нижней и верхней части цилиндра, находим давления газа в этих частях: $p_1 = \frac{2\nu RT}{V}$, $p_2 = \frac{\nu RT}{V}$ (при начальной температуре T), $p_1' = \frac{2\nu RnT(\alpha+1)}{2\alpha V}$, $p_2' = \frac{\nu RnT(\alpha+1)}{2V}$ (при температуре nT). Здесь ν – количество молей газа в верхней части цилиндра. Из условия равновесия поршня вытекает соотношение $p_1 - p_2 = p_1' - p_2'$. Подставляя сюда найденные выше значения давления, получаем квадратное уравнение относительно α: $\alpha^2 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\alpha - 2 = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 + 2} = \sqrt{2}$.

Ответ. $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2 + 2} = \sqrt{2}$.

Задача 12



В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится идеальный газ. В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии пружиной, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра, причем пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. Во сколько раз n возрастет объем газа, если увеличить его температуру в $m = 2$ раза? Толщиной поршня пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание 1. Используйте закон Гука.

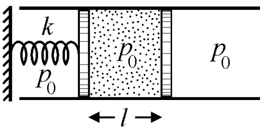
Указание 2. Запишите уравнения начального и конечного состояний газа.

Решение. Поскольку сжатие пружины совпадает с высотой поршня над дном сосуда, давление газа пропорционально его объему: $p \sim V$. Пусть p_0, V_0 и T_0 – начальные давление, объем и температура газа. Уравнения начального и конечного состояний газа имеют вид: $p_0V_0 = \nu RT_0$, $np_0nV_0 = \nu RmT_0$. Отсюда $n^2 = m$, и $n = \sqrt{m} \approx 1{,}41$.

Ответ. $n = \sqrt{m} \approx 1{,}41$.

Задача 13

Горизонтальная трубка площадью сечения S, открытая с двух концов, закреплена неподвижно. В ней находятся два поршня, один из которых соединен пружиной жесткостью k с неподвижной стенкой. В исходном состоянии давление воздуха между поршнями равно атмосферному давлению p_0, пружина не деформирована и расстояние между поршнями равно l. Правый поршень медленно переместили вправо на расстояние l. Какое давление воздуха p_1 установилось при этом между поршнями? Температуру воздуха считать постоянной, трением пренебречь.



Идея. Воспользуйтесь законом Бойля–Мариотта.

Указание 1. Запишите условие равновесия левого поршня в конечном состоянии.

Указание 2. Для газа, заключенного между поршнями, используйте закон Бойля–Мариотта.

Решение. При перемещении правого поршня вправо на расстояние l левый поршень переместится в ту же сторону на некоторое расстояние. Условие равновесия левого поршня имеет вид $p_0S - kx - p_1S = 0$. Отсюда давление воздуха между поршнями $p_1 = p_0 - \dfrac{kx}{S}$. Из закона Бойля–Мариотта следует равенство $p_0l = p_1(2l - x)$. Исключая из этих соотношений x, получаем квадратное уравнение относительно p_1: $p_1^2 - \left(p_0 - \dfrac{2kl}{S}\right)p_1 - \dfrac{p_0kl}{S} = 0$. Выбирая положительный корень этого уравнения, получаем $p_1 = \dfrac{p_0}{2} - \dfrac{kl}{S} + \sqrt{\dfrac{p_0^2}{4} + \left(\dfrac{kl}{S}\right)^2}$.

Ответ. $p_1 = \dfrac{p_0}{2} - \dfrac{kl}{S} + \sqrt{\dfrac{p_0^2}{4} + \left(\dfrac{kl}{S}\right)^2}$.

Задача 14

В баллоне, снабженном предохранительным клапаном, находится идеальный газ под давлением $p = 0{,}5 \cdot 10^6$ Па при температуре $t = 27$ °C. Клапан открывается, если давление в баллоне превышает $p_1 = 0{,}6 \cdot 10^6$ Па. До какой температуры t_1 нужно нагреть баллон, чтобы из него вытекла часть газа, масса которой составляет $\beta = 0{,}01$ первоначальной массы?

Идея. Используйте уравнение состояния идеального газа.

Указание 1. Учтите, что после открывания клапана давление газа в сосуде остается постоянным, а излишек газа выходит наружу.

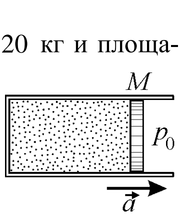
Указание 2. Запишите уравнения начального и конечного состояния газа.

Решение. Уравнение начального состояния газа в сосуде имеет вид $pV = \dfrac{m_0}{M} RT$, где V – объем сосуда, m_0 – первоначальная масса газа, M – его молярная масса, $T = t + 273$ °C. При нагревании сосуда до некоторой температуры, при которой давление газа становится равным p_1, клапан открывается, после чего давление газа в сосуде остается постоянным, а излишек газа выходит наружу. Поскольку масса газа, вытекшего из сосуда при нагревании, равна βm_0, масса оставшегося газа составляет $(1-\beta)m_0$. Следовательно, конечное состояние газа описывается уравнением $p_1 V = \dfrac{(1-\beta)m_0}{M} RT_1$, где $T_1 = t_1 + 273$ °C. Исключая V, m_0 и M, получаем $t_1 = \dfrac{p_1(t + 273\ °\mathrm{C})}{p(1-\beta)} - 273\ °\mathrm{C} = 90{,}6$ °C.

Ответ. $t_1 = \dfrac{p_1(t + 273\ °\mathrm{C})}{p(1-\beta)} - 273\ °\mathrm{C} = 90{,}6\ °\mathrm{C}$.

Задача 15

В горизонтальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой $M = 20$ кг и площадью $S = 100$ см^2 находится идеальный газ. Расстояние от поршня до дна сосуда $l = 55$ см. На какое расстояние Δl и в какую сторону переместится поршень, если цилиндр начать двигать с ускорением $a = 5$ м/с^2, как показано на рисунке. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Температура газа не изменяется. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь. Считать, что при сообщении цилиндру ускорения колебания поршня не возникают.



Идея. Используйте закон Бойля–Мариотта.

Указание. Запишите уравнение движения поршня и найдите давление газа в цилиндре.

Решение. Уравнение движения поршня с ускорением a имеет вид $Ma = pS - p_0S$. Отсюда давление газа в ускоренно движущемся цилиндре $p = p_0 + \frac{Ma}{S}$. По закону Бойля–Мариотта $p_0lS = p(l - \Delta l)S$. Объединяя записанные равенства, получаем, что $\Delta l = \frac{Mal}{p_0S + Ma} = 5$ см. Поршень переместится влево.

Ответ. Поршень переместится влево на $\Delta l = \frac{Mal}{p_0S + Ma} = 5$ см.

Задача 16

Какой массой m должно обладать сферическое тело радиуса $r = 1$ м, чтобы оно могло плавать в атмосфере Венеры? Атмосфера Венеры состоит из углекислого газа, давление у поверхности $p_0 = 9$ МПа, температура $t = 527$ °C. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Молярная масса углекислого газа $M = 44$ г/моль.

Идея. Воспользуйтесь законом Архимеда.

Указание 1. Используйте условие плавания тел.

Указание 2. Найдите плотность атмосферы Венеры.

Решение. По закону Архимеда сфера будет плавать при выполнении условия $mg \le \rho gV$, где g – ускорение свободного падения у поверхности Венеры, $\rho = \frac{p_0M}{RT}$ – плотность атмосферы Венеры, $T = 1 + 273$ °C – абсолютная температура атмосферы, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ – объем тела. Следовательно, $m \le \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_0M}{RT} \approx 249$ кг.

Ответ. $m \le \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_0M}{RT} \approx 249$ кг.

Задача 17

Воздух в комнате объемом $V = 50$ м^3 имеет температуру $t = 27$ °C и относительную влажность $f_1 = 30\%$. Сколько времени τ должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\mu = 2$ кг/ч, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $f_2 = 70\%$? Давление насыщенных паров воды при $t = 27$ °C равно $p_{\text{н}} = 3665$ Па, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), молярная масса воды $M = 18$ г/моль.

Идея. Используйте определение относительной влажности воздуха.

Указание. Примените для водяного пара уравнение Менделеева–Клапейрона.

Решение. Парциальное давление водяного пара при относительной влажности f_1 равно $p_1 = f_1 p_н / 100\%$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона $p_1 V = \frac{m_1}{M} R(t + 273°C)$ находим начальную массу пара, содержащегося в комнате: $m_1 = \frac{f_1 M p_н V}{100\% \cdot R(t + 273°C)}$.

Аналогично при относительной влажности f_2 масса пара $m_2 = \frac{f_2 M p_н V}{R(t + 273°C) \cdot 100\%}$.

Учитывая, что $\tau = \frac{m_2 - m_1}{\mu}$, получаем $\tau = \frac{p_н (f_2 - f_1) MV}{100\% \cdot \mu R(t + 273°C)} = 15{,}5$ мин.

Ответ. $\tau = \frac{p_н (f_2 - f_1) MV}{100\% \cdot \mu R(t + 273°C)} = 15{,}5$ мин.

Задача 18

Определить массу воды m, которую теряет человек за $\tau = 1$ ч. в процессе дыхания, исходя из следующих данных. Относительная влажность вдыхаемого воздуха $f_1 = 60\%$, относительная влажность выдыхаемого воздуха $f_2 = 100\%$. Человек делает в среднем $n = 15$ вдохов в минуту, вдыхая каждый раз $V = 2{,}5$ л воздуха. Температуру вдыхаемого и выдыхаемого воздуха принять $t = 36$ °C; давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_н = 5{,}9$ кПа. Молярная масса воды $M = 18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Идея. Используйте определение относительной влажности воздуха.
Указание. Примените для водяного пара уравнение Менделеева–Клапейрона.

Решение. Пусть p_1 и p_2 – парциальные давления водяного пара во вдыхаемом и выдыхаемом воздухе соответственно. Для них справедливы выражения $p_1 = \frac{f_1 p_н}{100\%}$, $p_2 = \frac{f_2 p_н}{100\%}$. Обозначим через $V_0 = n\tau V$ полный объем воздуха, вдыхаемого или выдыхаемого за время τ. Из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для водяного пара, следует, что массы пара, содержащегося во всем объеме воздуха, который человек вдыхает и выдыхает за время τ, соответственно равны $m_1 = \frac{p_1 V_0 M}{RT}$, $m_2 = \frac{p_2 V_0 M}{RT}$.

Масса теряемой человеком воды $m = m_2 - m_1$. Объединяя записанные выражения, получаем $m = \frac{p_н n V \tau M (f_2 - f_1)}{RT \cdot 100\%} \approx 37{,}3$ г.

Ответ. $m = \frac{p_н n V \tau M (f_2 - f_1)}{RT \cdot 100\%} \approx 37{,}3$ г.

Задача 19

В стеклянную банку объемом 1 л налили 0,5 л воды при температуре $t_1 = 20\,°C$ и герметично закрыли завинчивающейся крышкой. Затем банку нагрели до температуры $t_2 = 100\,°C$. Найти силу взаимодействия F между банкой и крышкой при достижении этой температуры. Площадь крышки $S = 50$ см^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Влажностью атмосферного воздуха, а также массой крышки пренебречь.

Идея. Используйте свойства водяного пара и условие равновесия крышки.

Указание 1. Учтите, что при температуре $t_2 = 100\,°C$ давление насыщенного водяного пара равно нормальному атмосферному давлению.

Указание 2. Примените для сухого воздуха закон Шарля.

Решение. В банке под крышкой находится воздух и насыщенный водяной пар. При температуре $t_2 = 100\,°C$ давление насыщенного пара равно атмосферному давлению: $p_н = p_0$. Таким образом, парциальное давление водяного пара компенсирует атмосферное давление. Сила, которая действует на крышку со стороны банки, равна по величине $F = Sp_в$, где $p_в$ – парциальное давление воздуха в банке. Пренебрегая изменением объема воздуха, связанным с частичным испарением воды и ее тепловым расширением, для определения давления воздуха можно использовать закон Шарля, согласно которому $p_в = p_0 \dfrac{T_2}{T_1}$. Следовательно, $F = Sp_0 \dfrac{t_2 + 273\,°C}{t_1 + 273\,°C} \approx 640$ Н.

Ответ. $F \approx 640$ Н.

Задача 20

Трубка с поперечным сечением S, заполненная водяным паром под давлением p, запаяна с двух концов и расположена горизонтально. При этом находящийся в трубке поршень делит трубку на две равных части. Трубку ставят вертикально, в результате чего поршень смещается, и объем под ним уменьшается в четыре раза. Найти массу поршня m, если давление насыщенного водяного пара равно $2p$. Трением и толщиной поршня пренебречь, температуру пара считать постоянной. Ускорение свободного падения g.

Идея. Используйте свойства водяного пара и условие равновесия поршня.

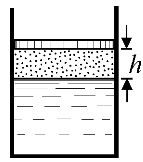
Указание. Учтите, что пар под поршнем достигнет насыщения. Примените для пара над поршнем закон Бойля–Мариотта.

Решение. При перемещении поршня давление пара в нижней части трубки увеличится до величины $2p$, после чего будет оставаться постоянным. При этом часть пара сконденсируется. Пар над поршнем можно считать идеальным газом. Его давление, согласно закону Бойля–Мариотта, равно $p_1 = p\dfrac{V}{V_1} = p\dfrac{V}{V + 3V/4} = \dfrac{4}{7}p$. Из условия равновесия поршня имеем $p_1S + mg = 2pS$. Объединяя записанные выражения, получаем $m = \left(2 - \frac{4}{7}\right)\frac{pS}{g} = \frac{10}{7} \cdot \frac{pS}{g}$.

Ответ. $m = \frac{10}{7} \cdot \frac{pS}{g}$.

Задача 21

В вертикальном цилиндре, наполовину заполненном водой, под подвижным поршнем заключен воздух. Поршень находится в равновесии, когда давление внутри цилиндра равно утроенному атмосферному давлению. При температуре $t_1 = 6$ °С расстояние между поршнем и поверхностью воды $h = 10$ см. На каком расстоянии H от поверхности воды окажется поршень, если цилиндр нагреть до температуры $t_2 = 100$ °С? Атмосферное давление считать нормальным. Давлением водяных паров при температуре $t_1 = 6$ °С и изменением объема воды за счет испарения пренебречь.



Идея. Используйте свойства водяного пара и условие равновесия поршня.

Указание 1. Из условия равновесия поршня найдите давление газовой смеси под поршнем.

Указание 2. Запишите уравнение состояния сухого воздуха.

Решение. Давление смеси сухого воздуха и насыщенного водяного пара в цилиндре, обусловленное атмосферным давлением p_0 и весом поршня, в процессе нагревания цилиндра остается постоянным и равным $3p_0$. При температуре $t_1 = 6$ °С давление насыщенных паров воды пренебрежимо мало, поэтому давление сухого воздуха $p_{в1} = 3p_0$. При температуре $t_2 = 100$ °С давление насыщенных паров становится равным атмосферному. Следовательно, давление сухого воздуха при этой температуре $p_{в2} = 2p_0$. Из уравнения состояния сухого воздуха следует, что $\frac{3p_0hS}{T_1} = \frac{2p_0HS}{T_2}$, где S – площадь поршня. Следовательно, $H = \frac{3h}{2} \cdot \frac{t_2 + 273°С}{t_1 + 273°С} \approx 20$ см.

Ответ. $H = \frac{3h}{2} \cdot \frac{t_2 + 273°С}{t_1 + 273°С} \approx 20$ см.

Задача 22

В чайник налили воды при температуре $t = 10$ °С и поставили на электроплитку. Через время $\tau_1 = 10$ мин. вода закипела. Через какое время τ_2 вода полностью выкипит? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования

$r = 2{,}3$ МДж/кг. Температура кипения воды $t_к = 100\,°C$. Теплоемкостью чайника и потерями теплоты пренебречь.

Идея. Примените уравнение теплового баланса.

Указание. Найдите количества теплоты, требующиеся для нагревания воды до температуры кипения и для превращения ее в пар.

Решение. Обозначив через m начальную массу воды в чайнике, найдем количества теплоты Q_1 и Q_2, требующиеся соответственно для нагревания воды до температуры кипения и для превращения ее в пар: $Q_1 = cm(t_к - t)$, $Q_2 = mr$. Пусть q – мощность плитки; тогда $Q_1 = q\tau_1$, $Q_2 = q\tau_2$. Объединяя записанные выражения, получаем $\tau_2 = \tau_1 \dfrac{r}{c(t_к - t)} = 60{,}8$ мин.

Ответ. $\tau_2 = \tau_1 \dfrac{r}{c(t_к - t)} = 60{,}8$ мин.

Задача 23

В теплоизолированном сосуде в начальный момент находится одноатомный газ при температуре $T_0 = 300$ К и кусочек железа массой $m = 0{,}2$ кг, нагретый до температуры $T_1 = 500$ К. Начальное давление газа $p_0 = 10^5$ Па, его объем $V_0 = 1000$ см^3, удельная теплоемкость железа $c = 0{,}45$ кДж/(кг·К). Найти давление газа в равновесном состоянии, считая объем газа неизменным.

Идея. Используйте уравнение теплового баланса и закон Шарля.

Указание 1. Найдите установившуюся температуру в сосуде.

Указание 2. Запишите для воздуха закон Шарля.

Решение. Из уравнения теплового баланса имеем $\dfrac{3}{2}\nu RT_0 + mcT_1 = \left(\dfrac{3}{2}\nu R + mc\right)T$, где ν – число молей газа, T – установившаяся (равновесная) температура в сосуде. Число молей газа может быть легко найдено из уравнения его начального состояния: $\nu = p_0V_0/(RT_0)$. Подставляя ν в первое соотношение, находим установившуюся температуру $T = \dfrac{(3p_0V_0 + 2mcT_1)T_0}{3p_0V_0 + 2mcT_0}$. Поскольку объем газа постоянен, его давление в конечном состоянии $p = p_0 \dfrac{T}{T_0}$. Объединяя записанные выражения, получаем $p = p_0 \dfrac{2mcT_1 + 3p_0V_0}{2mcT_0 + 3p_0V_0} \approx 1{,}67 \cdot 10^5$ Па.

Ответ. $p = p_0 \dfrac{2mcT_1 + 3p_0V_0}{2mcT_0 + 3p_0V_0} \approx 1{,}67 \cdot 10^5$ Па.

Задача 24

Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью $W = 500$ Вт. При включении нагревателя на время $t_1 = 2$ мин. температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ К, а при его отключении – понизилась за время $t_2 = 1$ мин. на ту же величину ΔT. Какова масса m нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Идея. Используйте уравнение теплового баланса.

Указание 1. Введите массу воды и мощность потерь. Запишите для процессов нагревания и охлаждения воды уравнение теплового баланса.

Указание 2. Исключите массу воды и мощность потерь.

Решение. Поскольку по условию потери тепла пропорциональны времени, количественной характеристикой потерь является их мощность w. Обозначив через m массу воды, по первому закону термодинамики имеем $Wt_1 = cm\Delta T + wt_1$ (при нагревании воды), $cm\Delta T = wt_2$ (при остывании воды). Исключая отсюда w и m, получаем $m = \dfrac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} \approx 4{,}8$ кг.

Ответ. $m = \dfrac{Wt_1t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} \approx 4{,}8$ кг.

Задача 25

В стакане находится некоторое количество воды, нагретой до температуры $t_1 = 60$ °C. В стакан кладут металлический шарик, имеющий температуру $t_0 = 20$ °C, а некоторое время спустя – еще два таких же шарика при той же температуре. В результате в стакане устанавливается температура $t_3 = 50$ °C. Какова была установившаяся температура t_2 в стакане после того, как в него был опущен первый шарик? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Идея. Используйте уравнение теплового баланса.

Указание 1. Введите теплоемкости стакана с водой и шарика и запишите уравнения теплового баланса для двух процессов теплообмена, указанных в условии.

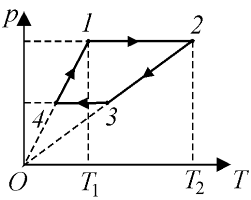
Указание 2. Исключите теплоемкости стакана с водой и шарика.

Решение. Пусть $C_в$ и $C_ш$ – теплоемкости стакана с водой и шарика соответственно. Запишем уравнения теплового баланса для двух процессов теплообмена: $C_в(t_1 - t_2) = C_ш(t_2 - t_0)$ (когда положили первый шарик), $C_в(t_2 - t_3) + C_ш(t_2 - t_3) = 2C_ш(t_3 - t_0)$ (когда положили второй и третий шарики). Исключая из этих соотношений $C_в$ и $C_ш$, получаем $t_2 = \dfrac{2t_1(t_3 - t_0) + t_3(t_1 - t_0)}{t_1 + 2t_3 - 3t_0} = 56$ °C.

Ответ. $t_2 = \dfrac{2t_1(t_3 - t_0) + t_3(t_1 - t_0)}{t_1 + 2t_3 - 3t_0} = 56$ °C.

2.2. Термодинамика

Задача 1



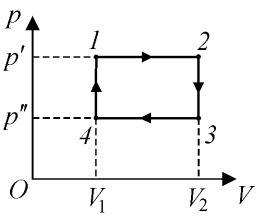
С массой $m = 80$ г идеального газа, молярная масса которого $M = 28$ г/моль, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Какую работу A совершает такой двигатель за один цикл, если $T_1 = 300$ К, $T_2 = 1000$ К, а при нагревании на участке *4 – 1* давление газа увеличивается в 2 раза? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Идея. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа и методом расчета работы газа с помощью pV-диаграммы.

Указание 1. Изобразите график процесса в переменных p и V (постройте pV-диаграмму процесса).

Указание 2. Используйте уравнение состояния газа, чтобы выразить работу газа через температуры в точках *1*, *2*, *3*, *4*.

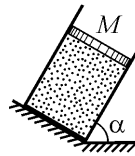
Решение. Для вычисления работы газа удобно перерисовать график процесса в виде pV-диаграммы (см. рисунок), откуда видно, что $A = (p' - p'')(V_2 - V_1)$. Используя



уравнение состояния газа, запишем последнее равенство в виде $A = \dfrac{m}{M}R(T_2 - T_3 - T_1 + T_4)$. Поскольку объемы газа на участках *2 – 3* и *4 – 1* постоянны, имеем $\dfrac{T_1}{T_4} = \dfrac{T_2}{T_3} = \dfrac{p'}{p''} = 2$. Отсюда $T_4 = T_1/2$, $T_3 = T_2/2$. Подставляя найденные значения температуры в выражение для работы, получаем $A = \dfrac{m}{2M}R(T_2 - T_1) \approx 8{,}3$ кДж.

Ответ. $A = \dfrac{m}{2M}R(T_2 - T_1) \approx 8{,}3$ кДж.

Задача 2

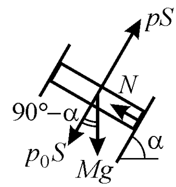


В закрепленном под углом $\alpha = 60°$ к горизонту цилиндре может без трения двигаться поршень массой $M = 10$ кг и площадью $S = 50$ см^2. Под поршнем находится идеальный одноатомный газ. Газ нагревают так, что поршень перемещается на расстояние $l = 5$ см. Какое количество теплоты Q было сообщено газу? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Идея. Воспользуйтесь выражением для теплоемкости идеального одноатомного газа в изобарном процессе.

Указание 1. Запишите уравнения начального и конечного состояний газа.

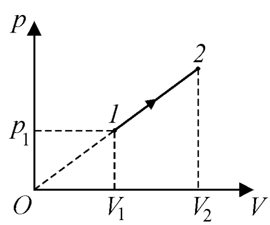
Указание 2. Используйте условие равновесия поршня.



Решение. При нагревании газ перемещает поршень, совершая изобарное расширение. Поскольку молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при постоянном давлении $C_p = \frac{5}{2}R$, количество теплоты, сообщенное газу, равно $Q = \frac{5}{2}\nu R\Delta T$, где ν – число молей газа, ΔT – изменение его температуры. Записывая уравнения начального и конечного состояний газа, имеем $pV = \nu RT$, $p(V + lS) = \nu R(T + \Delta T)$, где p – давление газа, V – начальный объем газа, T – его начальная температура. Отсюда $\nu R\Delta T = plS$. Для определения давления газа воспользуемся условием равновесия поршня под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где Mg – модуль силы тяжести, N – модуль силы реакции цилиндра, pS – модуль силы давления газа, p_0S – модуль силы атмосферного давления. В проекции на направление, перпендикулярное поршню, имеем $pS = p_0S + Mg\sin\alpha$. Объединяя записанные выражения, получаем $Q = \frac{5}{2}l\left(p_0S + Mg\sin\alpha\right) \approx 73{,}38$ Дж.

Ответ. $Q = \frac{5}{2}l\left(p_0S + Mg\sin\alpha\right) \approx 73{,}38$ Дж.

Задача 3



Найти количество теплоты ΔQ, переданное идеальному одноатомному газу при переводе его из состояния *1* в состояние *2*, как показано на рисунке. При расчете принять $p_1 = 100$ кПа, $V_1 = 2$ л, $V_2 = 4$ л.

Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Определите изменение внутренней энергии газа в заданном процессе.

Указание 2. Для вычисления работы газа используйте метод pV-диаграмм.

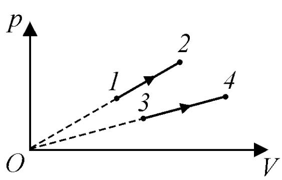
Решение. Изменение внутренней энергии в рассматриваемом процессе $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right)$. Учитывая, что продолжение прямой, изображающей график процесса, проходит через начало координат (давление в этом процессе пропорционально объему), имеем $p_2 = p_1V_2/V_1$. Следовательно, $\Delta U = \frac{3}{2}p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right)$.

Работа газа в этом процессе численно равна площади трапеции: $A = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right)$. Количество теплоты, полученное газом, $\Delta Q = \Delta U + A$. Следовательно, $\Delta Q = \Delta U + A = 2p_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right) = \frac{2p_1}{V_1}(V_2^2 - V_1^2) = 1{,}2$ кДж.

Ответ. $\Delta Q = \frac{2p_1}{V_1}(V_2^2 - V_1^2) = 1{,}2$ кДж.

Задача 4

На рисунке изображены pV-диаграммы двух процессов, проводимых над одним и тем же идеальным одноатомным газом. Масса газа, участвующего в процессе *1 – 2*, в $k = 2$ раза больше, чем масса газа, с которым проводится процесс *3 – 4*. Температура в точке *1* равна температуре в точке *3*, а температура в точке *2* равна температуре в точке *4*. Найти отношение n количеств теплоты, получаемых газом в процессах *1 – 2* и *3 – 4*.



Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Определите изменение внутренней энергии газа в заданных процессах.

Указание 2. Для вычисления работы газа используйте метод pV-диаграмм.

Решение. Рассмотрим вначале процесс *1 – 2*. Изменение внутренней энергии газа и работа, совершенная газом в этом процессе, соответственно равны $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu_1 R(T_2 - T_1)$, $A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$. Здесь ν_1 – число молей газа, участвующего в процессе *1 – 2*; p_i, V_i, T_i – давление, объем и температура газа в точке i ($i = 1, 2$). Поскольку точки *1* и *2* лежат на прямой, проходящей через начало координат, справедливо равенство $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$. Используя это равенство, а также уравнения состояния газа в точках *1* и *2* $p_1V_1 = \nu_1 RT_1$, $p_2V_2 = \nu_1 RT_2$, выражение для работы газа легко преобразовать к виду $A_{12} = \frac{1}{2}\nu_1 R(T_2 - T_1)$. Из первого закона термодинамики следует, что количество теплоты, полученное газом в процессе *1 – 2*, равно $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 2\nu_1 R(T_2 - T_1)$. Рассуждая аналогично, находим количество теплоты, полученное газом в процессе *3 – 4* $Q_{34} = 2\nu_2 R(T_4 - T_3)$, где ν_2 – количество газа, участвующего в этом процессе. Поскольку по условию задачи $T_3 = T_1$, $T_4 = T_2$, выражение для Q_{34} преобразуется к виду $Q_{34} = 2\nu_2 R(T_2 - T_1)$. Объединяя полученные соотношения, находим $n = \frac{Q_{12}}{Q_{34}} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{m_1}{m_2} = k = 2.$

Ответ. $n = k = 2.$

Задача 5

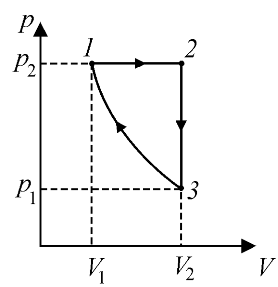
С идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс. Из начального состояния $p_2 = 1{,}6$ МПа и $V_1 = 2$ л газ расширяется при постоянном давлении до объема $V_2 = 16$ л. Затем при постоянном объеме V_2 давление газа уменьшается до такой величины $p_1 = 50$ кПа, что из состояния p_1, V_2 газ приводится в начальное состояние адиабатическим сжатием. Найти работу *A*, совершенную газом за цикл.

Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Работу газа на участке *1 – 2* определите методом *pV*-диаграмм.

Указание 2. Работу над газом на участке *3 – 1* найдите по изменению внутренней энергии газа на этом участке.

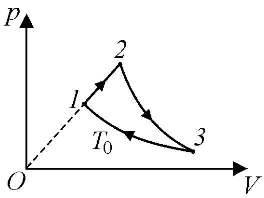
Решение. *pV*-диаграмма рассматриваемого процесса изображена на рисунке. На участке *1 – 2* газ совершает работу $A_{12} = p_2(V_2 - V_1)$. На участке *2 – 3* работа газа $A_{23} = 0$. Для вычисления работы, совершенной над газом при адиабатическом сжатии на участке *3 – 1*, воспользуемся соотношением $A_{31} = -\Delta U_{31} = -\frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3)$, где U – внутренняя энергия газа, ν – количество молей газа. Привлекая уравнение Менделеева–Клапейрона, находим, что $A_{31} = \frac{3}{2}(p_1 V_2 - p_2 V_1)$. Поскольку



$A = A_{12} + A_{23} + A_{31}$, получаем $A = p_2 V_2 + \frac{3}{2} p_1 V_2 - \frac{5}{2} p_2 V_1 = 18{,}8$ кДж.

Ответ. $A = p_2 V_2 + \frac{3}{2} p_1 V_2 - \frac{5}{2} p_2 V_1 = 18{,}8$ кДж.

