АЛГЕБРА

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Алгебра

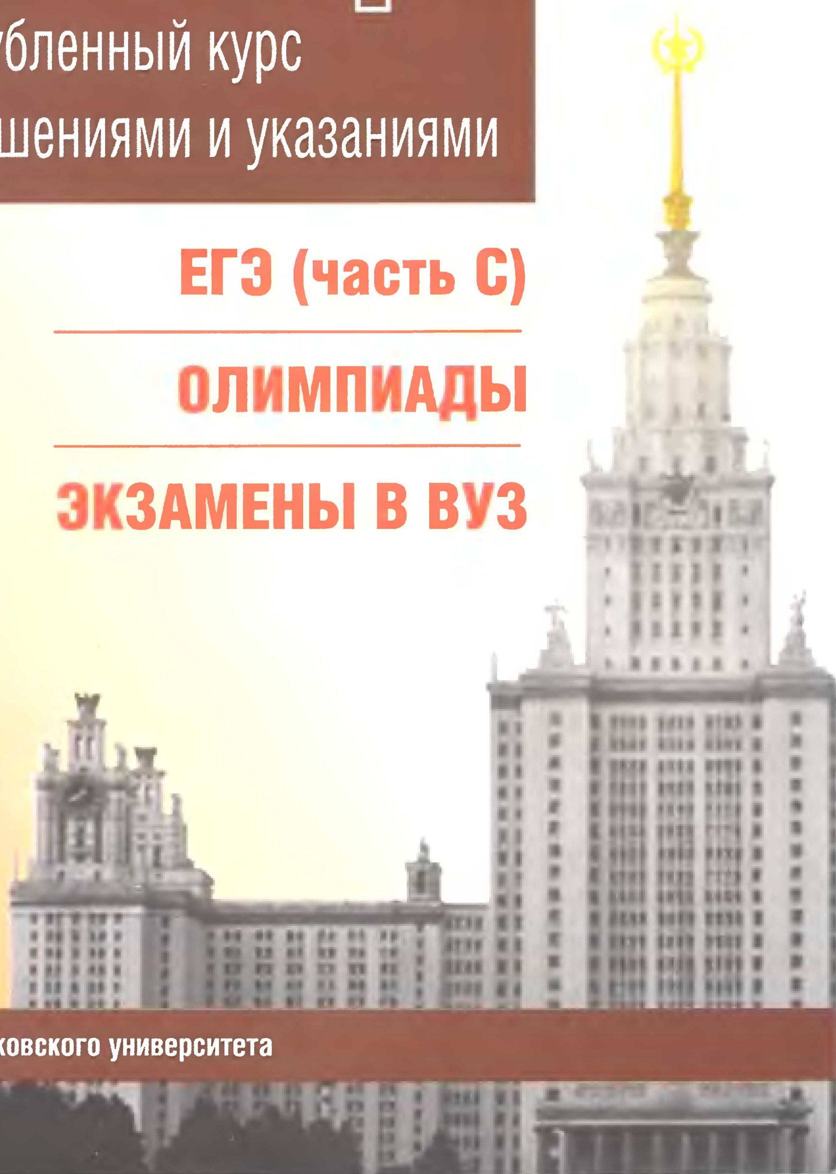
Н. Д. Золотарёва
Ю. А. Попов
В. В. Сазонов
Н. Л. Семендяева
М. В. Федотов

Углубленный курс с решениями и указаниями

ЕГЭ (часть С)

ОЛИМПИАДЫ

ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ



МГУ
Издательство Московского университета

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Алгебра

Н. Д. Золотарёва,
Ю. А. Попов,
В.В. Сазонов,
Н. Л. Семендяева,
М. В. Федотов

Углубленный курс с решениями и указаниями

ЕГЭ (часть С),

ОЛИМПИАДЫ,

ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ

Учебно-методическое пособие

Издательство Московского университета
Москва • 2011

УДК 512
ББК 22.14
А45

Под редакцией *М.В. Федотова*

Золотарёва Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Семендяева Н.Л., Федотов М.В.

А45 Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: Учебно-методическое пособие / Золотарёва Н.Д., Попов Ю.А., Сазонов В.В., Семендяева Н.Л., Федотов М.В.; Под ред. М.В. Федотова. — М.: Издательство Московского университета, 2011. — 538 с. («ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз»)

ISBN 978-5-211-05950-4

Настоящее пособие составлено на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М.В. Ломоносова и задач единого государственного экзамена преподавателями факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 512
ББК 22.14

ISBN 978-5-211-05950-4

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы или готовятся к изданию пособия по алгебре, геометрии и физике. В дальнейшем предполагается продолжить эту серию силами преподавателей информатики подготовительных курсов факультета ВМК МГУ и выпустить аналогичные пособия по информатике.

По каждому предмету должны выйти два пособия: базовый курс и курс, содержащий сложные задачи части С единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М. В. Ломоносова). Базовый курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач ЕГЭ частей А, В и некоторых задач части С, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Второе пособие содержит задачи, научившись решать которые, Вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Директор учебного центра
факультета Вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

Предисловие

Предлагаемый «Углублённый курс» является естественным продолжением «Базового курса» по алгебре и предполагает свободное владение методами и приёмами из «Базового курса».

Задачи в разделах расположены по принципу *«от простого – к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если Вам не удалось получить правильный ответ или у Вас возникли сомнения в правильности Вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

При составлении пособия авторы придерживались спиралевидного принципа подачи материала: сначала предлагаются простые задачи по всем основным разделам математики и методы их решения, затем рассматриваются более сложные задачи, для решения которых требуются более сложные методы или их комбинации. Это позволяет не только закрепить, но и осмыслить на новом уровне уже пройденный материал. Такая схема обучения с успехом применяется на очных и дистанционных подготовительных курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения.

Для задач из материалов ЕГЭ указан соответствующий уровень сложности:
A[1] – задачи базового уровня сложности;
B – задачи повышенного уровня сложности;
C – задачи высокого уровня сложности.

Запись (У) после номера задачи означает, что задача предлагалась на устном экзамене по математике в МГУ.

Для задач письменного экзамена сначала идет сокращённое название факультета, затем – год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2 – это значит, что эта задача была на весенней олимпиаде факультета; на мехмате и физфаке весной проходили две олимпиады; на ВМК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения – одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМК-98.3) означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМК, третьим номером в варианте, а (М/м-97(2).1) означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико-математического факультета первым номером в варианте.

[1]До 2009 года включительно задания части A представляли собой задания базового уровня сложности с выбором одного правильного ответа из четырёх предложенных. Начиная с 2010 года, части A и B объединены и представляют собой задания с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге

М/м – механико-математический факультет,
ВМК – факультет Вычислительной математики и кибернетики (.Б – отделение Бакалавров по прикладной математики, .И – отделение Бакалавров по Информационным технологиям),
Физ – физический факультет,
Хим – химический факультет,
ВКНМ – Высший колледж наук о материалах,
ФНМ – факультет наук о материалах (до 2000 года – ВКНМ)
Биол – биологический факультет,
Почв – факультет почвоведения,
Геол – геологический факультет (.ОГ – отделение общей геологии),
Геогр – географический факультет,
Экон – экономический факультет (.М – отделение менеджмента, .К – отделение экономической кибернетики, .В – вечернее отделение),
ВШБ – Высшая школа бизнеса,
Псих – факультет психологии,
Фил – философский факультет,
Филол – филологический факультет,
Соц – социологический факультет,
ИСАА – Институт стран Азии и Африки,
ФГУ – факультет государственного управления (отделение «Антикризисное управление»),
ЧФ – Черноморский филиал МГУ (г.Севастополь).

Используемые обозначения

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ – объединение; $\cap$ – пересечение; $\emptyset$ – пустое множество;
$\in$ – знак принадлежности; $\subset$ – знак включения подмножества;
$\forall$ – для любого; $A\backslash B$ – разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ – следовательно; $\Longleftrightarrow$ – тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел;
ОДЗ – область допустимых значений;

$\left\{\begin{array}{l}\ldots\\ \ldots\end{array}\right.$ – знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;

$\left[\begin{array}{l}\ldots\\ \ldots\end{array}\right.$ – знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I: Теория и задачи

1. Элементы теории чисел

1.1. Целые числа. Делимость и остатки

Теоретический материал

При решении задач на целые числа необходимо знать следующие факты:

- любое натуральное число единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей) может быть представлено в виде произведения простых чисел;

- при делении натурального числа p на натуральное число q возможны[2] q различных остатков: $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$.

Полезно также помнить признаки делимости натуральных чисел:

- при делении на 5 и на 10 число даёт такой же остаток, как и последняя его цифра;

- при делении на 4, 25, 50 и на 100 число даёт такой же остаток, как и число, записанное двумя его последними цифрами;

- при делении на 3 и на 9 число даёт такой же остаток, как и сумма его цифр. Поэтому, если сумма цифр делится на 3 или на 9, то и само число делится на 3 или на 9.

Заметим, что при изучении делимости чисел достаточно работать не с самими числами, а с остатками от деления этих чисел. Все арифметические действия с остатками, кроме деления, повторяют действия с числами, а именно: при сложении чисел складываются остатки, при возведении в степень в эту степень возводятся остатки и т.д.

В задачах, где требуется установить, что какое-то выражение, зависящее от натурального числа n, делится или не делится при всех n на заданное натуральное число, часто используется следующий факт: произведение k последовательных натуральных чисел делится на k.

---

[2] Иногда бывает удобно рассматривать отрицательные остатки. Например, в качестве остатка при делении числа 15 на 8 можно использовать 7, а можно (-1).

Примеры решения задач

Пример 1. Остатки от деления на 3 чисел m и n равны 1 и 2 соответственно. Каковы остатки от деления на 3:
а) суммы $m+n$;
б) произведения $m \cdot n$?

Решение. Так как $m = 3k+1$, а $n = 3l+2$, то

$$m+n = 3k+3l+3 = 3 \cdot (k+l+1).$$

Следовательно, $m+n$ делится на 3 нацело. Рассмотрим теперь произведение

$$mn = (3k+1)\cdot(3l+2) = 9kl+3l+6k+2 = 3(3kl+l+2l)+2,$$

то есть при делении на 3 произведения mn остаток равен 2.

Ответ. а) 0, б) 2.

Пример 2. Доказать, что для всех натуральных n выражение (n^3+3n^2+2n) делится на 6.

Решение. Так как $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$ – есть произведение трёх последовательных чисел, которое всегда делится и на 2, и на 3, то n^3+3n^2+2n делится на 6.

Пример 3. Дано число 2^{1995}. Найти
а) последнюю цифру этого числа,
б) остаток от деления на 7.

Решение. а) Представим исходное число в виде

$$2^{1995} = 2^{4\cdot 498+3} = 16^{498}\cdot 8.$$

Поскольку 16 в любой натуральной степени оканчивается на 6, а $6\cdot 8 = 48$, последняя цифра числа 2^{1995} равна 8.

б) Рассмотрим остатки степеней двойки от деления на 7:

- 2^1 при делении на 7 даёт остаток 2,
- 2^2 при делении на 7 даёт остаток 4,
- 2^3 при делении на 7 даёт остаток 1.

Эти остатки повторяются с периодом $T = 3$. Так как $1995 = 3\cdot 665$, то 2^{1995} при делении на 7 даёт остаток 1.

Ответ. а) 8, б) 1.

Задачи

1. Доказать, что число $n^5 - n$ делится на 30.
2. Доказать, что число $n^3 - 7n$ делится на 6.
3. Доказать, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каких целых n.
4. Сумма $m^2 + n^2$ делится на 3. Доказать, что она делится на 9.
5. Доказать, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 24.
6. Доказать, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при нечётном n.
7. При каких натуральных n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 120?
8. Доказать, что сумма кубов трех последовательных чисел делится на 9.
9. Цифры трёхзначного числа переписаны в обратном порядке. Доказать, что разность между исходным и полученным числом делится на 9.
10. Докажите, что $43^{43} - 17^{17}$ делится на 10.
11. Делится ли на 7 число $1991^{1917} + 1917^{1991}$?
12. Доказать, что для всех натуральных n выражение $\left(8^{2n-1} - 1\right)$ делится на 7.
13. Доказать, что $5^n - 3^n + 2n$ делится на 4.
14. Найти все натуральные n, при которых число $n \cdot 2^n + 1$ делится на 3.
15. Доказать, что число $\underbrace{11\ldots1}_{81}$ делится на 81.
16. Доказать признак делимости на 11: "число n кратно 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр с чередующимися знаками кратна 11".
17. При каких n число $M = \underbrace{1717\ldots17}_{2n \text{ цифр}}$ делится на 33?

1.2. Уравнения в целых числах

Теоретический материал и примеры решения задач

Приведём основные приёмы решения уравнений в целых числах.

- Разложение на множители с последующим перебором возможных вариантов.

  Пример 1. Решить в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.

  Решение. $2xy = x^2 + 2y \iff y^2 - 2y = (x-y)^2 \iff$

  $$\iff (y-1)^2 - (x-y)^2 = 1 \iff (2y - x - 1)(x - 1) = 1.$$

  Следовательно, оба множителя равны единице и $x = 2$, $y = 2$.

  Ответ. $(2;2)$.

Пример 2. Решить в целых числах уравнение $2^x + 1 = y^2$.

Решение. Если $x < 0$, то $0 < 2^x < 1$ и $y^2 \notin \mathbb{Z}$. При $x = 0$ также $y \notin \mathbb{Z}$.
Пусть $x > 0$, тогда $2^x = (|y| - 1)(|y| + 1)$, следовательно, $|y| - 1 = 2^p$, $|y| + 1 = 2^q$ и $0 \le p < q$. Откуда $2^q - 2^p = 2 \iff 2^p(2^{q-p} - 1) = 2$. Возможные варианты:

а) $\begin{cases} 2^p = 2, \\ 2^{q-p} - 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1, \\ q - p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p = 1, \\ q = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 3, \\ x = 3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^p = 1, \\ 2^{q-p} - 1 = 2 \end{cases} \iff \emptyset.$

Ответ. $(3;3)$, $(3;-3)$.

- Использование делимости целых чисел.

Пример 3. Доказать, что уравнение $y^2 = 5x^2 + 6$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y^2 - x^2 = 4x^2 + 6 \iff (y - x)(y + x) = 4x^2 + 6.$$

Так как правая часть уравнения является чётным числом, то и левая часть также должна быть чётным числом. Если $(y + x)$ чётно, то $(y - x)$ тоже чётно, и наоборот. Следовательно, левая часть уравнения делится на 4, но правая часть на 4 не делится. Значит уравнение не имеет решений.

- Использование оценок с последующим перебором возможных значений.

Пример 4. Решить в натуральных числах уравнение $2xy + 4z = zx^2 + 4y^2z$.

Решение. Вынесем z за скобки:

$$z(x^2 + 4y^2 - 4) = 2xy.$$

Выражение в скобках не равно нулю, так как иначе $2xy = 0$, что неверно при $x, y \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$z = \frac{2xy}{x^2 + 4y^2 - 4}.$$

Так как $z \in \mathbb{N}$, то $z \ge 1$, то есть

$$\frac{2xy}{x^2 + 4y^2 - 4} \ge 1 \iff x^2 + 4y^2 - 4 - 2xy \le 1 \iff (x - y)^2 + 3y^2 \le 4.$$

Откуда видно, что y не может быть больше 1, а при $y = 1$ получаем

$$(x - 1)^2 \le 1.$$

Следовательно, $x = 1$ либо $x = 2$.

Ответ. $(1;1;2)$, $(2;1;1)$.

- Рассмотрение остатков.

Пример 5. Решить в целых числах уравнение $11x + 7y = 3$.

Решение. Выразив y через x, получим $y = \dfrac{3 - 11x}{7}$. Представим x в виде

$$x = 7k + r, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r = 0, 1, ..., 6.$$

Тогда $y = -11k + \dfrac{3 - 11r}{7}$. Для того, чтобы y было целым надо, чтобы $(3 - 11r)$ делилось на 7. В результате перебора всех значений $r = 0, 1, ..., 6$ оказывается, что подходит только $r = 6$. Следовательно, $x = 7k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = -11k - 9$.

Ответ. $(7k + 6; -11k - 9)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. Решить в целых числах уравнение $xy + 1 = x + y$.
2. Решить в целых числах уравнение $x(x + 1) = y^2$.
3. Решить в целых числах уравнение $2x^2 + xy - y^2 - 7x - 4y = 1$.
4. Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 1982$ не имеет решений в целых числах.
5. Доказать, что уравнение $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ не имеет решений в целых числах.
6. Доказать, что уравнение $x^2 = 3y^2 + 17$ не имеет решений в целых числах.
7. Решить в целых числах уравнение $3^y = 1 + x^2$.
8. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x - \dfrac{1}{5}} + \sqrt{y - \dfrac{1}{5}} = \sqrt{5}$.
9. Решить в целых числах уравнение $3(x - 3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$.
10. Решить в целых числах уравнение $x^2 - 4xy = 4y^2$.
11. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.
12. Решить в натуральных числах уравнение $xz + 4y = yx^2 + z^2y$.
13. Решить в натуральных числах уравнение $2^x - 3^y = 1$.
14. Решить в целых числах уравнение $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.
15. Решить в натуральных числах уравнение $3^x - 2^y = 1$.
16. Решить в натуральных числах уравнение $x + y + z = xyz$.
17. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

1.3. Смешанные задачи на целые числа

Теоретический материал

При решении смешанных задач пригодятся методы и приёмы решения задач на целые числа, приведённые в предыдущих разделах, а именно: разложение на множители с последующим перебором возможных вариантов, использование делимости целых чисел, рассмотрение остатков, использование оценок с последующим перебором возможных значений.

Также в этот раздел включены задачи, связанные с исследованием сократимости дробей вида $a(n)/b(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Существует несколько способов решения таких задач.

- Предполагается сократимость дроби на натуральное q, $q \neq 1$. Этот факт переписывается в виде двух равенств для числителя и знаменателя. Затем исключается исходная переменная n и получается равенство для q, из которого находятся возможные значения q.

- Заданная дробь $\dfrac{a(n)}{b(n)}$ представляется в виде
$$\frac{a(n)}{b(n)} = c(n) + \frac{d(n)}{b(n)},$$
где выражения $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ принимают целочисленные значения. Поскольку натуральное число k является общим делителем выражений $a(n)$ и $b(n)$ тогда и только тогда, когда оно является общим делителем выражений $d(n)$ и $b(n)$, вопрос о сократимости исходной дроби сводится к исследованию сократимости дроби $d(n)/b(n)$. В случаях, когда указанное представление исходной дроби является выделением целой части или когда $d(n)$ не зависит от n (то есть является целым числом), исследование сократимости новой дроби $d(n)/b(n)$ является, как правило, менее трудоёмким, чем исследование сократимости исходной дроби $a(n)/b(n)$.

Напомним также, что если числа a и b представлены в виде произведения простых множителей
$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{n_l}, \qquad b = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{m_l},$$
то наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общие кратное (НОК) этих чисел вычисляются следующим образом:
$$\text{НОД}(a,b) = p_1^{min(n_1,m_1)} \cdot p_2^{min(n_2,m_2)} \cdot \ldots \cdot p_l^{min(n_l,m_l)},$$
$$\text{НОК}(a,b) = p_1^{max(n_1,m_1)} \cdot p_2^{max(n_2,m_2)} \cdot \ldots \cdot p_l^{max(n_l,m_l)}.$$

З а м е ч а н и е. $\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = a \cdot b$.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. При каких $n \in \mathbb{Z}$ выражение $\dfrac{3n+2}{n-1}$ является целым числом?

Решение. Так как $\dfrac{3n+2}{n-1} = \dfrac{3n-3+5}{n-1} = 3 + \dfrac{5}{n-1}$, то исходное число будет целым только, если целым будет число $\dfrac{5}{n-1}$, что возможно при $n-1 \in \{\pm 5, \pm 1\}$.

Ответ. $n = -4$; 0; 2; 6.

Пример 2. Доказать, что дробь $\dfrac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократима ни при каком n.

Решение. Преобразуем исходную дробь

$$\frac{n^2-n+1}{n^2+1} = 1 - \frac{n}{n^2+1}.$$

Если сократима дробь $\dfrac{n^2-n+1}{n^2+1}$, то сократима дробь $\dfrac{n}{n^2+1}$. Если сократима дробь $\dfrac{n}{n^2+1}$, то сократима дробь $\dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n}$ и сократима дробь $\dfrac{1}{n}$, что неверно. Следовательно, исходная дробь несократима.

Пример 3. При каких натуральных n число n^4+4 простое?

Решение. Так как

$$n^4+4 = n^4+4n^2+4-4n^2 = (n^2+2)^2-4n^2 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2),$$

то n^4+4 – простое число, только если $n^2+2n+2=1$ или $n^2-2n+2=1$. Первое уравнение решений в натуральных числах не имеет. Решением второго уравнения является $n=1$, в этом случае выражение n^4+4 равно 5, то есть является простым числом.

Ответ. $n=1$.

Пример 4. Является ли полным квадратом число $M = \underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ цифр}}$?

Решение. Так как $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ цифр}} = \dfrac{10^n-1}{9}$, то

$$M = \frac{10^{2n}-1}{9} - 2\cdot\frac{10^n-1}{9} = \frac{10^{2n}-2\cdot 10^n+1}{9} = \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2.$$

Так как 10^n-1 делится нацело на 3, то исходное число является полным квадратом.

Ответ. Да.

Задачи

1. Определить p, если p, $p+10$, $p+14$ – простые числа.

2. Числа p и q – простые, $p, q > 3$. Доказать, что $p^2 - q^2$ делится на 24.

3. При каких целых q существует целое решение уравнения $x^3 + 2qx + 1 = 0$?

4. Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.

5. Доказать, что число $n^4 + 64$ составное при любом $n \in \mathbb{N}$.

6. Доказать, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ является точным квадратом при любом натуральном n.

7. Покажите, что всякое нечётное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

8. Доказать, что $2^{3^{1995}} + 3^{1995^3}$ – составное число.

9. Доказать, что если число n не является степенью двойки, то число $k^n + l^n$ – составное (n, k, l – натуральные числа; $n, k, l > 1$).

10. Известно, что a, b, c – целые числа, и $a + b = c$. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа.

11. Пусть p и q – два последовательных простых числа. Может ли их сумма быть простым числом?

12. Сумма $k^2 + m^2 + n^2$ делится на 4. Доказать, что числа k, m, n – чётные.

13. Найти все целые n, при которых дробь $\dfrac{22n+3}{26n+4}$ сократима.

14. Доказать, что дробь $\dfrac{2n^2-1}{n+1}$ несократима ни при каком n.