Задача 6



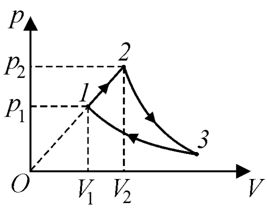
С одним молем идеального одноатомного газа проводят цикл, показанный на рисунке. На участке *1 – 2* объем газа увеличивается в $m = 2$ раза. Процесс *2 – 3* – адиабатическое расширение, процесс *3 – 1* – изотермическое сжатие при температуре $T_0 = 300$ К. Найти работу A газа на участке *2 – 3*. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Идея. Используйте первый закон термодинамики.

Указание 1. Работу газа на участке *2 – 3* найдите по изменению внутренней энергии газа на этом участке.

Указание 2. Запишите уравнения состояния в точках *1* и *2*. Используйте линейную зависимость $p(V)$ в процессе *1 – 2*.

Решение. *pV*-диаграмма рассматриваемого процесса изображена на рисунке. Для



вычисления работы, совершенной газом при адиабатическом расширении на участке *2 – 3*, воспользуемся соотношением $A_{23} = -\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_0)$, где U – внутренняя энергия газа, ν – количество молей газа. Обозначив через p_1, V_1 и p_2, V_2 давление и объемы газа в точках *1* и *2* соответственно, запишем уравнения состояния газа в этих точках: $p_1V_1 = \nu RT_0$, $p_2V_2 = \nu RT_2$. Поскольку $p_2 = mp_1$, $V_2 = mV_1$, из этих уравнений следует, что $T_2 = m^2T_0$. Следовательно, $A = \frac{3}{2}R(m^2 - 1)T_0 = 11{,}2$ кДж.

Ответ. $A = \frac{3}{2}R(m^2 - 1)T_0 = 11{,}2$ кДж.

Задача 7

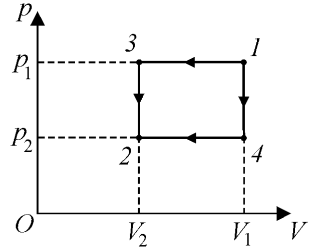
Идеальный газ переводят из состояния p_1, V_1 в состояние p_2, V_2 двумя разными способами. В первый раз переход совершается сначала по изобаре, а затем по изохоре, а во второй – сначала по изохоре, а затем по изобаре. Найти разность количеств теплоты ΔQ, выделившейся при этих переходах. При расчетах положить $p_1 = 2\cdot 10^5$ Па, $V_1 = 4$ м^3, $p_2 = 10^5$ Па, $V_2 = 2$ м^3.

Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Изобразите на рисунке *pV*-диаграммы совершаемых процессов.

Указание 2. Учтите, что начальное и конечное состояния в рассматриваемых процессах совпадают.

Решение. pV-диаграммы совершаемых переходов изображены на рисунке. Согласно первому закону термодинамики, в этих переходах выделяются следующие количества теплоты: $Q_{132} = A_{132} + \Delta U_{132}$, $Q_{142} = A_{142} + \Delta U_{142}$. Поскольку начальное и конечное состояния в рассматриваемых процессах совпадают, изменения внутренней энергии в них одинаковы: $\Delta U_{132} = \Delta U_{142}$. Следовательно, $\Delta Q = A_{132} - A_{142}$, т.е. $\Delta Q = (p_1 - p_2)(V_1 - V_2) = 2 \cdot 10^5$ Дж.



Ответ. $\Delta Q = (p_1 - p_2)(V_1 - V_2) = 2 \cdot 10^5$ Дж.

Задача 8

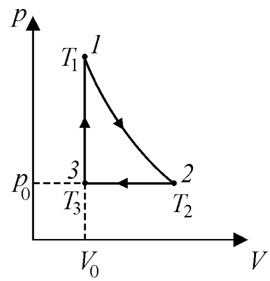
С идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс. Масса газа $m = 60$ г, его молярная масса $M = 20$ г/моль. Из начального состояния газ адиабатически расширяется, причем его температура изменяется от $T_1 = 400$ К до $T_2 = 64$ К. Затем газ изобарически сжимают при давлении $p_0 = 200$ кПа до первоначального объема $V_0 = 500$ см^3. Цикл замыкается изохорой $V = V_0$. Каково суммарное количество теплоты Q, которое газ получил и отдал за цикл?

Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Изобразите pV-диаграмму процесса. Найдите количества теплоты, которые газ отдает и получает на отдельных участках.

Указание 2. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Решение. Используя обозначения, приведенные на рисунке, находим количества теплоты, которые газ отдает и получает на отдельных участках: $Q_{12} = 0$, $Q_{23} = \frac{5}{2}\frac{m}{M}R(T_3 - T_2)$, $Q_{31} = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R(T_1 - T_3)$. Из уравнения состояния в точке 3 следует, что $\frac{m}{M}RT_3 = p_0V_0$. Учитывая, что искомое количество теплоты равно $Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$, находим $Q = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{2}(3T_1 - 5T_2) + p_0V_0 = 11{,}1$ кДж.



Ответ. $Q = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{2}(3T_1 - 5T_2) + p_0V_0 = 11{,}1$ кДж.

Задача 9

Теплоизолированный сосуд объемом $V = 0{,}5$ м^3 содержит одноатомный газ, молярная масса которого $M = 4$ г/моль. В сосуд вводится дополнительно $m = 1$ г такого же газа при температуре $T = 400$ К. На какую величину Δp изменится давление? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Идея. Используйте уравнение состояния идеального газа и первый закон термодинамики.

Указание 1. Запишите уравнение состояния газа в начальном и в конечном состояниях.

Указание 2. Используйте тот факт, что сосуд теплоизолирован и газ работу не совершает.

Решение. Пусть p_0, m_0 и T_0 – начальные давление, масса и температура газа в сосуде. Уравнение начального состояния газа имеет вид $p_0 V = \frac{m_0}{M} R T_0$. Обозначив через T_1 температуру, установившуюся в сосуде после введения в него дополнительной порции газа, запишем уравнение конечного состояния газа: $(p_0 + \Delta p)V = \frac{m_0 + m}{M} R T_1$. Поскольку сосуд теплоизолирован и газ работу не совершает, из первого закона термодинамики следует соотношение $\frac{3}{2}\frac{m_0}{M} R T_0 + \frac{3}{2}\frac{m}{M} R T = \frac{3}{2}\frac{m_0 + m}{M} R T_1$, откуда $T_1 = \frac{m_0 T_0 + mT}{m_0 + m}$. Объединяя записанные выражения, получаем $\Delta p = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V} = 1{,}66 \cdot 10^3$ Па.

Ответ. $\Delta p = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V} = 1{,}66 \cdot 10^3$ Па.

Задача 10

Два сосуда содержат одноатомный идеальный газ. Масса газа в первом сосуде $m_1 = 20$ г, его температура $T_1 = 300$ К. Второй сосуд содержит такой же газ массой $m_2 = 30$ г при температуре $T_2 = 400$ К. Сосуды соединяют трубкой. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом с окружающей средой, найти температуру газа T, установившуюся в сосудах.

Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание. Используйте тот факт, что сосуды теплоизолированы и газ работу не совершает.

Решение. Поскольку сосуды теплоизолированы и газ не совершает работу, внутренняя энергия газа в процессе теплообмена остается постоянной. Следовательно, $\frac{3}{2} \cdot \frac{m_1}{M} R T_1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{m_2}{M} R T_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{M} R T$, где M – молярная масса газа. Отсюда находим $T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 360$ К.

Ответ. $T = \dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 360$ К.

Задача 11

Сосуд содержит $m = 1{,}28$ г гелия при температуре $t = 27$ °C. Во сколько раз β изменится среднеквадратичная скорость молекул гелия, если при его адиабатическом сжатии совершить работу $A = 252$ Дж? Молярная масса гелия $M = 4$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К).

Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Запишите связь между среднеквадратичной скоростью молекул и температурой газа.

Указание 2. Используйте связь между изменением внутренней энергии газа и совершенной над ним работой при адиабатическом процессе.

Решение. Среднеквадратичная скорость молекул газа определяется выражением $v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_0 – масса молекулы. Следовательно, искомое отношение равно $\beta = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_0}}$, где T_1 – температура газа в конечном состоянии, $T_0 = t + 273$ °C – его температура в начальном состоянии. При адиабатическом сжатии газа изменение его внутренней энергии $\Delta U = \dfrac{3}{2}\dfrac{m}{M}R(T_1 - T_0) = A.$ Отсюда $T_1 = T_0 + \dfrac{2MA}{3mR}$ и $\beta = \sqrt{1 + \dfrac{2MA}{3mR(t + 273°\text{C})}} = 1{,}3.$

Ответ. $\beta = \sqrt{1 + \dfrac{2MA}{3mR(t + 273°\text{C})}} = 1{,}3.$

Задача 12

Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое количество атомов гелия, соединены трубкой с краном. В первом сосуде среднеквадратичная скорость атомов равна $v_1 = 500$ м/с, во втором – $v_2 = 1000$ м/с. Какова будет среднеквадратичная скорость v_3 атомов гелия, если открыть кран и сделать сосуды сообщающимися? Сосуды и трубка теплоизолированы.

Идея. Воспользуйтесь определением термодинамического равновесия.

Указание 1. Выразите внутреннюю энергию газа через среднеквадратичную скорость молекул газа.

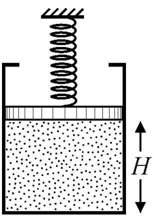
Указание 2. Учтите, что при тепловом равновесии температура во всех частях системы одинакова.

Решение. Внутренняя энергия гелия, который является одноатомным газом, до открывания крана равна $U_0 = N\frac{m_0 v_1^2}{2} + N\frac{m_0 v_2^2}{2}$, где N – число атомов гелия в каждом из сосудов, m_0 – масса атома гелия. После открывания крана в сосудах устанавливается тепловое равновесие, в результате чего средняя кинетическая энергия молекул становится одинаковой. Так как сосуды теплоизолированы и гелий при перемешивании не совершает работу, полная внутренняя энергия гелия не изменяется. Следовательно, $U_1 = 2N\frac{m_0 v_3^2}{2} = U_0$. Объединяя записанные равенства, получаем, что $v_3 = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} \approx 790{,}6$ м/с.

Ответ. $v_3 = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} \approx 790{,}6$ м/с.

Задача 13

В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под поршнем весом $P = 20$ Н содержится идеальный одноатомный газ. Между поршнем и неподвижной опорой располагается пружина, жесткость которой $k = 200$ Н/м. Расстояние между поршнем и дном сосуда $H = 30$ см, при этом пружина не деформирована. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы поршень переместился на расстояние $\Delta h = 10$ см? Атмосферное давление не учитывать.



Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Учтите, что расширяющийся газ совершает работу по подъему поршня и сжатию пружины.

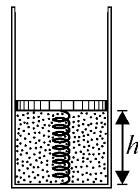
Указание 2. Запишите уравнения начального и конечного состояний газа и определите изменение внутренней энергии газа.

Решение. При нагревании газ будет расширяться, совершая работу по подъему поршня и сжатию пружины: $A = P\Delta h + \frac{k\Delta h^2}{2}$. Одновременно будет повышаться температура газа. Учитывая, что давление газа в начальном и конечном состояниях равно соответственно $p_1 = \frac{P}{S}$ и $p_2 = \frac{P}{S} + \frac{k\Delta h}{S}$, из уравнений состояния газа имеем $\frac{P}{S}HS = \nu RT_1$, $\left(\frac{P}{S} + \frac{k\Delta h}{S}\right)(H + \Delta h)S = \nu RT_2$. Из двух последних соотношений получаем $T_2 - T_1 = \frac{1}{\nu R}\left[(P + k\Delta h)(H + \Delta h) - PH\right]$. Поскольку $Q = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + A$, ответ имеет вид $Q = \frac{1}{2}(5P + 3kH + 4k\Delta h)\Delta h = 18$ Дж.

Ответ. $Q = \dfrac{1}{2}(5P + 3kH + 4k\Delta h)\Delta h = 18$ Дж.

Задача 14

Невесомый поршень соединен с дном цилиндрического сосуда пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м. В сосуде под поршнем находится идеальный одноатомный газ. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда составляет $h = 0{,}2$ м. Найти количество теплоты ΔQ, которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда удвоилось. Считать, что пружина не деформирована при $h = 0$. Атмосферное давление не учитывать.



Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Определите работу газа через изменение потенциальной энергии упругой деформации пружины.

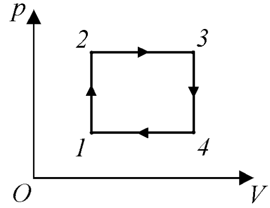
Указание 2. Запишите уравнения начального и конечного состояний газа и определите изменение его внутренней энергии.

Решение. В соответствии с первым законом термодинамики $\Delta Q = \Delta U + A$, где $\Delta U = \dfrac{3}{2}\nu R(T - T_0)$ – изменение внутренней энергии газа, $A = \dfrac{k}{2}(4h^2 - h^2)$ – работа газа, равная изменению потенциальной энергии упругой деформации пружины. Из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для начального и конечного состояний газа, находим $p_0V_0 = \dfrac{kh}{S}hS = kh^2 = \nu RT_0$, $pV = \dfrac{k2h}{S}2hS = 4kh^2 = \nu RT$. Следовательно, $\Delta U = \dfrac{9}{2}kh^2$. Учитывая, что $A = \dfrac{3}{2}kh^2$, получаем $\Delta Q = 6kh^2 = 24$ Дж.

Ответ. $\Delta Q = 6kh^2 = 24$ Дж.

Задача 15

В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Отношение максимальной температуры газа к минимальной в этом цикле равно $n = 4$, температуры в точках *2* и *4* совпадают. Найти коэффициент полезного действия двигателя η.



Идея. Воспользуйтесь определением коэффициента полезного действия двигателя.

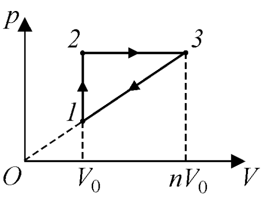
Указание 1. Используйте тот факт, что работа газа за цикл численно равна площади прямоугольника *1–2–3–4*.

Указание 2. Определите участки цикла, на которых газ получает теплоту, и найдите количество теплоты, полученное газом за цикл.

Решение. Работа газа за цикл численно равна площади прямоугольника *1–2–3–4*: $A=(p_2-p_1)(V_3-V_1)=\nu R(T_3-2T+T_1)$, где ν – число молей газа, $T=T_2=T_4$. Поскольку газ получает теплоту на участках *1 – 2* и *2 – 3*, полное количество теплоты, полученное газом за цикл, равно $Q_п=\frac{3}{2}\nu R(T-T_1)+\frac{5}{2}\nu R(T_3-T)$. Следовательно, $\eta=\frac{A}{Q_п}=\frac{2(T_3-2T+T_1)}{5T_3-2T-3T_1}$. Из уравнений изохорных процессов *1 – 2* и *4 – 3* с учетом того, что точки *2*, *3* и *1*, *4* лежат на изобарах, вытекает, что $\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_3}{T_4}$. Отсюда $T=\sqrt{T_1T_3}$. По условию задачи $\frac{T_3}{T_1}=n$. Следовательно, $\eta=\frac{2(n-2\sqrt{n}+1)}{5n-2\sqrt{n}-3}=\frac{2}{13}\approx 15{,}4\%$.

Ответ. $\eta=\frac{2(n-2\sqrt{n}+1)}{5n-2\sqrt{n}-3}=\frac{2}{13}\approx 15{,}4\%$.

Задача 16



В тепловом двигателе, рабочим телом которого является идеальный одноатомный газ, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке. Отношение максимального объема газа к минимальному в этом цикле равно $n=3$. Найти коэффициент полезного действия двигателя η.

Идея. Воспользуйтесь определением коэффициента полезного действия двигателя.

Указание 1. Используйте тот факт, что работа газа за цикл численно равна площади треугольника *1 – 2 – 3*.

Указание 2. Определите участки цикла, на которых газ получает теплоту, и найдите количество теплоты, полученное газом за цикл.

Решение. Работа, совершаемая газом в циклическом процессе, равна $A=$ $=\frac{1}{2}(p_2-p_1)(nV_0-V_0)=\frac{1}{2}(n-1)^2p_1V_0$. Газ получает теплоту на участках *1 – 2* и *2 – 3*, поэтому полное количество теплоты, полученное газом за цикл, равно $Q_п=\frac{3}{2}\nu R(T_2-T_1)+\frac{5}{2}\nu R(T_3-T_2)$, где ν – число молей газа. Используя уравнение состояния газа, это выражение можно преобразовать к виду $Q_п=\frac{1}{2}p_1V_0(n-1)(3+5n)$.

Следовательно, $\eta=\frac{A}{Q_п}=\frac{n-1}{3+5n}=\frac{1}{9}\approx 11{,}1\%$.

Ответ. $\eta = \dfrac{A}{Q_\text{п}} = \dfrac{n-1}{3+5n} = \dfrac{1}{9} \approx 11{,}1\%.$

Задача 17

Температура нагревателя идеальной тепловой машины $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К, количество теплоты, получаемое от нагревателя за цикл, $Q = 400$ Дж, число циклов в секунду $n = 2.$ С какой скоростью v будет перемещаться по горизонтальной дороге тележка, приводимая в движение такой машиной, если сила сопротивления $F = 100$ Н? Скорость тележки считать постоянной.

Идея. Воспользуйтесь определением коэффициента полезного действия двигателя.

Указание 1. Запишите выражение для КПД идеальной тепловой машины.

Указание 2. Используйте определение мощности в механике.

Решение. По определению КПД теплового двигателя $\eta = \dfrac{A}{Q}$, где A – работа газа за цикл, Q – количество теплоты, которое газ получает за цикл от нагревателя. Учитывая, что КПД идеальной тепловой машины $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_2}$, находим $A = Q\dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$. Мощность $N = nA$, развиваемая двигателем, расходуется на преодоление силы сопротивления при движении тележки: $N = Fv.$ Объединяя записанные выражения, получаем $v = \dfrac{nQ(T_1 - T_2)}{FT_1} = 2$ м/с.

Ответ. $v = \dfrac{nQ(T_1 - T_2)}{FT_1} = 2$ м/с.

Задача 18

Тепловая машина с максимально возможным КПД имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой при $t_1 = 100\,°\text{C}$, а в качестве холодильника – сосуд со льдом при $t_2 = 0\,°\text{C}$. Какая масса льда m растает при совершении машиной работы $A = 10$ Дж? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ Дж/г.

Идея. Воспользуйтесь определением коэффициента полезного действия двигателя.

Указание. Запишите выражение для КПД идеальной тепловой машины.

Решение. Максимально возможный КПД достигается, если тепловая машина работает по циклу Карно. Он равен $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_2}$, где $T_1 = t_1 + 273\,°\text{C}$, $T_2 = t_2 + 273\,°\text{C}$ – абсолютные температуры нагревателя и холодильника. С другой стороны, по определению

КПД $\eta = \dfrac{A}{Q_{пол}}$, где $A = Q_{пол} - |Q_{отд}|$ – работа газа за цикл; $Q_{пол}$ – количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя; $Q_{отд}$ – количество теплоты, отданное за цикл холодильнику. Из равенства $\dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{Q_{пол} - |Q_{отд}|}{Q_{пол}}$ находим, что $|Q_{отд}| = Q_{пол} \cdot \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{A}{\eta} \cdot \dfrac{T_2}{T_1}$. Отданная холодильнику теплота расходуется на таяние льда при температуре плавления. Следовательно, $|Q_{отд}| = m\lambda$. Объединяя записанные выражения, получаем $m = \dfrac{(t_2 + 273\,°\mathrm{C})}{\lambda(t_1 - t_2)} A \approx 0{,}11$ г.

Ответ. $m = \dfrac{(t_2 + 273\,°\mathrm{C})}{\lambda(t_1 - t_2)} A \approx 0{,}11$ г.

Задача 19

Когда легковой автомобиль едет с постоянной скоростью по горизонтальному шоссе, расход бензина составляет $\mu_1 = 7$ л/100 км. Каков будет расход бензина μ_2, если этот автомобиль поедет с той же скоростью вверх по наклонному участку шоссе, образующему угол $\alpha = 0{,}01$ рад с горизонтом? Качество дорожного покрытия на горизонтальном и наклонном участках шоссе одинаково. Масса автомобиля $M = 1000$ кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$, удельная теплота сгорания бензина $q = 42$ МДж/кг, плотность бензина $\rho = 0{,}7$ кг/л. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2. При расчетах положить $\sin\alpha \approx \alpha$.

Идея. Свяжите расход топлива с работой, совершенной двигателем.

Указание. Запишите выражение для работы двигателя на горизонтальном и наклонном участках дороги.

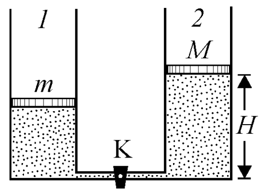
Решение. Пусть F – модуль результирующей всех сил сопротивления движению автомобиля. При перемещении автомобиля на расстояние l работа, совершенная двигателем, равна произведению количества теплоты, выделившейся при сгорании топлива, на коэффициент полезного действия двигателя: $A = \mu l \rho q \dfrac{\eta}{100\%}$. На горизонтальном участке шоссе длиной l эта работа равна по величине работе сил сопротивления $A_c = Fl$, т.е. $A_1 = \mu_1 \rho q \dfrac{\eta}{100\%} l = Fl$. На наклонном участке шоссе той же длины работа двигателя равна сумме величины работы сил сопротивления $A_c = Fl$ и приращения потенциальной энергии автомобиля в поле силы тяготения $\Delta E_п = Mgl\sin\alpha$. С учетом малости угла наклона шоссе к горизонту имеем $A_2 = \mu_2 \rho q \dfrac{\eta}{100\%} l = Fl + Mg\alpha l$. Объединяя эти равенства, находим, что $\mu_2 = \mu_1 + \dfrac{M\alpha g \cdot 100\%}{\rho q \eta}$.

Замечание. При подстановке числовых данных из условия задачи получаем, что последнее слагаемое в ответе имеет размерность л/м. Чтобы преобразовать его к требуемой размерности (л/100 км), нужно умножить его на 10^5.

Ответ. $\mu_2 = \mu_1 + \dfrac{M\alpha g \cdot 100\%}{\rho q \eta} \approx 8{,}13$ л/100 км.

Задача 20

В цилиндрическом сосуде *1* под поршнем массой $m = 5$ кг находится одноатомный идеальный газ. Сосуд *1* соединен трубкой, снабженной краном, с таким же сосудом *2*, в котором под поршнем массой $M = 10$ кг находится такой же газ. Сосуды и трубка теплоизолированы. В начальном состоянии кран К закрыт, температура газа в обоих сосудах одинакова, поршень в сосуде *2* расположен на высоте $H = 10$ см от дна. На какое расстояние Δh передвинется поршень в сосуде *1* после открывания крана? Объемом трубки с краном пренебречь, атмосферное давление не учитывать.



Идея. Воспользуйтесь первым законом термодинамики.

Указание 1. Найдите внутреннюю энергию газа в сосудах *1* и *2* в исходном состоянии системы.

Указание 2. Определите стационарное положение поршней после открывания крана.

Указание 3. Рассчитайте изменение внутренней энергии газа и совершенную в системе работу при переходе от начального к конечному состоянию.

Решение. При закрытом кране внутренние энергии газов в сосудах *1* и *2* равны соответственно $U_1 = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2}\cdot\frac{mg}{S}hS = \frac{3}{2}mgh$, $U_2 = \frac{3}{2}MgH$, где h – первоначальная высота поршня в сосуде *1*. После открывания крана более тяжелый поршень, находящийся в сосуде *2*, опустится на дно, полностью вытеснив газ в сосуд *1*. В результате этого поршень в сосуде *1* поднимется на высоту Δh и внутренняя энергия газа в этом сосуде станет равной $U = \frac{3}{2}mg(h + \Delta h)$. Изменение внутренней энергии в системе равно $\Delta U = U - (U_1 + U_2) = \frac{3}{2}\left(mg\Delta h - MgH\right)$. Работа, совершенная системой и над системой, в сумме равна $A = mg\Delta h - MgH$. Поскольку система теплоизолирована, $\Delta U + A = 0$. Объединяя записанные выражения, получаем $\Delta h = \frac{M}{m}H = 20$ см.

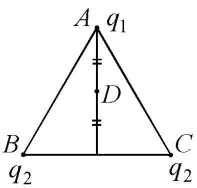
Ответ. $\Delta h = \dfrac{M}{m}H = 20$ см.

3. Электродинамика

3.1. Электрическое поле

Задача 1

Три положительных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника



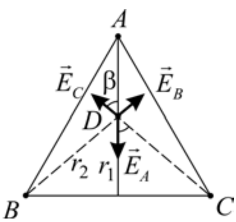
ABC. Величина заряда, находящегося в точке *A*, равна q_1; величины зарядов в точках *B* и *C* равны q_2. Найти отношение $\alpha = q_2 / q_1$, если напряженность электрического поля, создаваемого этими тремя зарядами в точке *D*, лежащей на середине высоты, опущенной из вершины *A* на сторону *BC*, равна нулю.

Идея. Воспользуйтесь определением напряженности электрического поля.

Указание 1. Используйте формулу для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом.

Указание 2. Воспользуйтесь принципом суперпозиции полей.

Решение. Обозначим через a сторону треугольника. Тогда расстояния между точ-



кой *D* и вершинами треугольника (см. рисунок) выразятся как $AD = r_1 = a\frac{\sqrt{3}}{4}$, $BD = CD = r_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = a\frac{\sqrt{7}}{4}$. Модули напряженности полей, создаваемых в точке *D* зарядами, расположенными в точках *A*, *B* и *C*, равны $E_A = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$, $E_B = E_C = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$. Суммарное поле в точке *D* будет равно нулю при выполнении условия $E_A = 2E_B \cos\beta = 2E_B \frac{r_1}{r_2}$. Комбинация записанных выражений позволяет получить $\alpha = \frac{q_2}{q_1} = \frac{7}{6}\sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}8.$

Ответ. $\alpha = \frac{q_2}{q_1} = \frac{7}{6}\sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}8.$

Задача 2

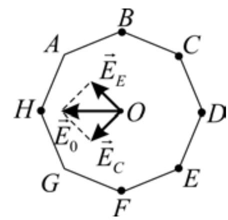
В окружность радиуса $R = 3$ см с центром в точке *O* вписан правильный восьмиугольник *ABCDEFGH*. В шести вершинах восьмиугольника помещены одинаковые положительные заряды так, что вектор $\vec{E}_0$ напряженности в точке *O* направлен по отрезку

OH. Чему равен модуль поля E_0, если величина каждого из зарядов $q = 10^{-9}$ Кл? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Идея. Воспользуйтесь формулой для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом.

Указание. Установите, в каких вершинах нужно разместить заряды для того, чтобы поле в центре восьмиугольника было направлено по отрезку *OH*.

Решение. Для того чтобы поле в центре восьмиугольника было направлено по отрезку *OH*, нужно разместить заряды в вершинах *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *H*. В самом деле, сумма полей $\vec{E}_E$ и $\vec{E}_C$, создаваемых в точке *O* зарядами, находящимися в вершинах *E* и *C* соответственно, направлена по отрезку *OH*, а поле, создаваемое остальными зарядами, в силу их симметрии относительно точки *O* обращается в нуль. Поскольку $E_E = E_C$ и $\angle AOG = 90°$, ответ имеет вид $E_0 = \dfrac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \approx 14{,}1$ кВ/м.



Ответ. $E_0 = \dfrac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \approx 14{,}1$ кВ/м.

Задача 3

Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусов $r_1 = 1$ см и $r_2 = 2$ см, несущие одинаковые заряды, взаимодействуют с силой $F = 10^{-4}$ Н. Какова будет сила взаимодействия этих шаров F', если соединить их друг с другом на короткое время тонким проводом?

Идея. Найдите заряды металлических шаров после соединения их тонким проводом и воспользуйтесь законом Кулона.

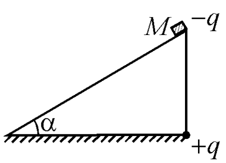
Указание. Учтите, что после соединения шаров проводом их заряды перераспределятся так, что потенциалы шаров станут равными.

Решение. Поскольку по условию задачи шары достаточно удалены друг от друга, их потенциалы до соединения проводом можно определять по формуле для потенциала уединенной заряженной сферы. После соединения шаров проводом заряды на них перераспределятся так, что потенциалы шаров станут равными друг другу. Следовательно, $\varphi_1' = \dfrac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \varphi_2' = \dfrac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$, т.е. $\dfrac{q_1'}{r_1} = \dfrac{q_2'}{r_2}$. Пренебрегая емкостью провода, запишем закон сохранения заряда в системе: $q_1' + q_2' = 2q$. Из последних двух уравнений находим заряды на шарах после их соединения: $q_1' = \dfrac{2qr_1}{r_1 + r_2}$, $q_2' = \dfrac{2qr_2}{r_1 + r_2}$. Сила взаимодействия шаров определяется по закону Кулона, а именно $F=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (до соединения), $F'=\dfrac{q_1'q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (после соединения), где R – расстояние между шарами. Объединяя полученные выражения, находим $F'=F\cdot\dfrac{4r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}=\dfrac{8}{9}\cdot 10^{-4}$ Н.

Ответ. $F'=F\cdot\dfrac{4r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}=\dfrac{8}{9}\cdot 10^{-4}$ Н.

Задача 4

По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонталью, соскальзывает с высоты h небольшое тело, заряженное отрицательным зарядом $-q$. В точке пересечения вертикали, проведенной через начальное положение тела, с основанием наклонной плоскости находится заряд $+q$. Определить скорость v, с которой тело достигнет основания наклонной плоскости. Масса тела M, ускорение свободного падения g. Трением пренебречь.



Идея. Воспользуйтесь законом сохранения механической энергии.

Указание. Учтите, что потенциальная энергия заряженного тела складывается из энергии в поле силы тяжести и энергии кулоновского взаимодействия.

Решение. Выберем в качестве нулевого уровня потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли основание наклонной плоскости, а в качестве точки с нулевой потенциальной энергией притяжения зарядов – бесконечно удаленную точку. По закону сохранения механической энергии имеем $Mgh-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h}=-\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h}\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{Mv^2}{2}$. Из последнего уравнения находим, что $v=\sqrt{2gh-\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 Mh}\left(1-\operatorname{tg}\alpha\right)}$. При $h<\dfrac{q}{2}\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\pi\varepsilon_0 Mg}}$ выражение под корнем отрицательно. В этом случае тело не достигнет основания наклонной плоскости.

Ответ. $v=\sqrt{2gh-\dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 Mh}\left(1-\operatorname{tg}\alpha\right)}$.

Задача 5

На шероховатой горизонтальной непроводящей поверхности закреплен маленький шарик, имеющий заряд q. Маленький брусок массой m, несущий такой же по знаку и величине заряд, помещают на эту поверхность на расстоянии l_0 от закрепленного заряженного шарика. Какой путь l пройдет брусок до остановки, если его отпустить без начальной скорости? Коэффициент трения между бруском и поверхностью μ. Электрическая постоянная ε_0, ускорение свободного падения g.

Идея. Воспользуйтесь законом изменения механической энергии.

Указание 1. Запишите энергию кулоновского взаимодействия заряженных тел в начальном и конечном состояниях. Приращение энергии приравняйте работе силы трения.

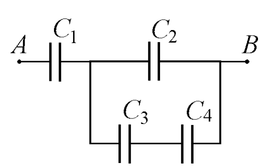
Указание 2. Проанализируйте полученный ответ.

Решение. Поскольку сила кулоновского взаимодействия между заряженными телами является потенциальной, для решения задачи можно воспользоваться законом изменения механической энергии. По условию в начальном и конечном состояниях брусок неподвижен и его кинетическая энергия равна нулю. Следовательно, изменение потенциальной энергии взаимодействия зарядов равно работе силы трения на перемещении бруска из начального положения в конечное $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(l_0+l)}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}=-\mu mgl$. Из последней формулы находим $l=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0\mu mg}-l_0$. Необходимо иметь в виду, что этот результат справедлив не всегда. В самом деле, если в начальном положении бруска сила кулоновского отталкивания меньше максимального значения силы трения покоя, т.е. $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2}\le\mu mg$, то брусок в движение не придет. Поэтому полная формулировка ответа такова: $l=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0\mu mg}-l_0$ при $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2}>\mu mg$; $l=0$ при $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2}\le\mu mg$.

Ответ. $l=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0\mu mg}-l_0$ при $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2}>\mu mg$; $l=0$ при $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2}\le\mu mg$.

Задача 6

В схеме, показанной на рисунке, емкости конденсаторов равны $C_1=1$ мкФ, $C_2=2$ мкФ, $C_3=3$ мкФ, $C_4=4$ мкФ. Напряжение между точками A и B равно $U=100$ В. Найти напряжение U_4 на конденсаторе C_4. Первоначально конденсаторы были не заряжены.



Идея. Используйте тот факт, что заряды на конденсаторах, включенных в последовательную цепь, одинаковы.

Указание 1. Свяжите напряжение между точками A и B с напряжениями на конденсаторах.

Указание 2. Примените закон сохранения заряда.

Решение. Обозначим напряжения на конденсаторах через U_1, U_2, U_3, U_4. Имеем следующую систему уравнений: $U_1+U_2=U$, $U_3+U_4=U_2$. По закону сохранения заряда $C_1U_1=CU_2$, $C_3U_3=C_4U_4$, где $C=C_2+\dfrac{C_3C_4}{C_3+C_4}$ – емкость участка цепи, содержащего конденсаторы C_2, C_3 и C_4. Из системы уравнений: $U_1+U_2=U$, $U_3+U_4=U_2$, $C_1U_1=CU_2$, $C_3U_3=C_4U_4$ находим $U_2=\dfrac{C_1U}{C_1+C}$, $U_4=\dfrac{C_3U_2}{C_3+C_4}$. Из последних двух выражений получаем $U_4=\dfrac{C_1C_3U}{C_3C_4+(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\approx 9{,}09$ В.

Ответ. $U_4=\dfrac{C_1C_3U}{C_3C_4+(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\approx 9{,}09$ В.

Задача 7

Два плоских конденсатора заряжены: первый до разности потенциалов U_1, второй – до разности потенциалов U_2. Площади пластин конденсаторов соответственно S_1 у первого и S_2 у второго, расстояние между пластинами у обоих конденсаторов одинаково. Чему будет равно напряжение на конденсаторах U, если соединить их одноименно заряженные обкладки?

Идея. Воспользуйтесь определением емкости конденсатора и законом сохранения заряда.

Указание 1. Вычислите заряды на конденсаторах до соединения.

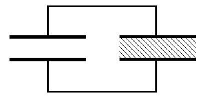
Указание 2. Воспользуйтесь законом сохранения заряда.

Решение. Обозначим через C_1 и C_2 емкости конденсаторов. Если d – расстояние между их обкладками, то $C_1=\dfrac{\varepsilon_0S_1}{d}$, $C_2=\dfrac{\varepsilon_0S_2}{d}$. Заряды на конденсаторах до соединения равны соответственно $q_1=C_1U_1$, $q_2=C_2U_2$. В силу закона сохранения заряда, при соединении обкладок алгебраическая сумма зарядов на каждой паре останется без изменения. Поскольку после соединения обкладок напряжения на конденсаторах станут одинаковыми, их можно рассматривать как два параллельно соединенных конденсатора с общей емкостью $C=C_1+C_2$. Общий заряд на этих конденсаторах $q=q_1+q_2$, а напряжение $U=q/C$. Объединяя записанные соотношения, находим $U=\dfrac{C_1U_1+C_2U_2}{C_1+C_2}$. Учитывая выражения для емкостей конденсаторов, получаем окончательно $U=\dfrac{U_1S_1+U_2S_2}{S_1+S_2}$.

Ответ. $U = \dfrac{U_1S_1 + U_2S_2}{S_1 + S_2}$.

Задача 8

Два одинаковых плоских конденсатора, один из которых заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, соединены, как показано на рисунке, заряжены до напряжения U_0 и отсоединены от источника. Какую работу A нужно совершить, чтобы вытащить диэлектрическую пластинку из конденсатора? Емкость пустого конденсатора равна C.



Идея. Учтите, что искомая работа равна приращению энергии конденсаторов.

Указание. Вычислите энергию конденсаторов в начальном и конечном состояниях.

Решение. Начальная емкость системы $C_1 = (\varepsilon + 1)C$, суммарный заряд на конденсаторах $q = (\varepsilon + 1)CU_0$, энергия конденсаторов в начальном состоянии $W_1 = \dfrac{(\varepsilon + 1)CU_0^2}{2}$. После вытаскивания диэлектрической пластинки суммарный заряд на конденсаторах останется неизменным, а емкость системы уменьшится и станет равной $C_2 = 2C$. Энергия системы в конечном состоянии $W_2 = \dfrac{q^2}{2C_2} = \dfrac{(\varepsilon + 1)^2 CU_0^2}{4}$. Увеличение энергии связано с работой по удалению пластинки (диэлектрик втягивается внутрь конденсатора). Если пластинку удаляют медленно, выделением теплоты при перемещении зарядов по проводникам, соединяющим конденсаторы, можно пренебречь. Тогда $A = W_2 - W_1$, следовательно, $A = \dfrac{1}{4}(\varepsilon^2 - 1)CU_0^2$.

Ответ. $A = \dfrac{1}{4}(\varepsilon^2 - 1)CU_0^2$.

Задача 9

Пластины плоского воздушного конденсатора расположены горизонтально. Верхняя пластина сделана подвижной и удерживается в начальном состоянии на высоте $h = 1$ мм над нижней пластиной, которая закреплена. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 1000$ В, отключили от источника и освободили верхнюю пластину. Какую скорость приобретет падающая пластина к моменту соприкосновения с нижней пластиной? Масса верхней пластины $m = 4{,}4$ г, площадь каждой из пластин $S = 0{,}01$ м^2, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Идея. Воспользуйтесь законом сохранения энергии.

Указание. Определите, в какой вид энергии переходит энергия заряженного конденсатора.

Решение. При неограниченном сближении пластин плоского конденсатора, заряд на котором постоянен, энергия конденсатора стремится к нулю. Поэтому вся начальная энергия конденсатора переходит в кинетическую энергию движущейся пластины. По закону сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{CU^2}{2}$, где $C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$ – емкость конденсатора в начальном состоянии. Отсюда находим $v = \sqrt{2gh + \frac{\varepsilon_0 SU^2}{mh}} \approx 0{,}2$ м/с.

Ответ. $v = \sqrt{2gh + \frac{\varepsilon_0 SU^2}{mh}} \approx 0{,}2$ м/с.

Задача 10

Два одинаковых плоских конденсатора, соединенных параллельно, зарядили до напряжения $U = 1000$ В и отключили от источника. Затем пластины одного из конденсаторов раздвинули так, что расстояние между ними увеличилось в $k = 3$ раза. После этого пластины конденсатора замкнули проводником. Какая энергия Q выделилась в проводнике? Первоначальная емкость каждого конденсатора $C = 500$ пФ.

Идея. Найдите выделившуюся в проводнике теплоту, используя закон сохранения энергии.

Указание 1. Найдите полный заряд батареи конденсаторов в первоначальном состоянии.

Указание 2. Найдите емкость, а затем энергию батареи после раздвигания пластин одного из конденсаторов.

Решение. Соединенные параллельно конденсаторы образуют батарею емкостью $2C$, полный заряд на которой равен $q = 2CU$. Поскольку после зарядки конденсаторов батарею отключили от источника, суммарный заряд на ней остается постоянным. Учитывая, что емкость плоского конденсатора обратно пропорциональна расстоянию между пластинами, найдем емкость батареи после раздвигания пластин одного из конденсаторов $C' = C\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. За счет работы, совершенной при раздвигании пластин, энергия батареи возрастает и принимает значение $W = \frac{q^2}{2C'} = \frac{2kCU^2}{(k+1)}$. При замыкании пластин вся эта энергия выделится в проводнике. Следовательно, $Q = 2CU^2 \cdot \frac{k}{k+1} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Ответ. $Q = 2CU^2 \cdot \dfrac{k}{k+1} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задача 11

Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 соединены последовательно и постоянно подключены к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. В некоторый момент времени параллельно конденсатору C_2 подсоединили резистор. Какое количество теплоты Q выделится в этом резисторе в процессе перераспределения зарядов в конденсаторах, если перед подключением резистора заряды на конденсаторах были одинаковы?

Идея. Найдите выделившуюся в проводнике теплоту, используя закон сохранения энергии.

Указание 1. Определите энергию системы в начальном состоянии.

Указание 2. Вычислите энергию системы после подключения резистора.

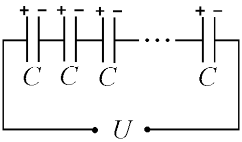
Указание 3. Найдите работу источника и запишите закон сохранения энергии.

Решение. В начальном состоянии заряд на каждом конденсаторе $q = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\mathscr{E}$, энергия системы $W_0 = \dfrac{q^2}{2C_1} + \dfrac{q^2}{2C_2} = \dfrac{C_1 C_2 \mathscr{E}^2}{2(C_1 + C_2)}$. При подключении резистора к конденсатору C_2 этот конденсатор полностью разрядится, а конденсатор C_1 зарядится до напряжения $\mathscr{E}$. Конечная энергия системы $W = \dfrac{C_1 \mathscr{E}^2}{2}$. При перезарядке конденсаторов источник переместит по цепи заряд $q = \left(C_1 - \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)\mathscr{E}$, совершив работу $A = q\mathscr{E} = \dfrac{C_1^2 \mathscr{E}^2}{C_1 + C_2}$. По закону сохранения энергии $A + W_0 = W + Q$. Следовательно, $Q = \dfrac{C_1^2 \mathscr{E}^2}{2(C_1 + C_2)}$.

Ответ. $Q = \dfrac{C_1^2 \mathscr{E}^2}{2(C_1 + C_2)}$.

Задача 12

Конденсатор емкостью $C_0 = 0{,}2$ мкФ заряжают до напряжения $U_0 = 360$ В и отсоединяют от источника. Затем к этому конденсатору подключают незаряженный конденсатор емкостью $C = 1{,}8$ мкФ, в результате чего последний заряжается. Отсоединив зарядившийся конденсатор C, к конденсатору C_0 подключают второй незаряженный конденсатор емкостью C, который отсоединяют после зарядки, и так далее. Всего таким образом от конденсатора C_0 заряжают $n = 20$ одинаковых конденсаторов емкостью C, которые затем соединяют последовательно. Чему равно напряжение U на концах полученной цепи конденсаторов?



Идея. Воспользуйтесь свойствами параллельно и последовательно соединенных конденсаторов.

Указание 1. Определите заряд, оставшийся на конденсаторе C_0 после зарядки первого конденсатора.

Указание 2. Определите заряд, оставшийся на конденсаторе C_0 после зарядки второго, третьего, …, n-го конденсатора. Найдите напряжения на каждом из них.

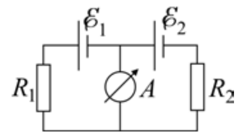
Указание 3. Найдите напряжения на концах цепи после их последовательного соединения.

Решение. Начальный заряд на конденсаторе C_0 равен $q_0 = C_0 U_0$. После подключения к конденсатору C_0 незаряженного конденсатора C этот заряд распределится между обоими конденсаторами и напряжение на них будет $U_1 = \dfrac{q_0}{C_0 + C} = \dfrac{C_0 U_0}{C_0 + C}$. На конденсаторе C_0 останется заряд $q_1 = C_0 U_1 = \dfrac{C_0^2 U_0}{C_0 + C}$. Аналогично находим, что после подключения к C_0 второго конденсатора C напряжение на конденсаторах будет $U_2 = \dfrac{q_1}{C_0 + C} = \dfrac{C_0^2 U_0}{(C_0 + C)^2}$. Повторяя эту операцию n раз, получаем набор из n конденсаторов, напряжения на которых $U_1, U_2, \ldots, U_n$ выражаются общей формулой $U_m = U_0 \left(\dfrac{C_0}{C_0 + C} \right)^m$, где $m = \overline{1, n}$. В результате последовательного соединения этих конденсаторов напряжение на концах цепи будет $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$. Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получаем ответ: $U = \dfrac{C_0 U_0}{C} \left[1 - \left(\dfrac{C_0}{C_0 + C} \right)^n \right]$. При $n = 20$ и $\dfrac{C_0}{C_0 + C} = 0{,}1$ ответ имеет вид $U \approx \dfrac{C_0 U_0}{C} = 40$ В.

Ответ. $U \approx \dfrac{C_0 U_0}{C} = 40$ В.

3.2. Законы постоянного тока

Задача 1



В схеме, показанной на рисунке, $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом. Чему равна ЭДС второго источника $\mathcal{E}_2$, если ток через амперметр не течет? Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

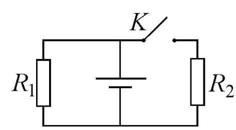
Идея. Воспользуйтесь законом Ома для участка цепи, содержащего ЭДС.

Указание. Запишите закон Ома для левого и правого участков цепи, содержащих источники $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$.

Решение. Поскольку ток через амперметр не идет, разность потенциалов между точками подключения амперметра к цепи равна нулю. Записывая закон Ома для левого и правого участков цепи, содержащих ЭДС, имеем $\mathcal{E}_1 - IR_1 = 0$, $\mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$, где I – ток в цепи. Исключая из этих равенств I, получаем $\mathcal{E}_2 = \dfrac{\mathcal{E}_1 R_2}{R_1} = 20$ В.

Ответ. $\mathcal{E}_2 = \dfrac{\mathcal{E}_1 R_2}{R_1} = 20$ В.

Задача 2



В схеме, показанной на рисунке, резисторы имеют сопротивления $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом. Определить внутреннее сопротивление батареи r, если известно, что при разомкнутом ключе K через резистор R_1 течет ток $I_1 = 2{,}8$ А, а при замкнутом ключе K через резистор R_2 течет ток $I_2 = 1$ А.

Идея. Воспользуйтесь законом Ома для полной цепи.

Указание 1. Запишите закон Ома для полной цепи при разомкнутом и замкнутом ключе.

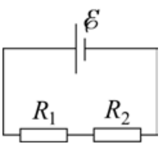
Указание 2. Из полученной системы уравнений найдите внутреннее сопротивление батареи.

Решение. При разомкнутом ключе ток течет только в левом контуре цепи, для которого справедливо уравнение $\mathcal{E} = I_1 R_1 + I_1 r$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи. При замкнутом ключе ток течет в обоих контурах, которые представляют собой два параллельно соединенных резистора. Обозначив через I полный ток через источник, имеем $\mathcal{E} = I \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + Ir$. Ток I разветвляется на два тока $I = I_1' + I_2$, причем $I_1' R_1 = I_2 R_2$. Из этой системы находим, что $I = I_2 \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$. Объединяя записанные выражения, имеем $I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2 \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} r$. Отсюда получаем $r = \dfrac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2(1 + R_2/R_1) - I_1} = 4$ Ом.

Ответ. $r = \dfrac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2(1 + R_2/R_1) - I_1} = 4$ Ом.

Задача 3

Если вольтметр, имеющий конечное сопротивление, подключен параллельно резистору R_1, то он показывает напряжение $U_1 = 6$ В, если параллельно резистору R_2, – напряжение $U_2 = 4$ В. Каковы будут падения напряжения V_1 и V_2 на резисторах, если вольтметр не подключать? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.



Идея. Воспользуйтесь законом Ома для полной цепи.

Указание 1. Найдите ток в цепи и напряжение на вольтметре при его подключении к первому и второму резистору.

Указание 2. Найдите отношение напряжений на вольтметре при подключении его к первому и втором резистору и сравните его с отношением падений напряжения на резисторах в случае, когда вольтметр не подключен.

Решение. Обозначим через R_x сопротивление вольтметра. Если подключить вольтметр к резистору R_1, сопротивление всей цепи будет равно $R' = \dfrac{R_x R_1}{R_x + R_1} + R_1 = \dfrac{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}{R_x + R_1}$. В цепи будет течь ток $I' = \mathcal{E}/R'$ и напряжение на вольтметре, равное напряжению на резисторе R_1, определится как $U_1 = I' \dfrac{R_x R_1}{R_x + R_1} = \dfrac{\mathcal{E} R_x R_1}{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}$. Рассуждая аналогично, можно найти, что при подключении вольтметра к резистору R_2 напряжение на нем будет $U_2 = \dfrac{\mathcal{E} R_x R_2}{R_x R_1 + R_x R_2 + R_1 R_2}$. Из этих выражений находим, что $U_1/U_2 = R_1/R_2$. С другой стороны, если вольтметр не подключен, то напряжения на резисторах равны $V_1 = IR_1$, $V_2 = IR_2$, где I – ток в цепи из двух последовательно соединенных резисторов. Отсюда следует, что $V_1/V_2 = R_1/R_2$. Сравнивая это отношение с найденным выше отношением напряжений на резисторах при подключенном вольтметре, находим, что $V_1/V_2 = U_1/U_2$. Кроме того, справедливо равенство $V_1 + V_2 = \mathcal{E}$. Выражая отсюда V_1 и V_2, получаем $V_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{1 + U_2/U_1} = 7{,}2$ В, $V_2 = \mathcal{E} - V_1 = 4{,}8$ В.

Ответ. $V_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{1+U_2/U_1} = 7{,}2$ В, $V_2 = \mathcal{E} - V_1 = 4{,}8$ В.

Задача 4

При параллельном подключении двух одинаковых нагревателей к источнику с внутренним сопротивлением r они развивают ту же мощность, что и при последовательном подключении. Чему равно сопротивление нагревателя R?

Идея. Воспользуйтесь законом Ома для полной цепи и законом Джоуля–Ленца.

Указание 1. Используя закон Ома для полной цепи, найдите ток через источник в первом и во втором случае.

Указание 2. Используя закон Джоуля–Ленца, выразите мощности, выделяющиеся в нагревателях при их параллельном и последовательном подключении к источнику.

Решение. В цепи с ЭДС $\mathcal{E}$ токи через источник в первом и втором случае соответственно имеют вид: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{(r+R/2)}$, $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{(r+2R)}$. Мощности, выделяющиеся в нагревателях при параллельном и последовательном подключении к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$, равны соответственно $N_1 = \dfrac{R\mathcal{E}^2}{2(r+R/2)^2}$, $N_2 = \dfrac{2R\mathcal{E}^2}{(r+2R)^2}$. Из равенства $N_1 = N_2$ следует, что $(r+2R) = 2\left(r + \dfrac{R}{2}\right)$. Выражая отсюда R, получаем $R = r$.

Ответ. $R = r$.

Задача 5

Два электронагревателя при параллельном подключении к сети развивают суммарную мощность N_1, а при последовательном – N_2. Каковы номинальные мощности N_{01} и N_{02} этих нагревателей?

Идея. Воспользуйтесь законом Джоуля–Ленца.

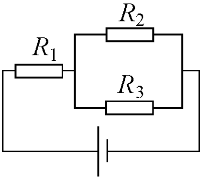
Указание 1. Используя закон Джоуля–Ленца, выразите сопротивления нагревателей через их номинальные мощности.

Указание 2. Выразите суммарные мощности N_1 и N_2 через номинальные мощности нагревателей.

Решение. Пусть U – напряжение сети, при котором нагреватели развивают номинальные мощности. Тогда $N_{01} = \dfrac{U^2}{R_1}$, $N_{02} = \dfrac{U^2}{R_2}$, где R_1 и R_2 – сопротивления нагревателей. Отсюда $R_1 = \dfrac{U^2}{N_{01}}$, $R_2 = \dfrac{U^2}{N_{02}}$. При параллельном подключении нагревателей полная мощность равна $N_1 = N_{01} + N_{02}$. При их последовательном подключении полная мощность $N_2 = \dfrac{U^2}{R_1 + R_2} = \dfrac{N_{01}N_{02}}{N_{01} + N_{02}}$. Таким образом, справедлива следующая система уравнений: $N_{01} + N_{02} = N_1$, $N_{01}N_{02} = N_1 N_2$. Решая эту систему уравнений относительно N_{01}, N_{02}, получаем $N_{01} = \dfrac{N_1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2}$, $N_{02} = \dfrac{N_1}{2} \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2}$.

Ответ. $N_{01} = \dfrac{N_1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2}$, $N_{02} = \dfrac{N_1}{2} \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1N_2}$.

Задача 6



В схеме, показанной на рисунке, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Известно, что на резисторе с сопротивлением R_1 выделяется мощность $N_1 = 25$ Вт. Какая мощность N_2 выделяется на резисторе с сопротивлением R_2?

Идея. Воспользуйтесь законом Ома для участка цепи и законом Джоуля–Ленца.

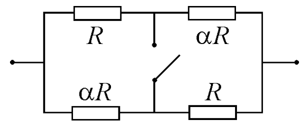
Указание. Получите соотношение, связывающее токи I_1 и I_2, текущие через резисторы R_1 и R_2. Выразите выделяющиеся мощности N_1 и N_2 через токи I_1 и I_2.

Решение. Обозначим через I_1, I_2 и I_3 токи, текущие через резисторы R_1, R_2 и R_3 соответственно. Для этих токов справедливы равенства $I_1 = I_2 + I_3$, $I_2R_2 = I_3R_3$, откуда $I_2 = \dfrac{I_1R_3}{R_2 + R_3}$. С другой стороны, $N_1 = I_1^2R_1$, $N_2 = I_2^2R_2$. Объединяя записанные выражения, находим $N_2 = N_1\dfrac{R_2R_3^2}{R_1(R_2 + R_3)^2} = 18$ Вт.

Ответ. $N_2 = N_1\dfrac{R_2R_3^2}{R_1(R_2 + R_3)^2} = 18$ Вт.

Задача 7

Нагревательные элементы, сопротивления которых отличаются в α раз, соединены, как показано на рисунке, и подключены к источнику тока с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Найти α, если известно, что при замыкании ключа общая мощность, выделяющаяся в цепи, увеличивается в $k = 2$ раза. Изменением сопротивлений элементов при нагревании пренебречь.



Идея. Воспользуйтесь формулами для расчета сопротивлений последовательно и параллельно соединенных резисторов и законом Джоуля–Ленца.

Указание 1. Найдите сопротивления цепи при разомкнутом и замкнутом ключе.

Указание 2. Получите отношение мощностей, выделяющихся в цепи при разных положениях ключа.

Решение. Используя стандартные формулы для расчета сопротивлений последовательно и параллельно соединенных резисторов, находим сопротивления цепи: при разомкнутом ключе $R_1 = \dfrac{(1+\alpha)R}{2}$, при замкнутом ключе $R_2 = \dfrac{2\alpha R}{1+\alpha}$. Поскольку внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало, напряжение на его клеммах можно считать постоянным. Следовательно, отношение мощностей, выделяющихся в цепи при разных положениях ключа, обратно пропорционально отношению сопротивлений цепи: $\dfrac{N_2}{N_1} = \dfrac{R_1}{R_2}$. Из условия $R_1 = kR_2$ получаем квадратное уравнение относительно α, а именно $\alpha^2 - 2(2k-1)\alpha + 1 = 0$. Корни этого уравнения $\alpha = 2k - 1 \pm 2\sqrt{k^2 - k} =$ $= 3 \pm 2\sqrt{2}$; $\alpha_1 \approx 0{,}17$, $\alpha_2 \approx 5{,}83$.

Ответ. $\alpha_1 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17$, $\alpha_2 = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}83$.

Задача 8

Напряжение на зажимах генератора постоянного тока $U_0 = 220$ В, а на зажимах нагрузки $U_1 = 210$ В. Определить мощность $N_л$, выделяющуюся в линии между генератором и нагрузкой, если номинальная мощность нагрузки при напряжении на ней, равном U_0, составляет $N = 10$ кВт.

Идея. Воспользуйтесь законом Джоуля–Ленца.

Указание 1. Выразите сопротивление нагрузки через номинальную мощность и напряжение U_0.

Указание 2. Найдите ток в линии между генератором и нагрузкой и мощность, выделяющуюся в линии.

Решение. Обозначим через R сопротивление нагрузки. Поскольку номинальная мощность нагрузки N при напряжении на ней U_0 равна $N = U_0^2 / R$, то $R = \dfrac{U_0^2}{N}$. При напряжении U_1 мощность, выделяющаяся в нагрузке, $N_1 = \frac{U_1^2}{R} = \frac{U_1^2}{U_0^2}N$. С другой стороны, эту мощность можно выразить через ток I через нагрузку: $N_1 = U_1 I$. Отсюда: $I = \frac{N_1}{U_1} = \frac{U_1}{U_0^2}N$. Такой же ток течет и в линии между генератором и нагрузкой. Поскольку падение напряжения в линии равно $\Delta U = U_0 - U_1$, мощность, выделяющаяся в ней, $N_л = (U_0 - U_1)I$. Подставляя сюда найденное значение тока, получаем $N_л = \frac{(U_0 - U_1)U_1}{U_0^2}W \approx 434$ Вт.

Ответ. $N_л = \frac{(U_0 - U_1)U_1}{U_0^2}W \approx 434$ Вт.

Задача 9

При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом нагревательный элемент развивает мощность $N_1 = 50$ Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила $N_2 = 72$ Вт. Найти сопротивление R нагревателя.

Идея. Воспользуйтесь законом Ома для полной цепи и законом Джоуля–Ленца.

Указание. Запишите закон Ома для полной цепи в первом и во втором случае и найдите мощности, развиваемые нагревательным элементом.

Решение. Мощность, развиваемая нагревательным элементом с сопротивлением *R*, подключенным к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением *r*, равна $N_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2}$. При подключении этого же элемента к двум одинаковым аккумуляторам, соединенным последовательно, значения ЭДС и внутреннего сопротивления удваиваются и нагреватель развивает мощность $N_2 = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r+R)^2}$. Составим отношение $\frac{N_2}{N_1} = \frac{4(r+R)^2}{(2r+R)^2}$, или $\sqrt{\frac{N_2}{N_1}} = \frac{2(r+R)}{2r+R}$. Выражая из последнего соотношения *R*, получаем $R = 2r\frac{\sqrt{N_2/N_1} - 1}{2 - \sqrt{N_2/N_1}} = 1$ Ом.

Ответ. $R = 2r\frac{\sqrt{N_2/N_1} - 1}{2 - \sqrt{N_2/N_1}} = 1$ Ом.

Задача 10

Аккумулятор отдает во внешнюю цепь мощность $N_1 = 10$ Вт при токе $I_1 = 4$ А. Какую мощность N_2 отдаст аккумулятор во внешнюю цепь при токе $I_2 = 8$ А? Внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 0{,}1$ Ом.

Идея. Учтите, что в первом и втором случае к аккумулятору подключают нагрузки с разными сопротивлениями.

Указание 1. С помощью закона Ома для полной цепи найдите напряжения на сопротивлении в первом и втором случае.

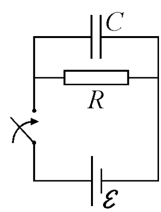
Указание 2. Вычислите мощности, отдаваемые аккумулятором во внешнюю цепь в первом и втором случае, и решите полученную систему уравнений.

Решение. Различие между мощностями, выделяемыми во внешней цепи в первом и втором случае, связано с тем, что к аккумулятору подключают нагрузки с разными сопротивлениями. Обозначив через $\mathcal{E}$ ЭДС аккумулятора, имеем $U_1 = (\mathcal{E} - I_1 r)$, $U_2 = (\mathcal{E} - I_2 r)$. Используя формулы $N_1 = U_1 I_1$ и $N_2 = U_2 I_2$, получим $N_1 = I_1(\mathcal{E} - I_1 r)$, $N_2 = I_2(\mathcal{E} - I_2 r)$. Находя из первого уравнения ЭДС аккумулятора и подставляя ее во второе уравнение, найдем $N_2 = \frac{I_2}{I_1}\left(N_1 - I_1 r(I_2 - I_1)\right) = 16{,}8$ Вт.

Ответ. $N_2 = \frac{I_2}{I_1}\left(N_1 - I_1 r(I_2 - I_1)\right) = 16{,}8$ Вт.

Задача 11

Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из конденсатора, резистора, источника тока и ключа. Первоначально ключ был разомкнут. Найти ЭДС источника, если известно, что сила тока через источник сразу после замыкания ключа в $n = 2$ раза больше установившейся силы тока в цепи, а установившееся напряжение на конденсаторе $U = 1{,}75$ В.