15. При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}$?

16. Доказать, что число, состоящее из n ($n > 1$) одинаковых цифр, не является точным квадратом.

17. Могут ли числа 11, 12, 13 быть членами, не обязательно последовательными, одной геометрической прогрессии?

18. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}} = y$ (всего 1992 корня).

1.4. Рациональные и иррациональные числа

Теоретический материал

Рациональным числом называется действительное число, представимое в виде несократимой дроби p/q, где p – целое число, q – натуральное число.

Иррациональным числом называется действительное число, непредставимое в виде несократимой дроби p/q.

Замечание 1. Любое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби, а любое иррациональное число — в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Замечание 2. Сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел всегда является рациональным числом. Сумма, разность, произведение и частное двух иррациональных чисел может оказаться как рациональным, так и иррациональным числом.

Доказательство иррациональности числа, как правило, проводится от противного. Предполагается, что заданное число можно представить в виде несократимой дроби, после чего полученное равенство с помощью алгебраических преобразований приводится к уравнению в целых числах, не имеющему решений.

Утверждение 1. Если числа $x, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, а $y = \sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, то y – иррационально.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $y = \sqrt[n]{x} = \dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, тогда $\dfrac{p^n}{q^n} = x$. Пусть q_1 – делитель числа q и q_1 – простое число. Так как p^n делится на q^n, то p делится на q_1. Следовательно, дробь $\dfrac{p}{q}$ сократима на q_1, а это противоречит нашему предположению. Значит, y – иррационально.

Утверждение 2. Если $k, n \in \mathbb{N}$ взаимно простые числа и $k, n \neq 1$, то $\log_k n$ – число иррациональное.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\log_k n = \dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, тогда $k^{p/q} = n \iff k^p = n^q$, что невозможно, так как у k и n нет общих делителей.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать иррациональность числа $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Решение. Пусть $\sqrt{5} - \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$. Тогда $r^2 = 8 - 2\sqrt{15}$ и, следовательно, $\sqrt{15} = \dfrac{8 - r^2}{2} \in \mathbb{Q}$. Но $\sqrt{15}$ иррационально согласно утверждению 1. Значит наше предположение о том, что $\sqrt{5} - \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$ – неверно.

Пример 2. Доказать, что число $\sin 10^\circ$ иррационально.

Решение. Из формулы синуса тройного угла получим

$$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ \iff \sin 10^\circ = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\sin^3 10^\circ.$$

Предположим, что $\sin 10^\circ$ – рациональное число, то есть $\sin 10^\circ = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь. Тогда

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\cdot\frac{p^3}{q^3} \iff 6pq^2 = q^3 + 8p^3.$$

Из последнего равенства следует, что q – чётное, то есть $q = 2n$. Тогда

$$3pn^2 = n^3 + p^3 \iff n^2(3p - n) = p^3.$$

Следовательно, $p^3 \vdots n^2$, а так как дробь $\frac{p}{q} = \frac{p}{2n}$ несократима, то $n = 1$. Поскольку полученное в этом случае уравнение для p

$$3p - 1 = p^3 \iff p(3 - p^2) = 1$$

решений в целых числах не имеет, число $\sin 10^\circ$ нельзя представить в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$ и, значит, оно является иррациональным.

Пример 3. Доказать, что число $0,1010010001\ldots$ является иррациональным.

Решение. Пусть оно рациональное. Тогда в его десятичной записи есть период из k цифр. Но в записи числа сколь угодно далеко от начала встречаются k нулей подряд. Следовательно, в периоде содержатся одни нули, а это противоречит условию.

Задачи

1. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ иррационально.
2. Доказать, что число $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ иррационально.
3. Является ли рациональным число $\sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}} + \sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$?
4. Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найти p и q, если известно, что они рациональные.
5. Является ли рациональным число $\sin 25^\circ$?
6. Определить первые 4 знака после запятой у числа $\sqrt[7]{0,9999}$.
7. Решить в рациональных числах уравнение $2^x = 3^y$.

8. Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?

9. Доказать, что число $0{,}123456789101112\ldots$ (после запятой выписаны все натуральные числа подряд) является иррациональным.

10. Доказать, что между любыми двумя различными иррациональными числами есть рациональное число.

11. Доказать, что $\cos 2^\circ$ иррациональное число.

12. Доказать, что $\cos 1^\circ$ и $\sin 1^\circ$ есть иррациональные числа.

13. Определить первый знак после запятой у числа $\sin 80^\circ$.

14. Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что $\left|\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} - a\right| < 1$.

15. Доказать, что уравнение $x^3 + x^2y + y^3 = 0$ не имеет ненулевых рациональных решений.

1.5. Сравнение чисел

Теоретический материал

При решении задач этого раздела будут полезными следующие приёмы.

- В случае сравнения однотипных числовых выражений следует алгебраическими преобразованиями привести исходную задачу к сравнению двух целых чисел.

- При сравнении разнотипных числовых выражений a и b подбирают такое число c, которое сравнимо и с a, и с b. Например, для обоснования неравенства $a > b$ находят число c такое, что $a >$ с и с $> b$.

- Иногда бывает удобно ввести некоторую вспомогательную функцию $f(x)$ и заменить исходную задачу сравнения на сравнение значений функции $f(x)$ при заданных значениях аргумента.

Также могут оказаться полезными следующие неравенства:

- $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geq 2$, где $a \neq 0$ (оценка суммы двух взаимно обратных величин), равенство достигается при $a = \pm 1$;

- $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, где $x, y \geq 0$, равенство достигается при $x = y$ (среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического);

- $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

- $(1+x)^n \geq 1 + nx$, где $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$ (неравенство Бернулли).

При сравнении логарифмов может быть полезным следующее утверждение.

Утверждение 1. $\log_n(n+1)$ при $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ убывает с ростом n.

Доказательство. Представим $\log_n(n+1)$ в виде

$$\log_n(n+1) = \log_n\left(\frac{n+1}{n}\cdot n\right) = \log_n\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1 = \log_n\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1.$$

Для строгого доказательства убывания первого слагаемого достаточно записать его в виде дроби

$$\log_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lg n},$$

где числитель убывает, а знаменатель возрастает. Таким образом, первое слагаемое убывает, а, следовательно, убывает и сумма. Что и требовалось доказать.

Примеры решения задач

Пример 1. Что больше: $\log_4 5$ или $\log_{1/2} 1/3$?

Решение. $\log_{1/2} 1/3 = \log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5$.

Ответ. $\log_4 5 < \log_{1/2} 1/3$.

Пример 2. Сравнить числа $\sqrt[200]{2}$ и $1,006$.

Решение. Составим формальное неравенство и возведём обе его части в степень 200:

$$2 \vee 1,006^{200}.$$

Оценим правую часть с помощью неравенства Бернулли:

$$(1+0,006)^{200} \geq 1 + 200\cdot 0,006 = 2,2.$$

То есть $1,006^{200} \geq 2,2 > 2$ и, следовательно, $\sqrt[200]{2} < 1,006$.

Ответ. $\sqrt[200]{2} < 1,006$.

Пример 3. Что больше: $\sin\cos 1^\circ$ или $\cos\sin 1^\circ$?

Решение. Покажем, что $\sin\cos 1^\circ < \cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$.

1) Неравенство $\sin\cos 1^\circ < \cos 1^\circ$ следует из того, что в первой четверти $\sin x < x$.

2) Неравенство $\cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$ выполняется потому, что $1^\circ > \sin 1^\circ$, а в первой четверти $\cos x$ убывает.

Ответ. $\sin\cos 1^\circ < \cos\sin 1^\circ$.

Замечание. Неравенство $\sin\cos x < \cos\sin x$ справедливо при всех x.

Пример 4. Сравнить числа $\log_2 5$ и $\sqrt{5}$.

Решение. Оба числа (проверьте самостоятельно) лежат на отрезке $[2;3]$. Сравним их с серединой отрезка, то есть с $\frac{5}{2}$:

$$\log_2 5 \vee \frac{5}{2} \iff 2\log_2 5 \vee 5 \iff \log_2 25 < \log_2 32;$$

$$\sqrt{5} \vee \frac{5}{2} \iff 2 \vee \sqrt{5} \iff 4 < 5.$$

Следовательно, числа $\log_2 5$ и $\sqrt{5}$ лежат на отрезке $\left[2\,;\,\frac{5}{2}\right]$. Сравним их с серединой этого отрезка, то есть с $\frac{9}{4}$:

$$\log_2 5 \vee \frac{9}{4} \iff 4\log_2 5 \vee 9 \iff \log_2 625 > \log_2 512;$$

$$\sqrt{5} \vee \frac{9}{4} \iff 4\sqrt{5} \vee 9 \iff 80 < 81.$$

Следовательно, $\log_2 5 > \frac{9}{4} > \sqrt{5}$.

Ответ. $\log_2 5 > \sqrt{5}$.

Пример 5. Доказать, что $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 2\sqrt[3]{3}$.

Решение. Возведём обе части неравенства в куб:

$$2 + 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{32} + 4 < 24 \iff 3(2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}) < 18 \iff \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 3.$$

Обозначим $f(t) = t^2 + t - 3$, $t_0 = \sqrt[3]{2}$ и покажем, что $f(t_0) < 0$.

Неравенство $f(t) < 0$ справедливо при $t \in \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$. Докажем, что $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \le \sqrt[3]{2} \le \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Поскольку $\sqrt[3]{2} > 0$, левое неравенства очевидно. Правое неравенство равносильно неравенству $2\sqrt[3]{2} \le \sqrt{13} - 1$. Возведём обе части в куб:

$$16 \le 13\sqrt{13} - 3\cdot 13 + 3\sqrt{13} - 1 \iff 56 \le 16\sqrt{13} \iff 7 \le 2\sqrt{13},$$

так как после возведения в квадрат получим очевидное неравенство $49 \le 52$. Следовательно, исходное неравенство также справедливо.

Задачи

1. Сравнить числа: $10^{\log_9 3}$ и $7^{\log_4 2}$.

2. Что больше: $\log_4 7$ или $\log_{1/3} 2$?

3. Что больше: $\log_{11} 12$ или $\log_{12} 13$?

4. Сравнить числа: $\log_2 \pi + \log_\pi 2$ и 2.

5. Что больше: $\log_2 5$ или $\log_3 5$?

6. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

7. Сравнить числа: $\log_{11} 119$ и $\log_{15} 227$.

8. Сравнить числа: $4^{\sqrt{\log_4 5}}$ и $5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

9. Выяснить, что больше: 3^{40} или 4^{30}.

10. Что больше: $\sqrt[9]{9!}$ или $\sqrt[8]{8!}$?

11. Определить знак числа $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5$.

12. Какое из чисел больше: $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1$ или $\dfrac{1}{2}$?

13. Какой знак имеет число $\lg(\operatorname{arctg} 2)$?

14. Что больше: $\dfrac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}$?

15. Что больше: $\sin 3$ или $\sin 3^\circ$?

16. Расположить в порядке возрастания числа: $\sqrt{\dfrac{2}{7}}$, $\sin\dfrac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$.

17. Сравнить логарифмы: $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

18. Сравнить числа: $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

19. Что больше: $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

20. Сравнить числа: $\sin 31^\circ$ и $\operatorname{tg} 30^\circ$.

21. Сравнить числа: $\operatorname{tg} 55^\circ$ и $1,4$.

22. Выяснить, что больше $10^{\sqrt{11}}$ или $11^{\sqrt{10}}$.

23. Что больше: $\sqrt[3]{40} + 1$ или $\sqrt[3]{88}$?

24. Сравнить числа: $\log_2 14$ и $\sqrt{15}$.

25. Сравнить числа: $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

26. Сравнить два числа: $\dfrac{\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \ldots \cdot \log_3 80}{2\log_3 5 \cdot \log_3 7 \cdot \ldots \cdot \log_3 79}$ и 1.

2. Тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции

2.1. Основные свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с преобразованием выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. Для решения таких задач достаточно знать определения обратных тригонометрических функций и помнить основные тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2} \cdot \cos\frac{x \mp y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

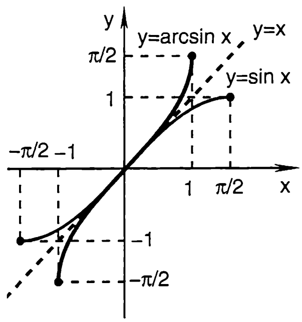
Не забывайте, что тригонометрические формулы справедливы лишь при соответствующих допустимых значениях аргументов.

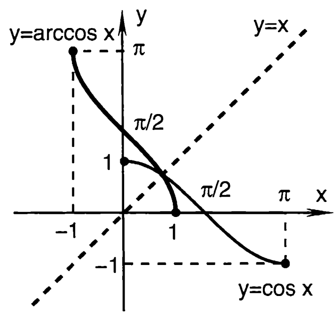
Напомним определения обратных тригонометрических функций:

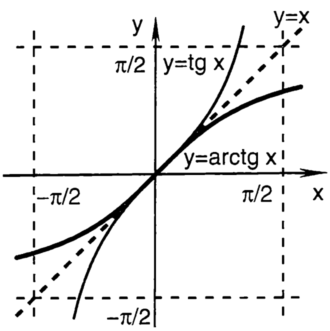
- *арксинусом* числа $x \in [-1; 1]$ называется число $y = \arcsin x$, удовлетворяющее двум условиям: $\sin y = x$ и $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

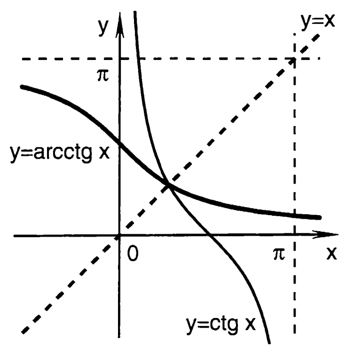
- *арккосинусом* числа $x \in [-1;1]$ называется число $y = \arccos x$, удовлетворяющее двум условиям: $\cos y = x$ и $y \in [0;\pi]$;
- *арктангенсом* числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $y = \operatorname{arctg} x$, удовлетворяющее двум условиям: $\operatorname{tg} y = x$ и $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;
- *арккотангенсом* числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $y = \operatorname{arcctg} x$, удовлетворяющее двум условиям: $\operatorname{ctg} y = x$ и $y \in (0;\pi)$.

График обратной тригонометрической функции симметричен графику основной тригонометрической функции относительно прямой $y = x$ на соответствующей области определения:









Полезно также знать следующие формулы, связанные с обратными тригонометрическими функциями:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \le 1;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \le 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad |x| \le 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad |x| \le 1, \quad x \ne 0.$$

Подобные формулы получаются при комбинировании определений обратных тригонометрических функций и основных тригонометрических формул.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажем формулу: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \le 1.$

Доказательство. Перепишем исходное равенство в виде

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

и докажем его, используя определение арксинуса. Проверим выполнение двух условий:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = x;$

2) $\frac{\pi}{2} - \arccos x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

С помощью формулы приведения получаем, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos\left(\arccos x\right) = x,$$

следовательно, первое условие выполняется. Проверим выполнение второго условия:

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi \le -\arccos x \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le \arccos x \le \pi.$$

Справедливость последнего неравенства следует из определения арккосинуса.

Пример 2. Вычислить $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. Положим $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, тогда $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ и $0 \le \alpha \le \pi$. Из основного тригонометрического тождества следует, что

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Так как $\alpha \in [0; \pi]$, то подходит только положительное значение синуса.

Замечание. Аналогичным образом доказываются и другие формулы этого раздела в общем случае.

Ответ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Пример 3. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение. Так как 2π является периодом функции $y = \sin x$, то 2π будет периодом и для функции $y = \arcsin(\sin x)$. Поэтому нам достаточно построить график этой функции на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, а потом продолжить его на всю числовую ось с учётом периодичности.

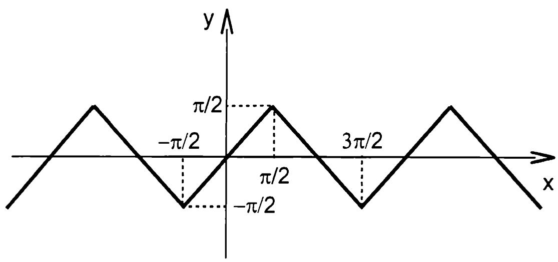
1) Рассмотрим отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ y = \arcsin(\sin x); \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \sin y = \sin x, \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \iff y = x.$$

2) На отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ получим

$$\begin{cases} x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right], \\ y = \arcsin(\sin x); \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right], \\ \sin y = \sin x, \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \iff y = \pi - x.$$

3) Продолжим график с учётом периодичности на всю числовую прямую.



Замечание. Аналогичным образом строятся графики функций $y = \arccos(\cos x)$ $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

Задачи

1. Доказать, что $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

2. Доказать, что $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

3. (ЕГЭ.В) Вычислить $5 \arcsin\left(\cos \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. (ЕГЭ.В) Вычислить $\dfrac{8}{\pi} \operatorname{arcctg}(\cos \pi)$.

5. (У) Вычислить $\arcsin\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)$.

6. (У) Вычислить $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

7. (У) Вычислить $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$.

8. (У) Вычислить $\sin(2\operatorname{arctg}6)$.

9. (ЕГЭ.В) Найти значение выражения $5\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{7}\right)\right)$.

10. (ЕГЭ.В) Найти значение выражения $\operatorname{tg}^2\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

11. (ЕГЭ.В) Найти значение выражения $\dfrac{4}{3}\operatorname{tg}\left(\pi-\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$.

12. (У) Вычислить $\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)+\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

13. (У) Вычислить $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

14. (У) Вычислить $\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right)$.

15. (У) Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{4}{7}\right)\right)$.

16. (У) Вычислить $\arccos(\cos 10)$.

17. (У) Вычислить $\arcsin(\sin 14)$.

18. (У) Доказать, что $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}+\operatorname{arctg}\dfrac{7}{23}=\dfrac{\pi}{4}$.

19. (МГУ-53) Упростить выражение $\cos\left(2\arccos\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}\right)$.

20. (МГУ-53) Упростить выражение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{b}\right)$.

2.2. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Для успешного решения уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями достаточно знать определения и свойства обратных тригонометрических функций.

Напомним, что функции $y=\arcsin x$ и $y=\operatorname{arctg}x$ монотонно возрастают на своих областях определения и принимают значения из промежутков $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

и $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ соответственно, а функции $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывают на своих областях определения и принимают значения из промежутков $[0; \pi]$ и $(0; \pi)$ соответственно.

Общий метод решения задач с обратными тригонометрическими функциями состоит в применении одной и той же тригонометрической функции к обеим частям данного уравнения или неравенства. При этом для обеспечения равносильности переходов необходимо тщательно следить за областью значений левой и правой частей исходного уравнения (неравенства), при необходимости рассматривая задачу на нескольких промежутках.

Примеры решения задач

Пример 1. Решить неравенство $\arcsin x < \arccos x$.

Решение. Применив формулу $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, получим

$$\arcsin x < \frac{\pi}{2} - \arcsin x \iff \arcsin x < \frac{\pi}{4},$$

откуда в силу монотонности арксинуса следует, что $-1 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $\left[-1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Пример 2. Решить уравнение $2\arcsin x + \arccos(1 - x) = 0$.

Решение. *Первый способ.* Перепишем уравнение в виде

$$\arccos(1 - x) = -2\arcsin x.$$

Согласно определению арккосинуса это равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \cos(-2\arcsin x) = 1 - x, \\ 0 \le -2\arcsin x \le \pi; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - x, \\ \arcsin x \le 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 1 - 2x^2 = 1 - x, \\ \arcsin x \le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \frac{1}{2}; \end{array} \right. \\ \arcsin x \le 0; \end{cases} \iff x = 0.$$

Второй способ. Проанализируем, в каких пределах может изменяться переменная x. Обратные тригонометрические функции, входящие в исходное уравнение $2\arcsin x + \arccos(1 - x) = 0$, определены при

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 1; \\ -1 \le 1 - x \le 1; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 1; \\ 0 \le x \le 2; \end{array} \right. \iff x \in [0; 1].$$

При этих значениях переменной x оба слагаемых исходного уравнения неотрицательны, и равенство нулю возможно только в случае

$$\left[\begin{array}{l} \arcsin x = 0; \\ \arccos(1 - x) = 0; \end{array} \right. \iff x = 0.$$

Ответ. 0.

Пример 3*. (Экон-99.5) Решить уравнение

$$x + \frac{1}{6}\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\arccos(\cos 15x + 2\sin 2x \cos 4x) = \frac{\pi}{2} - 6x.$$

Согласно определению арккосинуса это равенство равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 15x + (\sin 6x - \sin 2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right), \\ 0 \le \frac{\pi}{2} - 6x \le \pi; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 15x - \sin 2x = 0, \\ -\frac{\pi}{12} \le x \le \frac{\pi}{12}. \end{cases}$$

Используя формулу приведения, решим уравнение:

$$\cos 15x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \iff \left[\begin{array}{l} 15x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ 15x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 17x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ 13x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{34} + \frac{2\pi n}{17},\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\frac{\pi}{26} + \frac{2\pi m}{13},\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Осталось произвести отбор корней по условию $-\frac{\pi}{12} \le x \le \frac{\pi}{12}$.

1) $-\frac{\pi}{12} \le \frac{\pi}{34} + \frac{2\pi n}{17} \le \frac{\pi}{12} \iff -\frac{17}{6} \le 4n+1 \le \frac{17}{6} \iff -\frac{23}{24} \le n \le \frac{11}{24} \iff$
$\iff n = 0$, в этом случае $x = \frac{\pi}{34}$;

2) $-\frac{\pi}{12} \le -\frac{\pi}{26} + \frac{2\pi m}{13} \le \frac{\pi}{12} \iff -\frac{13}{6} \le 4m - 1 \le \frac{13}{6} \iff$
$\iff -\frac{7}{24} \le m \le \frac{19}{24} \iff m = 0$, в этом случае $x = -\frac{\pi}{26}$.

Ответ. $-\frac{\pi}{26}$; $\frac{\pi}{34}$.

Задачи

1. (У) Доказать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{5}$.

2. (У) Что больше: $\frac{\pi}{4}$ или $\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}$?

3. (У) Решить уравнение $\sin(5\operatorname{arcctg} x) = 1$.

4. (У) Решить уравнение $\sin(3\arccos x) = \frac{1}{2}$.

5. (У) Решить уравнение $\arccos(\pi \log_3 \operatorname{tg} x) = 0$.

6. (У) Решить уравнение $2\arcsin x = \arcsin 2x$.

7. (У) Решить уравнение $\arcsin x - \operatorname{arcctg} x = 0$.

8. (У) Решить уравнение $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$.

9. (У) Решить уравнение $\operatorname{arctg}(2+\cos x) - \operatorname{arctg}(1+\cos x) = \dfrac{\pi}{4}$.

10. (Экон-99.4) Решить уравнение $x = \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6x + \cos 7x)$.

11. (Экон-99.6) Решить уравнение $x + \dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 5x + \cos 8x) = \dfrac{\pi}{10}$.

12. (Геол-74.3) Определить, при каких целых значениях k система $\begin{cases}(\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k,\\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ имеет решения, и найти все эти решения.

13. (ВМК-96.4) Решить неравенство $\arccos 3x + \arcsin(x+1) \le \dfrac{7\pi}{6}$.

14. (Экон-95.5) Найти все $x \in [-3;1]$, для которых неравенство $x(\pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}(3m^2+12m+11)) > 0$ выполняется при любых целых m.

2.3. Отбор решений в тригонометрических уравнениях. Тригонометрические неравенства

Теоретический материал

Тригонометрические неравенства нередко возникают при решении уравнений, содержащих наряду с тригонометрическими функциями радикалы и логарифмы. Если тригонометрическое неравенство возникает как дополнительное ограничение при решении уравнения, то в большинстве задач удобнее сначала решить уравнение, а затем произвести *отбор* полученных корней посредством подстановки в неравенство.

Если необходимость в решении тригонометрического неравенства остаётся, советуем воспользоваться *тригонометрической окружностью.* И хотя способы решения тригонометрических неравенств тесно переплетаются со способами решения соответствующих тригонометрических уравнений, графическая иллюстрация поможет избежать ошибок при отборе.

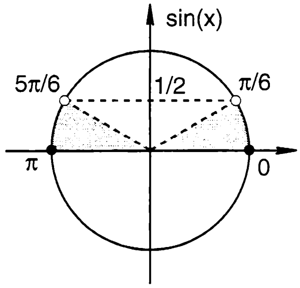
Примеры решения задач

Пример 1. (Хим-92.2) Решить неравенство $\sqrt{2\sin x} < 1$.

Решение. Исходное неравенство равносильно следующему двойному неравенству:

$$0 \le \sin x < 1/2.$$

Отметим на тригонометрической окружности углы, синусы которых удовлетворяют этому условию.



Получим промежутки $\left[2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \pi + 2\pi m\right]$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\left[2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \bigcup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi m; \pi + 2\pi m\right]$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (М/м-98(1).2) Найти все решения уравнения

$$2\cos\frac{x}{3} + 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} = 2 - \sqrt{5},$$

удовлетворяющие условию $\cos\frac{3x}{4} < 0$.

Решение. С помощью формулы косинуса двойного угла уравнение сводится к квадратному:

$$2\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{6}\right) + 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} = 2 - \sqrt{5} \iff 4\sin^2\frac{x}{6} - 2(\sqrt{5} - 1)\sin\frac{x}{6} - \sqrt{5} = 0.$$

Корень $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ не подходит. Второй корень равен $-\frac{1}{2}$; следовательно,

$$\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l} \frac{x}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \frac{x}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\pi + 12\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -5\pi + 12\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Отберём те значения переменной, для которых выполняется условие $\cos\frac{3x}{4} < 0$.

1) Если $x = -\pi + 12\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 9\pi n\right) = \cos\frac{3\pi}{4}\cos 9\pi n = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^n.$$

Значение косинуса отрицательно при чётном n. Следовательно, $n = 2k$ и, значит, $x = -\pi + 24\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Если $x = -5\pi + 12\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\cos\frac{3x}{4} = \cos\left(-\frac{15\pi}{4} + 9\pi m\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos 9\pi m = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^m.$$

Косинус отрицателен при нечётном m. Следовательно, $m = 2l+1$, $l \in \mathbb{Z}$ и, значит, $x = -5\pi + 12\pi(2l + 1) = 7\pi + 24\pi l$.

Ответ. $-\pi + 24\pi k$, $7\pi + 24\pi l$; $k, l \in \mathbb{Z}$.

Пример 3*. (ВМК-97.3) Решить уравнение $3+|\sin x-3\cos x|=3\sin x+\cos x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{1+3^2}=\sqrt{10}$ и введём вспомогательный аргумент $\varphi=\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}$:

$$\frac{3}{\sqrt{10}}+\left|\frac{1}{\sqrt{10}}\sin x-\frac{3}{\sqrt{10}}\cos x\right|=\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x \iff$$

$$\iff \frac{3}{\sqrt{10}}+|\sin(x-\varphi)|=\cos(x-\varphi).$$

Обозначим $z=\cos(x-\varphi)$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{3}{\sqrt{10}}+\sqrt{1-z^2}=z \iff \sqrt{1-z^2}=z-\frac{3}{\sqrt{10}} \iff \begin{cases}1-z^2=\left(z-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2,\\ z\geq\dfrac{3}{\sqrt{10}}.\end{cases}$$

Уравнение системы сводится к квадратному уравнению $20z^2-6\sqrt{10}z-1=0$ и имеет корни $z=\dfrac{3\sqrt{10}\pm\sqrt{110}}{20}$. Заметим, что из первой строки системы следует неотрицательность выражения $1-z^2$; следовательно, оба корня удовлетворяют условию $|z|\leq 1$.

Сравним оба корня с числом $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

1) $z=\dfrac{3\sqrt{10}-\sqrt{110}}{20}<0<\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ – не подходит.

2) Сравним второй корень:

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20} & \vee & \dfrac{3}{\sqrt{10}}\\ 30+\sqrt{1100} & \vee & 60\\ 1100 & > & 30^2;\end{array}$$

значит, $z=\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}>\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, и это значение нам подходит. В результате

$$\cos(x-\varphi)=\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20} \iff x=\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\pm\arccos\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}\pm\arccos\dfrac{3\sqrt{10}+\sqrt{110}}{20}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

1. (Почв-82.2) Решить уравнение $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$.

2. (Псих-96.3) Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}.$$

3. (Хим-88.2) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1} + \sin x = 0$.

4. (ВМК-93.2) На отрезке $0 \le x \le \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}.$$

5. (Псих-87.4) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \cos 3x}$.

6. (ВМК-00.1) Решить неравенство $\sin x \sin|x| \ge -\dfrac{1}{2}$.

7. (У) Решить неравенство $\left|\dfrac{3\sin x}{2 + \cos x}\right| \le \sqrt{3}$.

8. (Геол-94.6) Решить неравенство $4\cos x - \sin 2x > 0$.

9. (М/м-71.2) Найти все x из отрезка $0 \le x \le \pi$, удовлетворяющие неравенству $\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

10. (ВМК-71.2) Найти все решения неравенства $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

11. (ИСАА-94.4) Решить неравенство $2\sin x - 1 \le \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$.

12. (Хим-98(1).3) Найти все числа x из промежутка $[-\pi; \pi]$, удовлетворяющие неравенствам $(4 + \sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3} + 1 \le \cos 2x \le 5\cos x - 3$.

13. (Геогр-77.5) Решить уравнение $2\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x\cos^2 2x}$.

14. (М/м-95(1).4) Найти все значения $x \in [0, \pi]$, при которых выражения $\operatorname{tg} x$ и $\dfrac{1}{\cos 2x} - 2\cos 2x$ имеют разные знаки.

2.4. Смешанные задачи

1. (У) Решить неравенство $\log_{|\cos x|}|x| < 0$.

2. (У) Решить неравенство $\log_{(x^2-1)}\operatorname{ctg} x \le 0$.

3. (ЕГЭ.С) Найти множество значений функции

$$y = \arcsin\frac{\sqrt{\sqrt{2}(\cos 2006x + \sin 2006x)}}{2}.$$

4. (М/м-70.1) Решить неравенство $\log_2(1+\cos 4x) \le 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x$.

5. (Хим-89.3) Решить уравнение $\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0$.

6. (Хим-70.3) Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1 < x < 4$ и удовлетворяющие неравенству $\log_{0,75} \sin x \ge \log_{\frac{9}{16}} 0,75$.

7. (Экон.К-74.3) Решить уравнение $\log_{\cos 2x - \sin 2x}(1 - \cos x - \sin x) = 1$.

8. (ЕГЭ.С) Найти множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in \left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}; \operatorname{arctg} 2\right]$.

9. (ЕГЭ.С) Найти множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in \left[\arccos\dfrac{5}{13}; \dfrac{5\pi}{12}\right]$.

10. (М/м-99(1).1) Решить уравнение $\sqrt[8]{\dfrac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\dfrac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0$.

11. (Филол-99.4) Решить уравнение $\log_{1-2\cos z}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0$.

12. (Экон-00.5) Найти все значения x, при которых числа $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$, $5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

13. (Физ-95(2).7) При каких значениях x числа $a_1 = \sin x$, $a_2 = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $a_3 = \sin 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше нуля?

14. (Экон-88.6) Найти все значения параметра a, при которых неравенство $|3\sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \le 3$ выполняется при всех x.

15. (ВМК-95.4) Решить неравенство
$$\log_{\cos x} \cos^2 x \ge \log_{\cos x - \frac{1}{2}}\left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4}\right).$$

16. (ВМК-89.4) Решить неравенство $1 \le |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot \log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}$.

3. Полезные преобразования и замены переменных

3.1. Использование формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата

Теоретический материал

В этом параграфе собраны задачи, при решении которых используются различные полезные формулы и преобразования: формулы сокращённого умножения, теорема Безу, выделение полного квадрата, домножение на сопряжённое выражение, введение новых переменных.

Напомним базовые формулы сокращённого умножения:

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b), \quad a^3 \mp b^3 = (a \mp b)\cdot(a^2 \pm ab + b^2),$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Для поиска рациональных корней уравнений высших степеней с целыми коэффициентами удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема Безу. Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$ имеет рациональные корни, то есть корни, представимые в виде несократимой дроби $x = \dfrac{p}{q}$, то старший коэффициент a_0 делится нацело на q, а свободный член a_n делится нацело на p.

Следствие 1. Если уравнение имеет целые коэффициенты и старший из них равен единице, то рациональными корнями такого уравнения могут быть только целые числа.

Следствие 2. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Теорема Безу формулирует необходимое (но не достаточное) условие существования рациональных корней уравнений с целыми коэффициентами и является эффективным инструментом разложения на множители многочленов высших степеней.

Для получения более чёткого представления о структуре выражения полезно вводить новые переменные (одну или несколько). На возможность использования таких замен обычно указывает наличие повторяющихся выражений в уравнении или неравенстве.

Во многих задачах с параметрами полезно сначала выяснить, какая из переменных является параметром по существу условия, а какая – независимой переменной. Иногда по смыслу задачи $x, y, z, \ldots$ играют роль параметров, в то время как $a, b, c, \ldots$ играют роль переменных.

Напоминаем вам, что после решения задачи в новых переменных необходимо возвращаться к исходным переменным.

Примеры решения задач

Пример 1. (Почв-80.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$

Решение. Преобразуем второе уравнение системы, используя формулу разности кубов:

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 126.$$

Далее выделим полный квадрат во втором сомножителе левой части преобразованного уравнения:

$$(x-y)((x-y)^2 + 3xy) = 126.$$

Подставим значение $x - y = 6$ из первого уравнения, тогда второе уравнение принимает следующий вид:

$$6\cdot(6^2 + 3xy) = 126 \quad \Longleftrightarrow \quad xy = -5.$$

Получаем систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x-y=6, \\ xy=-5; \end{cases} \iff \begin{cases} x=y+6, \\ xy=-5; \end{cases} \implies y^2+6y+5=0 \iff \left[\begin{array}{l} y=-5; \\ y=-1. \end{array}\right.$$

Подставляя найденные значения переменной y в первое уравнение системы, находим соответствующие им значения переменной x.

Ответ. $(1;\ -5)$, $(5;\ -1)$.

Пример 2. (М/м-96(2).2) Вычислить $\log^2_{x/y} x + \log^2_{y/x} y$, если $\log_{x/y}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \dfrac{y}{x}$.

Решение. Обозначим искомое выражение через A и преобразуем его.

$$A = \log^2_{x/y} x + \log^2_{x/y} y = (\log_{x/y} x - \log_{x/y} y)^2 + 2\log_{x/y} x \cdot \log_{x/y} y =$$
$$= 1 + 2\log_{x/y} x \cdot \log_{x/y} y.$$

Из условия получаем:

$$9\log_{x/y} x = -2\log_y x/y \iff \log_{x/y} x \cdot \log_{x/y} y = -\frac{2}{9}.$$

Значит, $A = 1 + 2 \cdot \left(-\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{5}{9}$.

Ответ. $\dfrac{5}{9}$.

Пример 3. (Физ-95(1).7) Найти наименьшее значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе $\begin{cases} x+y=3a-1, \\ x^2+y^2=4a^2-2a+2. \end{cases}$

Решение. Заметим, что $2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$. Возведём обе части первого уравнения в квадрат и почленно вычтем из них обе части второго уравнения:

$$2xy = 9a^2 - 6a + 1 - 4a^2 + 2a - 2 \iff xy = \frac{1}{2}(5a^2 - 4a - 1).$$

Для того чтобы найти наименьшее значение, которое может принимать произведение xy, надо найти минимум квадратичной функции $f(a) = \dfrac{1}{2}(5a^2 - 4a - 1)$. График функции $f(a)$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Минимальное значение функция принимает в точке $a_0 = -\dfrac{-4}{10} = \dfrac{2}{5}$, которая является абсциссой вершины параболы. Значение функции в этой точке $f\left(\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{9}{10}$. Таким образом, минимальное значение, которое может принимать произведение xy – это значение $-\dfrac{9}{10}$. Осталось убедиться, что при $a = \dfrac{2}{5}$ исходная система имеет решение. При $a = \dfrac{2}{5}$ система принимает вид

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{1}{5}, \\ xy = -\dfrac{9}{10}. \end{cases}$$

Решая систему подстановкой, приходим к уравнению $10y^2 - 2y - 9 = 0$. Вычислим дискриминант: $D/4 = 1 + 90 = 91 > 0$. Из положительности дискриминанта заключаем, что решение системы существует; следовательно, минимальное значение $xy = -\dfrac{9}{10}$ достигается.

Ответ. $-\dfrac{9}{10}$.

Пример 4. (ИСАА-95.6) Найти все значения a, при которых неравенство $x^2 + 4x + 6a|x+2| + 9a^2 \le 0$ имеет не более одного решения.

Решение. Преобразуем исходное неравенство:

$$|x+2|^2 + 6a|x+2| + 9a^2 - 4 \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (|x+2| + 3a)^2 \le 4 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad -2 \le |x+2| + 3a \le 2 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 - 3a \le |x+2| \le 2 - 3a.$$

Последнее двойное неравенство имеет не более одного решения тогда и только тогда, когда $2 - 3a \le 0$, то есть $a \ge \dfrac{2}{3}$.

Ответ. $\left[\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ.В) Решить систему уравнений $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases}$

2. (У) Разложить на множители многочлен $x^4 + 1$.

3. (У) Разложить $x^4 + x^2 + 1$ в произведение двух многочленов.

4. (Экон.М-96.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$

5. (Экон-96.1) Решить систему $\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y - 3 = 7. \end{cases}$

6. (М/м-90.3) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3} - 1}{1+x} \le x$.

7. (М/м-96(1).2) Решить неравенство $\dfrac{x^3 - 8 + 6x\cdot(2-x)}{|3-4x|} \le \sqrt{4x-3}$.

8. (Геогр-95(1).1) Решить систему $\begin{cases} \sqrt{x}(x+3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x+y) = 28. \end{cases}$

9. (Псих-88.2) Решить уравнение $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.

10. (Почв-93.2) Решить уравнение $\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0$.

11. (Геогр-80.4) Решить уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

12. (Геогр-98.2) Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

13. (ВМК-93.1) Решить неравенство $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x - x^2 - 2) \geq 0$.

14. (Почв-95(1).5) Найти все значения a, при которых уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет решений.

15. (Хим-95.5) Решить систему $\begin{cases} 2^{-x} \cdot y^4 - 2y^2 + 2^x \leq 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$

16. (Экон-79.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4,5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$

17. (Хим-98.3) Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x-y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$

18. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$

19. (У) Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \\ 2x + 3y - 6z - 1 = 0. \end{cases}$

20. (почв-79.5) Решить систему уравнений $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$

21. (ИСАА-94.6) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$ имеет решение.

22. (У) Решить неравенство $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 > \dfrac{2x}{x^2+1}$.

23. (У) Решить неравенство $\sqrt{9 - \dfrac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \dfrac{9}{x}}$.

24. (Геол.ОГ-82.6) Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие условиям: $\begin{cases} 8\cos x \cos y \cos(x-y) + 1 = 0, \\ x + y = z. \end{cases}$

25. (Геол-90.5) Найти все пары действительных чисел m и n, при которых уравнение $(3x^2 - 2m^2 + mn)^2 + (3m^2 - mn + 2n^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$ имеет хотя бы одно решение.

3.2. Замены переменных в рациональных уравнениях, неравенствах и системах

Теоретический материал

Перечислим основные ситуации, в которых целесообразно использовать замену:

- наличие повторяющегося выражения;
- возможность приведения к симметричному виду, например, уравнение
$$(x+\alpha)^4+(x+\beta)^4=c$$
после замены $y=x+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, приводится к биквадратному уравнению
$$(y+d)^4+(y-d)^4=c, \quad \text{где} \quad d=\frac{\alpha-\beta}{2};$$
- «возвратность» уравнения, например, уравнение
$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$
после деления на x^2, преобразуется к уравнению
$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$$
квадратному относительно $y=x+\dfrac{1}{x}$;
- «однородность» уравнения, например, уравнение $ax^2+bxy+cy^2=0$ при $y\neq 0$ равносильно квадратному уравнению $a\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+b\cdot\dfrac{x}{y}+c=0$;
- «симметричность» уравнений системы, например, при решении системы
$$\begin{cases} P(x,y)=0, \\ Q(x,y)=0, \end{cases}$$
где $P(x,y)=P(y,x)$ и $Q(x,y)=Q(y,x)$, замена $x+y=u$, $xy=v$ может упростить вычисления.

Примеры решения задач

Пример 1. (ВМК-95.2) Решить систему $\begin{cases} x+3xy+y=3+10\sqrt{2}, \\ x^2+y^2=11. \end{cases}$

Решение. Перепишем систему в виде
$$\begin{cases} (x+y)+3xy=3+10\sqrt{2}, \\ (x+y)^2-2xy=11. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных $u = x + y$, $v = xy$; тогда

$$\begin{cases} u + 3v = 3 + 10\sqrt{2}, \\ u^2 - 2v = 11; \end{cases} \iff \begin{cases} 3v = 3 + 10\sqrt{2} - u, \\ 3u^2 - 2 \cdot 3v = 33. \end{cases}$$

Подставив выражение для $3v$ из первого уравнения во второе, получим квадратное уравнение относительно u:

$$3u^2 + 2u - 39 - 20\sqrt{2} = 0.$$

Решим это уравнение:

$$D/4 = 1 + 39 \cdot 3 + 60\sqrt{2} = 118 + 60\sqrt{2} = (10 + 3\sqrt{2})^2,$$

$$u_{12} = \frac{-1 \pm (10 + 3\sqrt{2})}{3}, \quad u_1 = 3 + \sqrt{2}, \quad u_2 = \frac{-11 - 3\sqrt{2}}{3}.$$

Из первого уравнения последней системы определяем v:

$$v = \frac{3 + 10\sqrt{2} - u}{3} \implies v_1 = 3\sqrt{2}, \quad v_2 = \frac{20 + 33\sqrt{2}}{9}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим две системы уравнений для нахождения x и y:

$$1) \quad \begin{cases} x + y = 3 + \sqrt{2}, \\ xy = 3\sqrt{2}; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ x = \sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$2) \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{-11 - 3\sqrt{2}}{3}, \\ xy = \dfrac{20 + 33\sqrt{2}}{9}; \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{-11 - 3\sqrt{2}}{3} - x, \\ x^2 + \dfrac{11 + 3\sqrt{2}}{3}x + \dfrac{20 + 33\sqrt{2}}{9} = 0; \end{cases}$$

$$D = \frac{(11 + 3\sqrt{2})^2}{9} - 4 \cdot \frac{20 + 33\sqrt{2}}{9} = \frac{121 + 66\sqrt{2} + 18 - 80 - 132\sqrt{2}}{9} = \frac{59 - 66\sqrt{2}}{9} < 0.$$

Значит, во втором случае решений нет.

Ответ. $(3;\ \sqrt{2})$, $(\sqrt{2};\ 3)$.

Пример 2. (У) Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение. Так как $x = 0$ не является решением нашего уравнения, то можем поделить его на x^2. Получим

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Положим $y = x + \dfrac{1}{x}$, тогда $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$ и уравнение примет вид:

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} y = 4, \\ y = 1; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = 4, \\ x + \dfrac{1}{x} = 1; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Ответ. $2 \pm \sqrt{3}$.

Пример 3. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=11, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

Решение. Умножим первое уравнение системы на 6, второе уравнение – на 11 и приравняем левые части полученных уравнений:

$$6x^2+18xy+6y^2=11x^2+22xy-22y^2 \iff 5x^2+4xy-28y^2=0.$$

Заметим, что, если $y=0$, то исходная система не имеет решений. Разделим однородное уравнение на y^2 и сделаем замену $t=\dfrac{x}{y}$, получим

$$5t^2+4t-28=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-\dfrac{14}{5}. \end{array}\right.$$

Первый случай:

$$\begin{cases} x=2y, \\ x^2+3xy+y^2=11; \end{cases} \iff \begin{cases} x=2y, \\ y^2=1; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{5}{14}x, \\ x^2+3xy+y^2=11; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\dfrac{5}{14}x, \\ x^2=196; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=14, \\ y=-5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-14, \\ y=5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(14;-5)$, $(-14;5)$.

Задачи

1. (Геогр-97.1) Решить неравенство $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2.$

2. (Почв-98.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geq \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

3. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2|x-y|+y=2, \\ |x-y|-2y=6. \end{cases}$

4. (У) Решить уравнение $2x^4+3x^3+2x^2+3x+2=0.$

5. (У) Решить уравнение $(x+3)^4+(x+5)^4=4.$

6. (У) Разложить на множители многочлен $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15.$

7. (У) Решить уравнение $x^4-3x^2(x+1)+2(x+1)^2=0.$

8. (У) Решить систему $\begin{cases} xy+yz=8, \\ yz+zx=9, \\ zx+xy=5. \end{cases}$

9. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

10. (Геол-98(2).7) Решить систему уравнений $\begin{cases} x(1+y)=y+7, \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$

11. (У) Решить систему $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2+xy+2y^2=8. \end{cases}$

12. (Геол-98(1).6) Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|-3x+3\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3x^2}{2}-\left|\frac{x^2}{2}+x-\sqrt{2}\right|.$$

13. (У) При каких a система $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+xy+y^2=a \end{cases}$ имеет решение?