Идея. Учтите, что напряжение на конденсаторе не может измениться скачком.

Указание 1. Найдите ток в цепи источника сразу после замыкания ключа.

Указание 2. Определите установившееся значение тока через источник.

Указание 3. Выразите внутреннее сопротивление источника через сопротивление резистора.

Решение. Пусть R – сопротивление резистора, r – внутреннее сопротивление источника. Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе равно нулю и скачком измениться не может. Следовательно, в начальный момент ток через резистор не течет. Поэтому начальный ток через источник $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$. После того как конденсатор зарядится, ток в цепи станет равным $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$. Учитывая, что по условию $\dfrac{I_1}{I_2} = n$, находим $r = \dfrac{R}{n-1}$. Следовательно, $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}(n-1)}{Rn}$. Установившееся напряжение на конденсаторе $U = I_2 R = \dfrac{\mathcal{E}(n-1)}{n}$. Отсюда $\mathcal{E} = \dfrac{nU}{n-1} = 3{,}5$ В.

Ответ. $\mathcal{E} = \dfrac{nU}{n-1} = 3{,}5$ В.

Задача 12

Заряженный конденсатор емкостью C замыкают на реостат, сопротивление которого плавно изменяется от R_0 до нуля. По какому закону нужно менять во времени сопротивление реостата, чтобы сила тока через него оставалась постоянной вплоть до полной разрядки конденсатора? Сопротивление реостата в начале разрядки равно R_0.

Идея. Используйте определение силы тока и закон Ома для участка цепи.

Указание 1. Выразите ток через резистор в произвольный момент времени.

Указание 2. Приравняйте полученное выражение току через резистор в начальный момент времени.

Решение. По закону Ома ток через резистор равен $I = \dfrac{U}{R}$, где $U = \dfrac{q_0 - It}{C}$ – напряжение на конденсаторе в момент времени t, R – сопротивление резистора в этот же момент, q_0 – начальный заряд на конденсаторе. Здесь учтено, что по условию ток через резистор постоянен. Используя для тока его значение $I = \dfrac{q_0}{R_0 C}$ в начальный момент времени, приходим к равенству $\dfrac{q_0 - It}{RC} = \dfrac{q_0}{R_0 C}$. Отсюда $R = R_0\left(1 - \dfrac{It}{q_0}\right) = R_0 - \dfrac{t}{C}$.

Ответ. $R = R_0 - \dfrac{t}{C}$.

3.3. Магнитное поле

Задача 1

Свободная заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией B по окружности радиуса R. В некоторый момент времени включают однородное электрическое поле, напряженность E которого направлена параллельно магнитной индукции. Через какое время Δt после включения электрического поля кинетическая энергия частицы увеличится в $n = 2$ раза? Силу тяжести не учитывать.

Идея. Используйте определение кинетической энергии тела.

Указание 1. Запишите уравнение движения частицы по окружности в однородном магнитном поле и выразите скорость частицы.

Указание 2. Воспользуйтесь кинематическим уравнением равноускоренного движения и выразите скорость частицы через интервал времени Δt.

Указание 3. Выразите квадрат модуля скорости частицы после включения электрического поля и воспользуйтесь условием задачи.

Решение. Уравнение движения частицы по окружности в однородном магнитном поле имеет вид $\frac{mv_0^2}{R} = qv_0B$, где m – масса, q – заряд, v_0 – скорость частицы. Отсюда $v_0 = \frac{qBR}{m}$. Таким образом, кинетическая энергия частицы до включения электрического поля $E_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m}$. После включения электрического поля частица за время Δt приобретет в направлении поля скорость $v_1 = \frac{qE}{m}\Delta t$ и кинетическая энергия частицы станет равной $E_1 = \frac{m(v_0^2 + v_1^2)}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} + \frac{(qE\Delta t)^2}{2m}$. По условию $E_1 = nE_0$. Объединяя записанные выражения, получаем $\Delta t = \sqrt{n-1} \cdot \frac{BR}{E}$.

Ответ. $\Delta t = \sqrt{n-1} \cdot \frac{BR}{E}$.

Задача 2

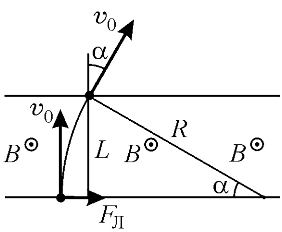
Заряженная частица массой $m = 6{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг влетает со скоростью $v_0 = 100$ км/с в область с постоянным и однородным магнитным полем, вектор индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен $\vec{v}_0$. На какой угол α отклонится вектор скорости частицы, если область, занимаемая магнитным полем, в котором движется частица, ограничена плоскостями, перпендикулярными $\vec{v}_0$, расстояние между которыми $L = 10$ см? Заряд частицы $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, индукция магнитного поля $B = 0{,}01$ Тл. Силу тяжести не учитывать.

Идея. Учтите, что под действием силы Лоренца частица будет двигаться по дуге окружности.

Указание 1. Найдите радиус дуги окружности, по которой будет двигаться заряженная частица.

Указание 2. Найдите соотношение между радиусом дуги и длиной области, занимаемой магнитным полем.

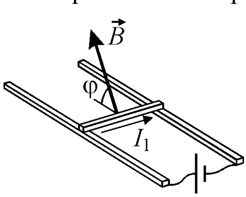
Решение. Когда частица окажется в области, занимаемой магнитным полем, на нее будет действовать сила Лоренца, направленная перпендикулярно скорости частицы. Под действием этой силы частица будет двигаться по дуге окружности, подчиняясь уравнению движения $m\dfrac{v_0^2}{R} = qv_0B$. Отсюда радиус дуги $R = \dfrac{mv_0}{qB}$. Из рисунка видно, что угол α, на который отклонится скорость частицы, определяется соотношением между радиусом дуги R и длиной области, занимаемой магнитным полем L. В частности, при $R > L$ $\sin\alpha = \dfrac{L}{R} = \dfrac{LqB}{mv_0}$. Если $R \le L$, то частица опишет в области, занимаемой полем, полуокружность, и угол $\alpha = 180°$. Таким образом, ответ к задаче формулируется следующим образом: $\alpha = 180°$ при $v_0 \le \dfrac{q}{m}BL$; $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{q}{m}\cdot\dfrac{BL}{v_0}\right)$ при $v_0 > \dfrac{q}{m}BL$. При числовых данных из условия задачи $\alpha = 30°$.



Ответ. $\alpha = 180°$ при $v_0 \le \dfrac{q}{m}BL$; $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{q}{m}\cdot\dfrac{BL}{v_0}\right)$ при $v_0 > \dfrac{q}{m}BL$.

Задача 3

На параллельных проводящих рельсах, расположенных в горизонтальной плоскости, покоится проводящий стержень, перпендикулярный рельсам. Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого лежит в вертикальной плоскости, параллельной рельсам, и образует с горизонталью угол φ (см. рисунок). Когда по стержню пропускают постоянный ток в направлении, указанном стрелкой, стержень начинает скользить по рельсам при силе тока, равной I_1. Какой величины I_2 ток нужно пропустить по стержню в противоположном направлении, чтобы стержень вновь пришел в движение? Коэффициент трения между рельсами и стержнем μ.

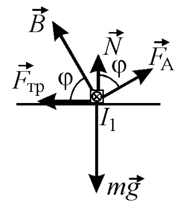


Идея. Воспользуйтесь вторым законом Ньютона и законом Ампера.

Указание 1. Используйте формулу для силы трения скольжения.

Указание 2. Сформулируйте условие, при котором стержень придет в движение.

Решение. На стержень действуют силы, изображенные на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{F}_A$ – сила Ампера, $\vec{N}$ – нормальная составляющая силы реакции рельсов, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения. При этом направление силы Ампера соответствует направлению тока I_1 в первом случае (на рисунке – от нас). Записывая условие равновесия стержня в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления, имеем $F_A \sin\varphi = F_{тр}$, $F_A \cos\varphi + N = mg$. Пусть сила тока в стержне такова, что сила трения покоя достигает максимального значения μN. Тогда незначительное превышение силы тока над этим значением приведет к движению стержня вправо. Учитывая, что $F_A = I_1 Bl$, где l – расстояние между рельсами, получим условие движения стержня в первом случае: $I_1 Bl \sin\varphi \geq \mu(mg - I_1 Bl \cos\varphi)$. При изменении направления тока в стержне на противоположное изменится также направление силы Ампера. В результате условие движения стержня влево примет вид $I_2 Bl \sin\varphi \geq \mu(mg + I_2 Bl \cos\varphi)$. Исключая из записанных выражений mg, B и l, получаем $I_2 \geq \dfrac{\sin\varphi + \mu\cos\varphi}{\sin\varphi - \mu\cos\varphi} I_1$.



Ответ. $I_2 \geq \dfrac{\sin\varphi + \mu\cos\varphi}{\sin\varphi - \mu\cos\varphi} I_1$.

Задача 4

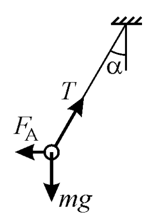
Подвешенный горизонтально на двух невесомых нитях прямолинейный проводник находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально. Если по проводнику течет ток $I_1 = 1$ А, то нити отклоняются от вертикали на угол $\alpha_1 = 30°$. При какой силе тока I_2 в проводнике нити отклонятся на угол $\alpha_2 = 60°$?

Идея. Используйте условия равновесия проводника.

Указание 1. Изобразите на рисунке все силы, действующие на проводник с током.

Указание 2. Запишите условие равновесия проводника при двух значениях силы тока.

Решение. Пусть масса проводника m, его длина l, модуль магнитной индукции B, ток, текущий по проводнику I. Проводник находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где mg – модуль силы тяжести, T – модуль суммарной силы натяжения нитей, $F_A = IBl$ – модуль силы Ампера. В проекции на горизонтальное и вертикальное направления условия равновесия имеют вид



$IBl = T\sin\alpha$, $mg = T\cos\alpha$. Исключая T, находим связь между током, текущим по проводнику, и углом отклонения нитей от вертикали, а именно $I = \frac{mg}{Bl}\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, $I_2 = I_1\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = 3$ А.

Ответ. $I_2 = I_1\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = 3$ А.

Задача 5

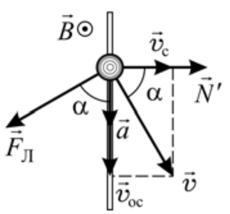
Заряженная бусинка массой $m = 1$ г надета на гладкий горизонтальный стержень, который движется с горизонтальной скоростью $v_с = 1$ м/с, направленной перпендикулярно стержню. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле, индукция которого направлена вертикально. В некоторый момент времени скорость бусинки относительно стержня составляет $v_{ос} = 2$ м/с, а ее ускорение равно $a = 3$ м/с^2. С какой силой N действует бусинка на стержень в этот момент времени? Силу тяжести не учитывать, трением бусинки о стержень пренебречь.

Идея. Используйте закон сложения скоростей и второй закон Ньютона.

Указание 1. Найдите величину и направление силы Лоренца, действующей на заряженную бусинку.

Указание 2. Запишите уравнение движения бусинки в проекциях на касательное и нормальное стержню направления.

Решение. Вид сверху на стержень и бусинку изображен на рисунке. Согласно закону сложения скоростей, скорость бусинки $\vec{v}$ в неподвижной системе отсчета равна $\vec{v} = \vec{v}_с + \vec{v}_{ос}$. На бусинку действуют сила Лоренца $\vec{F}_Л$ и сила реакции стержня $\vec{N}'$. Сила Лоренца направлена горизонтально и перпендикулярно вектору $\vec{v}$; модуль этой силы $F_Л = qvB$. Сила реакции перпендикулярна стержню, так как трением между бусинкой и стержнем по условию можно пренебречь.

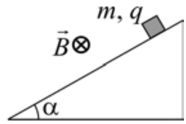


Проекции уравнения движения бусинки на касательное и нормальное стержню направления имеют вид $F_Л\sin\alpha - N' = 0$, $ma = F_Л\cos\alpha$. Отсюда $N' = ma\operatorname{tg}\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{ос}}{v_с}$. По третьему закону Ньютона сила, с которой бусинка действует на стержень (на рисунке не показана), равна по модулю силе реакции стержня: $N = N'$. Следовательно, $N = ma\frac{v_{ос}}{v_с} = 6\cdot 10^{-3}$ Н.

Ответ. $N = ma\frac{v_{ос}}{v_с} = 6\cdot 10^{-3}$ Н.

Задача 6

Небольшой брусок массой m, несущий положительный заряд q, удерживают на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонталью. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной перпендикулярно плоскости рисунка от нас. Брусок отпускают без начальной скорости. Чему равна максимальная скорость бруска $v_{\max}$, если коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью μ? Ускорение свободного падения g.

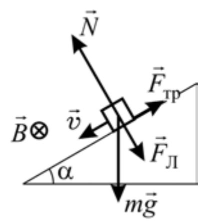


Идея. Воспользуйтесь вторым законом Ньютона и определением силы Лоренца.

Указание 1. Запишите уравнение движения бруска в проекциях на ось, параллельную наклонной плоскости, и ось, перпендикулярную ей.

Указание 2. Определите условие, при котором ускорение бруска обращается в нуль, и выразите из этого условия максимальную скорость бруска.

Решение. Брусок движется под действием сил, изображенных на рисунке, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – нормальная составляющая силы реакции поверхности, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения ($F_{тр} = \mu N$), $\vec{F}_Л$ – сила Лоренца ($F_Л = qvB$, v – скорость бруска). Записывая уравнение движения бруска в проекциях на направление наклонной плоскости и на перпендикулярное ей направление, имеем $ma = mg\sin\alpha - \mu N$, $N = mg\cos\alpha + qvB$. С увеличением скорости бруска сила трения возрастает, что приводит к уменьшению ускорения. При достижении максимальной скорости ускорение бруска обращается в нуль. Полагая $a = 0$, получаем, что

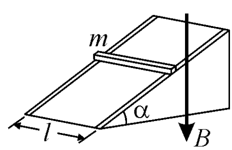


$$v_{\max} = \frac{mg}{\mu qB}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Ответ. $v_{\max} = \dfrac{mg}{\mu qB}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Задача 7

Вдоль наклонной плоскости, образующей с горизонталью угол $\alpha = 30°$, проложены рельсы, по которым может скользить проводящий стержень массой $m = 1$ кг. Какой минимальной величины ток $I_{\min}$ нужно пропустить по стержню, чтобы он оставался в покое, если вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл, направленной вертикально? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0{,}2$, расстояние между ними $l = 0{,}5$ м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

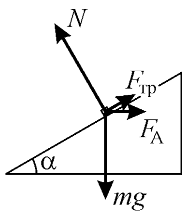


Идея. Используйте условие равновесия стержня.

Указание 1. Изобразите на рисунке силы, действующие на проводник с током.

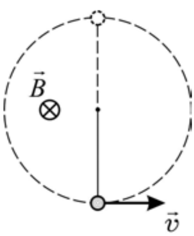
Указание 2. Запишите условие равновесия стержня в проекциях на направление наклонной плоскости и на перпендикулярное ей направление.

Решение. На стержень действуют силы, изображенные на рисунке, на котором показан вид на рассматриваемую систему сбоку. Здесь mg – модуль силы тяжести, N – модуль суммы нормальных составляющих силы реакции рельсов, F_A – модуль силы Ампера, $F_{тр}$ – модуль суммарной силы трения. Максимальное значение силы трения $F_{тр} = \mu N$. В проекциях на направление наклонной плоскости и на перпендикулярное ей направление условия равновесия имеют вид $mg\sin\alpha = F_A\cos\alpha + \mu N$, $mg\cos\alpha + F_A\sin\alpha = N$. Учитывая, что $F_A = IBl$, получаем ответ: $I_{min} = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{Bl(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)} \approx 33{,}2$ А.



Ответ. $I_{min} = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{Bl(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)} \approx 33{,}2$ А.

Задача 8



Маленький шарик массой m, несущий положительный заряд q, подвешен на нити длиной l и помещен в однородное магнитное поле с индукцией B, направленной горизонтально от нас. Сообщив шарику некоторую скорость, направление которой показано на рисунке, шарик приводят в движение по окружности в вертикальной плоскости, перпендикулярной магнитному полю и совпадающей с плоскостью рисунка. При какой минимальной скорости v_{min} шарика в нижней точке он сможет совершить полный оборот?

Идея. Примените второй закон Ньютона, закон сохранение механической энергии и определение силы Лоренца.

Указание 1. Запишите второй закон Ньютона в верхней точке траектории шарика и найдите скорость шарика в этой точке.

Указание 2. Используйте закон сохранения механической энергии.

Указание 3. Найдите условие, при котором скорость шарика в нижней точке траектории минимальна.

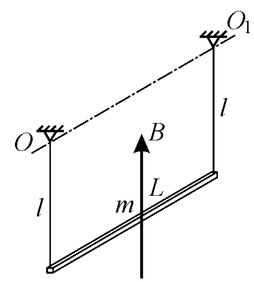
Решение. Учитывая направления магнитной индукции и начальной скорости частицы, с помощью правила левой руки находим, что сила Лоренца, действующая на шарик, во всех точках его траектории направлена к центру окружности. По второму закону Ньютона, записанному в верхней точке траектории шарика, имеем $\dfrac{mv_в^2}{l} = mg + T + qv_вB$, где T – натяжение нити, $v_в$ – модуль скорости шарика в верхней точке траектории. Уравнение движения шарика можно рассматривать как квадратное уравнение относительно $v_{\text{в}}$. Положительный корень этого уравнения равен $v_{\text{в}} = \frac{qBl}{2m} + \sqrt{\left(\frac{qBl}{2m}\right)^2 + gl + \frac{Tl}{m}}$. (Отрицательный корень не имеет физического смысла).

Отметим, что скорость шарика v в нижней точке траектории минимальна, если в верхней точке натяжение нити обращается в нуль. Магнитное поле работы не совершает, так как сила Лоренца перпендикулярна скорости шарика. Работа силы натяжения нити также равна нулю. Поэтому механическая энергия шарика сохраняется. Закон сохранения энергии дает соотношение $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_{\text{в}}^2}{2} + 2mgl.$ Подставляя сюда найденное выше $v_{\text{в}}$ и полагая $T = 0,$ находим $v_{\min} = \left[5gl + \frac{q^2B^2l^2}{2m^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2g}{q^2B^2l}}\right)\right]^{1/2}$.

Ответ. $v_{\min} = \left[5gl + \frac{q^2B^2l^2}{2m^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2g}{q^2B^2l}}\right)\right]^{1/2}$.

Задача 9

Металлический стержень массой m и длиной L подвешен горизонтально на двух невесомых гибких проводниках длиной l каждый. Стержень находится в однородном магнитном поле, индукция B которого направлена вертикально. По стержню пропускают кратковременный импульс постоянного тока силой I_0 и длительностью τ. При каком минимальном значении I_0 стержень совершит полный оборот, двигаясь по окружности вокруг оси OO_1, проходящей через точки подвеса? Считать, что смещение стержня за время τ ничтожно мало.



Идея. Используйте второй закон Ньютона и закон сохранения механической энергии.

Указание 1. Найдите скорость, которую приобретает стержень после прохождения по нему импульса тока.

Указание 2. Запишите второй закон Ньютона в верхней точке траектории стержня и найдите условие, при котором скорость стержня в этой точке минимальна.

Указание 3. Примените закон сохранения механической энергии.

Решение. Импульс силы Ампера за время τ равен $I_0BL\tau.$ По второму закону Ньютона $mv_0 = I_0BL\tau,$ откуда скорость, которую приобретает стержень по окончании импульса тока, $v_0 = \dfrac{I_0 BL\tau}{m}$. Уравнение движения стержня по окружности в верхней точке траектории имеет вид: $\dfrac{mv^2}{l} = mg + T$, где T – суммарное натяжение нитей. Скорость стержня v в верхней точке минимальна, если $T = 0$. Следовательно $v^2 = gl$. Из закона сохранения энергии вытекает равенство $\dfrac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{5}{2}mgl$. Отсюда $v_0 = \sqrt{5gl}$. Объединяя записанные выражения, находим $I_0 = \dfrac{m\sqrt{5gl}}{BL\tau}$.

Ответ. $I_0 = \dfrac{m\sqrt{5gl}}{BL\tau}$.

3.4. Электромагнитная индукция

Задача 1

Кольцо радиуса $r = 1$ м, сделанное из тонкой проволоки, находится в однородном магнитном поле, индукция которого увеличивается пропорционально времени t по закону $B = kt$. Определить мощность N, выделяющуюся в кольце, если известно, что сопротивление кольца равно $R = 1$ Ом, вектор индукции $\vec{B}$ составляет с нормалью к плоскости кольца угол $\alpha = 60°$, $k = 1$ Тл/с.

Идея. Примените закон электромагнитной индукции и закон Джоуля–Ленца.

Указание 1. Найдите магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, и вычислите возникающую в кольце ЭДС индукции.

Указание 2. Для определения мощности, выделяющейся в кольце, воспользуйтесь законом Джоуля–Ленца.

Решение. Магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, равен $\Phi = BS\cos\alpha = kt \cdot \pi r^2 \cos\alpha$. Величина ЭДС индукции, возникающей в кольце, $\mathcal{E} = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi r^2 k \cos\alpha$. Выделяющаяся в кольце мощность $N = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R}$. Следовательно, $N = \dfrac{\pi^2 r^4}{R} k^2 \cos^2\alpha \approx 2{,}5$ Вт.

Ответ. $N = \dfrac{\pi^2 r^4}{R} k^2 \cos^2\alpha \approx 2{,}5$ Вт.

Задача 2

Катушку индуктивностью $L = 0{,}3$ Гн подключают к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}5$ В. Через какой промежуток времени Δt сила тока в цепи будет равна $I = 5$ А? Омическим сопротивлением катушки и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

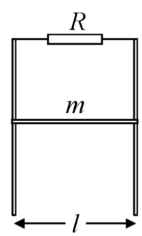
Идея. Воспользуйтесь законом электромагнитной индукции.

Указание. Выразите ЭДС индукции в катушке в произвольный момент времени и приравняйте ее ЭДС источника.

Решение. Поскольку омическое сопротивление катушки и внутреннее сопротивление источника по условию пренебрежимо малы, падения напряжения на них можно принять равными нулю. Следовательно, ЭДС индукции в катушке в каждый момент времени совпадает по величине с ЭДС источника: $L\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = \mathcal{E}$. По условию $\Delta I = I$. Следовательно, $\Delta t = \dfrac{IL}{\mathcal{E}} = 1$ с.

Ответ. $\Delta t = \dfrac{IL}{\mathcal{E}} = 1$ с.

Задача 3



По двум вертикальным проводящим рейкам, находящимся на расстоянии l и соединенным резистором с сопротивлением R, под действием силы тяжести начинает скользить проводник, длина которого l и масса m. Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого B перпендикулярна плоскости рисунка. Какова установившаяся скорость v движения проводника, если сопротивлением самого проводника и реек, а также трением можно пренебречь? Ускорение свободного падения g.

Идея. Примените второй закон Ньютона и закон электромагнитной индукции.

Указание 1. Найдите ток в цепи и силу Ампера, действующую на проводник.

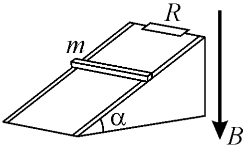
Указание 2. Запишите второй закон Ньютона при условии, что проводник движется с постоянной скоростью.

Решение. Предоставленный самому себе проводник начнет под действием силы тяжести двигаться вниз. В результате этого возникнет изменение магнитного потока через контур, образованный рейками, резистором и проводником, и как следствие ЭДС индукции и индукционный ток I в контуре. Этот ток, протекая по подвижному проводнику, приведет к появлению силы Ампера $F_{\text{А}}$, которая, как нетрудно убедиться, будет направлена против скорости проводника. Таким образом, уравнение движения проводника запишется следующим образом: $ma = mg - F_{\text{А}}$. Учитывая, что $F_{\text{А}} = IBl$, а $I = \mathcal{E}/R$, где $\mathcal{E} = Bvl$ – ЭДС индукции, находим, что величина силы Ампера пропорциональна скорости проводника v: $F_A = \dfrac{B^2l^2}{R}v$. Движение проводника установится, т.е. ускорение проводника a обратится в нуль, когда сила Ампера сравняется по величине с силой тяжести. Объединяя записанные выражения, находим, что скорость установившегося движения $v = \dfrac{mgR}{B^2l^2}$.

Ответ. $v = \dfrac{mgR}{B^2l^2}$.

Задача 4

По параллельным рельсам, наклоненным под углом $\alpha = 30°$ к горизонтали, соскальзывает без трения проводящий брусок массой $m = 100$ г. В верхней части рельсы замкнуты резистором с сопротивлением $R = 20$ Ом. Вся система находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Чему равна сила тока I, текущего по бруску, если известно, что он движется с постоянной скоростью $v = 1$ м/с? Сопротивлением бруска и рельсов пренебречь, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

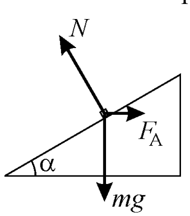


Идея. Воспользуйтесь вторым законом Ньютона и законом Ампера.

Указание 1. Найдите ЭДС индукции и силу тока в цепи.

Указание 2. Запишите второй закон Ньютона при условии, что брусок движется с постоянной скоростью.

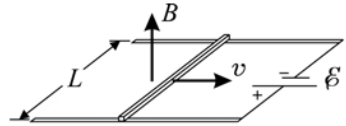
Решение. Предоставленный самому себе брусок будет соскальзывать по наклонным рельсам вниз. При движении бруска в нем возникнет ЭДС индукции $\mathcal{E} = Bvl\cos\alpha$, которая вызовет в контуре индукционный ток $I = \mathcal{E}/R.$. Индукционный ток, протекая по бруску, приведет к появлению силы Ампера $F_A = IBl$, которая направлена горизонтально в сторону, противоположную скорости бруска. При равномерном движении бруска сумма сил, действующих на него (см. рисунок), равна нулю. В проекции на направление рельсов имеем $mg\sin\alpha = IBl\cos\alpha$. Исключая из записанных равенств B, находим $I = \sqrt{\dfrac{mgv\sin\alpha}{R}} \approx 0{,}16$ А.



Ответ. $I = \sqrt{\dfrac{mgv\sin\alpha}{R}} \approx 0{,}16$ А.

Задача 5

В магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл, направленной вертикально вверх, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длиной $L = 0{,}4$ м со скоростью $v = 5$ м/с. Концы рельсов присоединены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 10{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом. Какое количество теплоты Q выделится в стержне за время $\tau = 10$ с, если его сопротивление $R = 10$ Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.



Идея. Воспользуйтесь законом электромагнитной индукции и законом Джоуля–Ленца.

Указание 1. Определите величину и направление индукционного тока.

Указание 2. Воспользуйтесь законом Джоуля–Ленца для определения количества теплоты, выделяющейся в стержне.

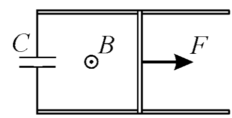
Решение. При движении стержня возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl$, направление которой, как нетрудно убедиться, при конкретных условиях задачи противоположно направлению ЭДС источника. По закону Ома для полной цепи индукционный ток $I = \dfrac{\mathcal{E} - Bvl}{R + r}$. Количество теплоты, выделяющейся в стержне за время τ, $Q = I^2 R\tau$.

Объединяя записанные выражения, получаем $Q = \left(\dfrac{\mathcal{E} - Bvl}{R + r}\right)^2 R\tau \approx 64$ Дж.

Ответ. $Q = \left(\dfrac{\mathcal{E} - Bvl}{R + r}\right)^2 R\tau \approx 64$ Дж.

Задача 6

По двум металлическим параллельным рейкам, расположенным в горизонтальной плоскости и замкнутым на конденсатор емкостью C, может без трения двигаться металлический стержень массой m и длиной l. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вверх. К середине стержня перпендикулярно ему и параллельно рейкам приложена сила F. Определить ускорение стержня. Сопротивлением реек, стержня и подводящих проводов пренебречь. В начальный момент скорость стержня равна нулю.



Идея. Используйте второй закон Ньютона и закон электромагнитной индукции.

Указание 1. Запишите уравнение движения стержня.

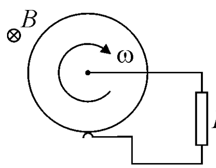
Указание 2. Свяжите ЭДС индукции с зарядом конденсатора. Учтите, что индукционный ток равен производной заряда конденсатора по времени.

Решение. При движении стержня в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}$, которая в каждый момент времени равна напряжению на конденсаторе q/C, где q – заряд конденсатора. Индукционный ток I в контуре, с одной стороны, заряжает конденсатор, с другой – приводит к появлению силы Ампера, действующей на стержень в направлении, противоположном силе F. Следовательно, уравнение движения стержня (второй закон Ньютона) имеет вид $ma = F - F_А = F - IBl$. Поскольку $\mathcal{E} = Bvl = q/C$, ток в контуре $I = \dot{q} = B\dot{v}lC = BalC$. Здесь точкой обозначена производная по времени и учтено, что ускорение проводника $a = \dot{v}$. Объединяя записанные выражения, получаем $a = \dfrac{F}{m + B^2l^2C}$.

Ответ. $a = \dfrac{F}{m + B^2l^2C}$.

Задача 7

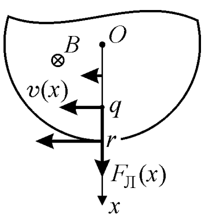
Металлический диск радиуса $r = 10$ см, расположенный перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля с индукцией $B = 1$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью $\omega = 628$ рад/с. Два скользящих контакта, один на оси диска, другой на краю, соединяют диск с резистором сопротивлением $R = 5$ Ом. Какая мощность N выделяется на резисторе? Сопротивлением диска и соединительных проводов пренебречь.



Идея. Учтите, что разность потенциалов между центром и краем диска равна работе силы Лоренца по перемещению единичного заряда от центра до края диска.

Указание. Найдите ЭДС индукции, возникающую во вращающемся диске.