14. (Экон.К-74.5) Найти все действительные значения величины h, при которых уравнение $x(x+1)(x+h)(x+1+h)=h^2$ имеет четыре действительных корня.

3.3. Замены переменных в иррациональных уравнениях, неравенствах и системах

Теоретический материал

В некоторых задачах целесообразно заменить иррациональное выражение на новую переменную так, чтобы уравнение или неравенство приняло существенно более простой вид. Иногда удачная замена позволяет выделить полный квадрат некоторого выражения под арифметическим квадратным корнем (этот метод рассмотрен в примере 3).

Кроме того, полезно вводить ограничения для введённых новых переменных, которые определяются их областью значений. Например, при замене $t=\sqrt{f(x)}$ появляется очевидное ограничение $t\geq 0$. Такие ограничения помогают производить отбор допустимых значений новых переменных и избегать рассмотрения случаев, приводящих к уравнениям или неравенствам с пустым множеством решений.

Примеры решения задач

Пример 1. (ВМК-89.2) Решить уравнение $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.

Решение. Добавим 3 к обеим частям уравнения и вынесем множитель 4 из подкоренного выражения:

$$16\sqrt{3+4x-4x^2}+3+4x-4x^2=36.$$

Пусть $t=\sqrt{3+4x-4x^2}$. Заметим, что новая переменная t может принимать только неотрицательные значения. Исходное уравнение преобразуется к квадратному относительно t:

$$t^2+16t-36=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t=-18; \\ t=2. \end{array}\right.$$

Значение $t = -18 < 0$ не подходит. Остаётся корень $t = 2$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\sqrt{3+4x-4x^2} = 2 \iff 4x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Пример 2. (Экон-98.3) Решить неравенство $\sqrt{x + 8(3 - \sqrt{8+x})} < \dfrac{x+16}{2\sqrt{8+x} - 10}$.

Решение. Сделаем замену $t = \sqrt{8+x} \geq 0$. Исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{(t^2-8) + 8(3-t)} < \frac{t^2+8}{2t-10} \iff \sqrt{t^2 - 8t + 16} < \frac{t^2+8}{2t-10} \iff$$

$$\iff \sqrt{(t-4)^2} < \frac{t^2+8}{2t-10} \iff |t-4| < \frac{t^2+8}{2t-10}.$$

Так как правая часть последнего неравенства должна быть положительна, то

$$2t - 10 > 0 \iff t > 5,$$

и, значит, $|t-4| = t-4$. Приходим к системе

$$\begin{cases} t - 4 < \dfrac{t^2+8}{2t-10}, \\ t > 5, \end{cases} \iff \begin{cases} (2t-10)\cdot(t-4) < t^2 + 8, \\ t > 5; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t^2 - 18t + 32 < 0, \\ t > 5; \end{cases} \iff t \in (5;\ 16).$$

Вернёмся к переменной x:

$$5 < \sqrt{8+x} < 16 \iff 25 < 8 + x < 256 \iff x \in (17;\ 248).$$

Ответ. $(17; 248)$.

Пример 3. (Георг-95(1).5) Решить уравнение $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{19-x} = 3$.

Решение. Приведём два способа решения этой задачи.
1-й способ.
Левая часть уравнения определена тогда и только тогда, когда подкоренные выражения неотрицательны. Значит, $2 \leq x \leq 19$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{19-x} + 2\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} = 9 \iff$$

$$\iff \sqrt{x-2} + \sqrt{19-x} = 9 - 2\sqrt[4]{(x-2)(19-x)}.$$

Уравнение имеет смысл при $9 - 2\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} \geq 0$. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$x - 2 + 19 - x + 2\sqrt{(x-2)(19-x)} =$$

$$= 81 - 36\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} + 4\sqrt{(x-2)(19-x)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{(x-2)(19-x)} - 36\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} + 64 = 0.$$

Сделаем замену $t = \sqrt[4]{(x-2)(19-x)}$. Получим систему относительно t:

$$\begin{cases} 2t^2 - 36t + 64 = 0, \\ 9 - 2t \geq 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2(t-2)(t-16) = 0, \\ t \leq 9/2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\sqrt[4]{(x-2)(19-x)} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 21x + 54 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 3; \\ x = 18. \end{array} \right.$$

2-й способ.
Сделаем замену $y = \sqrt[4]{x-2}$, $z = \sqrt[4]{19-x}$. Тогда вместо уравнения получим систему

$$\begin{cases} y + z = 3\,, \\ y^4 + z^4 = 17\,. \end{cases}$$

Преобразуем левую часть второго уравнения системы:

$$y^4 + z^4 = (y^2 + z^2)^2 - 2y^2z^2 = \left((y+z)^2 - 2yz\right)^2 - 2(yz)^2\,.$$

Подставим из первого уравнения системы значение суммы $y+z$ в преобразованное второе уравнение:

$$(9 - 2yz)^2 - 2(yz)^2 = 17 \quad \Longleftrightarrow \quad (yz)^2 - 18yz + 32 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} yz = 2\,; \\ yz = 16\,. \end{array} \right.$$

Таким образом, получаем две системы:

$$\begin{cases} y + z = 3\,, \\ yz = 2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y + z = 3\,, \\ yz = 16\,. \end{cases}$$

Решая их и возвращаясь к переменной x, находим $x = 3$ и $x = 18$.

Ответ. 3; 18.

Задачи

1. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 1 - 2x} - 6\sqrt{x-1} = 7$.

2. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 6 = 5\sqrt{2-x}$.

3. (Экон.К-83.1) Решить уравнение $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.

4. (Геол-94(2).3) Решить уравнение $y^2 + 2\sqrt{y^2 + 3y - 4} - 4 + 3y = 0$.

5. (У) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} + \dfrac{1}{x} = 5$.

6. (У) Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 34, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 23 - \dfrac{1}{\sqrt{xy}}. \end{cases}$

7. (У) Решить уравнение $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$.

8. (ВМК-96(1).1) Решить неравенство $\sqrt{(2x+1)^4 - (2x+1)^2} + (2x+1)^2 \geq 0$.

9. (Почв-96(1).3) Решить неравенство $\dfrac{2}{2 - \sqrt{x+3}} \leq 1$.

10. (Геол-91.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} \geq \dfrac{2}{4 - \sqrt{x}}$.

11. (Биол-93.3) Решить неравенство $5\sqrt{1 - \dfrac{1}{z}} > \dfrac{7z-1}{z}$.

12. (ВМК-83.5) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$, и найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет только один корень.

13. (ВМК-90.4) Решить неравенство $\sqrt{9v^2 - 48v - 21} + \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \leq |3v - 6|$.

14. (М/м-80.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{cases}$

15. (Хим-91.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$

16. (Геол-00.5) Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$

17. (ВКНМ-00(1).3) Решить неравенство $\sqrt{2 - \dfrac{2}{x+1}} < \sqrt{2 + \dfrac{2}{x}} + 1$.

18. (У) Решить уравнение: $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$.

3.4. Замены переменных в показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах и системах

Теоретический материал

В задачах, содержащих выражения с показательными и логарифмическими функциями, также целесообразно применять замены переменных.

Как правило, прежде чем производить замену, необходимо произвести некоторые преобразования степеней и логарифмов: привести все степенные функции к одному основанию (пример 2), перейти к логарифмам по одному основанию и с одинаковыми подлогарифменными функциями (примеры 1 и 3) и так далее.

При решении задач в новых переменных следует учитывать области значений заменённых выражений, чтобы отбросить полученные значения новых переменных, которые не удовлетворяют ограничениям, и тем самым сократить количество рассматриваемых случаев.

Примеры решения задач

Пример 1. (Физ-93.3) Решить уравнение $\sqrt{\log_2 x} = 2\log_2\sqrt{x} - 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{\log_2 x} - 2\log_2\sqrt{x} + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2 x - \sqrt{\log_2 x} - 1 = 0.$$

Сделаем замену переменной $t = \sqrt{\log_2 x}$, $t \geq 0$; в новых обозначениях уравнение становится квадратным:

$$t^2 - t - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Принимая во внимание ограничение $t \geq 0$, отбрасываем отрицательный корень $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\sqrt{\log_2 x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2^{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = 2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ответ. $2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

Пример 2. (Физ-97.2) Решить уравнение $7 \cdot \dfrac{4^{x-2}}{4^x - 3\cdot 5^x} = 1 + 3\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^x$.

Решение. Так как $4^x > 0$, то можно поделить числитель и знаменатель левой части на 4^x. Получим уравнение

$$\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{1-3\left(\frac{5}{4}\right)^x} = 1 + 3\left(\frac{5}{4}\right)^x.$$

Сделаем замену переменной $t = 3\left(\dfrac{5}{4}\right)^x$, $t > 0$; в новых обозначениях уравнение примет вид

$$\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{1-t} = 1 + t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{16t^2 - 9}{t-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \pm\frac{3}{4}.$$

Поскольку $t > 0$, оставляем решение $t = \dfrac{3}{4}$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$3\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \iff \left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{1}{4} \iff x = \log_{\frac{5}{4}}\frac{1}{4} \iff x = \frac{2}{2-\log_2 5}.$$

Ответ. $\dfrac{2}{2-\log_2 5}$.

Пример 3. (Псих-86.3) Решить неравенство $\dfrac{6-\lg(x^4)}{3+2\lg(x^2)} < 2$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $\dfrac{6-\lg(x^4)}{3+\lg(x^4)} < 2$ и сделаем замену $t = \lg(x^4)$:

$$\frac{6-t}{3+t} < 2 \iff 2+\frac{t-6}{t+3} > 0 \iff \frac{3t}{t+3} > 0.$$

Последнее неравенство выполнено при $t < -3$ и $t > 0$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \lg(x^4) > 0; \\ \lg(x^4) < -3; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^4 > 1; \\ 0 < x^4 < 0{,}001; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x < -1; \\ x > 1; \\ -\sqrt[4]{0{,}001} < x < 0; \\ 0 < x < \sqrt[4]{0{,}001}. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;\ -1) \cup (-\sqrt[4]{0{,}001}; 0) \cup (0;\ \sqrt[4]{0{,}001}) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 4. (Псих-92.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 400 \cdot 5^y \cdot 50^x \cdot 100^{x+y} = 1, \\ \log_{0,5x+0,4y}(8^{-x}\cdot 4^{-y} + 25^{-2x}\cdot 125^{-y}) \cdot \log_{41}(0{,}5x+0{,}4y) = 1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения следует, что $0{,}5x+0{,}4y > 0$ и $0{,}5x+0{,}4y \neq 1$. Преобразуем первое уравнение системы:

$$400\cdot 5^y\cdot 50^x\cdot 100^{x+y} = 1 \iff 400\cdot 5^{2x}\cdot 2^x\cdot 5^y\cdot 5^{2x}\cdot 5^{2y}\cdot 2^{2x}\cdot 2^{2y} = 1 \iff$$

$$\iff 400\cdot 5^{4x+3y}\cdot 2^{3x+2y} = 1.$$

Преобразуем второе уравнение системы:

$$\frac{\log_{0,5x+0,4y}(8^{-x}\cdot 4^{-y} + 25^{-2x}\cdot 125^{-y})}{\log_{0,5x+0,4y} 41} = 1 \iff$$

$$\iff \log_{41}(8^{-x}\cdot 4^{-y} + 25^{-2x}\cdot 125^{-y}) = 1 \iff$$

$$\iff 8^{-x}\cdot 4^{-y} + 25^{-2x}\cdot 125^{-y} = 41 \iff 2^{-3x-2y} + 5^{-4x-3y} = 41.$$

Сделаем замену переменных $u = 2^{-3x-2y}$, $v = 5^{-4x-3y}$:

$$\left\{\begin{array}{l} u+v=41, \\ \dfrac{400}{uv}=1; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} u+v=41, \\ uv=400; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} u=16, \\ v=25; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} u=25, \\ v=16. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходным переменным. Рассмотрим первую пару (u, v).

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{-3x-2y}=16, \\ 5^{-4x-3y}=25; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -3x-2y=4, \\ -4x-3y=2; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-8, \\ y=10. \end{array}\right.$$

При полученных значениях x и y второе уравнение исходной системы не имеет смысла, так как основание логарифма в левой части равно нулю:

$$0,5x+0,4y=-4+4=0.$$

Рассмотрим вторую пару (u, v).

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{-3x-2y}=25, \\ 5^{-4x-3y}=16; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -3x-2y=\log_2 25, \\ -4x-3y=\log_5 16; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=2\log_5 16-3\log_2 25, \\ y=-3\log_5 16+4\log_2 25. \end{array}\right.$$

Проверим, имеет ли исходная система смысл при полученных значениях x и y. Вычислим значение основания логарифма:

$$0,5x+0,4y=\log_5 16-\frac{3}{2}\log_2 25-1,2\log_5 16+1,6\log_2 25=0,1\log_2 25-0,2\log_5 16.$$

Сравним с нулём:

$$\begin{array}{rcl} 0,1\log_2 25-0,2\log_5 16 & \vee & 0 \\ 2\log_2 5 & \vee & 2\log_5 16 \\ \log_2 5 & >2> & \log_5 16. \end{array}$$

Значит, $\log_2 5 > \log_5 16$, то есть основание логарифма положительно. Сравним его значение с единицей:

$$0,5x+0,4y=0,1\log_2 25-0,2\log_5 16<0,1\cdot(5-1)=0,4<1.$$

Итак, полученные значения x и y удовлетворяют исходной системе.

Ответ. $(2\log_5 16-3\log_2 25;\ -3\log_5 16+4\log_2 25)$.

Задачи

1. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $2^x+2^{1-x}=3$.

2. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $\lg^2 x^2+\lg 10x-6=0$.

3. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}$.

4. (ИСАА-98.2) Решить уравнение $2^{-2x^2-1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0$.

5. (Экон.М-98.4) Решить уравнение $3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0$.

6. (Почв-73.5) Найти все решения уравнения $4^{3x^2-x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

7. (Физ-80.3) Решить уравнение $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$.

8. (Физ-74.3) Решить уравнение $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$.

9. (ИСАА-93.4) Решить уравнение

$$\log_x(3x-2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) + 4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}.$$

10. (Экон-79.5) Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(21 + 23x + 6x^2) = 4.$$

11. (Геогр-78.4) Решить неравенство

$$\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 - 4x + 2).$$

12. (М/м-74.2) Решить неравенство $\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10)$.

13. (Геогр-90.3) Решить неравенство $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$.

14. (М/м-76.2) Решить неравенство $\dfrac{7}{9^x - 2} \geq \dfrac{2}{3^x - 1}$.

15. (Экон-99.2) Решить неравенство $4 \cdot \sqrt{\dfrac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leq 14 \cdot \sqrt{\dfrac{2^{x-2}}{2^x - 1}}$.

16. (Псих-81.4) Решить уравнение

$$\frac{4}{3}(\log_3(5x-6)^3)^2 - (\log_3(5x-6)^3)\log_3 x^6 = -6\left(\log_3 \frac{1}{x}\right)^2.$$

17. (Псих-89.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0,2)^3 + y = 1. \end{cases}$

18. (Геол.ОГ-74.2) Решить систему неравенств $\begin{cases} 3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0, \\ 3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0. \end{cases}$

19. (Экон-75.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{3 + \log_x(1-y)} = \log_x x(1-y), \\ xy = -6. \end{cases}$

20. (ВМК-97.4) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$$

21. (Хим-85.5) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y| - \log_2^2(|x| + y + 1) + 6 = 0, \\ (x-y)^2 - 6(x-y)\log_2(|x| + y + 1) + 5\log_2^2(|x| + y + 1) = 0. \end{cases}$$

22. (Хим-00.6) Решить уравнение

$$(26 + 15\sqrt{3})^x - 5(7 + 4\sqrt{3})^x + 6(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 5.$$

3.5. Замены в тригонометрических уравнениях и тригонометрические замены

Теоретический материал

В некоторых задачах удобно использовать следствия из основного тригонометрического тождества, например, $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x \cos x = 1 \pm \sin 2x$. Другими словами, если тригонометрическое уравнение или неравенство содержит выражения вида $\sin x \pm \cos x$ и $\sin 2x$, то заменой переменных $t = \sin x \pm \cos x$ оно может быть сведено к алгебраическому (этот подход реализован в примере 1).

Если ОДЗ исходной задачи ограничена (например, уравнение содержит иррациональность вида $\sqrt{a - x^2}$, поэтому область определения будет содержаться в отрезке $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$), то можно сделать *тригонометрическую замену* переменной $x = \sqrt{a}\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ или $x = \sqrt{a}\cos t$ $(0 \le t \le \pi)$. Такая замена в алгебраической задаче не приводит к потере возможных решений в силу ограниченности ОДЗ, но может существенно облегчить её решение благодаря большому арсеналу тригонометрических тождеств и способов преобразований тригонометрических выражений (см. пример 2).

Переход от алгебраической постановки к тригонометрической целесообразен и в случае, когда одно из уравнений задачи имеет вид $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$, где $c \neq 0$. Приведя уравнение к виду $\left(\frac{a}{c}\right)^2 x^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 y^2 = 1$ и сделав замену переменных $\left(\frac{a}{c}\right) x = \sin\phi$, $\left(\frac{b}{c}\right) y = \cos\phi$, можно трактовать его как основное тригонометрическое тождество и смело переходить к тригонометрической интерпретации задачи в целом.

Примеры решения задач

Пример 1. (Филол-74.3) Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$.

Решение. Заметим, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Сделаем замену переменной $t = \sin 2x$, при этом $|t| \le 1$. Получим:

$$1 - \frac{1}{2}t^2 = t \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 + 2t - 2 = 0.$$

Решая последнее уравнение, с учётом условия на t находим $t = \sqrt{3} - 1$. Возвращаемся к переменной x:

$$\sin 2x = \sqrt{3} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{(-1)^n}{2}\arcsin(\sqrt{3} - 1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{(-1)^n}{2}\arcsin(\sqrt{3} - 1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (Хим-94.3) Решить уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$.

Решение. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = \cos x - \sin x - 1, \\ \cos x - \sin x - 1 \ge 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\sin 2x = 1 - (\cos x - \sin x)^2$, и заменяя $\cos x - \sin x$ на новую переменную t, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 1 - (\cos x - \sin x)^2 = \cos x - \sin x - 1, \\ \cos x - \sin x \ge 1; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - t^2 = t - 1, \\ t \ge 1; \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t - 1 + t^2 - 1 = 0, \\ t \ge 1; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t+2) = 0, \\ t \ge 1; \end{cases} \Longleftrightarrow \quad t = 1.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$t = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \; 2\pi m; \; n, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. (Геол-81.6) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{\frac{1 - x^2 + 2x\sqrt{1 - x^2} + x^2}{2}} = 1 - 2x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{(x + \sqrt{1 - x^2})^2}{2}} = 1 - 2x^2.$$

Из исходного уравнения получаем, что $-1 \le x \le 1$, поэтому можем сделать замену $x = \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда с учётом ограничения на t уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\left|\frac{\sin t + \sqrt{1-\sin^2 t}}{\sqrt{2}}\right| = \cos 2t \iff \left|\frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}\right| = \cos 2t \iff$$

$$\iff \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \cos 2t \ge 0, \\ \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \pm \cos 2t = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ \left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + \cos 2t\right)\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) - \cos 2t\right) = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ 2\cos\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{3t}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \\ \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}; \\ t = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{12}; \\ t = -\frac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Вычислим $x = \sin t$ для найденных значений переменной t:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задачи

1. (Геол-00.4) Решить неравенство $4\cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x \le 3$.

2. (У) Решить неравенство $\mathrm{tg}^3\, x + \mathrm{ctg}^3\, x + \mathrm{tg}^4\, x + \mathrm{ctg}^4\, x \ge 0$.

3. (Псих-76.4) Найти все корни уравнения $\sqrt{5+4\sin x-4\cos^2 x}=2+\cos 2x$.

4. (ВМК-96(1).3) Решить уравнение

$$\sqrt{12\sin x-\frac{9}{2}\cos 2x+\frac{17}{2}}=\frac{9}{8}+4\sin x+\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

5. (Биол-76.1) Решить уравнение $|\sin x+\cos x|=1+\sin 2x$.

6. (Биол-85.5) Сколько корней на отрезке $[0;1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2-1)\cdot(8x^4-8x^2+1)=1?$$

7. (Экон.К-85.5) Среди всех решений (x,y,z,v) системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4,\\ z^2+v^2=9,\\ xv+yz\geq 6 \end{cases}$$

найти такие, при каждом из которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

8. (М/м-75.2) Найти все пары действительных чисел (x,y), удовлетворяющих условию $x>0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} \sin\left((x-\sqrt{\pi})^2+y^2\right)=0,\\ \log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2\log_{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}}=2. \end{cases}$$

9. (Экон.К-75.1) Найти все действительные решения уравнения

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{\sin x}=\frac{10}{3}.$$

4. Нестандартные текстовые задачи

4.1. Недоопределённые задачи

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, сводящиеся к решению систем, в которых уравнений меньше, чем неизвестных.

Обычно в таких задачах надо найти некоторую комбинацию неизвестных, для чего, как правило, не требуется вычислять значения всех входящих в неё переменных.

При решении недоопределённых задач может помочь введение новых переменных, относительно которых система становится определённой. Иногда эти новые переменные и являются теми величинами, которые надо найти по условию задачи.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-86.3) Три цистерны одинакового объёма начинают одновременно заполняться водой, причём в первую цистерну поступает 100 литров воды в минуту, во вторую – 60 и в третью – 80. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, вторая и третья частично заполнены, и что все три цистерны будут заполнены одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент времени во второй цистерне больше, чем в третьей?

Решение. Пусть V л – объём первой цистерны и t мин. – время её заполнения водой, тогда $V = 100t$. Пусть во второй цистерне изначально было x л воды, а в третьей y л. По условию задачи необходимо найти отношение $x : y$. Так как все три цистерны имеют одинаковый объём и будут заполнены водой одновременно, то $V = x + 60t$, $V = y + 80t$. В результате получаем систему:

$$\begin{cases} V = 100t, \\ V = x + 60t, \\ V = y + 80t; \end{cases} \iff \begin{cases} V = 100t, \\ 100t = x + 60t, \\ 100t = y + 80t; \end{cases} \iff \begin{cases} V = 100t, \\ x = 40t, \\ y = 20t; \end{cases}$$

откуда $x : y = 2$.