Решение. Свободные заряды, находящиеся во вращающемся металлическом диске, движутся по окружностям. Линейная скорость заряда q, располагающегося на расстоянии x от центра диска (точки O), $v(x) = \omega x$; сила Лоренца, действующая на него, $F_Л(x) = q\omega xB$. Поскольку эта сила линейно зависит от координаты, ее работа по перемещению заряда от центра диска до его края, $A = \dfrac{1}{2}\left(F_Л(0) + F_Л(r)\right) = \dfrac{q\omega Br^2}{2}$.

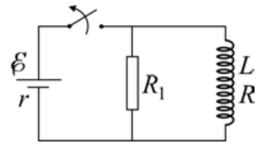


Следовательно, ЭДС индукции, возникающая между центром и краем диска, $\mathcal{E} = \dfrac{A}{q} = \dfrac{\omega Br^2}{2}$. Мощность, выделяющаяся на резисторе, $N = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} = \dfrac{\omega^2B^2r^4}{4R}$.

Ответ. $N = \dfrac{\omega^2B^2r^4}{4R} \approx 1{,}96$ Вт.

Задача 8

Катушка индуктивностью $L = 0{,}4$ Гн с сопротивлением обмотки $R = 2$ Ом подключена параллельно с резистором сопротивлением $R_1 = 8$ Ом к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В



и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом. Какое количество теплоты Q выделится в резисторе R_1 после отключения источника?

Идея. Используйте выражение для энергии магнитного поля катушки с током и закон Джоуля–Ленца.

Указание 1. Воспользуйтесь законом Ома и определите токи, текущие через катушку и через резистор при замкнутом ключе.

Указание 2. Найдите мощности, выделяющиеся в катушке и резисторе.

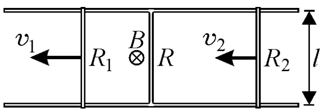
Указание 3. Учтите, что отношение этих мощностей не зависит от времени.

Решение. При замкнутом ключе через источник течет ток $I = \dfrac{\mathcal{E}(R+R_1)}{rR + rR_1 + RR_1}$. Этот ток разветвляется на два тока I_L и I_R, протекающих соответственно через катушку и резистор R_1 и удовлетворяющих системе уравнений: $I_L + I_R = I$, $I_L R = I_R R_1$. Отсюда $I_L = I\dfrac{R_1}{R+R_1} = \dfrac{\mathcal{E}R_1}{rR + rR_1 + RR_1}$. После отключения источника (размыкания ключа) возникающая в катушке ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ будет какое-то время поддерживать в цепи, образованной катушкой и резистором R_1, ток $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R+R_1}$. При этом полная мощность $N = I_1^2(R+R_1)$, выделяющаяся в этой цепи, распределится между катушкой и резистором пропорционально их сопротивлениям: $N_L = I_1^2 R$, $N_R = I_1^2 R_1$. Следовательно, мощность, выделяющаяся на резисторе, составляет от полной мощности, выделяющейся в этой цепи, долю $N_R = N\dfrac{R_1}{R+R_1}$. Поскольку данное отношение мощностей не зависит от времени, очевидно, что такую же долю составит и энергия, выделившаяся на резисторе за время существования ЭДС самоиндукции, от полной энергии, выделившейся в цепи. В свою очередь полная выделившаяся энергия равна энергии $LI_L^2/2$ магнитного поля в катушке в момент отключения источника. Таким образом, количество теплоты, выделившейся на резисторе R_1 после отключения источника, равно $Q = \dfrac{LI_L^2}{2}\cdot\dfrac{R_1}{R+R_1}$. Подставляя в это равенство найденный ранее ток через катушку, получаем $Q = \dfrac{L\mathcal{E}^2 R_1^3}{2(R+R_1)(rR + rR_1 + RR_1)^2} = 1{,}14$ Дж.

Ответ. $Q = \dfrac{L\mathcal{E}^2 R_1^3}{2(R+R_1)(rR + rR_1 + RR_1)^2} = 1{,}14$ Дж.

Задача 9

Два параллельных металлических стержня расположены на расстоянии l друг от друга



в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией B. Стержни соединены неподвижным проводником с сопротивлением R. Два других проводника с сопротивлениями R_1 и R_2 находятся слева и справа от неподвижного проводника и скользят по стержням в одну и ту же сторону со скоростями v_1 и v_2. Какой ток I течет по неподвижному проводнику? Сопротивление стержней пренебрежимо мало.

Идея. Воспользуйтесь законом электромагнитной индукции и законом Ома для полной цепи.

Указание. Найдите ЭДС индукции, возникающие в движущихся стержнях.

Решение. При движении проводников в магнитном поле в них возникают ЭДС индукции $\mathcal{E}_1 = Bv_1 l$, $\mathcal{E}_2 = Bv_2 l$ с одинаковой полярностью. Данная цепь эквивалентна двум параллельно соединенным источникам с ЭДС $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и внутренними сопротивлениями R_1, R_2, подключенным к нагрузке с сопротивлением R. Обозначив токи, текущие через левый и правый проводники, через I_1 и I_2, имеем $I_1R_1 + (I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_1$, $I_2R_2 + (I_1 + I_2)R = \mathcal{E}_2$. Домножая первое из этих уравнений на R_2, а второе на R_1 и складывая, получаем равенство $(I_1 + I_1)R_1R_2 + (I_1 + I_1)(R_1 + R_2)R = \mathcal{E}_1R_2 + \mathcal{E}_2R_1$. Учитывая, что искомый ток $I = I_1 + I_2$, находим $I = \dfrac{Bl(v_1R_2 + v_2R_1)}{R_1R_2 + R(R_1 + R_2)}$.

Ответ. $I = \dfrac{Bl(v_1R_2 + v_2R_1)}{R_1R_2 + R(R_1 + R_2)}$.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

Задача 1

В колебательном контуре конденсатору емкостью $C = 10$ мкФ сообщили заряд $q = 1$ мкКл, после чего возникли затухающие электромагнитные колебания. Какое количество теплоты Q выделится к моменту, когда максимальное напряжение на конденсаторе станет меньше начального максимального напряжения в $n = 4$ раза?

Идея. Воспользуйтесь законом сохранения энергии.

Указание. Найдите разность между начальным и конечным значениями электромагнитной энергии в контуре.

Решение. В моменты, когда напряжение на конденсаторе максимально, ток через катушку равен нулю. Следовательно, энергия в эти моменты сосредоточена в конденсаторе. Поэтому искомое количество теплоты $Q = W_0 - W_1 = \frac{q^2}{2C} - \frac{q_1^2}{2C} = \frac{q^2}{2C}\left(1 - \frac{q_1^2}{q^2}\right)$.

Учитывая, что $U = q/C$ и в интересующий нас момент времени $q_1 = q/n$, получаем $Q = \frac{q^2}{2C} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \approx 0{,}047$ Дж.

Ответ. $Q = \frac{q^2}{2C} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \approx 0{,}047$ Дж.

Задача 2

В колебательном контуре конденсатор емкостью C заряжен до максимального напряжения U_m. Определить резонансную частоту ν_0 колебаний в контуре, если максимальный ток в нем I_m. Активным сопротивлением в контуре пренебречь.

Идея. Воспользуйтесь определением резонансной частоты и законом сохранения энергии.

Указание 1. Учтите, что резонанс в колебательном контуре возникает при совпадении частоты внешнего переменного напряжения с собственной частотой колебательного контура.

Указание 2. С помощью закона сохранения энергии свяжите максимальное напряжение на конденсаторе с максимальным током в цепи.

Решение. Резонансная частота колебаний в контуре определяется выражением $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Из закона сохранения энергии в колебательном контуре без потерь следует равенство $\frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}$. Отсюда индуктивность катушки $L = C\frac{U_m^2}{I_m^2}$. Следовательно, $\nu_0 = \frac{I_m}{2\pi CU_m}$.

Ответ. $\nu_0 = \frac{I_m}{2\pi CU_m}$.

Задача 3

Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний в контуре T_1. Каков будет период T_2 колебаний в контуре, если конденсаторы включить последовательно?

Идея. Воспользуйтесь формулой Томсона для периода колебаний в контуре.

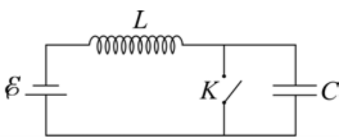
Указание. Вычислите емкость системы, состоящей из двух параллельно соединенных конденсаторов и системы, состоящей из двух последовательно соединенных конденсаторов.

Решение. Пусть емкость одного конденсатора равна C, а индуктивность катушки – L. Емкость двух конденсаторов, соединенных параллельно, $C_1 = 2C$, а соединенных последовательно, $C_2 = C/2$. Согласно формуле Томсона, периоды собственных колебаний в контуре $T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{LC_2}$. Следовательно, $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ и $T_2 = \frac{T_1}{2}$.

Ответ. $T_2 = \frac{T_1}{2}$.

Задача 4

Цепь, изображенная на рисунке, состоит из конденсатора емкостью C, катушки индуктивностью L, источника с ЭДС $\mathscr{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а также ключа K, первоначально находящегося в разомкнутом состоянии. В некоторый момент времени ключ замкнули и держали в замкнутом состоянии в течение времени τ, а затем разомкнули. До какого максимального напряжения $U_{\max}$ может зарядиться конденсатор после этого? Считать, что в момент замыкания ключа ток в цепи был равен нулю. Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.



Идея. Примените закон сохранения энергии.

Указание 1. Найдите работу источника при перемещении заряда по цепи после замыкания ключа.

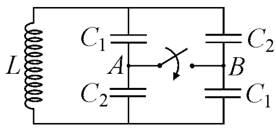
Указание 2. Воспользуйтесь законом сохранения энергии для определения максимального напряжения на конденсаторе.

Решение. При замыкании ключа конденсатор практически мгновенно полностью разряжается, а ток через катушку начинает нарастать. По закону Ома для замкнутой цепи имеем $L\frac{\Delta I}{\Delta t} = \mathscr{E}$. Следовательно, через время τ ток в цепи достигнет величины $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{L}\tau$. После размыкания ключа в контуре возникают гармонические колебания. Конденсатор начинает заряжаться, и в момент достижения максимального напряжения $U_{\max}$ на нем ток через катушку обращается в нуль. За время, прошедшее после размыкания ключа до момента достижения максимального напряжения на конденсаторе, источник перемещает по цепи заряд $q = CU_{\max}$, совершив работу $A = q\mathscr{E} = C\mathscr{E}U_{\max}$. По закону сохранения энергии имеем $\frac{LI_0^2}{2} + A = \frac{CU_{\max}^2}{2}$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно $U_{\max}$, а именно $U_{\max}^2 - 2\mathscr{E}U_{\max} - \dfrac{\mathscr{E}^2\tau^2}{LC} = 0$. Условию задачи удовлетворяет положительный корень: $U_{\max} = \mathscr{E}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{\tau^2}{LC}}\right)$.

Ответ. $U_{\max} = \mathscr{E}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{\tau^2}{LC}}\right)$.

Задача 5

Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и четырех конденсаторов, соединенных, как показано на рисунке. Во сколько раз α изменится период собственных колебаний в контуре, если замкнуть ключ, соединяющий точки A и B? Емкости конденсаторов $C_1 = 10^{-8}$ Ф, $C_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ Ф.



Идея. Воспользуйтесь формулой Томсона для периода колебаний в контуре.

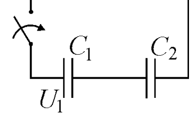
Указание. Вычислите емкости батареи конденсаторов при разомкнутом и замкнутом ключе.

Решение. Поскольку период электромагнитных колебаний в контуре определяется формулой Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$, отношение периода T'' колебаний после замыкания ключа к периоду T' колебаний до замыкания ключа выражается как $\alpha = \dfrac{T''}{T'} = \sqrt{\dfrac{C''}{C'}}$, где C'' и C' – емкости батареи конденсаторов в этих двух случаях соответственно. Расчет по стандартным формулам дает $C' = 2\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ при разомкнутом ключе, $C'' = \dfrac{C_1+C_2}{2}$ при замкнутом ключе. Отсюда получаем $\alpha = \dfrac{C_1+C_2}{2\sqrt{C_1C_2}} = 1{,}25$.

Ответ. $\alpha = \dfrac{C_1+C_2}{2\sqrt{C_1C_2}} = 1{,}25$.

Задача 6

Катушка индуктивностью $L = 3$ мГн подключена к двум последовательно соединенным конденсаторам (см. рисунок), один из которых, емкостью $C_1 = 10^{-7}$ Ф, заряжен вначале до напряжения $U_1 = 150$ В, а второй, емкостью $C_2 = 3 \cdot 10^{-7}$ Ф, разряжен. Чему будет равна максимальная сила тока $I_{\max}$ в цепи после замыкания ключа? Потерями в соединительных проводах и в катушке индуктивности пренебречь.

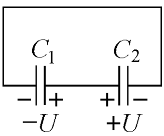


Идея. Примените закон сохранения заряда и закон сохранения энергии.

Указание 1. Учтите, что в момент достижения в цепи максимального тока напряжение на катушке обращается в нуль, а напряжения на конденсаторах становятся равными по величине и противоположными по знаку.

Указание 2. Используйте закон сохранения электромагнитной энергии в колебательном контуре.

Решение. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания.

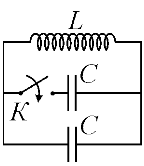


При этом ток в цепи и напряжение на катушке сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Следовательно, когда в цепи достигается максимальный ток, напряжение на катушке обращается в нуль, и в этот момент напряжения на конденсаторах становятся равными по величине и противоположными по знаку (эквивалентная цепь изображена на рисунке). Обозначим через U величину напряжения на каждом из конденсаторов. Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд на конденсаторах в рассматриваемый момент времени равен начальному заряду на конденсаторе C_1, т.е. $(C_1+C_2)U = C_1U_1$, откуда $U = U_1\dfrac{C_1}{C_1+C_2}$. Согласно закону сохранения энергии, $\dfrac{C_1U_1^2}{2} = \dfrac{(C_1+C_2)U^2}{2} + \dfrac{LI_{\max}^2}{2}$.

Объединяя полученные выражения, находим $I_{\max} = U_1\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}} = 0{,}75$ А.

Ответ. $I_{\max} = U_1\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}} = 0{,}75$ А.

Задача 7



Заряженный конденсатор подключили к катушке, в результате чего в цепи возникли гармонические колебания. В момент, когда напряжение на конденсаторе обратилось в нуль, к нему с помощью ключа K подсоединили еще один такой же конденсатор. Во сколько раз изменились амплитуды колебаний тока и напряжения на катушке после этого?

Идея. Примените закон сохранения энергии в колебательном контуре.

Указание 1. Запишите уравнение, связывающее амплитуду тока в катушке и амплитуду напряжения на первом конденсаторе до подключения второго.

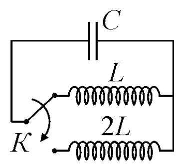
Указание 2. Найдите связь между амплитудой тока в катушке и амплитудой напряжения на батарее двух параллельно соединенных конденсаторов.

Решение. В момент, когда напряжение на конденсаторе равно нулю, ток через катушку максимален и запасенная в ней энергия равна $W = \dfrac{LI_0^2}{2}$, где I_0 – амплитуда тока. По закону сохранения энергии $\dfrac{LI_0^2}{2} = \dfrac{CU_0^2}{2}$, где U_0 – амплитуда напряжения на конденсаторе C до подключения второго конденсатора. В момент подключения второго конденсатора вся энергия запасена в катушке. При его подключении параллельно первому емкость контура удваивается и закон сохранения энергии принимает вид $\frac{LI_0^2}{2} = \frac{2CU_1^2}{2}$. Следовательно, $U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

Ответ. Амплитуда тока не изменяется, амплитуда напряжения уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Задача 8

Заряженный конденсатор подключили к катушке, в результате чего в цепи возникли гармонические колебания. В момент, когда ток через катушку обратился в нуль, с помощью ключа K отсоединили эту катушку и вместо нее подсоединили катушку с вдвое большей индуктивностью. Во сколько раз изменились амплитуды колебаний тока и напряжения на катушке после этого?



Идея. Примените закон сохранения энергии в колебательном контуре.

Указание 1. Запишите уравнение, связывающее амплитуду тока и амплитуду напряжения на катушке до подключения второй катушки.

Указание 2. Найдите связь между амплитудой тока и амплитудой напряжения на второй катушке после перебрасывания ключа.

Решение. В момент, когда ток через катушку равен нулю, напряжение на конденсаторе максимально и запасенная в нем энергия равна $W = \frac{CU_0^2}{2}$, где U_0 – амплитуда напряжения. По закону сохранения энергии $\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$, где I_0 – амплитуда тока через катушку L. При перебрасывании ключа индуктивность в контуре удваивается и закон сохранения энергии принимает вид $\frac{CU_0^2}{2} = \frac{2LI_1^2}{2}$. Следовательно, $I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Ответ. Амплитуда напряжения не изменяется, амплитуда тока уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

3.6. Оптика

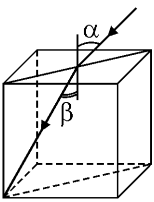
Задача 1

Луч света падает в центр верхней грани стеклянного кубика. Чему равен максимальный угол падения α, при котором преломленный луч еще попадает на нижнюю грань кубика? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Идея. Примените закон преломления света.

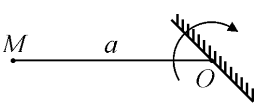
Указание. Выберите плоскость падения луча, при которой преломленный луч попадает на нижнюю грань кубика, а угол падения луча максимален.

Решение. Угол падения на верхнюю грань кубика, удовлетворяющий условию задачи, достигает максимального значения, если совместить плоскость падения с диагоналями верхней и нижней граней кубика (см. рисунок). В этом случае преломленный в центре верхней грани кубика луч проходит через вершину нижней грани, и угол преломления удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. По закону преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$. Следовательно, $\alpha = \arcsin\left(n\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 60°$.



Ответ. $\alpha = \arcsin\left(n\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 60°$.

Задача 2

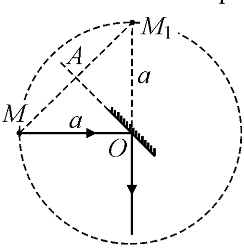


Плоское зеркало вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей по поверхности зеркала. Найти траекторию изображения точки M, расположенной на расстоянии a от оси вращения зеркала.

Идея. Воспользуйтесь правилами построения изображения в плоском зеркале.

Указание. Задайте некоторое положение зеркала и постройте изображение точки M. Обобщите результат на случай произвольного положения зеркала.

Решение. Построение изображения M_1 точки M в зеркале проиллюстрировано на рисунке. Видно, что длины отрезков MO и OM_1 совпадают. Следовательно, при любом положении зеркала, при котором его отражающая поверхность обращена к точке M, изображение этой точки располагается на одном и том же расстоянии a от оси вращения зеркала. Поскольку $\angle MOM_1$ равен удвоенному углу поворота зеркала ($\angle MOA$), при повороте зеркала вокруг оси на половину оборота изображение совершает вокруг точки O полный оборот. Когда зеркало обращено к точке M тыльной стороной, изображение



отсутствует. Таким образом, траектория точки M представляет собой окружность радиуса a с центром в точке O.

Ответ. Окружность радиуса a с центром в точке O.

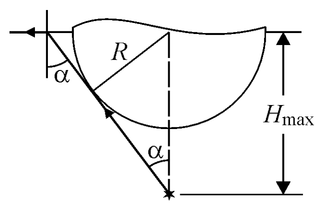
Задача 3

На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиуса $R = 1$ м, наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине $H_{\max}$ нужно поместить под центром шара точечный источник света, чтобы ни один световой луч не прошел в воздух? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Идея. Воспользуйтесь законами преломления света. Примите во внимание явление полного внутреннего отражения.

Указание. Построив ход лучей, испущенных источником и падающих на границу раздела сред «вода – воздух», найдите положение источника, удовлетворяющее условию задачи.

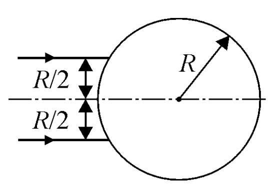
Решение. Искомое положение источника изображено на рисунке. Оно определяется из условия, что касательные к шару лучи света, испущенные источником, падают на границу раздела «вода – воздух» под предельным углом полного отражения. В этом случае действительно ни один луч от источника не выйдет в воздух, так как часть лучей будет перекрыта шаром, а все остальные лучи заведомо испытают полное отражение на границе раздела сред. Если переместить источник на меньшую глубину, свет по-прежнему не выйдет из воды, если же, наоборот, погрузить источник глубже, чем $H_{\max}$, то найдется часть лучей, которые будут падать на границу под углами, меньшими предельного угла полного отражения, и пройдут в воздух. При полном отражении $\sin\alpha = \dfrac{1}{n}$, поэтому минимальный угол α падения луча на границу «вода – воздух» определяется равенством $\sin\alpha = \dfrac{R}{H_{\max}}$. Следовательно, $H_{\max} = Rn = 1{,}33$ м.



Ответ. $H_{\max} = Rn = 1{,}33$ м.

Задача 4

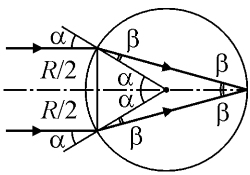
Два параллельных луча, расстояние между которыми равно радиусу R круглого прямого прозрачного цилиндра, падают на боковую поверхность этого цилиндра. Лучи параллельны основанию цилиндра. Найти величину показателя преломления материала цилиндра, при которой лучи пересекаются на его поверхности.



Идея. Примените законы преломления света.

Указание. Определите из условия задачи угол падения лучей на поверхность цилиндра и найдите угол преломления, при котором преломленные лучи пересекаются на поверхности цилиндра.

Решение. Ход лучей, преломленных на передней поверхности цилиндра и пересекающихся на его задней поверхности, изображен на рисунке. По условию задачи угол падения каждого из лучей на переднюю поверхность цилиндра $\alpha = \arcsin(1/2) = 30°$. Из рисунка видно, что угол преломления лучей на границе «воздух – стекло» равен $\beta = \alpha/2 = 15°$. Учитывая, что, согласно закону Снеллиуса, $n = \sin\alpha/\sin\beta$, находим



$$n = \frac{1}{2\sin 15°} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \approx 1{,}93.$$

Ответ. $n = \dfrac{1}{2\sin 15°} = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \approx 1{,}93.$

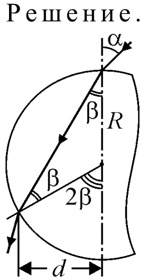
Задача 5

На стеклянный шар радиуса R с показателем преломления n падает узкий пучок света, образуя угол α с осью, проведенной через точку падения и центр шара. На каком расстоянии d от этой оси пучок выйдет из шара?

Идея. Примените законы преломления света.

Указание. Постройте ход лучей. Учтите, что нормали к поверхности шара в точках падения пучка совпадают с радиусами шара, проведенными в эти точки.

Решение. Пучок света испытывает преломление дважды – при входе в стеклянный шар и при выходе из него. Из рисунка видно, что искомое расстояние $d = R\sin 2\beta = 2R\sin\beta\cos\beta$, где β – угол преломления. По закону преломления $\sin\beta = \dfrac{1}{n}\sin\alpha$. Следовательно, $\cos\beta = \dfrac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$. Объединяя записанные выражения, получаем $d = \dfrac{2R}{n^2}\sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$.



Ответ. $d = \dfrac{2R}{n^2}\sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$.

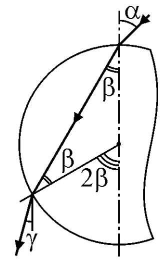
Задача 6

На поверхность стеклянного шара с показателем преломления $n < 2$ падает узкий пучок света, образуя малый угол α с осью шара, проведенной через точку падения и центр шара. Под каким углом γ к этой оси пучок выйдет из шара? При расчетах положить $\sin\alpha \approx \alpha$.

Идея. Воспользуйтесь законами преломления света.

Указание. Постройте ход лучей. Учтите, что нормали к поверхности шара в точках падения пучка совпадают с радиусами шара, проведенными в эти точки.

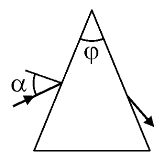
Решение. Ход одного из лучей, образующих пучок света, изображен на рисунке. Видно, что искомый угол равен $\gamma = 2\beta - \alpha$, где β – угол преломления. Из закона преломления $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$ при малых углах α и β следует, что $\beta \approx \dfrac{\alpha}{n}$. Следовательно, $\gamma = \alpha\dfrac{2-n}{n}$.



Ответ. $\gamma = \alpha\dfrac{2-n}{n}$.

Задача 7

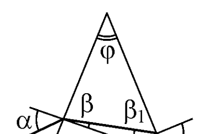
Луч света, идущий в плоскости чертежа, падает на переднюю грань стеклянного клина с углом $\varphi = 45°$ при вершине. При каких значениях угла падения α луч выйдет через заднюю грань клина? Показатель преломления стекла $n = \sqrt{2}$.



Идея. Примените законы преломления света. Примите во внимание явление полного внутреннего отражения.

Указание. Постройте ход луча. Определите условие, при котором луч после падения на заднюю грань клина выйдет наружу.

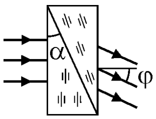
Решение. Ход луча при некотором угле α падения на переднюю грань клина изображен на рисунке. Этот луч выйдет через заднюю грань клина, если угол β_1 падения на нее удовлетворяет условию $\sin\beta_1 < \dfrac{1}{n}$ или $\cos\beta_1 > \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}$. Из рисунка видно, что $\beta + \beta_1 = \varphi$. Следовательно, $\sin\beta = \sin\varphi\cos\beta_1 - \sin\beta_1\cos\varphi > \dfrac{1}{n}\left(\sin\varphi\sqrt{n^2-1} - \cos\varphi\right)$. По закону преломления $\sin\alpha = n\sin\beta$. Объединяя полученные выражения, находим, что $\sin\alpha > \sin\varphi\sqrt{n^2-1} - \cos\varphi$, т.е. $\sin\alpha > 0$.



Ответ. $\alpha > \arcsin\left(\sin\varphi\sqrt{n^2-1} - \cos\varphi\right) = 0$.

Задача 8

Две призмы с равными углами при вершине $\alpha = 5°$, имеющие разные показатели преломления, плотно прижаты друг к другу и расположены, как показано на рисунке. При освещении этой системы призм параллельным пучком света, падающим нормально

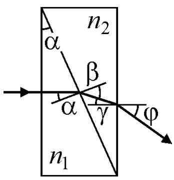


на переднюю грань системы, оказалось, что вышедший из нее пучок отклонился от первоначального направления на угол $\varphi = 3°$. Найти разность Δn показателей преломления материалов призм. При расчетах положить $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\varphi \approx \varphi$.

Идея. Используйте законы преломления света.

Указание. Постройте ход лучей, преломленных системой призм, и воспользуйтесь законом Снеллиуса при условии, что углы падения и преломления малы.

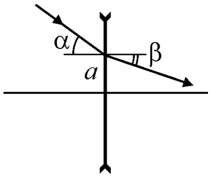
Решение. Ход одного из лучей, преломленных призмами, изображен на рисунке,



где рассмотрен случай $n_2 < n_1$, при котором вышедший из системы луч отклоняется вниз. По закону преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{n_2}{n_1}$, аналогично $\dfrac{\gamma}{\varphi} = \dfrac{1}{n_2}$. Из рисунка видно, что $\gamma = \beta - \alpha$. Следовательно, $n_2 = \dfrac{\varphi}{\beta - \alpha}$. Подставляя найденное n_2 в первое уравнение, получаем, что $n_1 = \dfrac{\beta\varphi}{\alpha(\beta - \alpha)}$. Таким образом, $\Delta n = n_1 - n_2 = \dfrac{\varphi}{\beta - \alpha} \cdot \left(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1\right) = \dfrac{\varphi}{\alpha} = 0{,}6.$

Ответ. $\Delta n = \dfrac{\varphi}{\alpha} = 0{,}6.$

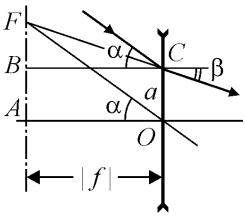
Задача 9



На поверхность тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием f падает луч света на расстоянии a от центра линзы под углом α к ее главной оптической оси. Под каким углом β к главной оптической оси луч выйдет из линзы?

Идея. Воспользуйтесь свойствами рассеивающей линзы.

Указание. Постройте ход луча, преломленного в линзе, и рассмотрите подобные треугольники.



Решение. Ход луча изображен на рисунке. При построении преломленного в линзе луча использован вспомогательный луч FO, параллельный падающему и проходящий через оптический центр линзы O без преломления. Согласно известному свойству тонкой рассеивающей линзы, продолжения всех параллельных лучей, падающих на нее, пересекаются в точке F фокальной плоскости. С учетом того что фокусное расстояние рассеивающей линзы отрицательно, из треугольников AOF и BCF находим, что $|f|\operatorname{tg}\alpha = a + |f|\operatorname{tg}\beta$, откуда $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{a}{|f|}$ и $\beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{a}{|f|}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{a}{f}\right).$

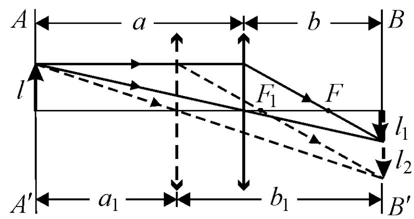
Ответ. $\beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{a}{f}\right)$.

Задача 10

Перемещая линзу между экраном и предметом, удается получить два его четких изображения, одно размером $l_1 = 2$ см, а другое размером $l_2 = 8$ см. Каков размер l предмета?

Идея. Используйте правила построения изображения в собирающей линзе и формулу тонкой линзы.

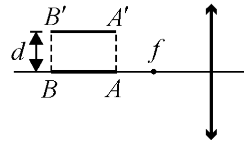
Указание. Постройте изображение предмета при двух положениях линзы. Установите, при каком расстоянии между предметом и экраном линза будет давать два четких изображения предмета.