Ответ. В 2 раза.

Пример 2. (Филол-72.1) Гвоздь, 3 винта и 2 шурупа весят вместе 24 г, 2 гвоздя, 4 шурупа и 5 винтов – 44 г. Сколько весят вместе гвоздь, 4 винта и 2 шурупа?

Решение. Пусть 1 гвоздь весит x г, 1 шуруп – y г, 1 винт – z г, тогда

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 24, \\ 2x + 4y + 5z = 44; \end{cases}$$

а найти надо $x+2y+4z$. Из этой системы нельзя определить значения переменных x, y и z, однако можно предположить, что искомая величина $x + 2y + 4z$ является линейной комбинацией левых частей данных уравнений. Другими словами, найдутся такие такие числа a и b, что

$$a(x + 2y + 3z) + b(2x + 4y + 5z) = x + 2y + 4z.$$

Для того, чтобы определить значения a и b, достаточно раскрыть скобки и приравнять коэффициенты при x, y и z. Слева при x будет $(a + 2b)$, а справа 1, следовательно, $a + 2b = 1$. Слева при y будет $(2a + 4b)$, а справа 2, следовательно, $2a + 4b = 2$. Слева при z будет $(3a + 5b)$, а справа 4, следовательно, $3a + 5b = 4$. В результате получаем систему:

$$\begin{cases} a + 2b = 1, \\ 2a + 4b = 2, \\ 3a + 5b = 4; \end{cases}$$

откуда $a = 3$, $b = -1$.

Если домножить первое уравнение на 3 и вычесть из него второе уравнение, то получим

$$(3 - 2)x + (2 \cdot 3 - 4)y + (3 \cdot 3 - 5)z = 24 \cdot 3 - 44,$$

откуда $x + 2y + 4z = 28$.

З а м е ч а н и е. Предложенный метод решения (метод неопределённых коэффициентов) особенно эффективен при решении систем с большим числом уравнений. Небольшие системы можно решать и с помощью обычной подстановки, последовательно уменьшая число неизвестных и число уравнений.

О т в е т. 28.

Задачи

1. (Почв-83.1) Поле разделено на три участка. За день были вспаханы половина первого участка и $3/4$ второго участка, а третий участок, который составляет четвёртую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

2. (Почв-78.3) Имеются два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

3. (Геол-97(2).6) В момент, когда два бассейна были пустыми, 4 трубы одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/6$ его объёма, одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/2$ его объёма, еще 2 трубы переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найти отношение объёмов бассейнов. (Временем на переключения пренебречь).

4. (Фил-90.4) От двух сплавов массами 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

5. (Геогр-88.3) Из пункта A в пункт C, находящийся на расстоянии 20 км от A, выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B, расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A, в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом?

6. (ВМК-89.3) Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут – мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На

сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

7. (Псих-82.5) Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда и беспрепятственно добрался. В результате мотоциклист затратил на дорогу до пункта A в два с половиной раза больше времени, чем если бы он ехал из пункта B в пункт A, не подвозя пешехода. Во сколько раз медленнее пешеход добрался бы до пункта B, если бы весь путь от A до B он прошел пешком?

8. (Геол-94(2).9) Четыре бригады разрабатывали месторождение железной руды в течение трёх лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. По одному месяцу на первом и третьем году работа не велась, а все остальное время (то есть в течение 34 месяцев) работала только одна из бригад. Отношения времен работы первой, второй, третьей и четвёртой бригад и количество выработанной продукции соответственно равны:
в первый год $3:2:4:2$ и 10 млн.т,
во второй год $4:2:5:1$ и 9 млн.т,
в третий год $4:3:3:1$ и 8 млн.т.
Сколько млн.т железной руды выработали бы за 7 месяцев четыре бригады, работая все вместе?

4.2. Неравенства в текстовых задачах

Теоретический материал

В данном разделе рассматриваются текстовые задачи, которые описываются неравенством или смешанной системой, состоящей из уравнений и неравенств.

Решение этих задач существенно упрощается, если удаётся использовать такие свойства переменной как *целочисленность* и *неотрицательность*. Обычно отбор физически допустимых решений неравенств на множестве целых чисел приводит к единственному значению целочисленной переменной.

Единственное решение системы неравенств может быть получено и для действительной переменной, если множества решений отдельных неравенств, входящих в систему, пересекаются в одной точке.

Если же в результате решения задачи получился целый промежуток или несколько значений и нет дополнительных ограничений, вытекающих из условия задачи и физического смысла переменной, то все найденные значения надо указывать в ответе.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон-78.4) Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на восемь вагонов больше и при этом всё равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось ещё на пять вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Решение. Пусть потребовалось n вагонов по 80 т для погрузки S т груза; тогда из условия задачи получаем систему:

$$\begin{cases} 80(n-1) < S < 80n, \\ 60(n+8-1) < S < 60(n+8), \\ S = 50(n+8+5), \quad n \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

подставляем $S = 50(n+13)$ в неравенства:

$$\begin{cases} 8(n-1) < 5(n+13) < 8n, \\ 6(n+7) < 5(n+13) < 6(n+8); \end{cases} \iff \begin{cases} 65 < 3n < 73, \\ 17 < n < 23; \end{cases}$$

значит, $\dfrac{65}{3} < n < 23$, то есть $n = 22$, и $S = 50(n+13) = 50 \cdot 35 = 1750$ т.

Ответ. 1750 тонн.

Пример 2. (Экон.К-85.4) В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своём пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

Решение. Обозначим за x и $2x$ км/ч собственные скорости лодки и катера, u км/ч – скорость течения реки, S км – путь AB, t ч – время движения катера от пункта A до пункта B, тогда $T = t+6$ ч искомое время прибытия катера в пункт B.

Так как катер доплыл до пункта B за t ч, а лодка по условию за 10 часов, то

$$S = t(2x+u), \quad S = 10(x+u).$$

Поскольку катер вернулся в пункт A не ранее 22 часов того же дня, то в пути от A до B и обратно он провёл не менее 16 ч, то есть

$$t + \frac{S}{2x-u} \geq 16.$$

К моменту, когда катер прибыл в B, лодка проплыла $t(x+u)$ км. Дойдя до пункта B, катер сразу повернул назад и на своём пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов. Следовательно, суммарное время движения катера от A до B и от B до встречи с лодкой не превосходит 8 ч:

$$t + \frac{S - t(x+u)}{(x+u)+(2x-u)} \leq 8.$$

Запишем полученные уравнения и неравенства в систему:

$$\begin{cases} S = t(2x+u), \\ S = 10(x+u), \\ t + \dfrac{S}{2x-u} \geq 16, \\ t + \dfrac{S - t(x+u)}{(x+u)+(2x-u)} \leq 8; \end{cases} \implies \begin{cases} t(2x+u) = 10(x+u), \\ t + \dfrac{t(2x+u)}{2x-u} \geq 16, \\ t + \dfrac{t(2x+u) - t(x+u)}{3x} \leq 8; \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t\left(2+\dfrac{u}{x}\right) = 10\left(1+\dfrac{u}{x}\right), \\ \dfrac{4tx}{2x-u} \geq 16, \\ t \leq 6; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{u}{x} = \dfrac{2t-10}{10-t}, \\ \dfrac{4t}{2-\dfrac{u}{x}} \geq 16, \\ t \leq 6. \end{cases}$$

Подставив выражение для величины u/x из первого уравнения в неравенство, получим систему для t:

$$\begin{cases} \dfrac{4t}{2-\dfrac{2t-10}{10-t}} \geq 16, \\ t \leq 6; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{t(10-t)}{15-2t} \geq 8, \\ t \leq 6; \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} t^2 - 26t + 120 \leq 0, \\ t \leq 6; \end{cases} \iff \begin{cases} 6 \leq t \leq 20, \\ t \leq 6; \end{cases} \iff t = 6.$$

В результате, искомое значение равно $T = t + 6 = 12$ ч.

Ответ. В 12 ч.

Задачи

1. (Физ-68.3) Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы – 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше, чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?

2. (Псих-84.5) Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвёртого ее членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.

3. (Геогр-97(1).4) Танкер может заполняться через две трубы, причём его заполнение через первую трубу происходит на 5 часов медленнее, чем через вторую. При каких значениях времени заполнения танкера через первую трубу его заполнение через обе трубы одновременно занимает не менее 6 часов?

4. (Хим-97.4) N насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 2 часа, второй за 4 часа, $\ldots, n$-ый – за 2^n часов. Каким должно быть наименьшее число насосов n, чтобы все n насосов, работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 1 час и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 1 час?

5. (М/м-92.4) Один рабочий на новом станке производит за 1 час число деталей, большее 8, а на старом станке – на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

6. (Экон-85.5) Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут, вслед за ним вышел ещё один пешеход. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг B не раньше, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они бы прибыли в пункт B с интервалом не более, чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

7. (Геол.ОГ-83.5) Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10 км, 5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 ч, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ ч, пункт C – в $9\frac{3}{8}$ ч, пункт D – в $9\frac{2}{3}$ ч. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v, не превосходила 51,7 мин?

4.3. Оптимальный выбор, наибольшие и наименьшие значения

Теоретический материал

Текстовые задачи, в которых требуется отыскать наибольшее или наименьшее значение некоторой функции нескольких переменных, связанных дополнительными условиями, встречаются достаточно часто.

Общий подход к решению таких задач состоит в следующем. Обозначаем исследуемую функцию за новую переменную, выражаем одну из исходных переменных через новую и в результате получаем уравнение, неравенство или систему соотношений, зависящих (в том числе) от новой переменной. Остаётся выяснить, при каких условиях задача в новой формулировке имеет решения. На этом этапе активно используются свойства элементарных функций, что позволяет обойтись без применения производной.

Задачи на оптимальный выбор, как правило, сводятся к отысканию максимального (минимального) значения некоторой функции от нескольких целочисленных переменных, удовлетворяющих системе уравнений или неравенств в целых числах, и поэтому являются частным случаем задач о поиске наибольшего и наименьшего значения. Основные особенности решения задач на оптимальный выбор рассмотрены в примере 1.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон.К-84.5) Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир было наибольшим?

Решение. Пусть n – число 12-квартирных домов, m – число 16-квартирных, k – 21-квартирных домов. Тогда $S = 12n + 16m + 21k$ общее число квартир. Так как всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида, то

$$\begin{cases} 70n + 110m + 150k \le 900, \\ 100n + 150m + 200k \le 1300; \end{cases} \iff \begin{cases} 7n + 11m + 15k \le 90, \\ 2n + 3m + 4k \le 26. \end{cases}$$

Заметим два полезных соотношения, связывающих число квартир и количество деталей.

1) Два 12-квартирных дома (24 квартиры за 140 и 200 деталей) выгоднее, чем один 21-квартирный дом (21 квартира за 150 и 200 деталей).

Вывод: строить 21-квартирные дома невыгодно; значит, $k = 0$.

2) Три 12-квартирных дома (36 квартир за 210 и 300 деталей) выгоднее двух 16-квартирных домов (32 квартиры за 220 и 300 деталей).

Вывод: число 16-квартирных домов меньше двух; значит, $m \in \{0; 1\}$.

Теперь задача свелась к отысканию целых $n \ge 0$ и $m \in \{0; 1\}$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 7n + 11m \le 90, \\ 2n + 3m \le 26; \end{cases}$$

при которых величина $S = 12n + 16m$ принимает наибольшее значение.

При $m = 0$ максимальное значение n, удовлетворяющее системе, равно 12. При этом $S = 12n = 144$.

При $m = 1$ максимальное значение n, удовлетворяющее системе, равно 11. При этом $S = 12n + 16m = 148 > 144$.

Следовательно, общее количество квартир будет наибольшем при $n = 11$, $m = 1$, $k = 0$.

Ответ. 11 домов по 12 квартир и один дом на 16 квартир.

Пример 2. (Экон.К-78.4) Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй – 10% меди и 90% марганца, третий – 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

Решение. Введем обозначения:

	Никель	Медь	Марганец	Масса
I сплав :	30%	70%	–	x кг
II сплав :	–	10%	90%	y кг
III сплав :	15%	25%	60%	z кг
Общий :	$60 - p\%$	$p\%$	40%	$x+y+z$ кг

Из условия задачи получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,9y + 0,6z = 0,4(x+y+z), \\ \dfrac{0,7x + 0,1y + 0,25z}{x+y+z} \cdot 100 = p; \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 5y - 2z = 0, \\ p = \dfrac{70x + 10y + 25z}{x+y+z}; \end{cases}$$

где $0 \le p \le 60,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Выразив $y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{2}{5}z$ из первого уравнения и подставив во второе, получим:

$$p = \frac{70x + 8x - 4z + 25z}{x + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}z + z} = 5 \cdot \frac{7z + 26x}{z + 3x} = 5 \cdot \frac{7(z+3x) + 5x}{z + 3x} = 35 + \frac{25x}{z+3x}.$$

Из условия $y = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{2}{5}z \ge 0$ следует, что $0 \le z \le 2x$, значит,

$$35 + \frac{25x}{2x+3x} \le p \le 35 + \frac{25x}{0+3x} \iff 40 \le p \le \frac{130}{3} = 43\frac{1}{3}.$$

При этом наименьшее значение p достигается при $z = 2x,\ y = 0$; наибольшее – при $z = 0,\ y = \dfrac{4}{5}x$.

Ответ. 40% и $43\dfrac{1}{3}$%.

Задачи

1. (Экон.К-68.3) На 100 рублей решено купить ёлочных игрушек. Ёлочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 рубля; набор, состоящий из 35 игрушек, стоит 6 рублей и набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 9 рублей. Сколько каких наборов нужно купить, истратив все 100 рублей, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?

2. (Экон.М-96.3) В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс.руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс.руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес комплектующих равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

3. (Экон-96.4) В контейнер упакованы комплектующие изделия трёх типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс.руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс.руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс.руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

4. (Псих-87.3) Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причём площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, ещё работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

5. (Экон-90.4) Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и с соответственно. Найти числа a, b и c, если известно, что при указанных условиях сумма $a + b + c$ максимальна.

6. (Псих-94.5) Абитуриенты сдавали экзамены в течение трёх дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причём каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равно числу используемых аудиторий. Определить минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях.

7. (ВМК-87.5) С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока - 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

8. (Геол-99.6) Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в которой $a_3 = -13$ и $a_7 = 3$. Определить, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найти значение этой суммы.

9. (Экон-94.5) Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|$ тыс.руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 - \frac{3}{10}n$ тыс.руб. Определить ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

10. (ВМК-95.5) Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью ровно 2500 кв.м. Стоимость одного дома площадью a кв.м складывается из стоимости материалов $p_1 a^{3/2}$ тыс.руб., стоимости строительных работ $p_2 a$ тыс.руб. и стоимости отделочных работ $p_3 a^{1/2}$ тыс.руб. Числа p_1, p_2, p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, а их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут меньше, чем

затраты на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными?

5. Использование свойств квадратного трёхчлена в задачах с параметрами

5.1. Исследование свойств квадратичной функции в зависимости от значений параметра. Теорема Виета

Теоретический материал

По нашим наблюдениям, тема *"Квадратный трёхчлен и его свойства"* хорошо усваивается школьниками. Каждый абитуриент, сдающий математику на вступительных экзаменах, помнит общий вид и график квадратного трёхчлена, формулы корней и даже формулировки основных теорем. В принципе, этих знаний достаточно для того, чтобы решить любую задáчу выпускных и вступительных экзаменов на свойства квадратного трёхчлена, в том числе и задачу с параметрами. Однако для оптимизации решения необходимо владеть специальными навыками и приёмами работы с квадратными уравнениями и неравенствами.

Напомним основные теоремы, связывающие коэффициенты квадратного трёхчлена с его корнями.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 (может быть, совпадающих), то для них выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1x_2 = q; \end{cases}$$

то они же являются корнями приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$.

Особо подчеркнём, что теорема Виета может быть применена только к квадратному трёхчлену, *имеющему корни.* Это означает, что прежде чем использовать хотя бы одно соотношение, связывающее корни квадратного трёхчлена с его коэффициентами, необходимо убедиться в существовании корней, то есть проверить неотрицательность дискриминанта:

$$D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (ИСАА-92.6) При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Решение. Уравнение имеет корни при неотрицательном дискриминанте:

$$D/4 = a^2 - 2a^2 - 4a - 3 \geq 0 \iff a^2 + 4a + 3 \leq 0 \iff -3 \leq a \leq -1.$$

Сумму квадратов корней найдём, используя теорему Виета:

$$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) = -8a - 6.$$

При $-3 \leq a \leq -1$ получаем $2 \leq -8a-6 \leq 18$, следовательно, наибольшее значение суммы равно 18 и оно достигается при $a = -3$.

Ответ. -3; 18.

Пример 2*. (М/м-96.6) При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 + 2 - x)$$

имеет ровно три различных решения?

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\begin{gathered}((x^2 - x + 2) + a^2)^2 = 4a^2(x^2 + (x^2 - x + 2));\\ (x^2 - x + 2)^2 + a^4 + 2a^2(x^2 - x + 2) = 4a^2x^2 + 4a^2(x^2 - x + 2);\\ ((x^2 - x + 2) - a^2)^2 - 4a^2x^2 = 0;\\ (x^2 - x + 2 - a^2 - 2ax)(x^2 - x + 2 - a^2 + 2ax) = 0.\end{gathered}$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}x^2 - (2a + 1)x + 2 - a^2 = 0;\\ x^2 + (2a - 1)x + 2 - a^2 = 0.\end{array}\right.$$

Она имеет ровно три различных решения в одном из следующих случаев: у каждого из уравнений по два корня, но только один из них общий; у одного из уравнений один корень, а у другого два, причём общих решений нет.

1) Если уравнения имеют общий корень, то он является решением системы:

$$\begin{cases}x^2 - (2a + 1)x + 2 - a^2 = 0,\\ x^2 + (2a - 1)x + 2 - a^2 = 0;\end{cases}$$

вычитая одно уравнение из другого, получаем: $4ax = 0$, но при $a = 0$ уравнение $x^2 - x + 2 = 0$ не имеет решений; значит, только $x = 0$ может быть общим корнем уравнений (необходимое условие). Подставив $x = 0$ в любое из уравнений, получим $2 - a^2 = 0 \iff a = \pm\sqrt{2}$.

Для наличия общего корня у двух рассматриваемых уравнений необходимо, чтобы $a = \pm\sqrt{2}$, причём тогда этим корнем станет $x = 0$.

Проверим на достаточность, подставив в исходную совокупность:

- $a = -\sqrt{2}$, $\quad \left[\begin{array}{l} x^2 - x(1-2\sqrt{2}) = 0; \\ x^2 + x(-1-2\sqrt{2}) = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_2 = 1-2\sqrt{2}; \\ x_1 = 0,\ x_2 = 1+2\sqrt{2}; \end{array}\right.$

  совокупность имеет три различных решения; значит, $a = -\sqrt{2}$ подходит;

- $a = \sqrt{2}$, $\quad \left[\begin{array}{l} x^2 - x(2\sqrt{2}+1) = 0; \\ x^2 + x(2\sqrt{2}-1) = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1 = 0,\ x_2 = 1+2\sqrt{2}; \\ x_1 = 0,\ x_2 = 1-2\sqrt{2}; \end{array}\right.$

  совокупность имеет три различных решения; значение $a = \sqrt{2}$ подходит.

Таким образом, общий корень у двух исходных уравнений имеется в тех и только тех случаях, когда $a = \pm\sqrt{2}$, причём им является $x = 0$.

2) Первое уравнение имеет один корень ($D = 0$), второе уравнение имеет два корня ($D > 0$), общих корней нет ($a \neq \pm\sqrt{2}$):

$$\begin{cases} 8a^2 + 4a - 7 = 0, \\ 8a^2 - 4a - 7 > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 8a^2 - 7 = -4a, \\ -8a > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{15}}{4}, \\ a < 0; \end{cases} \iff a = \frac{-1-\sqrt{15}}{4}.$$

3) Первое уравнение имеет два корня ($D > 0$), второе уравнение имеет один корень ($D = 0$), общих корней нет ($a \neq \pm\sqrt{2}$):

$$\begin{cases} 8a^2 + 4a - 7 > 0, \\ 8a^2 - 4a - 7 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 8a > 0, \\ 8a^2 - 7 = 4a; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a > 0, \\ a = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}}{4}; \end{cases} \iff a = \frac{1+\sqrt{15}}{4}.$$

Таким образом, из двух последних случаев получаем: $a = \pm\dfrac{1+\sqrt{15}}{4}$.

Ответ. $\pm\sqrt{2}$; $\pm\dfrac{1+\sqrt{15}}{4}$.

Задачи

1. (ЕГЭ.С) При каких значениях a функция $y = x^2 + (a-2)x + 0,25$ не принимает отрицательных значений?

2. (Биол-75.2) Найти все значения параметра p, при которых квадратное уравнение $(3x)^2 + (3^{3+\frac{1}{p}} - 15)x + 4 = 0$ имеет ровно одно решение.

3. (У) Пусть $4a + 2b + c > 0$, и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Каков знак c?

4. (У) При каких значениях q уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет решение при любом p?

5. (У) Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.

6. (У) Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются сумма квадратов и сумма кубов корней данного уравнения.

7. (Псих-78.5) Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполнены неравенства: $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определить знак коэффициента a.

8. (Физ-94(2).7) Найти все значения a, для каждого из которых система
$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$$
выполняется хотя бы для одного x.

9. (М/м-71.4) Найти все α, при которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6\alpha \leq 0; \end{cases}$$
имеет единственное решение.

10. (Экон-98.5) Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции
$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$
принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

11. (Физ-93.7) Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Решить уравнение $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$.

12. (Физ-89.5) Найти все значения параметра m, при каждом из которых уравнение $(2x)^2 - 4x \cdot (m \cdot 3^m)^{\frac{1}{2}} + 3^{m+1} + m - 3 = 0$ имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях m.

13. (Физ-91.5) При каких значениях a все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$ удовлетворяют условию $|x| < 1$?

14. (Псих-81.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трёхчлена $4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ на отрезке $0 \leq x \leq 2$ равно 3.

5.2. Теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена на числовой оси

Теоретический материал

Во многих задачах на квадратный трёхчлен требуется выяснить особенности расположения его корней на числовой оси, при этом необходимости в вычислении самих корней нет. Простейшая задача этого типа состоит в определении знаков корней некоторого квадратного трёхчлена.

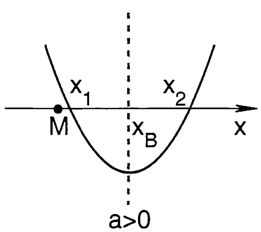
Рецепт решения таких задач известен. За основу всегда берём теорему Виета и добавляем дополнительные утверждения, использующие известные свойства парабол.

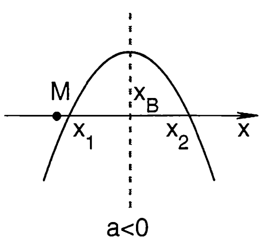
Обозначим через x_1, x_2 корни квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2+bx+c$, через $D = b^2 - 4ac$ его дискриминант, через $x_в$ абсциссу вершины параболы.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 (*оба корня больше некоторого числа* M)

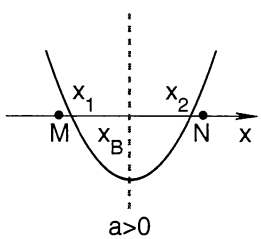
$$\begin{cases} x_1 > M, \\ x_2 > M; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} D \geq 0, \\ x_в > M, \\ a \cdot f(M) > 0. \end{cases}$$

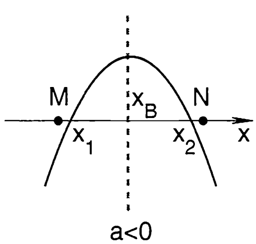




Теорема 2 (*оба корня лежат на интервале* $(M; N)$)

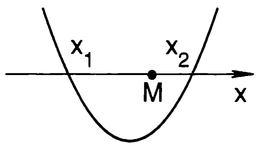
$$x_1, x_2 \in (M; N) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} D \geq 0, \\ x_в \in (M; N), \\ a \cdot f(M) > 0, \\ a \cdot f(N) > 0. \end{cases}$$



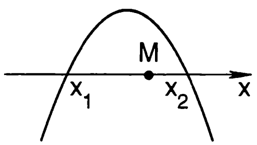


Теорема 3 (*число M расположено между корнями*)

$$x_1 < M < x_2 \iff a \cdot f(M) < 0.$$



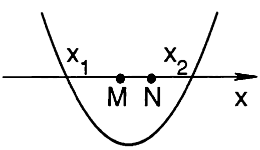
a>0



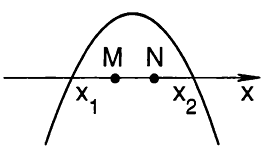
a<0

Теорема 4 (*интервал $(M;N)$ расположен между корнями*)

$$x_1 < M < N < x_2 \iff \begin{cases} a \cdot f(M) < 0, \\ a \cdot f(N) < 0. \end{cases}$$



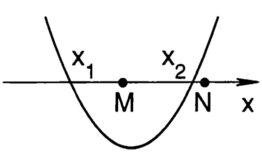
a>0



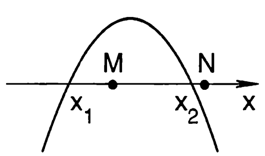
a<0

Теорема 5 (*один корень лежит на интервале $(M;N)$, другой корень – левее этого интервала*)

$$x_1 < M < x_2 < N \iff \begin{cases} a \cdot f(M) < 0, \\ a \cdot f(N) > 0. \end{cases}$$



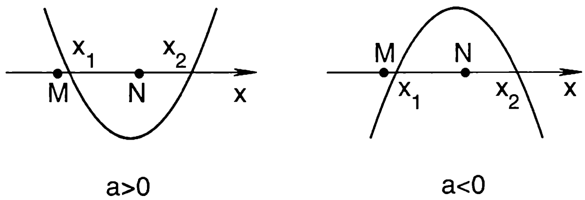
a>0



a<0

Теорема 6 (*один корень лежит на интервале $(M;N)$, другой корень – правее этого интервала*)

$$M < x_1 < N < x_2 \iff \begin{cases} a \cdot f(M) > 0, \\ a \cdot f(N) < 0. \end{cases}$$



Подобные равносильные системы можно получить и для других случаев расположения корней квадратного трёхчлена относительно точек, отрезков, конечных или бесконечных интервалов. Задача читателя - не только помнить приведённые теоремы и уметь их доказывать, но и научиться формулировать новые утверждения о расположении корней квадратного трёхчлена в каждом конкретном случае.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-96(1).8) Найти все значения a, при которых неравенство $ax^2 + 1 > 4x - 3a$ выполняется для всех x из интервала $(-1; 0)$.

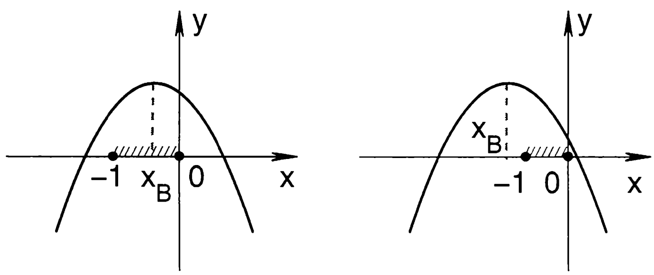
Решение. Обозначим $f(x) = ax^2 - 4x + 3a + 1$ и запишем исходное неравенство в виде $f(x) > 0$.

1) Рассмотрим отдельно случай, когда функция $f(x)$ не является квадратичной. При $a = 0$ функция принимает вид: $f(x) = -4x + 1$, и неравенство $f(x) > 0$ справедливо при при всех $x \in (-1; 0)$, следовательно, $a = 0$ подходит.

2) При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз, и условие $f(x) > 0$ при $x \in (-1; 0)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(-1) \geq 0, \\ f(0) \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a + 5 + 3a \geq 0, \\ 3a + 1 \geq 0; \end{cases} \iff a \geq -\frac{1}{3},$$

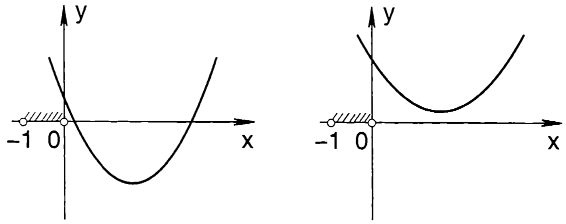
следовательно, в ответ войдут $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$.



3) При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх. Так как $x_в = \dfrac{2}{a} > 0$, то условие $f(x) > 0$ при $x \in (-1; 0)$ равносильно условию

$$f(0) \geq 0 \iff 3a + 1 \geq 0 \iff a \geq -\frac{1}{3},$$

то есть все положительные значения a подходят.



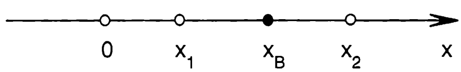
Заметим, что условие $f(0) \geq 0$ должно выполняться независимо от того, есть ли у этой параболы корни или нет. Это даёт нам возможность не рассматривать по отдельности три варианта: $D = 0$, $D > 0$ и $D < 0$.

Объединив все результаты, получим, что $a \geq -\frac{1}{3}$.

Ответ. $\left[-\frac{1}{3}; \infty\right)$.

Пример 2. (Геогр-90.5) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$ имеет два различных положительных корня.

Решение. Обозначим $f(x) = (a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a - 5$. Уравнение $f(x) = 0$ будет иметь два различных положительных корня в том и только в том случае, когда: $\begin{cases} D > 0, \\ x_в > 0, \\ (a+1)f(0) > 0. \end{cases}$



1) $D = (|a+2| - |a+10|)^2 - 4(a+1)(a-5) = -2|a+2||a+10| - 2a^2 + 40a + 124 > 0$

$$\iff \quad |a^2 + 12a + 20| < -a^2 + 20a + 62 \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} a^2 + 12a + 20 < -a^2 + 20a + 62, \\ a^2 + 12a + 20 > a^2 - 20a - 62; \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} a^2 - 4a - 21 < 0, \\ 16a + 41 > 0; \end{cases} \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} -3 < a < 7, \\ a > -\frac{41}{16}; \end{cases} \quad \iff \quad -\frac{41}{16} < a < 7.$$

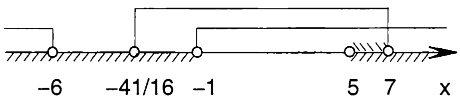
2) $x_в = \dfrac{|a+10| - |a+2|}{2(a+1)} > 0 \quad \iff \quad \dfrac{(a+10)^2 - (a+2)^2}{2(a+1)} > 0 \quad \iff$

$$\frac{(a+10-a-2)(a+10+a+2)}{a+1} > 0 \iff \frac{a+6}{a+1} > 0 \iff a \in (-\infty; -6) \cup (-1; +\infty).$$

В первом равносильном переходе мы воспользовались тем, что разность модулей двух выражений имеет тот же знак, что и разность их квадратов.

3) $(a+1)f(0) = (a+1)(a-5) > 0 \iff a \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

Отметим полученные промежутки на числовой прямой.



Пересечением является интервал $(5; 7)$.

Замечание. Вместо условий на вершину и значение в нуле можно было использовать условия, полученные с помощью теоремы Виета, то есть

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_в > 0, \\ (a+1)f(0) > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq -1, \\ D > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0; \end{cases}$$

и множества решений этих систем совпадают.

Ответ. $(5; 7)$.

Задачи

1. (У) При каких значениях a оба корня уравнения $(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше $1/2$?

2. (У) При каких значениях a один из корней уравнения

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 5) = 0$$

больше 1, а другой меньше 1?

3. (У) Найти все значения a, при которых оба корня уравнения

$$(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$$

больше 1.

4. (У) Известно, что корни x_1 и x_2 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют неравенству $x_1 < -1 < x_2$. Доказать, что $a^2 + ac < ab$.

5. (Физ-94(2).7) Найти все значения a, для каждого из которых система

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2; \end{cases}$$

выполняется хотя бы для одного x.

6. (ЕГЭ.С) При каком значении a область определения функции
$$y = \sqrt[6]{-x^2 + 4x + a} + \sqrt{x-3}$$
состоит из одной точки?

7. (ЕГЭ.С) При каком значении a область определения функции
$$y = \sqrt[6]{-x^2 + 6x + a} + \sqrt{x-4}$$
состоит из одной точки?

8. (М/м-93(2).2) Найти все значения a, при которых уравнение
$$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$$
не имеет решений.

9. (ИСАА-91.6) При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a; \end{cases}$$
имеет ровно два решения?

10. (Геол-97(1).8) При каких α система
$$\begin{cases} \alpha(x-4) = 3(y+2), \\ y + \sqrt{x} = 0; \end{cases}$$
имеет два различных решения?

11. (Экон.К-77.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два решения.

12. (Физ-94(1).7) При каких значениях a уравнение $2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$ имеет четыре различных решения?

13. (геол-89.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)(1 + \sin x) + a + 3 = 0$$
не имеет решений.

14. (Экон.М-95.6) Найти все значения p, при которых уравнение $x - 2 = \sqrt{-2(p+2)x + 2}$ имеет единственное решение.

15. (Псих-93.5) Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного трёхчлена
$$(a-1)x^2 - (2a+1)x + 2 + 5a.$$
1) Найти все a, при которых $x_1 > 1,\ x_2 > 1$.
2) Найти все b, при которых величина $(x_1 - b)(x_2 - b)$ принимает постоянное значение при всех a, при которых определена.

16. (Биол-77.5) Найти все те значения параметра s, при каждом из которых корни уравнений $x^2+\dfrac{3x}{s}+2s=0$ и $x^2+\dfrac{12x}{s}-s=0$ не перемежаются, то есть оба уравнения имеют по два корня и между корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

17. (ВМК-88.5) Найти все a, при которых уравнение
$$((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a)\cdot\lg\frac{36a-9a^2}{35}=0$$
имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

18. (М/м-91.5) Найдите все пары чисел p и q, при которых неравенство $|x^2+px+q|>2$ не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

5.3. Смешанные задачи

1. (ЕГЭ.В) Найти все значения a, при которых функция $y=\sqrt[9]{5x^2-(2-a)x+2-4a}$ имеет минимум в точке $x_0=\dfrac{1}{2}$.

2. (ЕГЭ.В) Найти все значения a, при которых функция $y=\sqrt[5]{ax^2+15x-1}$ имеет максимум в точке $x_0=1,5$.

3. (У) Найти наименьшее значение, принимаемое z, если $z=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4$.

4. (У) При каком целом p уравнения $3x^2-4x+p-2=0$ и $x^2-2px+5=0$ имеют общий корень?

5. (У) Докажите, что если значение квадратного трёхчлена ax^2-bx+c является целым числом при $x_1=0, x_2=1$ и $x_3=2$, то при любом целом x значение данного трёхчлена является целым числом.

6. (У) Доказать, что при любых допустимых значениях a,p,q уравнение
$$\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}=\frac{1}{a}$$
имеет вещественные корни.

7. (У) На плоскости (p,q) изобразить множество точек таких, что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет одним из корней фиксированное число a.

8. (У) Коэффициенты p и q квадратного трёхчлена x^2+px+q нечётны. Доказать, что он не может иметь целых корней.

9. (Псих-70.2) Найти все a, при которых уравнение $x^8+ax^4+1=0$ имеет ровно четыре корня, образующих арифметическую прогрессию.

10. (ВМК-74.2) Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства
$$\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$
является решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \leq 0$.

11. (Геол-99.2) Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения
$$2x^2 - (\sqrt{3}+5)x - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = 0.$$
Найти значение $A = x_1 + x_1x_2 + x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или $1,999$?

12. (Экон.К-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$ выполняется для любого числа x.

13. (Биол-73.5) Найти все значения действительного параметра α, для которых неравенство $4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

14. (Экон-77.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3 - |x-a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

15. (Экон-80.5) Найти все целые значения параметра k, при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \dfrac{x}{2} = 3k$ имеет решения. Найти все эти решения.

16. (Псих-71.5) При каких значениях a уравнение
$$\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\sin 3x + \frac{a}{2} = 0$$
имеет ровно три корня, расположенных на отрезке $\left[\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right]$?

17. (геол-77.5) Найти все значения параметра k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств
$$x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 + 2k \quad \text{и} \quad x^2 + 2kx \leq 3k^2 - 8k + 4.$$

18. (Геол-88.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $y = \dfrac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$ содержит отрезок $[1;2]$.

19. (М/м-99.5) Найти все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства
$$\frac{x^2 + (2a^2+6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2+7a-7)x - a^2 + 2a - 3} < 0$$
не меньше 1.

6. Использование различных свойств функций и применение графических иллюстраций

В этом параграфе приведены задачи, при решении которых решающую роль играет использование таких свойств функций как монотонность, чётность и нечётность, периодичность. Рекомендуем вам, прежде чем приступать к решению задач данного параграфа, повторить свойства элементарных функций.

6.1. Область определения функции, монотонность, периодичность, чётность и нечётность

Теоретический материал

Функцией называется отображение числового множества X на числовое множество Y, при котором каждому значению x из множества X, называемого *областью определения*, ставится в соответствие единственное значение y из множества Y, называемого *множеством значений*. Для обозначения функции используется запись $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для всех $x \in X$ выполняется соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = f(-x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для всех $x \in X$ имеет место соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = -f(-x)$.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на множестве D, если для любых значений $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие: $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на множестве D, если для любых значений $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие: $f(x_2) < f(x_1)$.

Свойства монотонных функций

- Сумма возрастающих (убывающих) функций есть также возрастающая (убывающая) функция. Сумма возрастающей и убывающей функций может вообще не являться монотонной функцией.

- Произведение неотрицательных возрастающих (убывающих) функций есть также возрастающая (убывающая) функция.

- Монотонная функция все свои значения принимает только один раз.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для всех $x \in X$ выполняются соотношения $(x + T) \in X$, $(x - T) \in X$ и равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. При этом число T называется *периодом* функции.

Свойства периодических функций

- Если $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то $y = f(kx)$ – периодическая функция с периодом $T_1 = \dfrac{T}{k}$.

- Функция, являющаяся суммой или произведением двух периодических функций с периодом T, будет периодической с периодом T, однако T может не быть её наименьшим положительным периодом. Например, период функции $y(x) = \sin x \cos x$ равен π, а период каждого из множителей равен 2π.

- Функция, являющаяся суммой или произведением двух периодических функций с разными периодами, может вообще не быть периодической.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Найти область определения функции

$$y = \arcsin(\arcsin x) + \arccos \frac{2 \arccos x}{\pi - 2}.$$

Решение. Из определений арксинуса и арккосинуса следует, что

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ -1 \le \arcsin x \le 1, \\ -1 \le \dfrac{2\arccos x}{\pi - 2} \le 1; \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ -\sin 1 \le x \le \sin 1, \\ -\dfrac{\pi - 2}{2} \le \arccos x \le \dfrac{\pi - 2}{2}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\sin 1 \le x \le \sin 1, \\ \arccos x \le \dfrac{\pi}{2} - 1; \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin 1 \le x \le \sin 1, \\ \sin 1 \le x \le 1. \end{cases}$$

При последнем переходе использовалось равенство $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.
В результате, областью определения является единственная точка $x = \sin 1$.

Ответ. $\sin 1$.

Пример 2. (У) Решить уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Решение. Так как $\sqrt{2-\sqrt{3}} < 2$ и $\sqrt{2+\sqrt{3}} < 2$, то разделив обе части уравнения на 2^x, получим, что сумма двух убывающих функций равна 1:

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Следовательно, уравнение не может иметь более одного решения. Значение $x = 2$ находим подбором. Действительно,

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4} + \frac{2+\sqrt{3}}{4} = 1,$$

то есть $x = 2$ – единственное решение уравнения.

Ответ. 2.

Пример 3. (У) Найти наименьший положительный период функции

$$y = \cos x + 2\cos 3x.$$

Решение. Число 2π является периодом каждого слагаемого правой части и, следовательно, их суммы. Покажем, что 2π является наименьшим положительным периодом. Достаточно показать, что расстояние между двумя соседними максимумами равно 2π.

Максимум достигается в случае, когда оба косинуса равны 1, то есть

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{2\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff x = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Расстояние между двумя соседними максимумами функции $y = \cos x + 2\cos 3x$ равно 2π; поэтому её период не может быть меньше 2π.

Итак, число 2π является наименьшим положительным периодом функции y.

Ответ. 2π.

Задачи

1. (У) Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_7(\cos 2x)}$.
2. (У) Найти область определения функции $y = \sqrt{\lg\cos\pi x} + \sqrt{9 - x^2}$.
3. (У) Решить уравнение $2^x = 3 - x$.
4. (У) Решить уравнение $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$.
5. (У) Решить уравнение $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^x$.
6. (У) Решить уравнение $2\pi\cos x = |x| - |x - \pi|$.
7. (У) Является ли функция $f(x) = (2+\sqrt{3})^{1/x} - (2-\sqrt{3})^{1/x}$ чётной, нечётной или ни той, ни другой?
8. (У) Доказать непериодичность функции $y = \cos\sqrt{x}$.
9. (У) Доказать непериодичность функции $y = \sin\log_2|x|$.
10. (У) Найти наименьший положительный период функции $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.
11. (У) Найти наименьший положительный период функции $y = \sin x + \cos x + \sin x\cos x$.
12. (У) Доказать, что функция $y = \sin 2^x$ не является периодической.
13. (У) Доказать непериодичность функции $y = \sin x^3$.
14. (У) Доказать, что функция $y = \cos x + \cos\pi x$ не является периодической.
15. (У) Доказать, что функция $y = \sin x \sin\sqrt{2}x$ не является периодической.

6.2. Множество значений функции, промежутки знакопостоянства и монотонности

Теоретический материал

При решении задач из этого пункта необходимо знать область определения и множество значений всех элементарных функций и пользоваться свойствами, вытекающими из их монотонности (возрастания, убывания).

Примеры решения задач

Пример 1. (ЕГЭ.С) Найдите множество значений функции

$$y = \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{10+\log_7(7+|x|)}{77}\right).$$

Решение. Используя неотрицательность модуля, возрастание логарифмической функции при основании, большем 1, и её убывание при основании, меньшем 1, запишем цепочку очевидных равносильных переходов:

$$|x| \geq 0 \iff 7+|x| \geq 7 \iff \log_7(7+|x|) \geq \log_7 7 = 1 \iff$$

$$\iff 10+\log_7(7+|x|) \geq 11 \iff \frac{10+\log_7(7+|x|)}{77} \geq \frac{11}{77} = \frac{1}{7} \iff$$

$$\iff \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{10+\log_7(7+|x|)}{77}\right) \leq \log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{7} = 1.$$

Последнее неравенство даёт ответ.

Ответ. $(-\infty; 1]$.

Пример 2. (ЕГЭ.С) При каких значениях параметра a сумма $\log_a(\sin x+2)$ и $\log_a(\sin x+3)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Решение. Оба выражения определены при всех $x \in \mathbb{R}$. Их сумма равна

$$\log_a(\sin x+2)+\log_a(\sin x+3) = \log_a(\sin x+2)(\sin x+3).$$

Эта сумма будет равна единице тогда и только тогда, когда

$$(\sin x+2)(\sin x+3) = a.$$

В левой части последнего уравнения стоит квадратичная функция

$$f(t) = (t+2)(t+3)$$

относительно новой переменной $t = \sin x$. Так как квадратичная функция возрастает правее вершины $t_в = -2,5$ и $-1 \leq \sin x \leq 1$, то эта функция принимает значения от $f(-1)$ до $f(1)$, то есть от 2 до 12. Значит, и решения уравнения будут существовать при $a \in [2; 12]$.

Ответ. $[2; 12]$.

Пример 3. (Геол-82.4) Решить уравнение $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right) = \frac{1}{2} \iff \frac{4}{3}\pi\sin x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n\in\mathbb{Z} \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{8} + \frac{3n}{2},\ n\in\mathbb{Z}; \\ \sin x = \frac{5}{8} + \frac{3k}{2},\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Так как $\sin x \in [-1;1]$, то остаются следующие значения:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{8}; \\ \sin x = \frac{5}{8}; \\ \sin x = -\frac{7}{8}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = (-1)^n\arcsin\frac{1}{8} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \\ x = (-1)^k\arcsin\frac{5}{8} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}; \\ x = (-1)^{m+1}\arcsin\frac{7}{8} + \pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-1)^n\arcsin\frac{1}{8}+\pi n,\ (-1)^k\arcsin\frac{5}{8}+\pi k,\ (-1)^{m+1}\arcsin\frac{7}{8}+\pi m;\ n,k,m\in\mathbb{Z}.$

Пример 4. (М/м-96(1).4) При каких значениях a уравнение

$$2\cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Обозначим $t = 2^{2x-x^2} > 0$, тогда для новой переменной t получим уравнение

$$2\cos^2 t = a + \sqrt{3}\sin 2t;$$

или, после преобразований,

$$\cos 2t + 1 = a + \sqrt{3}\sin 2t \iff \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a-1}{2}.$$

Так как $0 < 2t = 2^{1+2x-x^2} = 2^{2-(x-1)^2} \le 4$, то $\frac{\pi}{3} < 2t + \frac{\pi}{3} \le 4 + \frac{\pi}{3}$, поэтому

$$-1 \le \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}.$$

Значит, исходное уравнение будет иметь решения при условии

$$-1 \le \frac{a-1}{2} < \frac{1}{2} \iff -1 \le a < 2.$$

Ответ. $[-1;2)$.