Решение. При фиксированном расстоянии между предметом и экраном, превышающем $4F$, существуют два положения линзы, при которых она дает на экране изображение предмета. Это следует из того, что формула тонкой линзы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F}$, связывающая расстояние от предмета до линзы a, расстояние от линзы до изображения b и фокусное расстояние линзы F, симметрична относительно a и b при замене $a_1 = b$, $b_1 = a$ эта формула остается справедливой. Построение изображения предмета проиллюстрировано на рисунке, где упомянутые положения линзы изображены сплошной и штриховой линиями, а через AA' и BB' обозначены плоскости объекта и изображения соответственно. Видно, что, когда линза занимает дальнее от предмета положение, она дает уменьшенное изображение (сплошные линии), а если ближнее к предмету, то увеличенное изображение (штриховые линии). Из подобия соответствующих треугольников вытекают соотношения $\dfrac{l_1}{l} = \dfrac{b}{a}$, $\dfrac{l_2}{l} = \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{a}{b}$. Отсюда следует, что $l = \sqrt{l_1 l_2} = 4$ см.

Ответ. $l = \sqrt{l_1 l_2} = 4$ см.

Задача 11

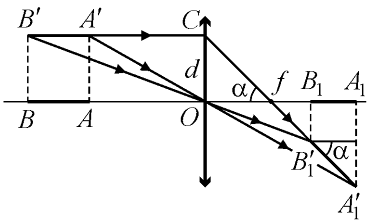


Отрезок AB, лежащий на главной оптической оси линзы за ее фокусом f, сместили параллельно самому себе и перпендикулярно оптической оси в положение $A'B'$, как показано на рисунке. Чему равно смещение d, если длина изображения отрезка $A'B'$ больше длины изображения отрезка AB в $k = 2$ раза? Фокусное расстояние линзы $f = 3$ см.

Идея. Используйте правила построения изображений в тонкой линзе.

Указание. Постройте изображения исходного и смещенного отрезков.

Решение. Изображение A_1B_1 отрезка AB располагается на главной оптической оси линзы. Изображение $A_1'B_1'$ этого отрезка, смещенного в положение $A'B'$, находится на прямой, проходящей через правый фокус линзы и через точку пересечения линии, на которой находится отрезок $A'B'$, с преломляющей плоскостью линзы (см. рисунок).

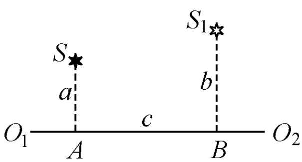


Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{d}{f}$. По условию $\cos\alpha = \dfrac{A_1B_1}{A_1'B_1'} = \dfrac{1}{k}$. Используя тригонометрическую формулу $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$, получаем $d = f\sqrt{k^2-1} = f\sqrt{3} \approx 5{,}2$ см.

Ответ. $d = f\sqrt{k^2-1} \approx 5{,}2$ см.

Задача 12

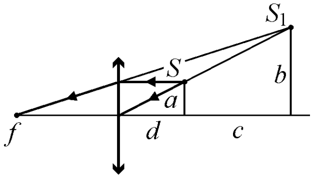
На рисунке представлены светящаяся точка S и ее изображение S_1, даваемое линзой, главная оптическая ось которой – прямая O_1O_2. Расстояния от точек S и S_1 до оптической оси равны соответственно $a = 20$ см и $b = 30$ см, расстояние между точками A и B равно $c = 15$ см. Найти фокусное расстояние линзы f.



Идея. Используйте правила построения изображений в тонкой линзе.

Указание. Определите тип изображения. Найдите построением местоположение линзы и ее фокусов.

Решение. Поскольку S_1 находится по ту же сторону от главной оптической оси линзы, что и S, причем $b > a$, изображение объекта увеличенное и прямое. Такое изображение может дать только собирающая линза, причем это изображение является мнимым. Соответствующий ход лучей и найденное построением положение линзы и ее фокуса показаны на рисунке.



Из подобия треугольников следует, что $\dfrac{d}{c+d} = \dfrac{a}{b}$. Отсюда $d = \dfrac{ac}{b-a}$, $c + d = \dfrac{bc}{b-a}$. С другой стороны, из формулы линзы, записанной с учетом того, что изображение мнимое, а именно $\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{c+d} = \dfrac{1}{f}$, вытекает, что $f = \dfrac{d(c+d)}{c}$. Объединяя записанные выражения, получаем $f = \dfrac{abc}{(b-a)^2} = 90$ см.

Ответ. $f = \dfrac{abc}{(b-a)^2} = 90$ см.

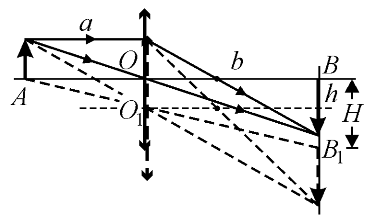
Задача 13

Собирающая линза дает на экране, перпендикулярном ее главной оптической оси, резкое изображение предмета с увеличением $M = 4$. Линзу сдвигают перпендикулярно оптической оси на расстояние $h = 1$ мм. Какова величина H смещения изображения на экране?

Идея. Используйте правила построения изображений в тонкой линзе.

Указание. Постройте изображение предмета при исходном и смещенном положениях линзы. Учтите, что при смещении линзы перпендикулярно ее главной оптической оси размер изображения не изменяется.

Решение. На рисунке показано построение изображения предмета при исходном положении линзы (сплошные линии) и при ее смещенном положении (штриховые линии). Поскольку увеличение изображения $M = b/a$ зависит только от отношения расстояний b и a (см. рисунок), при смещении линзы перпендикулярно ее оптической оси размер изображения не изменяется. Поэтому смещение изображения как целого равно смещению любой его точки, например точки B. Из подобия ΔAOO_1 и ΔABB_1 следует, что $\dfrac{h}{a} = \dfrac{H}{a+b}$.



Отсюда $H = h\left(\dfrac{b}{a} + 1\right)$. Таким образом, $H = h(M+1) = 5$ мм.

Ответ. $H = h(M+1) = 5$ мм.

Задача 14

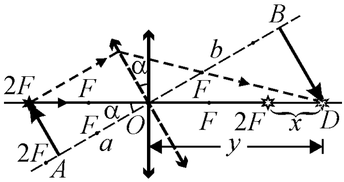
Точечный источник света лежит на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 70$ см. Расстояние от источника до центра линзы равно $2F$. На какое расстояние x сместится изображение источника, если линзу повернуть так, чтобы прямая, проведенная от источника к центру линзы, составляла угол $\alpha = 30°$ с главной оптической осью линзы? Центр линзы остается неподвижным.

Идея. Используйте правила построения изображений в линзе и формулу тонкой линзы.

Указание 1. Постройте изображение источника в повернутой линзе.

Указание 2. Воспользуйтесь подобием треугольников.

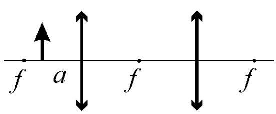
Решение. Когда линза не повернута, изображение находится от нее на расстоянии, равном $2F$. Ход лучей при построении изображения, даваемого повернутой линзой, приведен на рисунке штриховыми линиями. Так как один из лучей совпадает с главной оптической осью неповернутой линзы, изображение источника при повороте линзы останется на той же прямой. Введем следующие обозначения (см. рисунок): $OA = a$, $OB = b$, $OD = y$. Тогда $x = y - 2F$. Из подобия треугольников имеем $\frac{2F}{a} = \frac{y}{b}$, откуда $y = \frac{2bF}{a}$, причем $a = 2F\cos\alpha$. Из формулы тонкой линзы следует, что $b = \frac{aF}{a-F}$. Объединяя записанные выражения, находим, что $y = \frac{2F}{2\cos\alpha - 1}$. Таким образом, $x = \frac{4F(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha - 1} =$ $= \frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1}F \approx 51{,}3$ см.



Ответ. $x = \frac{4F(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha - 1} \approx 51{,}3$ см.

Задача 15

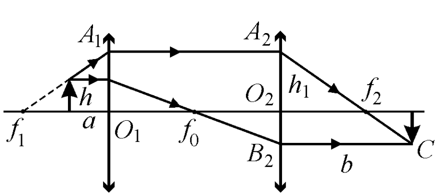
Оптическая система состоит из двух одинаковых собирающих линз с фокусным расстоянием f, расположенных так, что их фокусы совпадают. Предмет находится на расстоянии $a < f$ перед первой линзой. На каком расстоянии b от второй линзы располагается изображение предмета?



Идея. Используйте при получении изображения предмета такие лучи, ход которых построить наиболее просто.

Указание. Постройте изображение предмета, используя два луча, один из которых после преломления в первой линзе проходит через ее фокус, а второй – параллельно ее главной оптической оси.

Решение. Для построения изображения предмета воспользуемся двумя лучами, ход которых показан на рисунке. Один из этих лучей идет параллельно главной оптической оси системы и после преломления в первой линзе пересекает оптическую ось в правом фокусе этой линзы (точка f_0 на рисунке). Второй луч направлен так, что его продолжение пересекает оптическую ось в левом фокусе первой линзы (точка f_1 на рисунке), в результате чего после преломления в первой линзе он идет параллельно главной оптической оси. Преломляясь во второй линзе, эти лучи пересекаются в точке C. Из треугольника $f_1A_1O_1$ находим, что $h_1 = hf/(f-a)$. Из подобия треугольников A_2B_2C и $A_2O_2f_2$ следует, что $b = f\frac{A_2B_2}{A_2O_2} = f\frac{h_1+h}{h_1}$. Подставляя сюда найденное выше h_1, получаем $b = 2f - a$.



Ответ. $b = 2f - a$.

Задача 16

Человек, страдающий дальнозоркостью, рассматривает предмет, находящийся на расстоянии $d = 20$ см перед его глазами. При этом изображение предмета оказывается смещенным за поверхность сетчатки глаза на расстояние $\delta = 2{,}2$ мм. Определить оптическую силу D контактной линзы, устраняющей это смещение. Считать, что оптическая система глаза – это тонкая линза с фокусным расстоянием $f = 2$ см, а контактная линза вплотную примыкает к ней.

Идея. Воспользуйтесь формулой тонкой линзы.

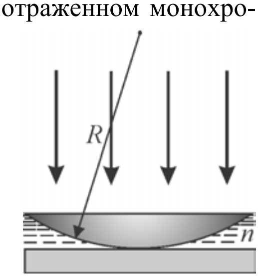
Указание. Учтите, что оптическая сила двух прижатых вплотную тонких линз равна сумме их оптических сил.

Решение. Обозначим через b расстояние от хрусталика до сетчатки глаза. Учитывая, что оптическая сила системы «глаз – контактная линза» равна $\frac{1}{f} + D$, по формуле тонкой линзы имеем $\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} + D$. Поскольку расстояние от хрусталика до изображения предмета в отсутствие контактной линзы равно $b + \delta$, формула тонкой линзы для этого случая имеет вид $\frac{1}{d} + \frac{1}{b+\delta} = \frac{1}{f}$. Исключая из полученных соотношений b, получаем $D = \frac{\delta(d - f)^2}{df(df + f\delta - d\delta)} \approx 5$ дптр.

Ответ. $D = \frac{\delta(d - f)^2}{df(df + f\delta - d\delta)} \approx 5$ дптр.

Задача 17

Интерференционная картина «кольца Ньютона» наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 0{,}63$ мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плоско-выпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой. Найдите радиус r первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы $R = 10$ м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола, равный $n = 1{,}5$. Свет падает по нормали к пластинке.



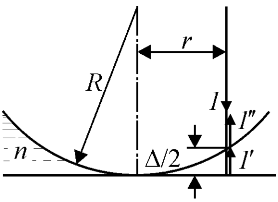
Идея. Воспользуйтесь условием возникновения интерференционных минимумов.

Указание 1. Найдите геометрическую разность хода интерферирующих волн, отраженных от нижней поверхности линзы и от стеклянной пластинки.

Указание 2. Используйте тот факт, что толщина зазора между нижней поверхностью линзы и стеклянной пластинкой очень мала.

Указание 3. Учтите, что при отражении от оптически более плотной среды волна приобретает дополнительный фазовый набег, равный π.

Решение. Обозначим через Δ геометрическую разность хода двух лучей, идущих на расстоянии r от главной оптической оси линзы – луча $1'$, отраженного от верхней

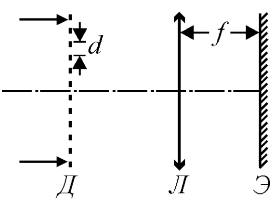


поверхности стеклянной пластинки, и луча $1''$, отраженного от нижней поверхности линзы. По теореме Пифагора имеем $R^2 = r^2 + (R - \Delta/2)^2$. Отсюда $R\Delta = r^2 + \Delta^2/4$. Учитывая, что $\Delta^2/4 << r^2$, приближенно получаем $\Delta \approx \dfrac{r^2}{R}$. Поскольку волны 1 и $1'$ распространяются в бензоле, заполняющем зазор между линзой и пластинкой, оптическая разность хода между волнами $1'$ и $1''$ равна $\Delta_{\text{опт}} = n\Delta = \dfrac{nr^2}{R}$. Дополнительный фазовый набег, равный π, волна $1'$ приобретает при отражении волны 1 от оптически более плотной среды. Таким образом, условие первого интерференционного минимума имеет вид $\Delta_{\text{опт}} + \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{3}{2}\lambda$. Объединяя записанные выражения, получаем $r = \sqrt{\dfrac{\lambda R}{n}} \approx 2$ мм.

Ответ. $r = \sqrt{\dfrac{\lambda R}{n}} \approx 2$ мм.

Задача 18

С помощью установки, схема которой показана на рисунке, наблюдают дифракцию



параллельного пучка белого света на дифракционной решетке *Д*, расположенной перпендикулярно оси пучка. При этом на экране *Э*, установленном в фокальной плоскости тонкой собирающей линзы *Л*, видны две светлые полосы, вызванные наложением спектральных компонент с длинами волн $\lambda_1 = 460$ нм и $\lambda_2 = 575$ нм. Эти полосы расположены симметрично относительно главной оптической оси линзы на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Найдите минимальный период решетки $d_{\min}$, при котором наблюдается эта картина, если фокусное расстояние линзы $f = 20$ см.

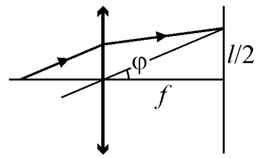
Идея. Используйте условие возникновения дифракционных максимумов.

Указание 1. Запишите формулу для углов, определяющих направления на дифракционные максимумы.

Указание 2. Используйте условие наложения спектральных компонент.

Указание 3. Построив ход лучей, найдите угол, определяющий направление на светлые полосы на экране.

Р е ш е н и е. Углы, определяющие направления на дифракционные максимумы, задаются условием $d\sin\varphi = m\lambda$, где m – порядок интерференционного максимума ($m = 0, 1, 2, \ldots$). Наложение спектральных компонент с длинами волн λ_1 и λ_2 происходит, если $m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$. Анализ числовых данных показывает, что минимальные значения m_1 и m_2, при которых выполняется это условие, равны $m_1 = 5$, $m_2 = 4$. Следовательно, $d = \dfrac{m_1\lambda_1}{\sin\varphi} = \dfrac{m_2\lambda_2}{\sin\varphi}$. Из рисунка видно, что $\dfrac{l}{2} = f\,\mathrm{tg}\,\varphi$, откуда $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{l}{2f}$. Используя формулу $\sin\varphi = \dfrac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}$, получаем, что



$$d = 5\lambda_1\sqrt{1+\left(\frac{2f}{l}\right)^2} \approx 3{,}8 \text{ мкм.}$$

О т в е т. $d = 5\lambda_1\sqrt{1+\left(\dfrac{2f}{l}\right)^2} \approx 3{,}8$ мкм.

4. Основы специальной теории относительности

Задача 1

На биологической станции космического корабля, летящего со скоростью $\vec{V}$ относительно Земли, находится аквариум, имеющий форму параллелепипеда. Две его противоположенные боковые стенки перпендикулярны скорости космического корабля. По одной из них со скоростью v_0 начинает ползти вверх гусеница, вылезающая из отверстия в крышке стоящей в аквариуме закрытой непрозрачной коробки. Определите скорость v, с которой увеличивалась бы видимая с Земли длина части гусеницы, если бы процесс наблюдения был возможен.

Идея. Используйте преобразования Лоренца.

Указание 1. Запишите формулу для увеличения длины гусеницы в системе отсчета, связанной с космическим кораблем.

Указание 2. Запишите формулу для преобразования поперечных отрезков при переходе из движущейся в неподвижную систему отсчета.

Указание 3. Запишите формулу для преобразования интервалов времени при переходе из движущейся в неподвижную систему отсчета.

Решение. В системе отсчета S', связанной с движущимся космическим кораблем, длина гусеницы за время $\Delta t'$ увеличилась на величину $\Delta y' = v_0 \Delta t'$. Согласно преобразованию Лоренца, в системе отсчета S, связанной с Землей, поперечные размеры тел не изменяются, т.е. $\Delta y' = \Delta y$ или $v_0 \Delta t' = v \Delta t$, где v – искомая скорость, а $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ – временной интервал в системе отсчета S, соответствующий $\Delta t'$ (см. пример 3). Следовательно, находящийся на Земле наблюдатель смог бы увидеть, что длина находящейся вне коробки части гусеницы увеличивается со скоростью

$$v = \frac{v_0 \Delta t'}{\Delta t} = \frac{v_0 \Delta t' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\Delta t'} = v_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Ответ. $v = v_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Задача 2

С какой скоростью V вдоль оси OX неподвижной системы отсчета должна перемещаться квадратная рамка, стороны которой параллельны осям OX и OY, чтобы в этой системе отсчета угол между диагональю рамки и стороной, параллельной направлению движения, был равен $\alpha = 60°$?

Идея. Используйте преобразования Лоренца.

Указание. Запишите формулы для преобразования длины продольных и поперечных сторон рамки при переходе из движущейся в неподвижную систему отсчета.

Решение. В движущейся со скоростью V системе отсчета, где квадратная рамка неподвижна, ее стороны $\Delta x'$ и $\Delta y'$, естественно, равны. С точки зрения неподвижного наблюдателя происходит сокращение длины $\Delta x'$ параллельной оси OX стороны квадрата, которая становится равной $\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-V^2/c^2}$. При этом длина $\Delta y'$ параллельной оси OY стороны квадрата не изменяется, т.е. $\Delta y = \Delta y'$. Это приводит к тому, что в неподвижной системе отсчета угол α между диагональю и горизонтальной стороной становится равным $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg}\dfrac{\Delta y'}{\Delta x'\sqrt{1-V^2/c^2}} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. Из последней формулы находим $V = c\dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}{\sin\alpha} = c\sqrt{2/3} \approx 0{,}82c$.

Ответ. $V = c\dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}{\sin\alpha} \approx 0{,}82c$.

Задача 3

Две частицы движутся по прямой навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v_0. Найти модуль относительной скорости частиц v.

Идея. Используйте релятивистский закон сложения скоростей.

Указание 1. Рассмотрите движение одной из частиц в системе отсчета, в которой другая частица покоится.

Указание 2. Воспользуйтесь релятивистским законом сложения скоростей.

Решение. Выберем систему отсчета S' (см. рис. 4.1), движущуюся со скоростью $V = v_0$ относительно неподвижной системы отсчета S так, чтобы одна из частиц покоилась. Найдем проекцию скорости $v_{x'}$ другой частицы в системе отсчета S'. Пользуясь первой из формул уравнений (4.4), запишем соотношение между проекциями v_x и $v_{x'}$, а именно $v_x = \dfrac{v_{x'} + v_0}{1 + v_{x'}v_0/c^2}$, где v_x – проекция скорости этой частицы на ось OX в системе отсчета S, в которой $v_x = -v_0$. Приравнивая два выражения для v_x, получаем $|v_{x'}| = \dfrac{2v_0}{1+v_0^2/c^2}$. Эта величина равна модулю искомой относительной скорости.

Ответ. $v = \dfrac{2v_0}{1+v_0^2/c^2}$.

Задача 4

Покоящаяся релятивистская частица распадается на два одинаковых осколка, имеющих скорость u. При какой начальной скорости V этой частицы скорость v'_x одного из образующихся одинаковых осколков окажется при аналогичном распаде равной нулю? Чему равна во втором случае скорость v''_x другого осколка?

Идея. Воспользуйтесь релятивистским законом сложения скоростей.

Указание 1. Рассмотрите распад релятивистской частицы в движущейся со скоростью V системе отсчета.

Указание 2. Пользуясь релятивистским законом сложения скоростей, определите скорость движения осколков в неподвижной системе отсчета.

Решение. В системе отсчета, движущейся со скоростью V относительно покоящегося наблюдателя, рассматриваемая частица неподвижна. Согласно условию задачи, скорость первого осколка $v'_{x'} = -u$, а скорость второго осколка $v''_{x'} = u$. Из первой формулы соотношений (4.4) следует, что в неподвижной системе отсчета скорость первого осколка $v'_x = \dfrac{v'_{x'} + V}{1 + v'_{x'}V/c^2}$, а скорость второго осколка $v''_x = \dfrac{v''_{x'} + V}{1 + v''_{x'}V/c^2}$, где $v'_{x'} = -u$, $v''_{x'} = u$. По условию задачи $v'_x = 0$. Следовательно, справедлива система уравнений относительно V и v''_x, а именно $\dfrac{-u + V}{1 - uV/c^2} = 0$, $v''_x = \dfrac{u + V}{1 + uV/c^2}$. Ее решение имеет вид $V = u$, $v''_x = \dfrac{2u}{1 + V^2/c^2}$.

Ответ. $V = u$, $v''_x = \dfrac{2u}{1 + V^2/c^2}$.

Задача 5

В неподвижной системе отсчета одна из двух одинаковых частиц покоится, а другая движется с релятивистской скоростью v. Определить скорость u их центра масс.

Идея. Воспользуйтесь релятивистским законом сложения скоростей.

Указание. Найдите связь между скоростями частиц в системе отсчета, где их центр масс покоится, и примените закон сложения скоростей.

Решение. Пусть изображенная на рис. 4.1 система отсчета S' движется относительно неподвижной системы отсчета S со скоростью $V = u$. В системе отсчета S' центр масс частиц покоится. Частицы одинаковой массы имеют в ней скорости, проекции которых $v'_{x'} = -u_0$ и $v''_{x'} = u_0$. В неподвижной системе отсчета S по условию задачи проекции скоростей этих частиц $v'_x = 0$ и $v''_x = v$. С помощью первой формулы соотношений (4.4) получаем систему уравнений $0 = \dfrac{-u_0 + u}{1 - uu_0/c^2}$, $v = \dfrac{u_0 + u}{1 + uu_0/c^2}$ относительно u и u_0. Решая ее, находим $u = \dfrac{c^2}{v}\left(1 \pm \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$. Учитывая, что $u < c$, получаем $u = \dfrac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$.

О т в е т. $u = \dfrac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)$.

Задача 6

Частица, имеющая массу m и заряд q, разгоняется из состояния покоя до релятивистской скорости v в однородном электрическом поле, модуль напряженности которого E. Какое расстояние L проходит при этом частица?

И д е я. Воспользуйтесь законом изменения кинетической энергии.

У к а з а н и е 1. Найдите работу, совершаемую электрическим полем при перемещении частицы на расстояние L.

У к а з а н и е 2. Воспользуйтесь законом изменения кинетической энергии.

Р е ш е н и е. Кинетическая энергия частицы, скорость которой v, находится с помощью формулы $E_к = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$. Изменение кинетической энергии при разгоне частицы из состояния покоя до скорости v равно работе однородного электрического поля $A = qEL$. Из равенства $E_к = A$ находим $L = \dfrac{E_к}{qE} = \dfrac{mc^2}{qE}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$.

О т в е т. $L = \dfrac{mc^2}{qE}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$.

Задача 7

При скорости релятивистской частицы v ее импульс равен p. Во сколько раз η нужно увеличить ее скорость, чтобы импульс частицы стал равным $2p$?

И д е я. Воспользуйтесь выражением для релятивистского импульса.

У к а з а н и е. Запишите выражения для импульсов p и p_1 частиц, движущихся со скоростями v_0 и ηv_0.

Р е ш е н и е. Импульс p движущейся со скоростью v_0 релятивистской частицы равен $p = \dfrac{mv_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$. Если скорость частицы в η раз больше, то ее импульс $p_1 = \dfrac{m\eta v_0}{\sqrt{1-\eta^2 v_0^2/c^2}}$. По условию задачи $p_1 = 2p$. Подставляя это соотношение в выражения для p_1 и p, находим $\eta = \dfrac{2}{\sqrt{1+3v_0^2/c^2}}$.

Ответ. $\eta = \dfrac{2}{\sqrt{1+3v_0^2/c^2}}$.

Задача 8

Определить импульс p электрона, если его кинетическая энергия равна $E_к$.

Идея. Воспользуйтесь соотношением (4.9), связывающим полную энергию, импульс и энергию покоя частицы.

Указание. Выразите полную энергию частицы через энергию покоя и кинетическую энергию.

Решение. Полная энергия E и импульс электрона p связаны соотношением $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, где m – масса электрона. С другой стороны, согласно формуле (4.6), $E = mc^2 + E_к$. Из этих выражений получаем уравнение для p, а именно $m^2c^4 + p^2c^2 = (mc^2 + E_к)^2$, из которого находим, что $p = \sqrt{(2m + E_к/c^2)E_к}$.

Ответ. $p = \sqrt{(2m + E_к/c^2)E_к}$.

Задача 9

Определить скорость v релятивистской частицы массой m, если ее кинетическая энергия $E_к$.

Идея. Воспользуйтесь соотношением (4.9), связывающим полную энергию, импульс и энергию покоя частицы.

Указание. Запишите выражение, связывающее полную энергию частицы с ее кинетической энергией и энергией покоя, и получите уравнение для скорости релятивистской частицы.

Решение. Полная энергия E частицы связана с ее импульсом $p = \dfrac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ соотношением $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = m^2c^4 + \dfrac{(mcv)^2}{1-v^2/c^2}$. Подставляя сюда равенство $E = mc^2 + E_к$, следующее из формулы (4.6), получаем уравнение относительно v, решение которого имеет вид $v = \dfrac{c\sqrt{E_к(E_к + 2mc^2)}}{mc^2 + E_к}$. Заметим, что при $m = 0$ скорость частицы равна скорости света.

Ответ. $v = \dfrac{c\sqrt{E_к(E_к + 2mc^2)}}{mc^2 + E_к}$.

Задача 10

Движущаяся со скоростью v_1 частица налетает на такую же покоящуюся частицу, в результате чего они слипаются. Определить скорость v образовавшегося тела.

Идея. Воспользуйтесь законами сохранения импульса и энергии.

Указание 1. Запишите закон сохранения релятивистского импульса.

Указание 2. Запишите закон сохранения релятивистской энергии.

Указание 3. Из записанных выражений найдите скорость образовавшегося тела.

Решение. Из законов сохранения релятивистских импульса и энергии для взаимодействующих частиц следуют соотношения (см. формулы (4.10) и (4.11))

$$\frac{mv_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}=\frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \frac{mc^2}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}+mc^2=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

где M – масса образовавшегося тела. Деля второе уравнение на первое, получаем уравнение относительно скорости v, а именно $\frac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}\right)v$. Отсюда находим $v=\frac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}+1}$.

Ответ. $v=\frac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}+1}$.

5. Квантовая физика

5.1. Корпускулярно-волновой дуализм

Задача 1

Катод фотоэлемента облучается светом с длиной волны $\lambda = 0{,}35$ мкм. Какова может быть максимальная величина тока фотоэлемента I, если поглощаемая световая мощность составляет $N = 2$ мВт? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.

Идея. Примените формулу Планка.

Указание. Учтите, что максимальная величина тока фотоэлемента оценивается в предположении, что все поглощенные катодом световые кванты выбивают из него электроны.

Решение. Обозначив через n число электронов, выбиваемых в единицу времени, имеем $I = ne$. Поскольку энергия одного кванта $E = \dfrac{hc}{\lambda}$, поглощаемая световая мощность выражается как $N = n\dfrac{hc}{\lambda}$. Отсюда следует, что $I = \dfrac{N\lambda e}{hc} = 0{,}5$ мА.

Ответ. $I = \dfrac{N\lambda e}{hc} = 0{,}5$ мА.

Задача 2

Кристалл рубина облучается вспышкой света длительностью $\tau = 10^{-3}$ с и мощностью $N = 200$ кВт. Длина волны света $\lambda = 0{,}7$ мкм, кристалл поглощает $\eta = 10\%$ энергии излучения. Вычислить количество квантов света n, поглощенных кристаллом. Скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Идея. Воспользуйтесь формулой Планка.

Указание. Определите энергию, поглощенную кристаллом за время световой вспышки.

Решение. Энергия, поглощенная кристаллом за время вспышки, равна $\eta N\tau/100\%$. Разделив эту величину на энергию одного светового кванта hc/λ, получаем $n = \dfrac{\eta}{100\%} \cdot \dfrac{N\tau\lambda}{hc} \approx 7{,}1 \cdot 10^{19}$.

Ответ. $n = \dfrac{\eta}{100\%} \cdot \dfrac{N\tau\lambda}{hc} \approx 7{,}1 \cdot 10^{19}$.

Задача 3

Уединенный изолированный металлический шарик радиуса $r = 0{,}5$ см, находящийся в вакууме, освещают ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 250$ нм, которая меньше, чем длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для данного металла. Каково максимальное количество электронов $n_{\max}$, которые могут покинуть шарик после того, как его дополнительно осветят излучением с длиной волны $\lambda_2 = 200$ нм? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Идея. Используйте уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

Указание 1. Примените закон сохранения механической энергии электронов.

Указание 2. Найдите максимальное число электронов, которые могут покинуть шарик при облучении его светом с длиной волны λ_1 и с длиной волны λ_2.

Решение. Пусть при облучении шарика светом с длиной волны λ_1 его покинуло n_1 электронов и шарик приобрел заряд $q_1 = en_1$. При этом его потенциал стал равен $\varphi = \dfrac{en_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Изменение потенциальной энергии электрона при перемещении его с поверхности шарика в бесконечно удаленную точку равно $\Delta E_{\text{п}} = \dfrac{e^2 n_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Все электроны, покинувшие шарик, возвращаются на него, если их кинетическая энергия $\dfrac{mv^2}{2} \le \Delta E_{\text{п}}$. Из уравнения Эйнштейна следует, что $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{hc}{\lambda} - A$. Объединяя записанные выражения, получим максимальное число электронов, которые могут покинуть шарик при облучении его светом с длиной волны λ_1: $n_{1\max} = \left(\dfrac{hc}{\lambda_1} - A\right)\dfrac{4\pi\varepsilon_0 r}{e^2}$. Рассуждая аналогично, найдем максимальное число электронов, которые могут покинуть шарик при облучении его светом с длиной волны λ_2: $n_{2\max} = \left(\dfrac{hc}{\lambda_2} - A\right)\dfrac{4\pi\varepsilon_0 r}{e^2}$. Учитывая, что $n_{\max} = n_{2\max} - n_{1\max}$, получаем $n_{\max} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 hrc}{e^2\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_2) \approx 4{,}3 \cdot 10^6$.