Пример 5. (М/м-79.4) Решить неравенство $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

Решение. ОДЗ: $x \in \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

1) Пусть $x \in \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$1 + \log_2(2+x) > \frac{6x}{2x+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2(2+x) > 2 - \frac{3}{2x+1}.$$

При рассматриваемых значениях переменной x в силу монотонного возрастания функций $f(x) = \log_2(x+2)$ и $g(x) = 2 - \dfrac{3}{2x+1}$ справедливы неравенства:

$$\log_2(x+2) < \log_2 \frac{3}{2} < 1 \quad \text{и} \quad 2 - \frac{3}{2x+1} > 2;$$

следовательно, исходное неравенство решений не имеет.

2) Пусть $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$, тогда справедливы неравенства

$$\frac{6}{2x+1} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1+\log_2(2+x)}{x} < 0,$$

следовательно, исходное неравенство верно для любого $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

3) Пусть $x > 0$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2(x+2) < 2 - \frac{3}{2x+1}.$$

При рассмотриваемых значениях переменной x справедливы неравенства

$$\log_2(x+2) > 1 \quad \text{и} \quad 2 - \frac{3}{2x+1} < 2;$$

следовательно, исходное неравенство не имеет решений там, где

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x+2) \geq 2; \\ 2 - \dfrac{3}{2x+1} \leq 1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+2 \geq 4; \\ 2x+1 \leq 3; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \geq 2; \\ x \leq 1. \end{array}\right.$$

Остаётся рассмотреть только $x \in (1; 2)$. На этом множестве

$$\log_2(x+2) > \log_2 3 \quad \text{и} \quad 2 - \frac{3}{2x+1} < \frac{7}{5}.$$

Сравним числа:

$$\begin{array}{rcl} \log_2 3 & \vee & \dfrac{7}{5} \\ 5\log_2 3 & \vee & 7\log_2 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3^5 & \vee & 2^7 \\ 243 & > & 128. \end{array}$$

Следовательно, $\log_2 3 > \frac{7}{5}$. Итак, получаем следующую цепочку:

$$\log_2(x+2) > \log_2 3 > \frac{7}{5} > 2 - \frac{3}{2x+1}.$$

Значит, при $x \in (1; 2)$ решений нет.

Ответ. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Пример 6. (М/м-80.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\log_{1/a}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3 \geq 0$ имеет одно решение.

Решение. ОДЗ для параметра a: $a > 0$, $a \neq 1$. Перейдём в первом и третьем логарифме к основанию 3:

$$\frac{-\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+1}{\log_3 a} \geq 0.$$

Рассмотрим различные значения параметра a.
1) Пусть $0 < a < 1$, тогда $\log_3 a < 0$ и, следовательно,

$$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6) \geq 1.$$

Обозначим $u = x^2+ax+5 \geq 0$, тогда в левой части последнего неравенства стоит функция

$$f(u) = \log_3(\sqrt{u}+1)\cdot\log_5(u+1).$$

Заметим, что $f(u) \geq 0$, монотонно возрастает и $f(4) = 1$; следовательно,

$$u \geq 4 \iff x^2+ax+5 \geq 4 \iff x^2+ax+1 \geq 0.$$

У этого неравенства для любого a существует бесконечно много решений.
2) Пусть $a > 1$, тогда

$$\begin{cases} f(u) \leq 1, \\ u \geq 0; \end{cases} \iff 0 \leq x^2+ax+5 \leq 4 \iff \begin{cases} x^2+ax+5 \geq 0, \\ x^2+ax+1 \leq 0. \end{cases}$$

Поскольку обе параболы имеют одну и ту же абсциссу вершины, то система при $a > 1$ будет иметь единственное решение, если второй квадратный трёхчлен имеет корень кратности два, то есть

$$D = a^2 - 4 = 0 \implies a = 2.$$

При этом первое неравенство выполняется $\forall x \in \mathbb{R}$, поскольку $D = 4 - 20 < 0$.

Ответ. 2.

Задачи

1. (ЕГЭ.С) Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,25}\left(\frac{\log_4(4+x^4)+47}{3}\right).$$

2. (ЕГЭ.С) Найдите множество значений функции

$$y = \log_{0,2}\left(\frac{80}{\log_5(125+x^4)+13}\right).$$

3. (ЕГЭ.С) Найдите множество значений функции

$$y = \frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right).$$

4. (ЕГЭ.С) При каких значениях a выражение $3+\cos x(a\cos x+4\sin x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

5. (ЕГЭ.С) При каких значениях параметра a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ будет больше единицы при всех x?

6. (Экон-94.2) Найти область значений функции $y=-\sqrt{-3x^2+12x-3}$.

7. (Экон.К-71.2) Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)$.

8. (ВМК-82.2) Найти все значения x, для каждого из которых функция $f(x)=6\cos^2 x+6\sin x-2$ принимает наибольшее значение.

9. (Почв-90.4) Найти наименьшее значение функции $y=1+4\sin x-2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

10. (Геол.ОГ-81.6) Показать, что функция

$$y(x)=\sin^2 x-12\sin x\cos x+3\cos^2 x-2\sqrt[3]{66}$$

может принимать неотрицательные значения.

11. (Псих-80.5) Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t \geq 0,$$

и найти все пары чисел (p,t), для которых это неравенство превращается в равенство.

12. (Почв-90.6) Решить неравенство $\log_2(2-3x)>4x+1$.

13. (Хим-80.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения
$$3(x^2+a^2) = 1-(9a^2-2)x$$
не превосходит числа решений уравнения
$$x+(3a-2)^2\cdot 3^x = (8^a-4)\log_3\left(3^a-\frac{1}{2}\right)-3x^3.$$

14. (Геол.ОГ-85.5) Решить уравнение
$$\sqrt{(x+2)\cdot(2x-1)}-3\sqrt{x+6} = 4-\sqrt{(x+6)\cdot(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

15. (ИСАА-94.5) Решить неравенство $|x-4^{1+\sqrt{3-x}}| \le \frac{5}{3}x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}$.

16. (М/м-96(2).1) Найти все целочисленные решения неравенства
$$\sqrt{x^3-5x-3} \le 6-x.$$

17. (Фил-87.5) Решить неравенство $\dfrac{9}{3x+2} > \dfrac{1+\log_3(x+6)}{x}$.

18. (Псих-82.6) Решить уравнение
$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

19. (ВМК-92.6) Найти все значения a, при каждом из которых неравенство
$$\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3} < \sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$$
выполняется для всех x из отрезка $[\pi; 2\pi]$.

6.3. Функциональные уравнения и неравенства

Теоретический материал

При решении задач этого пункта необходимо знать и уметь применять определения чётной, нечётной, монотонной и периодической функции.

Кроме того, полезными могут оказаться две следующие формулы, помогающие выбрать из двух чисел минимальное и максимальное:
$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}; \qquad \min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$
Чтобы доказать их, надо рассмотреть два случая: $a \ge b$ и $a \le b$.

Напомним также определения целой и дробной части числа. *Целой частью* числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a. Целая часть числа a обозначается $[a]$. *Дробной частью* числа a называется число, равное $\{a\} = a-[a]$.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5\ ?$$

Решение. Линейная функция имеет вид $f(x) = ax + b$. Исходя из общего вида линейной функции, находим

$$f(x+2) = a(x+2) + b, \quad f(4-x) = a(4-x) + b.$$

Подставим полученные выражения в исходное соотношение:

$$2(a(x+2)+b) + a(4-x) + b = 2x + 5 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-2)x + 8a + 3b - 5 = 0.$$

Так как последнее равенство должно выполняться для всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{cases} a - 2 = 0, \\ 8a + 3b - 5 = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = -\dfrac{11}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяет линейная функция $y = 2x - \dfrac{11}{3}$.

Ответ. Существует; эта функция $y = 2x - \dfrac{11}{3}$.

Пример 2. (У) Решить уравнение $x + [10x] = 10x$, где квадратные скобки означают целую часть числа.

Решение. Исходное уравнение можно переписать в виде

$$[10x] = 9x.$$

Величина $[a]$ есть целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Сделаем замену $y = 9x$, тогда уравнение примет вид

$$\left[\frac{10y}{9}\right] = y.$$

Воспользуемся определением целой части числа:

$$\begin{cases} y \in \mathbb{Z}, \\ 0 \le \dfrac{10y}{9} - y < 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in \mathbb{Z}, \\ 0 \le y < 9; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad y = 0, 1, 2, \dots, 8.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$x = \frac{y}{9}, \quad \text{где} \quad y = 0, 1, 2, \dots, 8.$$

Ответ. $0;\ \frac{1}{9};\ \frac{2}{9};\ \frac{3}{9};\ \frac{4}{9};\ \frac{5}{9};\ \frac{6}{9};\ \frac{7}{9};\ \frac{8}{9}.$

Пример 3. (Геогр-96.2) $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T = \frac{1}{3}$. Найти значение $f(1)$, если известно, что

$$f^2(2) - 5f(0) + \frac{21}{4} = 0 \quad \text{и} \quad 4f^2(-1) - 4f\left(\frac{10}{3}\right) = 35.$$

Решение. В силу периодичности $f(1) = f(2) = f(0) = f(-1) = f\left(\frac{10}{3}\right)$, поэтому задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} f^2(1) - 5f(1) + \frac{21}{4} = 0, \\ 4f^2(1) - 4f(1) - 35 = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 4 и вычтем из него второе:

$$-16f(1) + 56 = 0 \quad \iff \quad f(1) = \frac{7}{2}.$$

Проверкой убеждаемся в том, что найденное значение $f(1)$ удовлетворяет второму уравнению системы.

Замечание. При решении системы двух уравнений важно помнить следующее: если мы получаем новое уравнение как линейную комбинацию двух исходных, то для обеспечения равносильности переходов необходимо далее рассматривать систему, состоящую из полученного уравнения и любого из двух уравнений исходной системы.

Ответ. $\frac{7}{2}$.

Пример 4. (Экон.М-97.5) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4, и на промежутке $0 \le x \le 2$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 1 - |x - 1|$. Решить уравнение

$$2f(x) \cdot f(x - 8) + 5f(x + 12) + 2 = 0.$$

Решение. Так как функция $f(x)$ периодична с периодом 4, то достаточно рассмотреть её на любом отрезке длины 4. Так как она ещё является и нечётной, то удобно рассмотреть отрезок $[-2; 2]$.

На отрезке $[0; 2]$ по условию функция имеет вид $f(x) = 1 - |x - 1|$. Используя определение нечётной функции, продолжим $f(x)$ на отрезок $[-2; 0]$. Здесь она будет вычисляться по правилу

$$f(x) = -f(-x) = -(1 - |-x - 1|) = -1 + |x + 1|.$$

Итак, на отрезке $[-2; 2]$ функция имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} -1 + |x + 1| & \text{при} \quad x \in [-2; 0], \\ 1 - |x - 1| & \text{при} \quad x \in [0; 2]. \end{cases}$$

По условию функции $f(x)$ является периодической с периодом 4, поэтому

$$f(x) = f(x-8) = f(x+12).$$

Уравнение упрощается:

$$2(f(x))^2 + 5f(x) + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = -2; \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Рассмотрим два случая.
1-й случай. Пусть $x \in [0;2]$; тогда

$$\left[\begin{array}{l} 1 - |x-1| = -2; \\ 1 - |x-1| = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 > 2; \\ x = -2 < 0; \\ x = -\dfrac{1}{2} < 0; \\ x = \dfrac{5}{2} > 2. \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \emptyset.$$

2-й случай. Рассмотрим $x \in [-2;0]$; тогда

$$\left[\begin{array}{l} -1 + |x+1| = -2; \\ -1 + |x+1| = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}; \\ x = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

С учётом периодичности получаем ответ:

$$x = -\frac{1}{2} + 4k,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = -\frac{3}{2} + 4n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{2} + 4k,\ -\dfrac{3}{2} + 4n;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

Пример 5. (Экон.В-00.7) Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\dfrac{2}{5}; \dfrac{5}{2}\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \cos(2f(x)) - 6\cos^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1-3x}{x}, \\ 0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решить уравнение $f(x) = \dfrac{5\pi}{12}$.

Решение. Обозначая $g(x) = \cos(2f(x))$ и применяя формулу косинуса двойного угла, приходим к уравнению

$$g(x) - 3g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{x} \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\dfrac{5}{2}\right]$, то в полученное уравнение вместо x можно подставить $\dfrac{1}{x}$:

$$g\left(\frac{1}{x}\right) - 3g(x) = x\,.$$

Выражая из последнего уравнения $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ и подставляя в первое, находим

$$g(x) = -\frac{1}{8}\left(3x + \frac{1}{x}\right)\,.$$

Для вычисления множества значений функции $g(x)$ при $x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$ заметим, что

$$h(x) = 3x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}\,\left(x\sqrt{3} + \frac{1}{x\sqrt{3}}\right) \geq 2\sqrt{3}\,,$$

причём минимум достигается при $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$. Поэтому

$$2\sqrt{3} \leq h(x) \leq \max\,\left\{h\left(\frac{2}{5}\right)\,;\,h\left(\frac{5}{2}\right)\right\} = \frac{79}{10}\,.$$

Значит, для $x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$ значения функции $g(x)$ попадают в промежуток $[-1\,;\,0]$. В силу ограничения на область значений $f(x)$ уравнение

$$\cos(2f(x)) = g(x)$$

даёт единственное решение

$$f(x) = \frac{1}{2}\arccos(g(x)) = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{8}\left(3x + \frac{1}{x}\right)\right)\,.$$

Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{5\pi}{12}\,, \\ x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{5}{2}\right]; \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{1}{8}\left(3x + \dfrac{1}{x}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{5}{2}\right]; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \pm 1\,, \\ x \in \left[\dfrac{2}{5}\,;\,\dfrac{5}{2}\right]; \end{cases} \iff x = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1\,.$$

О т в е т. $1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Задачи

1. (У) Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению $f(x+3) - f(2-x) = 3x + 1$?

2. (У) Найти квадратичную функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных x соотношению $f(1-x) - f(2-x) = -2x + 7$.

3. (У) Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных $x \neq 0$ условию $f(x) + 3x \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x^2$.

4. (У) Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных $x \neq 0$ условию $f(x) + 5x \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x^3$.

5. (У) Сколько решений имеет уравнение $x + [100x] = 100x$, где квадратные скобки означают целую часть числа?

6. (У) Решить неравенство $[x] \cdot \{x\} < x - 1$, где квадратные скобки означают целую часть числа, а фигурные – дробную часть числа.

7. (У) Решить уравнение $\{2\{2x\}\} = x$, где фигурные скобки означают дробную часть числа.

8. (У) Решить уравнение $\max(2x; 3 - x) = \min(5 + 2x; 6x)$.

9. (ЕГЭ.В) Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 2 и $f(-1) = -2$. Найдите значение выражения $3f(5) - 2f(-3)$.

10. (ЕГЭ.В) Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 3 и $f(-1) = 5$. Найдите значение выражения $3f(2) + 2f(5)$.

11. (ЕГЭ.В) Нечётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 2,3 + f(x-9)$ вычислите сумму $g(6) + g(8) + g(10) + g(12)$.

12. (ЕГЭ.В) Чётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = x + (x-7) \cdot f(x-7) + 7$ вычислите сумму $g(5) + g(7) + g(9)$.

13. (ЕГЭ.В) Нечётная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = x(3+x)(x^2-4)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$.

14. (ЕГЭ.В) Чётная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = (x^2+4x)(x^3+8)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$.

15. (ЕГЭ.В) Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке $[-3; 5]$.

16. (ЕГЭ.В) Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0;3]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1;5]$.

17. (Физ-92.7) Известно, что некоторая нечётная функция при $x > 0$ определяется формулой $f(x) = \log_3\left(\dfrac{x}{3}\right)$. Найти, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = 3$.

18. (Почв-00(1).6) Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0;8]$. Решите уравнение $f(2x+16)+23 = 5f(x)$.

19. (Экон-97.5) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $-2 \le x \le 0$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x+2)$. Решить уравнение
$$\frac{2\cdot f(-3-x)-3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)}-\sqrt{2}} = 0.$$

20. (Экон-00.7) Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\dfrac{1}{6};6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x}, \\ 0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$
Решить неравенство $f(x) \le \dfrac{\pi}{8}$.

21. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $f(g(x)) + g(1+f(x)) = 33$, если известно, что $f(x) = x^2 - 6x + 15$ и $g(x) = \begin{cases} 18 & \text{при } x \ge 4, \\ 3^x + \dfrac{12}{5-x} & \text{при } x < 4. \end{cases}$

22. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $f(g(x)) + g(3+f(x)) = 30$, если известно, что $f(x) = 0,5x^4 - 4x + 5$ и $g(x) = \begin{cases} 25 & \text{при } x \ge 4, \\ 2^x + \dfrac{9}{5-x} & \text{при } x < 4. \end{cases}$

6.4. Использование графических иллюстраций

Теоретический материал

Перед тем как решать задачи этого пункта, вспомните графики всех элементарных функций.

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x|x+2a|+1-a=0$ имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$x|x+2a| = a-1.$$

Необходимо найти такие значения параметра a, при которых прямая $y = a-1$ пересекает график функции $f(x) = x|x+2a|$, стоящей в левой части уравнения, ровно в одной точке. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $a = 0$. Тогда

$$x|x| = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1,$$

и в этом случае решение единственно.

2. Пусть $a > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x|x+2a|$ и её график.

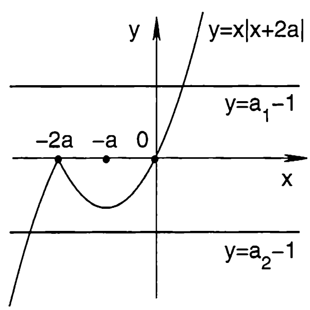


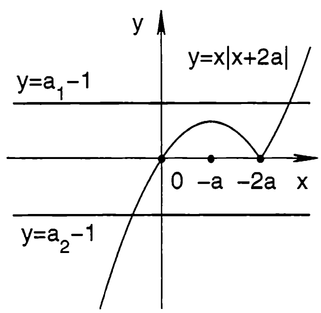
График функции $y = f(x)$ будет пересечён прямой $y = a-1$ единственный раз, если

$$\left[\begin{array}{l} a-1>0; \\ a-1<f(-a); \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a>1; \\ a-1<-a|a|. \end{array}\right.$$

Так как $a > 0$, то модуль раскрывается с плюсом:

$$\left[\begin{array}{l} a>1; \\ a^2+a-1<0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \left(0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

3. Пусть $a < 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x|x+2a|$ и её график.



Прямая $y = a - 1$ пересечёт график функции $y = f(x)$ в единственной точке, если

$$\left[\begin{array}{l} a-1 > f(-a); \\ a-1 < 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} a-1 > -a|a|; \\ a < 1; \end{array}\right. \iff a < 0.$$

Объединяя найденные значения параметра a, получаем ответ.

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. (Геол.ОГ-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

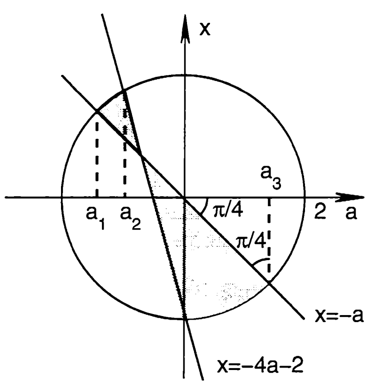
Решение. Разложим левую часть неравенства на множители. Для этого найдём корни квадратного трёхчлена:

$$D = (5a+2)^2 - 4(4a^2 + 2a) = (3a+2)^2 \implies \left[\begin{array}{l} x_1 = -a; \\ x_2 = -4a - 2. \end{array}\right.$$

Следовательно, исходную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} (x - (-a))(x - (-4a - 2)) < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

Изобразим на декартовой плоскости с координатами (a, x) множество точек, которые удовлетворяют этой системе.



Система имеет решения при $a \in (a_1; a_2) \cup (0; a_3)$. Из равнобедренных прямоугольных треугольников легко находим $a_1 = -\sqrt{2}$ и $a_3 = \sqrt{2}$; a_2 определяем из второго уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} (-4a_2 - 2)^2 + a_2^2 = 4, \\ a_2 < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 17a_2^2 + 16a_2 = 0, \\ a_2 < 0; \end{cases} \iff a_2 = -\frac{16}{17}.$$

Ответ. $\left(-\sqrt{2}; -\dfrac{16}{17}\right) \cup \left(0; \sqrt{2}\right)$.

Пример 3. (М/м-96(2).4) При каком значении a сумма различных корней уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a(\operatorname{ctg} x + 2\cos 3x),$$

принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{22\pi}{3}\right]$, максимальна?

Решение. Приведём выражение в правой части уравнения к общему знаменателю и воспользуемся методом расщепления:

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a\frac{\cos x + 2\sin x \cdot \cos 3x}{\sin x} \iff$$

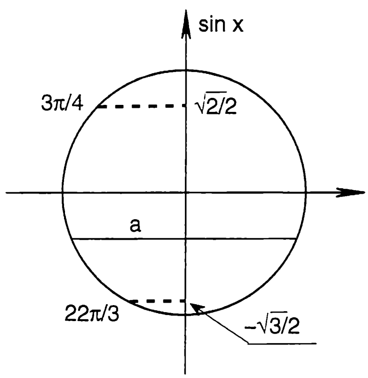
$$\iff \cos x - \sin 2x + \sin 4x = a\frac{\cos x - \sin 2x + \sin 4x}{\sin x} \iff$$

$$\iff \frac{\cos x - \sin 2x + \sin 4x}{\sin x} \cdot (\sin x - a) = 0.$$

Сумма корней этого уравнения может меняться только за счёт решений уравнения

$$\sin x - a = 0.$$

- Сумма корней уравнения $\sin x = a$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 6\pi\right]$ принимает при всех $a \in (-1; 1)$ одинаковое (оно же максимальное) значение. Действительно, при увеличении параметра a каждый из двух корней уравнения, лежащих на правой полуокружности тригонометрической окружности, увеличивается ровно настолько, насколько уменьшается каждый из двух корней, лежащих на левой полуокружности.



- На промежутке $\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi; \frac{22\pi}{3}\right]$ корень принимает наибольшее значение при $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- На промежутке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$ сумма корней максимальна при всех $a \in \left(-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Следовательно, на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{22\pi}{3}\right]$ сумма корней максимальна при $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. При найденном значении параметра a $\sin x \neq 0$ (то есть решения принадлежат ОДЗ) и корни уравнения

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

не совпадают с корнями уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = 0.$$

Действительно, если $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$|\cos x| = \frac{1}{2},$$

$$|\sin 2x| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$|\cos 2x| = \frac{1}{2},$$

$$|\sin 4x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и, наконец,

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0.$$

О т в е т. $-\sqrt{3}/2$.

Задачи

1. (Геогр-92.5) Найти все значения параметра c, при которых уравнение $|x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| = x^2 - 4x + c$ имеет ровно три различных решения.

2. (Почв-96.6) Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

3. (Экон-83.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x - a = 2 \cdot |\, 2 \cdot |x| - a^2 \,|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

4. (Геогр-94(1).6) Найти все значения a, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = a$$

существуют и принадлежат отрезку $[2; 17]$.

5. (Геогр-94.5) Найти все значения a, при которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

6. (ВМК-96.5) Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58=0, \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104}=2\sqrt{29}. \end{cases}$$

7. (Псих-97.6) Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=b^2+2x-4y, \\ x^2+(12-2a)x+y^2=2ay+12a-2a^2-27 \end{cases}$$

имеет два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2), удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}.$$

8. (Хим-87.5) Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \le 1$.

9. (Экон.М-97.6) Найти все значения параметра a, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием

$$\log_{\left(\frac{2-|ay|}{3}\right)}\left(\frac{a^2+x^2}{2a^2}\right)>0,$$

будет наименьшим.

10. (М/м-94(1).6) Найти все значения $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для каждого из которых уравнение

$$\sin 2x+\sin x+\sin(x-\alpha)=\sin\alpha+\sin(x+\alpha)$$

имеет ровно пять различных корней на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

11. (М/м-99.3) При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{3x}{2}+\varphi\right)=\sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

12. (М/м-00.5) Найти все a, при которых уравнение

$$(|a|-1)\cos 2x+(1-|a-2|)\sin 2x+(1-|2-a|)\cos x+ +(1-|a|)\sin x=0$$

имеет нечётное число решений на интервале $(-\pi;\pi)$.

13. (ВКНМ-00(1).6) Решить уравнение $x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x$.

14. (Георг-99.4) Найти все значения параметра a, при которых среди корней уравнения
$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$
найдутся два корня, разница между которыми равна $\dfrac{3\pi}{2}$.

15. (ЕГЭ.В) При каком натуральном значении a уравнение
$$x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$$
имеет ровно два корня?

16. (ЕГЭ.В) При каком значении b уравнение
$$x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x + b = 0$$
имеет ровно три корня?

17. (ЕГЭ.С) Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства
$$x(x - 2a - 4) < \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$$
нельзя расположить два отрезка длиной $1,5$ каждый, которые не имеют общих точек.

7. Метод оценок

В этом параграфе приведены задачи, при решении которых используется ограниченность функций, входящих в уравнения и неравенства.

7.1. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства

Теоретический материал

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* на некотором множестве D, если существует такое число M, что для любых значений $x \in D$ выполняется условие: $f(x) \le M$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу* на некотором множестве D, если существует такое число m, что для любых значений $x \in D$ выполняется условие: $f(x) \ge m$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве D, если существуют такие числа m и M, что для любых значений $x \in D$ выполняется условие: $m \le f(x) \le M$.

Определение 3а. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве D, если существует такое число M, что для любых значений $x \in D$ выполняется условие: $|f(x)| \le M$ (это определение эквивалентно определению 3).

Полезно помнить следующие факты:

- $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$, если $a > 0$, причём равенство достигается при $a = 1$;
- $a + \dfrac{1}{a} \le -2$, если $a < 0$, причём равенство достигается при $a = -1$;
- функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ ограничена значением $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ снизу при $a > 0$ и сверху при $a < 0$;
- если $f(x) \ge 0$ и $g(x) \ge 0$, то
$$f(x) + g(x) = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0; \end{cases}$$
- если $f(x) \ge a$, $g(x) \le a$, то
$$f(x) = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a; \end{cases}$$
- если $|f(x)| \ge a$, $|g(x)| \ge b$, $a > 0$, $b > 0$, то
$$f(x) \cdot g(x) = ab \iff \begin{cases} |f(x)| = a, \\ |g(x)| = b; \end{cases}$$
причём $f(x)$ и $g(x)$ одного знака;
- если $|f(x)| \ge a$, $|g(x)| \le b$, $a > 0$, $b > 0$, то
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \iff \begin{cases} |f(x)| = a, \\ |g(x)| = b. \end{cases}$$
причём $f(x)$ и $g(x)$ одного знака.

Заметим, что мы выписали здесь не все случаи применения оценок в суммах, произведениях и частных. Однако если вам понятно всё, что написано выше, то вы сможете сами распространить метод оценок и на другие случаи.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x}(y-1) + \sqrt{y}(x-1) = \sqrt{2xy}, \\ y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} = xy. \end{cases}$$

Решение. Из условия неотрицательности подкоренных выражений следует, что $x \geq 1$ и $y \geq 1$. Разделим второе уравнение системы на xy :

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-1}}{y}=1 \iff \sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}}=1 \iff$$

$$\iff \sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right)^2}=1.$$

Так как $\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)^2} \leq \frac{1}{2}$ и $\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right)^2} \leq \frac{1}{2}$, то

$$\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right)^2} \leq 1,$$

следовательно, равенство может выполняться только при $x = y = 2$. Проверкой убеждаемся, что эти значения переменных являются решениями и первого уравнения системы.

Ответ. $(2; 2)$.

Задачи

1. (У) Решить уравнение $\sqrt{x^7+1}+\sqrt{1-x^5}=8$.
2. (У) Решить уравнение $|x|^3+|x-1|^3=9$.
3. (У) Решить уравнение $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}=x^2-6x+11$.
4. (У) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\dfrac{2x^2}{x^4+1}$.
5. (У) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.
6. (У) Найти область значений функции $y=\sqrt{x^2-1}-x$.
7. (У) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.
8. (У) Найти все решения системы

$$\begin{cases} x^5+y^5=1, \\ x^6+y^6=1. \end{cases}$$

9. (У) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1. \end{cases}$$

10. (У) Решить неравенство $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+x^2-5x+6<0$.

11. (У) Найти максимальное значение выражения $|x|\sqrt{16-y^2}+|y|\sqrt{4-x^2}$.

12. (Геол-98.8) При каких значениях a уравнение

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x-1=0$$

имеет хотя бы одно решение?

13. (Биол-93.6) Найти все решения системы $\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)\cdot(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x; \end{cases}$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

14. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4$.

15. (Геогр-81.5) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$

7.2. Тригонометрические уравнения и неравенства

Теоретический материал

В этом разделе приведены задачи, при решении которых используется ограниченность тригонометрических функций:

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1,$$

$$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi, \quad |\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Перед тем, как приступить к решению задач, рекомендуется повторить приёмы, приведённые в предыдущем разделе, и все тригонометрические формулы.

Примеры решения задач

Пример 1. (Псих-78.4) Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=4x+\frac{9\pi^2}{x}+\sin x$$

при $x>0$.

Решение. Применим теорему о сумме двух взаимно обратных положительных чисел:

$$4x+\frac{9\pi^2}{x}=2\cdot 3\pi\left(\frac{2x}{3\pi}+\frac{3\pi}{2x}\right)\geq 6\pi\cdot 2=12\pi,$$

причём равенство достигается при $\frac{2x}{3\pi}=1 \iff x=\frac{3\pi}{2}$. Значит,

$$\min_{0<x<+\infty}\left(4x+\frac{9\pi^2}{x}\right)=12\pi \quad \text{при} \quad x=\frac{3\pi}{2}.$$

Так как при $x = \dfrac{3\pi}{2}$ функция $y(x) = \sin x$ также принимает своё наименьшее значение, равное -1, то

$$\min_{0<x<+\infty} f(x) = 12\pi - 1.$$

Ответ. $12\pi - 1$.

Пример 2. (Почв-94.4) Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \le 1, \\ x^2 + ax + 1 \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Для того, чтобы у второго неравенства были решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трёхчлена был неотрицательным:

$$D = a^2 - 4 \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a| \ge 2.$$

Первое неравенство равносильно неравенству

$$\sin bx \le 1 - a.$$

1) Пусть $a \le -2$. Тогда $1 - a \ge 3$. В этом случае первое неравенство системы верно для любого $x \in \mathbb{R}$. Система будет иметь единственное решение, если второе неравенство имеет только одно решение, что произойдёт при

$$D = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = -2.$$

Значение параметра b при этом может быть любым.
2) Пусть $a \ge 2$. Тогда $1 - a \le -1$, и первое неравенство будет иметь решения, если $1 - a = -1 \iff a = 2$. Система принимает вид:

$$\begin{cases} \sin bx = -1, \\ x^2 + 2x + 1 \le 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} bx = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -1; \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ. $(-2; b)$, $b \in \mathbb{R}$; $\left(2; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. (ИСАА-93.5) Решить уравнение $\sin^2 x + 3x^2 \cos x + 3x^2 = 0$.

Решение. Сгруппируем слагаемые:

$$\sin^2 x + 3x^2(\cos x + 1) = 0.$$

Так как $\cos x \ge -1$, то в левой части уравнения стоит сумма двух неотрицательных выражений. Она будет равна нулю, только если каждое из слагаемых равно нулю:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 3x^2(\cos x + 1) = 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ \cos x = -1; \end{array} \right. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ. 0; $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. (Хим-94(1).5) При каких значениях q разрешима система

$$\begin{cases} x^2+qx+3=0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \dfrac{\pi x}{2} + 2^{y^2} = \sin \dfrac{\pi x}{2}\ ? \end{cases}$$

Найти эти решения.

Решение. Так как левая часть второго уравнения не меньше 1, а правая часть, наоборот, не превосходит 1, то исходная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x^2+qx+3=0, \\ \sin q\pi = 0, \\ \cos \dfrac{\pi x}{2} = 0, \\ y=0, \\ \sin \dfrac{\pi x}{2} = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2-12}}{2}, \\ |q| \ge \sqrt{12}, \\ q \in \mathbb{Z}, \\ y = 0, \\ x = 1+4n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнений получаем:

$$(2(1+4n)+q)^2 = q^2 - 12 \quad\iff\quad q = -\frac{3}{1+4n} - (1+4n).$$

Так как $q \in \mathbb{Z}$, то знаменатель дроби может принимать одно из четырёх значений.
1) $1+4n=-3 \iff n=-1$. В этом случае $q=4$, $x=-3$, $y=0$.
2) $1+4n=-1 \iff n=-0,5$. Не подходит, так как $n \in \mathbb{Z}$.
3) $1+4n=1 \iff n=0$. В этом случае $q=-4$, $x=1$, $y=0$.
4) $1+4n=3 \iff n=0,5 \notin \mathbb{Z}$.

Ответ. При $q=4$ $x=-3$, $y=0$; при $q=-4$ $x=1$, $y=0$.

Пример 5. (Биол-90.5) Найти все значения a, b, x, y, z, при которых выполняются соотношения

$$\begin{cases} 1+\operatorname{tg}(bz)\cdot\sin^2(xy)+\cos(2xy) \le (\cos x + \sin(ay))\cdot|\sin(2xy)|, \\ 2+2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)}\cdot\cos(b(y+x))+\cos(2b(y+x))=0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Сделав замену $t=\cos(b(y+x))$, приведём его к квадратному уравнению относительно t:

$$2+2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)}\cdot t + 2t^2 - 1 = 0 \quad\iff\quad 2t^2+2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)}\cdot t + 1 = 0.$$

Полученное уравнение имеет решения, если $D \ge 0$, то есть $\operatorname{tg}(bz) \ge 2$.
Рассмотрим первое неравенство исходной системы. Преобразуем левую часть:

$$1+\operatorname{tg}(bz)\cdot\sin^2(xy)+\cos(2xy) = 1+\operatorname{tg}(bz)\cdot\sin^2(xy)+1-2\sin^2(xy) =$$

$$= 2+\sin^2(xy)\cdot(\operatorname{tg}(bz)-2) \ge 2.$$

Правая часть неравенства, в свою очередь, не превосходит 2. Следовательно, неравенство переходит в равенство, и исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}(bz) = 2; \\ \sin(xy) = 0; \end{array}\right. \\ \cos x = 1, \\ \sin(ay) = 1, \\ \sin(2xy) = \pm 1, \\ 2 + 2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)} \cdot \cos(b(y+x)) + \cos(2b(y+x)) = 0. \end{cases}$$

Так как $\sin(2xy) = \pm 1$, то $\sin(xy) \neq 0$. Подставив $\operatorname{tg}(bz) = 2$ в последнее уравнение, получим

$$\left(\cos(b(y+x)) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0.$$

Итак, решаем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(bz) = 2, \\ \cos x = 1, \\ \sin(ay) = 1, \\ \sin(2xy) = \pm 1, \\ \cos(b(y+x)) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} bz = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ ay = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ xy = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi l}{2},\ l \in \mathbb{Z}, \\ b(y+x) = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отсюда сразу получаем ответ.

Ответ. $x = 2\pi k$, $y = \dfrac{1+2l}{8k}$, $a = \dfrac{4\pi k(1+4m)}{1+2l}$, $b = \dfrac{2\pi k(8p \pm 3)}{16\pi k^2 + 2l + 1}$, $z = (\operatorname{arctg} 2 + \pi n) \cdot \dfrac{16\pi k^2 + 2l + 1}{2\pi k(8p \pm 3)}$; $k, l, m, n, p \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

Пример 6. (Геогр-88.5) Доказать, что при каждом $x > 0$ выполнено неравенство $x^2 + \pi x + \dfrac{15}{2}\pi \cdot \sin x > 0$.

Решение. В силу ограниченности функции $f_1(x) = \sin x$ справедлива оценка

$$x^2 + \pi x + \frac{15\pi}{2} \cdot \sin x \geq x^2 + \pi x - \frac{15\pi}{2}.$$

Рассмотрим функцию $f_2(x) = x^2 + \pi x - \dfrac{15\pi}{2}$. Корни квадратного трёхчлена

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{\pi^2 + 30\pi} - \pi}{2}.$$

Значит, при $0 < x < \dfrac{\sqrt{\pi^2 + 30\pi} - \pi}{2}$ $f_2(x) < 0$, при $x > \dfrac{\sqrt{\pi^2 + 30\pi} - \pi}{2}$ $f_2(x) > 0$.

1) Заметим, что $\dfrac{\sqrt{\pi^2+30\pi}-\pi}{2} < \dfrac{7\pi}{6}$, поэтому при $x > \dfrac{7\pi}{6}$ исходное неравенство верно. Для оставшихся значений переменной x рассмотрим два случая.

2) При $x \in (0;\pi)$ в левой части исходного неравенства стоит сумма двух положительно определённых функций $g(x) = x^2 + \pi x > 0$ и $h(x) = \dfrac{15\pi}{2} \cdot \sin x > 0$. Значит, на рассматриваемом промежутке неравенство выполнено.

3) Пусть $x \in \left[\pi; \dfrac{7\pi}{6}\right]$. Оценим значения функций $g(x)$ и $h(x)$ снизу:

$$g(x) = x^2 + \pi x \geq 2\pi^2 > 4\pi;$$

$$h(x) = \frac{15\pi}{2} \cdot \sin x \geq \frac{15\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15\pi}{4} > -4\pi.$$

Значит, для суммы справедлива оценка

$$g(x) + h(x) > 4\pi - 4\pi = 0.$$

Объединяя все случаи, убеждаемся в том, что при $x > 0$ исходное неравенство верно.

Задачи

1. (У) Решить уравнение $2\sin x = y + \dfrac{1}{y}$.

2. (У) Найти наибольшее значение функции $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$.

3. (У) Решить уравнение $\sin^2(\pi x) + \sqrt{x^2+3x+2} = 0$.

4. (У) Решить уравнение $x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0$.

5. (У) Решить неравенство $|\operatorname{tg}^3 x| + |\operatorname{ctg}^3 x| \leq 2 - \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2$.

6. (У) Решить уравнение $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

7. (У) Решить неравенство $y - \dfrac{1}{|\cos x|} - \sqrt{1-y-x^2} \geq 0$.

8. (У) Решить уравнение $\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 2 = \dfrac{2}{\pi}\arcsin y$.

9. (У) Определить множество значений функции $y = \arccos\dfrac{1}{x}$.

10. (У) Решить уравнение $\sin 7x \cdot \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3}$.

11. (У) Решить уравнение $\sin 9x \cdot \sin x + \cos x = \dfrac{3}{2}$.

12. (ВМК-92.2) Решить уравнение $\sqrt{1+\cos 4x} \cdot \sin x = 2\sin\dfrac{\pi}{4}$.

13. (Геогр-96(1).3) Решить уравнение $\cos\left(\dfrac{3\pi+1}{2}x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi-1}{2}x\right)=1.$

14. (Экон.М-97.2) Решить систему неравенств $\begin{cases} \left|\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2}\right|+(x-y-2)^2\le 0, \\ |2x+3|\le 2. \end{cases}$

15. (М/м-93(1).4) При каких значениях $a\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$ уравнение $\sqrt{2\cos(x+a)-1}=\sin 6x-1$ имеет решения?

16. (Псих-92.1) Решить неравенство $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\le\dfrac{\sin x-3}{\sqrt{2}}.$

17. (У) Найти все значения целочисленного параметра a, при которых разрешимо уравнение $\sin x-\sin ax=-2.$

18. (У) Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что

$$|\sin 81^\circ-a|<0,01.$$

19. (Псих-93.3) Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin 3x=\cos 3x-\sqrt{2}$$

на отрезке $[-2\pi;2\pi]$.

20. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $7\,\mathrm{tg}\,x+\cos^2 x+3\sin 2x=1$.

21. (Хим-94.5) Решить систему $\begin{cases} x^2+2x\sin y+1=0, \\ 8|x|y(x^2+y^2)+\pi^3+4\pi=0. \end{cases}$

22. (Экон-78.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a(4-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a>0$ выполняется для всех значений x.

23. (ВМК-83.6) Найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие условию

$$\sqrt{2-|y|}\cdot(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5}{4}\pi^2.$$

24. (Геол-92.6) Найти все тройки чисел (x,y,z), удовлетворяющие уравнению

$$x^2+1-2x\sin\pi y+\sqrt{yz-2z^2-64}=(41-yz)\cdot(\cos 2\pi y+\cos\pi z)^2.$$

25. (Хим-91.4) Решить уравнение $\cos^4 x=\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x\cdot\cos 8x.$

26. (ВМК-86.5) Решить уравнение $\sin 3x-2\sin 18x\sin x=3\sqrt{2}-\cos 3x+2\cos x.$

7.3. Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями

Примеры решения задач

Пример 1. (Псих-97.4) При каких действительных p уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\left(4^x + \frac{1}{4^x}\right) + 4\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) + 7 = p.$$

Так как по теореме о сумме двух взаимно обратных чисел

$$4^x + \frac{1}{4^x} \geq 2, \quad 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2,$$

и равенства в обоих случаях достигаются при $x = 0$, то выражение, стоящее в левой части уравнения, не меньше, чем $2 + 4 \cdot 2 + 7 = 17$, и в силу непрерывности входящих в него функций принимает все значения, большие или равные 17. Значит, данное уравнение будет иметь решения при $p \geq 17$.

Ответ. $[17; +\infty)$.

Пример 2. (Экон.В-98.4) Решить уравнение

$$25 \cdot 3^{|x-5|+|x-3|} + 9 \cdot 5^{|x-4|+|x-6|} = 450.$$

Решение. Разделим обе части уравнение на $5^2 \cdot 3^2$:

$$3^{|x-3|+|x-5|-2} + 5^{|x-4|+|x-6|-2} = 2.$$

Так как для любых действительных x верны неравенства

$$|x-3| + |x-5| \geq 2; \quad |x-4| + |x-6| \geq 2;$$

(докажите это самостоятельно!), то левая часть уравнения больше или равна правой, причём равенство достигается в случае

$$\begin{cases} |x-3| + |x-5| = 2, \\ |x-4| + |x-6| = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x-5 \leq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x-6 \leq 0; \end{cases} \iff 4 \leq x \leq 5.$$

Ответ. $[4; 5]$.

Задачи

1. (У) Решить уравнение $\ln x + \dfrac{1}{\ln x} = 2 \cdot \sin(x + \pi/4)$.

2. (У) Решить уравнение $2^{1-|x|} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

3. (ИСАА-97.4) Решить неравенство $\log_{0,5}|1-x| - \log_{x-1} 2 \le 2$.

4. (У) Решить неравенство $\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \le 0$.

5. (У) Доказать, что уравнение $2^{x^2} \cdot 3^{-x} = \dfrac{2}{5}$ не имеет решений.

6. (У) Решить неравенство $\cos^2(x+1)\lg(9 - 2x - x^2) \ge 1$.

7. (У) Решить неравенство $3^{2x/3} \cdot \sin x > \sqrt{2}$ при $x \in \left[1; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

8. (У) Решить уравнение $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 1,5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$.

9. (У) Решить неравенство $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) \ge 1$.

10. (У) Решить неравенство $(3 - \cos^2 x - 2\sin x)\cdot(\lg^2 y + 2\lg y + 4) \le 3$.

11. (Биол-81.4) Решить неравенство $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$.

12. (Псих-79.2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6, \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1. \end{cases}$$

13. (Физ-96(2).8) Для каждого значения a решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

14. (Хим-93(1).5) Решить уравнение $2\left(1 + \sin^2(x-1)\right) = 2^{2x-x^2}$.

15. (Геогр-94(1).4) Решить уравнение $\log_{0,5}(\operatorname{tg}\pi x + \operatorname{ctg}\pi x) = 8(2x^2 + 3x + 1)$.

16. (У) Решить неравенство $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \ge 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

17. (Филол-98.5) Решить неравенство $\sqrt[4]{13 + 3^{\left(3^{1-\cos x}\right)}} \le \sqrt{5 \cdot 2^{-2x^2} - 1}$.

18. (ВМК-81.4) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие равенству $(a+2)^2\log_3(2x - x^2) + (3a-1)^2\log_{11}\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 0$.

19. (