Ответ. $n_{\max} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 hrc}{e^2\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_2) \approx 4{,}3 \cdot 10^6$.

Задача 4

На металлическую пластинку сквозь сетку, параллельную пластинке, падает свет с длиной волны $\lambda = 0{,}4$ мкм. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов между пластинкой и сеткой $U = 0{,}95$ В. Определить длину волны $\lambda_{\max}$, соответствующую красной границе фотоэффекта. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.

Идея. Примените уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

Указание 1. Определите условие, при котором прекращается фототок.

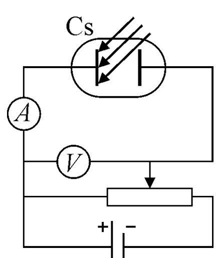
Указание 2. Найдите работу выхода для материала пластинки.

Указание 3. Определите длину волны, соответствующую красной границе фотоэффекта.

Решение. Фототок прекращается, когда выбитые из пластинки электроны перестают достигать сетки. Это происходит в том случае, когда вблизи сетки потенциальная энергия электронов в задерживающем электрическом поле становится равной кинетической энергии электронов, покидающих пластинку: $eU = \dfrac{mv^2}{2}$. Используя уравнение Эйнштейна, находим работу выхода для материала пластинки $A = \dfrac{hc}{\lambda} - eU$. Длина волны $\lambda_{\max}$, соответствующая красной границе фотоэффекта, определяется из условия, что энергия кванта равна работе выхода: $\dfrac{hc}{\lambda_{\max}} = A$. Объединяя записанные соотношения, получаем $\lambda_{\max} = \dfrac{hc}{hc/\lambda - eU} \approx 5{,}7$ мкм.

Ответ. $\lambda_{\max} = \dfrac{hc}{hc/\lambda - eU} \approx 5{,}7$ мкм.

Задача 5



Измерения зависимости напряжения отсечки фототока (т.е. напряжения, при котором фототок прекращается) от длины волны света, падающего на цезиевую пластину Cs, производятся по схеме, изображенной на рисунке. При освещении светом с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}4$ мкм напряжение отсечки составило $U_1 = 1{,}19$ В, при $\lambda_2 = 0{,}5$ мкм $U_2 = 0{,}57$ В. Определить по результатам этого опыта длину волны $\lambda_{\max}$, соответствующую красной границе фотоэффекта для цезия.

Идея. Воспользуйтесь законами фотоэффекта.

У к а з а н и е 1. Запишите условие прекращения фототока.

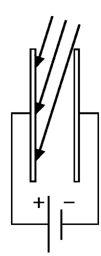
У к а з а н и е 2. Используйте уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

У к а з а н и е 3. Из записанных выражений исключите постоянную Планка, заряд электрона, скорость света и работу выхода.

Р е ш е н и е. Фототок прекращается, когда электроны, выбитые из положительно заряженного электрода, перестают достигать отрицательно заряженного электрода. Это происходит в том случае, когда вблизи отрицательно заряженного электрода потенциальная энергия электронов в задерживающем электрическом поле становится равной кинетической энергии электронов, покидающих положительно заряженный электрод: $eU = \dfrac{mv^2}{2}$. Используя уравнение Эйнштейна, находим, что напряжения отсечки фототока удовлетворяют следующим соотношениям: $eU_1 = \dfrac{hc}{\lambda_1} - A$, $eU_2 = \dfrac{hc}{\lambda_2} - A$, где e – модуль заряда электрона, h – постоянная Планка, c – скорость света, A – работа выхода. Вычитая из первого уравнения второе, получаем $e(U_1 - U_2) = hc\left(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\right)$, откуда $\dfrac{hc}{e} = \dfrac{(U_1 - U_2)\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Умножая первое из исходных уравнений на λ_1, а второе на λ_2 и вычитая из первого второе, находим $e(\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2) = A(\lambda_2 - \lambda_1)$, откуда $\dfrac{e}{A} = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2}$. Почленное перемножение полученных равенств дает соотношение $\dfrac{hc}{A} = \dfrac{\lambda_1\lambda_1}{\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2}(U_1 - U_2)$. Учитывая, что $\dfrac{hc}{\lambda_{\max}} = A$, получаем формулу, позволяющую найти длину волны, соответствующую красной границе фотоэффекта, лишь по двум измерениям напряжения отсечки фототока. Эта формула имеет вид $\lambda_{\max} = \dfrac{\lambda_1\lambda_1}{\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2}(U_1 - U_2) \approx 0{,}65$ мкм. Видно, что в эту формулу не входят такие величины, как постоянная Планка, заряд электрона, скорость света, работа выхода.

О т в е т. $\lambda_{\max} = \dfrac{\lambda_1\lambda_1}{\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2}(U_1 - U_2) \approx 0{,}65$ мкм.

Задача 6



Две параллельные друг другу металлические пластины, расстояние между которыми $d = 1$ см много меньше их размеров, подключены к источнику с напряжением $U = 12{,}5$ В. Сначала положительно заряженную пластину облучают светом частотой $\nu_1 = 7 \cdot 10^{14}$ Гц, а затем – светом частотой $\nu_2 = 4 \cdot 10^{14}$ Гц. На какую величину Δl изменяется минимальное расстояние, на которое электроны могут приблизиться к поверхности отрицательно заряженной пластины, при изменении частоты света от ν_1 до ν_2? Частота света, соответствующая красной границе фотоэффекта, меньше ν_2. Модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Идея. Воспользуйтесь законом сохранения механической энергии электронов.

Указание. Примените уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

Решение. Максимальное расстояние l, на которое электроны удаляются от положительно заряженной пластины, определяется из закона сохранения энергии, в соответствии с которым $\frac{mv^2}{2} = eEl = eU\frac{l}{d}$, где $E = U/d$ – напряженность электрического поля между пластинами, которое можно считать однородным. Согласно уравнению Эйнштейна, кинетическая энергия электрона равна $\frac{mv^2}{2} = h\nu - A$, где A – работа выхода. Объединяя записанные выражения, находим $l = \frac{d(h\nu - A)}{eU}$. Применяя эту формулу, находим l_1 и l_2 – максимальные расстояния, на которые удаляются электроны от положительно заряженной пластины при облучении ее светом частотой ν_1 и ν_2 соответственно. Искомая величина равна $\Delta l = l_1 - l_2$, следовательно, $\Delta l = \frac{dh(\nu_1 - \nu_2)}{eU} \approx 1$ мм.

Ответ. $\Delta l = \frac{dh(\nu_1 - \nu_2)}{eU} \approx 1$ мм.

Задача 7

Космический корабль, находящийся в состоянии покоя, проводит сеанс связи с Землей, направляя в ее сторону лазерный луч. На какое расстояние S от первоначального положения сместится корабль к окончанию сеанса связи, если мощность лазерного луча $N = 60$ Вт, масса корабля $M = 10$ т, продолжительность сеанса $\tau = 1$ ч? Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Влиянием всех небесных тел пренебречь.

Идея. Используйте выражение для импульса фотона и второй закон Ньютона.

Указание 1. Найдите импульс фотонов, испущенных лазером за промежуток времени Δt.

Указание 2. Используя второй закон Ньютона, найдите реактивную силу, действующую на корабль.

Указание 3. Примените для корабля закон равноускоренного движения.

Решение. Импульс одного фотона равен $p_1 = \frac{E_1}{c}$, где $E_1 = h\nu$ – энергия фотона. Импульс фотонов, испущенных за время Δt в одном направлении, выражается как

$p = \dfrac{N\Delta t}{c}$. По второму закону Ньютона $p = F\Delta t$, где F – реактивная сила, действующая со стороны фотонов на корабль. Отсюда $F = \dfrac{N}{c}$. Под действием этой силы корабль приобретает ускорение $a = \dfrac{N}{Mc}$. Смещение корабля за время сеанса связи $S = \dfrac{a\tau^2}{2} = \dfrac{N\tau^2}{2Mc} \approx 0{,}13$ мм.

Ответ. $S = \dfrac{a\tau^2}{2} = \dfrac{N\tau^2}{2Mc} \approx 0{,}13$ мм.

Задача 8

Найти дебройлевскую длину волны λ электрона, ускоренного из состояния покоя разностью потенциалов $U = 3$ МВ. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость света $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.

Идея. Используйте определение дебройлевской длины волны.

Указание 1. Воспользуйтесь законом сохранения энергии.

Указание 2. Учтите, что скорость электрона сравнима со скоростью света.

Решение. Из закона сохранения энергии электрона, записанного для релятивистского случая (см. раздел 4.1), следует равенство $mc^2 + eU = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, где v – скорость электрона. Отсюда $v = c\sqrt{1 - \left(\dfrac{mc^2}{mc^2 + eU}\right)^2} \approx 0{,}989c \approx 2{,}968 \cdot 10^{8}$ м/с. Импульс электрона $p = \dfrac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1{,}85 \cdot 10^{-21}$ кгм/с. Дебройлевская длина волны, связанной с движущимся электроном, $\lambda = \dfrac{h}{p} \approx 3{,}57 \cdot 10^{-13}$ м.

Ответ. $\lambda \approx 3{,}57 \cdot 10^{-13}$ м.

5.2. Физика атома

Задача 1

Получите формулу для частоты обращения ν_n электрона, находящегося на n-й круговой орбите атома водорода. Вычислите ν_n для $n=1$. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Идея. Воспользуйтесь законами классической механики и постулатами Бора.

Указание 1. Используйте выражение для момента импульса электрона, движущегося по круговой орбите.

Указание 2. Запишите уравнение движения электрона по круговой орбите.

Решение. Из формулы (5.2.2) легко получить скорость электрона, находящегося на стационарной круговой орбите радиуса r_n, а именно $v_n = \dfrac{nh}{2\pi m_e r_n}$. Здесь m_e – масса электрона, h – постоянная Планка, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Центростремительное ускорение v_n^2 / r_n электрону обеспечивает действующая на него кулоновская сила $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r_n^2}$.

Согласно второму закону Ньютона, $\dfrac{m_e v_n^2}{r_n} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r_n^2}$. Подставляя в последнюю формулу v_n, получаем, что $r_n = \dfrac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e e^2} \cdot n^2$. Частота ν_n обращения электрона по круговой орбите радиуса r_n связана с v_n соотношением $\nu_n = v_n / 2\pi r_n$. Подставляя в последнее равенство v_n и r_n, получаем искомую величину $\nu_n = \dfrac{nh}{4\pi^2 m_e r_n^2} = \dfrac{1}{4} \dfrac{m_e e^4}{h^3 \varepsilon_0^2} \cdot \dfrac{1}{n^3}$. При $n = 1$ частота $\nu_1 = \dfrac{1}{4} \dfrac{m_e e^4}{h^3 \varepsilon_0^2} \approx 6{,}55 \cdot 10^{15}$ Гц.

Ответ. $\nu_n = \dfrac{1}{4} \dfrac{m_e e^4}{h^3 \varepsilon_0^2} \cdot \dfrac{1}{n^3}$; $\nu_1 \approx 6{,}55 \cdot 10^{15}$ Гц.

Задача 2

Во сколько раз скорость электрона на первой стационарной орбите атома водорода, отличается от скорости электрона, находящегося на третьей стационарной орбите?

Идея. Используйте гипотезу Бора о дискретных значениях момента импульса электрона.

Указание 1. Запишите выражение для момента импульса электрона, движущегося на стационарной орбите.

Указание 2. Воспользуйтесь законами классической механики и запишите уравнение движения электрона.

Решение. Воспользуемся формулой $m_e v_n r_n = \dfrac{nh}{2\pi}$, связывающей скорость v_n находящегося на стационарной круговой орбите электрона в атоме водорода с ее радиусом r_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Центростремительное ускорение электрона v^2 / r_n создает действующая на него кулоновская сила. Согласно второму закону Ньютона, $\dfrac{m_e v_n^2}{r_n} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{r_n^2}$. Решая получившуюся систему уравнений, связывающую v_n и r_n, находим, что $v_n = \dfrac{e^2}{2h\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{n}$. Отсюда получаем $\dfrac{v_1}{v_3} = 3$.

Ответ. $\dfrac{v_1}{v_3} = 3$.

Задача 3

Атом водорода, находясь в основном состоянии, возбуждается излучением, частота которого равна $\nu = 2{,}97 \cdot 10^{15}$ Гц. Определить, сколько спектральных линий серии Лаймана можно при этом наблюдать. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Идея. Используйте соотношение между энергией фотона и разностью энергий двух стационарных состояний атома водорода.

Указание. Определите максимальный номер стационарной орбиты, на которую возможен переход электрона.

Решение. Согласно постулатам Бора, при переходе атома из одного стационарного состояния в другое энергия испускаемого или поглощаемого фотона равна разности энергий в двух его стационарных состояниях: $h\nu_{nk} = E_n - E_k$. Подставляя в последнюю формулу выражение для энергии E_j электрона на j-й стационарной орбите $E_j = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \dfrac{1}{j^2}$ (см. пример 3), получаем, что $h\nu_{nk} = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{k^2}\right)$. Вначале атом находился в основном состоянии ($k = 1$). При его возбуждении излучением заданной частоты величина n оказывается равной $\sqrt{\dfrac{1}{1 - 8\nu\varepsilon_0^2 h^3 / (m_e e^4)}} \approx 3{,}3$. Следовательно, возможны переходы на энергетический уровень, лежащий не выше третьего.

Таких переходов в серии Лаймана два – с первого на второй уровень и с первого на третий.

Ответ. Две спектральные линии.

Задача 4

Определить отношение минимальных энергий фотонов, необходимых для осуществления переходов в серии Лаймана и в серии Бальмера спектра атома водорода.

Идея. Используйте классификацию спектральных линий излучения атома водорода.

Указание. Запишите выражение для минимальной энергии фотонов, необходимых для осуществления переходов в серии Лаймана и в серии Бальмера.

Решение. Согласно постулатам Бора, при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон, энергия которого равна $h\nu_{nk} = E_n - E_k$. Так как на j-м стационарном уровне энергия электрона равна $E_j - \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \dfrac{1}{j^2}$ (см. пример 3), то $E_n - E_k = h\nu_{nk} = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{k^2}\right)$. Согласно классификации спектральных линий излучения атома водорода, серии Лаймана соответствуют $k = 1$ и $n = 2, 3, 4, \ldots$, а серии Бальмера – $k = 2$ и $n = 3, 4, 5, \ldots$. Следовательно, минимальная энергия фотона для осуществления перехода в серии Лаймана $E_{\min}^{(1)} = E_2 - E_1 = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{1^2}\right) = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \dfrac{3}{4}$, а минимальная энергия фотона для осуществления перехода в серии Бальмера $E_{\min}^{(2)} = E_3 - E_2 = -\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{2^2}\right) = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \dfrac{5}{36}$.

Искомая величина $\dfrac{E_{\min}^{(1)}}{E_{\min}^{(2)}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{36}{5} = \dfrac{27}{5}$.

Ответ. $E_{\min}^{(1)} / E_{\min}^{(2)} = 5{,}4.$

Задача 5

Определить отношение минимальной и максимальной энергии фотонов в серии Брэккета спектра атома водорода.

Идея. Используйте классификацию спектральных линий излучения атома водорода.

Указание 1. Воспользуйтесь выражением для энергии электрона на j-м стационарном уровне.

Указание 2. Используя соотношение между энергией фотона и разностью энергий двух стационарных состояний атома водорода, определите условия максимальной и минимальной энергии фотона в заданной серии спектра атома водорода.

Решение. Согласно постулатам Бора, при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается один фотон, энергия которого равна $h\nu_{nk} = E_n - E_k = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$. Для серии Брэккета $k = 4$, а $n = 5, 6, 7, \ldots$. Поэтому энергия фотона минимальна при переходе с пятого уровня на четвертый и равна $E_{\min} = E_5 - E_4 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\frac{9}{400}$. Максимальная энергия фотона для этой серии равна энергии, которую нужно сообщить находящемуся на четвертой стационарной орбите электрону, для того чтобы он покинул атом. Эта энергия равна $E_{\max} = E_\infty - E_4 = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\left(-\frac{1}{4^2}\right) = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\frac{1}{16}$. Искомая величина $E_{\min} / E_{\max} = 0{,}36$.

Ответ. $E_{\min} / E_{\max} = 0{,}36$.

Задача 6

Определить энергию фотона E_0, способного вырвать электрон с третьей орбиты атома водорода и сообщить ему кинетическую энергию, равную $\tilde{E} = 8\cdot 10^{-19}$ Дж. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 21{,}7\cdot 10^{-19}$ Дж.

Идея. Используйте закон сохранения энергии.

Указание 1. Используйте формулу для энергии электрона, находящегося на стационарной орбите.

Указание 2. Запишите закон сохранения энергии.

Решение. Энергия электрона на n-й стационарной орбите равна $E_n = -E_i / n^2$ (см. пример 3). По условию $n = 3$. Поэтому, согласно закону сохранения энергии, $\tilde{E} = E_0 + E_3 = E_0 - E_i / 9$. Следовательно, $E_0 = \tilde{E} + E_i / 9 = 10{,}4\cdot 10^{-19}$ Дж.

Ответ. $E_0 = \tilde{E} + E_i / 9 = 10{,}4\cdot 10^{-19}$ Дж.

Задача 7

Атом водорода находится в невозбужденном состоянии. Определите диапазон длин волн возбуждающего атом электромагнитного излучения, для которого радиус орбиты электрона увеличивается в шестнадцать раз. Постоянная Ридберга $R_{\text{H}} = 3{,}29\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$, скорость света $c = 3\cdot 10^8$ м/с.

Идея. Воспользуйтесь постулатами Бора.

Указание 1. Используйте соотношение между радиусом стационарной орбиты электрона и номером орбиты.

Указание 2. Запишите выражение, связывающее энергию фотона и разность энергий двух стационарных состояний атома водорода. Воспользуйтесь определением энергии ионизации атома водорода.

Указание 3. Определите условие, при котором длины волн падающего электромагнитного излучения удовлетворяют условию перехода на требуемый энергетический уровень.

Решение. Если в результате взаимодействия атома водорода с электромагнитным излучением электрон перешел с низшей орбиты на орбиту радиуса $r_n = \dfrac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\cdot n^2$, то его энергия изменилась на величину $E_n - E_1 = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = hR_{\text{H}}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{hc}{\lambda_{1n}}$, где R_{H} – постоянная Ридберга, λ_{1n} – длина волны, соответствующей переходу. По условию задачи $r_n = 16r_1$, и, следовательно, $n = 4$. Искомый диапазон длин волн определяется условием $16 \le n^2 < 25$, т.е. $16 \le \left(1-\dfrac{c}{R_{\text{H}}\lambda_{1n}}\right)^{-1} < 25$. Решая получившуюся систему неравенств, находим $\dfrac{25c}{24R_{\text{H}}} < \lambda \le \dfrac{16c}{15R_{\text{H}}}$, или 95 нм $< \lambda \le 97$ нм.

Ответ. $\dfrac{25c}{24R_{\text{H}}} < \lambda \le \dfrac{16c}{15R_{\text{H}}}$; 95 нм $< \lambda \le 97$ нм.

Задача 8

От газоразрядной трубки, заполненной атомарным водородом, на дифракционную решетку нормально ее поверхности падает пучок света. Спектральная линия от перехода электрона в атоме водорода с четвертой на вторую стационарную орбиту наблюдается в $m = 7$ порядке спектра дифракционной решетки под углом $\varphi = 30°$. Определите период d этой дифракционной решетки. Постоянная Планка $h = 6{,}6\cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3\cdot 10^8$ м/с, энергия ионизации атома водорода $E_i = 21{,}7\cdot 10^{-19}$ Дж.

Идея. Воспользуйтесь постулатами Бора.

Указание 1. Запишите формулу, определяющую угловые направления на максимумы дифракционной картины от дифракционной решетки.

Указание 2. Используйте формулу для энергии испускаемого фотона при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую.

Решение. Угол φ между нормалью к решетке и направлением на максимум m-го порядка дифракционной картины определяется уравнением $d\sin\varphi = m\lambda$, где d – период решетки, λ – длина световой волны. Согласно постулатам Бора, при переходе атома с более высокой n-й стационарной орбиты на k-ю испускается один фотон, частота которого равна $\nu_{nk} = -\frac{E_i}{h} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$. По условию задачи $n = 4$, а $k = 2$. Объединяя записанные выражения и учитывая, что $\lambda = \frac{c}{\nu}$, получаем окончательно

$$d = \frac{mhcn^2k^2}{E_i(n^2 - k^2)\sin\varphi} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Ответ. $d = \frac{mhcn^2k^2}{E_i(n^2 - k^2)\sin\varphi} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-6}$ м.

5.3. Физика атомного ядра

Задача 1

Определить удельную энергию связи ядра ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$.

Идея. Воспользуйтесь определением энергии связи.

Указание. Используйте определение удельной энергии.

Решение. Удельной энергией связи $\Delta\varepsilon_{св}$ ядра массой $M_я$ называется величина, равная приходящейся на один нуклон средней энергии связи $\Delta E_{св} / A = [Zm_p + (A - Z)m_n - M_я]c^2 / A$. Здесь m_p и m_n – массы протона и нейтрона, Z и A – соответственно число протонов и нуклонов в ядре. Для рассматриваемого ядра $Z = 4$, $A = 7$. Массы $M_я$, m_p и m_n приведены в таблице, используя которую находим

$$\Delta\varepsilon_{св} = [4 \cdot 1{,}00783 + (7 - 4) \cdot 1{,}00867 - 7{,}01693] \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\frac{(3 \cdot 10^8)^2}{7} \approx 8{,}61 \cdot 10^{-13} \text{ Дж/нуклон.}$$

Ответ. $\Delta\varepsilon_{св} \approx 8{,}61 \cdot 10^{-13}$ Дж/нуклон.

Задача 2

Определить неизвестный продукт и рассчитать энергию ядерной реакции: ${}^{44}_{20}\mathrm{Ca} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{41}_{19}\mathrm{K} + \mathrm{X}$.

Идея. Воспользуйтесь законами сохранения при ядерных реакциях.

Указание 1. Запишите законы сохранения электрического заряда и массового числа. При помощи таблицы определите неизвестный продукт реакции.

Указание 2. Используйте закон сохранения энергии.

Решение. Законы сохранения электрического заряда и массового числа для рассматриваемой ядерной реакции принимают вид $20+1=19+Z$, $44+1=41+A$. Из этих формул видно, что в ядре образовавшегося неизвестного продукта число нуклонов $A=4$, а число протонов $Z=2$, и, следовательно, это ${}_2^4\text{He}$ (см. таблицу). В соответствии с законом сохранения энергии суммарная масса ядер до реакции равна суммарной массе ядер после реакции плюс дефект массы Δm, связанный с выделяющейся ($\Delta m>0$) или поглощающейся ($\Delta m<0$) энергией ΔE соотношением $\Delta E=|\Delta m|\cdot c^2$. Используя приведенные в таблице данные, находим

$$\Delta m = m_{\text{Ca}} + m_{{}_1^1\text{H}} - m_{\text{K}} - m_{{}_2^4\text{He}} =$$

$$= 43{,}95549 + 1{,}007783 - 40{,}96184 - 4{,}00260 = -0{,}00112 \text{ а.е.м.}$$

Следовательно, в рассматриваемой реакции происходит поглощение энергии $\Delta E = 0{,}00112\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\cdot(3\cdot 10^8)^2 \approx 1{,}675\cdot 10^{-13}$ Дж.

Ответ. $\Delta E \approx 1{,}675\cdot 10^{-13}$ Дж.

Задача 3

Какую минимальную энергию ΔE надо затратить для разделения ядра ${}_8^{18}\text{O}$ на две одинаковые части?

Идея. Воспользуйтесь законами сохранения при ядерных реакциях.

Указание 1. Запишите законы сохранения электрического заряда и массового числа. При помощи таблицы определите продукт реакции.

Указание 2. Используйте закон сохранения энергии.

Решение. Законы сохранения электрического заряда и массового числа позволяют установить, что в ядерной реакции ${}_8^{18}\text{O} \to 2{}_Z^A\text{X}$ массовое число $A=9$, а заряд $Z=4$. С помощью таблицы находим, что неизвестным продуктом реакции является ${}_4^9\text{Be}$. В соответствии с законом сохранения энергии сумма масс ядер до реакции равна сумме масс ядер после реакции плюс дефект массы Δm, связанный с энергией ΔE соотношением $\Delta E=|\Delta m|\cdot c^2$. Используя приведенные в таблице данные, находим дефект массы $\Delta m = m_{\text{O}} - 2m_{\text{Be}} = 17{,}99916 - 2\cdot 9{,}01219 = -0{,}02522$ а.е.м. Искомая величина затраченной энергии $\Delta E = 0{,}02522\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\cdot(3\cdot 10^8)^2 \approx 3{,}77\cdot 10^{-12}$ Дж.

Ответ. $\Delta E \approx 3{,}77\cdot 10^{-12}$ Дж.

Задача 4

Пренебрегая кинетическими энергиями и суммарным импульсом бериллия и гелия в ядерной реакции ${}_4^9\text{Be} + {}_2^4\text{He} \to {}_6^{12}\text{C} + {}_0^1 n$, определить кинетические энергии E_{C} и E_n углерода и нейтрона, считая, что вся выделяющаяся в реакции энергия ΔE практически равна $E_{\text{C}} + E_n$.

Идея. Воспользуйтесь законами сохранения при ядерных реакциях.

Указание. Используйте законы сохранения энергии и импульса.

Решение. В соответствии с законом сохранения энергии сумма масс ядер до реакции равна сумме масс ядер после реакции плюс дефект массы Δm, связанный с выделяющейся или поглощающейся энергией ΔE соотношением $\Delta E = |\Delta m| \cdot c^2$. Используя приведенные в таблице данные, находим

$$\Delta m = m_{\text{Be}} + m_\alpha - m_{\text{C}} - m_n = 9{,}01219 + 4{,}00260 - 12{,}00000 - 1{,}00867 = 0{,}00612 \text{ а.е.м.},$$

где m_α – масса образовавшейся α-частицы (ядра ${}^4_2\text{He}$). Поскольку $\Delta m > 0$, в реакции происходит выделение энергии $\Delta E = (m_{\text{Be}} + m_\alpha - m_{\text{C}} - m_n)c^2$. По условию суммарный импульс бериллия и гелия равен нулю, поэтому суммарный импульс углерода и нейтрона $p_{\text{C}} + p_n = 0$. Суммарная кинетическая энергия бериллия и гелия по условию также равна нулю, следовательно, вся выделяющаяся в реакции энергия $\Delta E = E_{\text{C}} + E_n$, где $E_{\text{C}} = p_{\text{C}}^2 / 2m_{\text{C}}$ и $E_n = p_n^2 / 2m_n$ – кинетические энергии углерода и нейтрона. Объединяя выписанные выражения, находим

$$E_{\text{C}} = \frac{m_n(m_{\text{Be}} + m_\alpha - m_{\text{C}} - m_n)c^2}{m_{\text{C}} + m_n} = \frac{1{,}00867 \cdot 0{,}00612}{12{,}00000 + 1{,}00867} 1{,}66 \cdot 10^{-27} (3 \cdot 10^8)^2 \approx 7 \cdot 10^{-14} \text{ Дж},$$

$$E_n = \frac{m_{\text{C}}(m_{\text{Be}} + m_\alpha - m_{\text{C}} - m_n)c^2}{m_{\text{C}} + m_n} = \frac{12 \cdot 0{,}00612}{12{,}00000 + 1{,}00867} 1{,}66 \cdot 10^{-27} (3 \cdot 10^8)^2 \approx 8{,}4 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Ответ. $E_{\text{C}} \approx 7 \cdot 10^{-14}$ Дж, $E_n \approx 8{,}4 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Задача 5

Находящееся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5$ Тл ядро покоящегося нейтрального атома испытывает α-распад, в результате которого рождается ион нового элемента массой $M = 50$ а.е.м. Его траектория лежит в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, и представляет собой дугу окружности радиуса $R = 5$ см. Найти выделившуюся при α-распаде энергию ΔE, считая, что она целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Масса α-частицы $m = 4$ а.е.м., ее заряд $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Идея. Воспользуйтесь законами сохранения при ядерных реакциях.

Указание 1. Используйте закон сохранения энергии и закон сохранения импульса.

Указание 2. Примените закон сохранения заряда.

Указание 3. Запишите уравнение движения иона в магнитном поле.

Решение. Поскольку исходный атом неподвижен и выделившаяся при реакции энергия ΔE целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции, то из законов сохранения импульса и энергии следуют равенства $mv = MV$,

$\frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \Delta E$, где v и V – скорости α-частицы и иона после распада. Исключая из этих равенств v, находим, что $\Delta E = \frac{M(M+m)}{2m} V^2$. Из закона сохранения заряда следует, что модуль заряда иона равен заряду α-частицы. По второму закону Ньютона уравнение движения иона в магнитном поле под действием силы Лоренца имеет вид $\frac{MV^2}{R} = qVB$. Подставляя $V = \frac{qBR}{M}$ в найденное выражение для ΔE, получаем $\Delta E = \frac{(qBR)^2 (M+m)}{2Mm} \approx 5{,}2 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Ответ. $\Delta E = \frac{(qBR)^2 (M+m)}{2Mm} \approx 5{,}2 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Задача 6

Радиоактивный изотоп ${}^{22}_{11}\mathrm{Na}$ при каждом акте распада излучает один γ-квант с энергией $E_\gamma = 2{,}05 \cdot 10^{-13}$ Дж. Определить энергию E, выделяющуюся за время $t = 45$ мин. при распаде $m = 25$ г этого вещества. Период полураспада изотопа $T = 2{,}6$ года.

Идея. Используйте закон радиоактивного распада.

Указание 1. Определите число излучаемых частиц за заданный интервал времени.

Указание 2. Воспользуйтесь таблицей.

Решение. Начальное число радиоактивных атомов $N_0 = m / m_1$, где m_1 – масса ядра изотопа натрия. Согласно закону радиоактивного распада, через время t останется $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T}$ радиоактивных атомов. Каждый из распавшихся за время t атомов излучает один γ-квант с энергией E_γ. Поэтому выделяющаяся за это время энергия $E = N_0 (1 - 2^{-t/T}) \cdot E_\gamma = \frac{m}{m_1} (1 - 2^{-t/T}) \cdot E_\gamma$. Подставляя в эту формулу взятое из таблицы значение $m_1 = 21{,}99444$ а.е.м., получаем

$$E = \frac{0{,}025}{21{,}99444 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} (1 - 2^{-45/(2{,}6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60)}) \cdot 2{,}05 \cdot 10^{-13} \approx 3{,}2 \text{ МДж}.$$

Ответ. $E \approx 3{,}2$ МДж.

Задача 7

Определить массу m радиоактивного полония ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$, при распаде которого в течение $t = 3$ ч. образовался гелий ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, занимающий при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па объем $V = 4 \cdot 10^{-6}$ м^3. Период полураспада ${}^{210}_{84}\mathrm{Po}$ равен $T_{1/2} = 138$ сут.

Молярная масса гелия $M = 0{,}004$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Считать образующийся гелий идеальным газом.

Идея. Используйте закон радиоактивного распада.

Указание 1. Воспользуйтесь уравнением состояния идеального газа.

Указание 2. Найдите число образовавшихся α-частиц.

Решение. Из уравнения состояния идеального газа найдем сначала массу образовавшегося гелия $m = \dfrac{pVM}{RT}$, а затем число образовавшихся в результате распада α-частиц $\Delta N = \dfrac{m}{m_{\text{He}}} = \dfrac{pVM}{m_{\text{He}}RT}$, где $m_{\text{He}} = 4{,}00260$ а.е.м. (см. таблицу). Число радиоактивных атомов полония $N(t)$ в момент времени t находится с помощью закона радиоактивного распада $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}$. Здесь $T_{1/2}$ – период полураспада полония, $N_0 = m/m_{\text{Po}}$, $m_{\text{Po}} = 209{,}98297$ а.е.м. – масса изотопа полония (см. таблицу). Поэтому число образовавшихся в результате распада α-частиц $\Delta N = N_0 - N(t) = N_0(1 - 2^{-t/T_{1/2}})$.

Приравнивая две формулы для ΔN, находим $m = \dfrac{1}{(1 - 2^{-t/T_{1/2}})} \dfrac{m_{\text{Po}}}{m_{\text{He}}} \dfrac{pVM}{RT} \approx 53{,}6$ г.

Ответ. $m = \dfrac{1}{(1 - 2^{-t/T_{1/2}})} \dfrac{m_{\text{Po}}}{m_{\text{He}}} \dfrac{pVM}{RT} \approx 53{,}6$ г.

Ответы

1. Механика

1.1. Кинематика

1. $t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 45$ с.

2. $\tau_2 = \tau_1\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 2{,}1$ с.

3. $\tau = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 63{,}5$ с.

4. $\Delta t = \frac{4\pi d}{v_0} \approx 1{,}57$ с.

5. $v_1 = v_0\sqrt{1 - \frac{l_1}{l}} \approx 280$ м/с.

6. $t_0 = \frac{\tau}{g}\sqrt{a(a+g)} = 2{,}45$ мин.

7. $\tau = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2(H-h)g}{v_0^2}} - 2\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}\right) = 0{,}8$ с.

8. $\alpha = \frac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \frac{5}{3}$.

9. $v_0 = \sqrt{2\left(H - h\right)\left(g - a\right)} = 6$ м/с.

10. $S = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2g(H-h)}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right] \approx 1{,}81$ м.

11. $S = 4\pi h^2 \approx 12{,}6$ м^2.

12. $t_2 = \frac{2h}{g t_1}$.

13. $\alpha = \arccos\left(\cos\beta\sqrt{1 + \frac{2g\Delta h}{v_0^2}}\right) = 45°$.

14. $v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h + 2l\,\mathrm{tg}\,\alpha}} \approx 10$ м/с.

15. $L = 2\sqrt{h(H-h)} \approx 1{,}7$ м.

16. $1{,}75$ м/с $\le v_0 \le 3{,}5$ м/с.

17. $v_2 = v_1 \dfrac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\cos\beta} \approx 52$ км/ч.

1.2. Динамика

1. $S = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \cdot \dfrac{F}{m} \cdot t_1^2 \approx 39{,}5$ м.

2. $l_0 = \dfrac{ml_1 + Ml_2}{m + M} = 12{,}5$ см.

3. $v_0 = \dfrac{va_1}{a_1 - a_2} = 100$ км/ч.

4. $\tau = \dfrac{1}{\sin\alpha} \sqrt{\dfrac{2h}{g} \cdot \dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\alpha}}$.

5. $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}(1/\mu) = 60^\circ$.

6. $F_1 = F\left(2\dfrac{g}{a}\sin\alpha - 1\right) = 90$ Н.

7. $a > \dfrac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu \operatorname{tg}\alpha} g = 10{,}6$ м/с^2.

8. $F > \mu mg\left(1 + \dfrac{m}{M}\right) \approx 6{,}1$ Н.

9. $\Delta l > \dfrac{(M + m)}{k} \cdot \mu g = 4{,}2$ мм.

10. $F = \sqrt{2}\, \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \mu) g$ при $\mu < \dfrac{m_2}{m_1}$; $F = \sqrt{2} m_2 g$ при $\mu \geq \dfrac{m_2}{m_1}$.

11. $\tau = \sqrt{\dfrac{l}{g} \cdot \dfrac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)}} = 0{,}5$ с.

12. $\Delta m = \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} \approx 16{,}7$ г.

13. $l_1 = \dfrac{(M - m)l_0 + 2ml}{M + m} = 14$ см.

14. $R = \sqrt[3]{\dfrac{gr^2T^2}{4\pi^2}}$.

15. $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho(1 - \eta/100\%)}} \approx 4{,}34 \cdot 10^4$ с ≈ 12 ч.

16. $F = m\cos\alpha\, |\, g - \omega^2 R \sin\alpha\, |$.

17. $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{2\mu g \alpha R}{\sqrt{4\alpha^2 + 1}}} = \sqrt{\dfrac{\mu g R}{\sqrt{(3/\pi)^2 + 1}}} \approx 14{,}7$ м/с.

1.3. Статика

1. $F = mg\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{\mu\operatorname{tg}\alpha + 1} = 6$ Н.

2. $l = \dfrac{2S}{1-\alpha} = 0{,}75$ м.

3. $F = f\,\dfrac{k+1}{k-1} = 70$ Н.

4. $\beta = \dfrac{m_1\alpha}{m_2 + 2\alpha(m_1 - m_2)} = \dfrac{1}{3}$.

5. $N = mg\left(1 - \dfrac{3}{4}\cos^2\alpha\right) = 187{,}5$ Н.

6. $h = \dfrac{R}{\sqrt{1 + \left(M/(2m)\right)^2}}$.

7. $F = Mg\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha + \dfrac{H}{L}\sin\alpha\right)^2}$.

8. $\Delta h = \dfrac{m}{2\rho S} = 0{,}5$ см.

9. $n = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{5}{4}$.

10. $M = V\dfrac{\rho_л\rho_в}{\rho_в - \rho_л} = 9000$ т.

11. $h = \dfrac{a(h_1 + h_2) - 2h_1h_2}{2a - (h_1 + h_2)}$.

12. $\rho = \dfrac{M\rho_0}{(M + \rho_0 Sh)} = 0{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3.

13. $m > \rho_в V - M\left(1 - \dfrac{\rho_в}{\rho}\right) = 0{,}38$ кг.

14. $p = \dfrac{p_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4\rho gL}{p_0}}\right) = 1{,}1\cdot 10^5$ Па.

15. $h \ge \dfrac{p_0}{\rho gm}(\rho V_0 - m) = 10$ м.

16. $H = h\left(1 + \dfrac{M_1 + m}{M_2}\right) = 25$ см.

17. $\rho = \dfrac{\rho_0}{n}\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 0{,}55\cdot 10^3$ кг/м^3.

1.4. Законы сохранения в механике

1. $\tau = \dfrac{L(N^2+N-2)}{2v_0} = 210$ с.

2. $v_2 = \dfrac{1}{m-m_1}\sqrt{m^2v^2 + m_1^2\left(v_1^2 - 2gh\right)} \approx 30{,}6$ м/с.

3. $\beta = \arccos\left[1 - \dfrac{m^2v^2\cos^2\alpha}{2(m+M)^2 gl}\right] \approx 60°$.

4. $v = \sqrt{gh(2-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} \approx 6{,}1$ м/с.

5. $h = H\cdot\dfrac{1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha} \approx 0{,}33$ м.

6. $Q = \dfrac{m}{2}\left(v_1 - v_2\right)\cdot\left[v_1 + v_2 - \dfrac{m}{M}\left(v_1 - v_2\right)\right] = 2820$ Дж.

7. $\tau = \dfrac{2L}{v_0}\cdot\dfrac{M^2}{m^2}$.

8. $v = \dfrac{\Delta l}{m}\sqrt{(M+m)k} = 600$ м/с.

9. $v = \dfrac{h}{l}\sqrt{2g(l-h)} \approx 1{,}33$ м/с.

10. $v = m\sqrt{\dfrac{2gR}{M(m+M)}} \approx 11{,}9$ см/с.

11. $A = M\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)\cdot\mu gS = 29{,}4$ Дж.

12. $S = 4H\sqrt{\dfrac{A}{mgH} - 1} = 12$ м.

13. $\eta = \dfrac{\Delta h}{R + h - \Delta h} = 3{,}7\cdot 10^{-3}$.

14. $v_1 = v\sqrt{\dfrac{M}{m+M}}$.

15. $A = \dfrac{5}{4}mgl \approx 1{,}2$ Дж.

16. $Q = \dfrac{1}{4}m\left(v_1^2 + v_2^2\right) = 5\cdot 10^{-3}$ Дж.

17. $Q = m_2\cdot\dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\cdot gh = 1{,}32\cdot 10^{-2}$ Дж.

18. $Q = m(v_1v_2 - u_1^2) = 11$ Дж.

19. $A = \dfrac{2v_0}{(1 + M/m)}\sqrt{\dfrac{M}{k}} = 0{,}4$ м.

20. $m = \frac{100\%}{\eta h} M\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \mu g L\right) \approx 23{,}8$ кг.

21. $E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\omega^2 l^2 = 0{,}1$ Дж.

22. $S = (1 + 2\cos\alpha)^2 S_0 = 4S_0$.

23. $p = 720$ кПа.

24. $m = \rho S h\left(1 + \frac{v}{g\tau}\right) = 50{,}5$ г.

25. $S = L\left(1 + \frac{|m - M|}{M + m}\right)$.

26. $S = \frac{2mv_0}{M + m}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{L}{v_0}\right) = 8$ см.

27. $E_1 = A\frac{k_2}{k_1 + k_2} = 0{,}4$ Дж, $E_2 = A\frac{k_1}{k_1 + k_2} = 0{,}6$ Дж.

28. $v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{5gl} = 5{,}25$ м/с.

1.5. Механические колебания и волны

1. $T = 2\pi\frac{M + m}{mv}A \approx 1{,}26$ с.

2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{h_1 h_2}{g(h_1 + h_2)}} \approx 0{,}31$ с.

3. $E = \frac{1}{2}mAa_{max} = 0{,}3$ Дж.

4. $A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{k}{M + m}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2} \approx 1{,}3$ см.

5. $k = \frac{\pi^2 m}{4T^2(1 - \alpha)} = 25$ Н/м.

6. $F = m\left(g + \frac{4\pi^2 A}{T^2}\right) \approx 11{,}8$ Н.

7. $t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{n} \approx 0{,}1$ с.

8. $l_{max} = l + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $l_{min} = l - v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

9. $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a_2(4g - a_2)} \approx 9{,}7$ м/с^2.

10. $l = 36g\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2 = 3{,}6$ м.

11. Часы на ракете уйдут вперед на $\Delta t = \tau\left(\sqrt{1+\frac{a}{g}} - 1\right) = 0{,}5$ мин.

12. $h = \frac{2la^2}{g^2 + a^2}$.

13. $S = \frac{\pi^2 am}{2k}$.

14. $v_{y\max} = \frac{1}{2}\alpha_0^2\sqrt{gl} = 1$ см/с.

15. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}} \approx 1{,}5$ с.

16. $\alpha = \frac{\alpha_0\sqrt{3}}{2}$.

17. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm qU/(md)}}$.

2. Молекулярная физика. Термодинамика

2.1. Молекулярная физика

1. $\Delta T_2 = \Delta T_1 \frac{v_3^2 - v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 183{,}3$ К.

2. $n_1 = \frac{p_0 M_2 - \rho RT}{kT(M_2 - M_1)} \approx 1{,}9 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, $n_2 = \frac{\rho RT - p_0 M_1}{kT(M_2 - M_1)} \approx 0{,}57 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

3. $T_2 = \sqrt{T_1 T_3} \approx 346$ К.

4. $\Delta m = \frac{m(t_2 - t_1)}{2(t_1 + t_2 + 546\ ^\circ\text{C})} = 0{,}3$ г.

5. $\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{p_0 VM(t_1 - t_2)}{R(t_1 + 273\ ^\circ\text{C})(t_2 + 273\ ^\circ\text{C})} = -2{,}4$ кг.

6. $\Delta T = \frac{2lT}{L - l} = 400$ К.

7. $m_0 = \frac{mp_0 T_1}{p_0 T_1 - p_\text{м} T_0} = 30$ г.

8. $\Delta h = \frac{mgh_0}{Sp_0 + mg} = 8{,}9$ см.

9. $M_2 = M_1 \frac{n(k-1)}{n-1}$.

10. $\alpha = \dfrac{(L-H_2+H_1)\cdot(L-H_1)H_2}{(L-H_1+H_2)\cdot(L-H_2)H_1} = 0{,}7.$

11. $\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right)^2 + 2} = \sqrt{2}.$

12. $n = \sqrt{m} \approx 1{,}41.$

13. $p_1 = \dfrac{p_0}{2} - \dfrac{kl}{S} + \sqrt{\dfrac{p_0^2}{4} + \left(\dfrac{kl}{S}\right)^2}\ .$

14. $t_1 = \dfrac{p_1(t + 273\ ^\circ\mathrm{C})}{p(1-\beta)} - 273\ ^\circ\mathrm{C} = 90{,}6\ ^\circ\mathrm{C}.$

15. Поршень переместится влево на $\Delta l = \dfrac{Mal}{p_0 S + Ma} = 5$ см.

16. $m \le \dfrac{4}{3}\pi r^3 \dfrac{p_0 M}{RT} \approx 249$ кг.

17. $\tau = \dfrac{p_\text{н}(f_2 - f_1)MV}{100\% \cdot \mu R(t + 273^\circ\mathrm{C})} = 15{,}5$ мин.

18. $m = \dfrac{p_\text{н} n V \tau M (f_2 - f_1)}{RT \cdot 100\%} \approx 37{,}3$ г.

19. $F \approx 640$ Н.

20. $m = \dfrac{10}{7} \cdot \dfrac{pS}{g}.$

21. $H = \dfrac{3h}{2} \cdot \dfrac{t_2 + 273^\circ\mathrm{C}}{t_1 + 273^\circ\mathrm{C}} \approx 20$ см.

22. $\tau_2 = \tau_1 \dfrac{r}{c(t_\text{к} - t)} = 60{,}8$ мин.

23. $p = p_0 \dfrac{2mcT_1 + 3p_0V_0}{2mcT_0 + 3p_0V_0} \approx 1{,}67 \cdot 10^5$ Па.

24. $m = \dfrac{W t_1 t_2}{c\Delta T\,(t_1 + t_2)} \approx 4{,}8$ кг.

25. $t_2 = \dfrac{2t_1(t_3 - t_0) + t_3(t_1 - t_0)}{t_1 + 2t_3 - 3t_0} = 56\ ^\circ\mathrm{C}.$

2.2. Термодинамика

1. $A = \dfrac{m}{2M} R(T_2 - T_1) \approx 8{,}3$ кДж.

2. $Q = \dfrac{5}{2} l\left(p_0 S + Mg\sin\alpha\right) \approx 73{,}38$ Дж.

3. $\Delta Q = \dfrac{2p_1}{V_1}(V_2^2 - V_1^2) = 1{,}2$ кДж.

4. $n = k = 2.$

5. $A = p_2V_2 + \frac{3}{2}p_1V_2 - \frac{5}{2}p_2V_1 = 18{,}8$ кДж.

6. $A = \frac{3}{2}R(m^2 - 1)T_0 = 11{,}2$ кДж.

7. $\Delta Q = (p_1 - p_2)(V_1 - V_2) = 2 \cdot 10^5$ Дж.

8. $Q = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{2}(3T_1 - 5T_2) + p_0V_0 = 11{,}1$ кДж.

9. $\Delta p = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{V} = 1{,}66 \cdot 10^3$ Па.

10. $T = \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2} = 360$ К.

11. $\beta = \sqrt{1 + \frac{2MA}{3mR(t + 273°\text{C})}} = 1{,}3.$

12. $\upsilon_3 = \sqrt{\frac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}{2}} \approx 790{,}6$ м/с.

13. $Q = \frac{1}{2}\left(5P + 3kH + 4k\Delta h\right)\Delta h = 18$ Дж.

14. $\Delta Q = 6kh^2 = 24$ Дж.

15. $\eta = \frac{2(n - 2\sqrt{n} + 1)}{5n - 2\sqrt{n} - 3} = \frac{2}{13} \approx 15{,}4\%.$

16. $\eta = \frac{A}{Q_\text{п}} = \frac{n-1}{3+5n} = \frac{1}{9} \approx 11{,}1\%.$

17. $\upsilon = \frac{nQ(T_1 - T_2)}{FT_1} = 2$ м/с.

18. $m = \frac{(t_2 + 273\,°\text{C})}{\lambda(t_1 - t_2)}A \approx 0{,}11$ г.

19. $\mu_2 = \mu_1 + \frac{M\alpha g \cdot 100\%}{\rho q \eta} \approx 8{,}13$ л/100 км.

20. $\Delta h = \frac{M}{m}H = 20$ см.

3. Электродинамика

3.1. Электрическое поле

1. $\alpha = \frac{q_2}{q_1} = \frac{7}{6}\sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}8.$

2. $E_0 = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \approx 14{,}1$ кВ/м.

3. $F' = F \cdot \dfrac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} = \dfrac{8}{9} \cdot 10^{-4}$ Н.

4. $v = \sqrt{2gh - \dfrac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 Mh}(1 - \mathrm{tg}\,\alpha)}.$

5. $l = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0 \mu mg} - l_0$ при $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} > \mu mg$; $l = 0$ при $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} \le \mu mg$.

6. $U_4 = \dfrac{C_1 C_3 U}{C_3 C_4 + (C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \approx 9{,}09$ В.

7. $U = \dfrac{U_1 S_1 + U_2 S_2}{S_1 + S_2}$.

8. $A = \dfrac{1}{4}(\varepsilon^2 - 1) C U_0^2.$

9. $v = \sqrt{2gh + \dfrac{\varepsilon_0 S U^2}{mh}} \approx 0{,}2$ м/с.

10. $Q = 2CU^2 \cdot \dfrac{k}{k+1} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

11. $Q = \dfrac{C_1^2 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)}$.

12. $U \approx \dfrac{C_0 U_0}{C} = 40$ В.

3.2. Законы постоянного тока

1. $\mathcal{E}_2 = \dfrac{\mathcal{E}_1 R_2}{R_1} = 20$ В.

2. $r = \dfrac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 (1 + R_2 / R_1) - I_1} = 4$ Ом.

3. $V_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{1 + U_2 / U_1} = 7{,}2$ В; $V_2 = \mathcal{E} - V_1 = 4{,}8$ В.

4. $R = r.$

5. $N_{01} = \dfrac{N_1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1 N_2}$; $N_{02} = \dfrac{N_1}{2} \mp \dfrac{1}{2}\sqrt{N_1^2 - 4N_1 N_2}$.

6. $N_2 = N_1 \dfrac{R_2 R_3^2}{R_1 (R_2 + R_3)^2} = 18$ Вт.

7. $\alpha_1 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}17$; $\alpha_2 = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}83.$

8. $N_{\text{л}} = \dfrac{(U_0 - U_1) U_1}{U_0^2} W \approx 434$ Вт.

9. $R = 2r\dfrac{\sqrt{N_2/N_1} - 1}{2 - \sqrt{N_2/N_1}} = 1$ Ом.

10. $N_2 = \dfrac{I_2}{I_1}\left(N_1 - I_1 r(I_2 - I_1)\right) = 16{,}8$ Вт.

11. $\mathcal{E} = \dfrac{nU}{n-1} = 3{,}5$ В.

12. $R = R_0 - \dfrac{t}{C}$.

3.3. Магнитное поле

1. $\Delta t = \sqrt{n-1}\cdot\dfrac{BR}{E}$.

2. $\alpha = 180°$ при $\upsilon_0 \le \dfrac{q}{m}BL$; $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{q}{m}\cdot\dfrac{BL}{\upsilon_0}\right)$ при $\upsilon_0 > \dfrac{q}{m}BL$.

3. $I_2 \ge \dfrac{\sin\varphi + \mu\cos\varphi}{\sin\varphi - \mu\cos\varphi}I_1$.

4. $I_2 = I_1\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = 3$ А.

5. $N = ma\dfrac{\upsilon_{\text{ос}}}{\upsilon_{\text{с}}} = 6\cdot 10^{-3}$ Н.

6. $\upsilon_{\max} = \dfrac{mg}{\mu q B}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

7. $I_{\min} = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{Bl(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)} \approx 33{,}2$ А.

8. $\upsilon_{\min} = \left[5gl + \dfrac{q^2B^2l^2}{2m^2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4m^2g}{q^2B^2l}}\right)\right]^{1/2}$.

9. $I_0 = \dfrac{m\sqrt{5gl}}{BL\tau}$.

3.4. Электромагнитная индукция

1. $N = \dfrac{\pi^2 r^4}{R}k^2\cos^2\alpha \approx 2{,}5$ Вт.

2. $\Delta t = \dfrac{IL}{\mathcal{E}} = 1$ с.

3. $\upsilon = \dfrac{mgR}{B^2l^2}$.

4. $I=\sqrt{\dfrac{mgv\sin\alpha}{R}}\approx 0{,}16$ А.

5. $Q=\left(\dfrac{\mathcal{E}-Bvl}{R+r}\right)^2 R\tau\approx 64$ Дж.

6. $a=\dfrac{F}{m+B^2l^2C}$.

7. $N=\dfrac{\omega^2B^2r^4}{4R}\approx 1{,}96$ Вт.

8. $Q=\dfrac{L\mathcal{E}^2R_1^3}{2(R+R_1)(rR+rR_1+RR_1)^2}=1{,}14$ Дж.

9. $I=\dfrac{Bl(v_1R_2+v_2R_1)}{R_1R_2+R(R_1+R_2)}$.

3.5. Электромагнитные колебания и волны

1. $Q=\dfrac{q^2}{2C}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\approx 0{,}047$ Дж.

2. $\nu_0=\dfrac{I_m}{2\pi CU_m}$.

3. $T_2=\dfrac{T_1}{2}$.

4. $U_{\max}=\mathcal{E}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{\tau^2}{LC}}\right)$.

5. $\alpha=\dfrac{C_1+C_2}{2\sqrt{C_1C_2}}=1{,}25.$

6. $I_{\max}=U_1\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{L(C_1+C_2)}}=0{,}75$ А.

7. Амплитуда тока не изменяется, амплитуда напряжения уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

8. Амплитуда напряжения не изменяется, амплитуда тока уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

3.6. Оптика

1. $\alpha=\arcsin\left(n\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=60^\circ$.

2. Окружность радиуса a с центром в точке O.

3. $H_{\max}=Rn=1{,}33$ м.

4. $n = \dfrac{1}{2\sin 15^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \approx 1{,}93.$

5. $d = \dfrac{2R}{n^2}\sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}\ .$

6. $\gamma = \alpha\dfrac{2-n}{n}\ .$

7. $\alpha > \arcsin\left(\sin\varphi\sqrt{n^2-1} - \cos\varphi\right) = 0.$

8. $\Delta n = \dfrac{\varphi}{\alpha} = 0{,}6.$

9. $\beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{a}{f}\right).$

10. $l = \sqrt{l_1 l_2} = 4$ см.

11. $d = f\sqrt{k^2-1} \approx 5{,}2$ см.

12. $f = \dfrac{abc}{(b-a)^2} = 90$ см.

13. $H = h(M+1) = 5$ мм.

14. $x = \dfrac{4F(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha - 1} \approx 51{,}3$ см.

15. $b = 2f - a.$

16. $D = \dfrac{\delta(d-f)^2}{df(df + f\delta - d\delta)} \approx 5$ дптр.

17. $r = \sqrt{\dfrac{\lambda R}{n}} \approx 2$ мм.

18. $d = 5\lambda_1\sqrt{1+\left(\dfrac{2f}{l}\right)^2} \approx 3{,}8$ мкм.

4. Основы специальной теории относительности

1. $v = v_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\ .$

2. $V = c\dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}{\sin\alpha} \approx 0{,}82c.$

3. $v = \dfrac{2v_0}{1 + v_0^2/c^2}\ .$

4. $V = u;\ \ v_x'' = \dfrac{2u}{1 + V^2/c^2}\ .$

5. $u = \dfrac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right).$

6. $L = \dfrac{mc^2}{qE}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right).$

7. $\eta = \dfrac{2}{\sqrt{1 + 3v_0^2/c^2}}.$

8. $p = \sqrt{(2m + E_k/c^2)E_k}.$

9. $v = \dfrac{c\sqrt{E_к(E_к + 2mc^2)}}{mc^2 + E_к}.$

10. $v = \dfrac{v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2} + 1}.$

5. Квантовая физика

5.1. Корпускулярно-волновой дуализм

1. $I = \dfrac{N\lambda e}{hc} = 0{,}5$ мА.

2. $n = \dfrac{\eta}{100\%}\cdot\dfrac{N\tau\lambda}{hc} \approx 7{,}1\cdot 10^{19}.$

3. $n_{\max} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 hrc}{e^2\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1 - \lambda_2) \approx 4{,}3\cdot 10^6.$

4. $\lambda_{\max} = \dfrac{hc}{hc/\lambda - eU} \approx 5{,}7$ мкм.

5. $\lambda_{\max} = \dfrac{\lambda_1\lambda_1}{\lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2}(U_1 - U_2) \approx 0{,}65$ мкм.

6. $\Delta l = \dfrac{dh(\nu_1 - \nu_2)}{eU} \approx 1$ мм.

7. $S = \dfrac{a\tau^2}{2} = \dfrac{N\tau^2}{2Mc} \approx 0{,}13$ мм.

8. $\lambda \approx 3{,}57\cdot 10^{-13}$ м.

5.2. Физика атома

1. $\nu_n = \dfrac{1}{4}\dfrac{m_e e^4}{h^3\varepsilon_0^2}\cdot\dfrac{1}{n^3}; \quad \nu_1 \approx 6{,}55\cdot 10^{15}$ Гц.

2. $\dfrac{v_1}{v_3} = 3.$

3. Две спектральные линии.
4. $E_{\min}^{(1)} / E_{\min}^{(2)} = 5{,}4.$
5. $E_{\min} / E_{\max} = 0{,}36.$
6. $E_0 = \tilde{E} + E_i / 9 = 10{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж.
7. $\dfrac{25c}{24R_{\text{H}}} < \lambda \le \dfrac{16c}{15R_{\text{H}}}$; 95 нм $< \lambda \le 97$ нм.
8. $d = \dfrac{mhcn^2k^2}{E_i(n^2 - k^2)\sin\varphi} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-6}$ м.

5.3. Физика атомного ядра

1. $\Delta\varepsilon_{\text{св}} \approx 8{,}61 \cdot 10^{-13}$ Дж/нуклон.
2. $\Delta E \approx 1{,}675 \cdot 10^{-13}$ Дж.
3. $\Delta E \approx 3{,}77 \cdot 10^{-12}$ Дж.
4. $E_{\text{C}} \approx 7 \cdot 10^{-14}$ Дж; $E_n \approx 8{,}4 \cdot 10^{-13}$ Дж.
5. $\Delta E = \dfrac{(qBR)^2(M+m)}{2Mm} \approx 5{,}2 \cdot 10^{-13}$ Дж.
6. $E \approx 3{,}2$ МДж.
7. $m = \dfrac{1}{(1 - 2^{-t/T_{1/2}})} \dfrac{m_{\text{Po}}}{m_{\text{He}}} \dfrac{pVM}{RT} \approx 53{,}6$ г.

Литература

Основная литература

1. Физика: Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений / Под ред. А.А. Пинского, В.Г. Разумовского. М.: Просвещение, 2005.

2. Физика: Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений / Под ред. А.А. Пинского, В.Г. Разумовского. М.: Просвещение, 2005.

3. Физика: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений / Под ред. А.А. Пинского, В.Г. Разумовского. М.: Просвещение, 2005.

4. *Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б., Сотский Н.Н.* Физика: Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2008.

5. *Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б., Чаругин В.М.* Физика: Учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2008.

Дополнительная литература

6. Физика: Механика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики / Под ред. Г.Я. Мякишева. М.: Дрофа, 2001.

7. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Молекулярная физика. Термодинамика. 10 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. М.: Дрофа, 2001.

8. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободсков Б.А.* Физика: Электродинамика. 10 – 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. М.: Дрофа, 2001.

9. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Колебания и волны. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. М.: Дрофа, 2001.

10. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учебник для углубленного изучения физики. М.: Дрофа, 2001.

11. *Вишнякова Е.А., Макаров В.А., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С.* Физика. Базовый курс с решениями и указаниями; (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). – М.: Издательство Московского университета, 2011.

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Вишнякова Екатерина Анатольевна, **Макаров** Владимир Анатольевич, **Черепецкая** Елена Борисовна, **Чесноков** Сергей Сергеевич

ФИЗИКА.
УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ.
ЕГЭ, ОЛИМПИАДЫ, ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ

Подписано к использованию 12.03.15. Формат 145×225 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://e-umk.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;

– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;

– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова, академик РАН ***Е.И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru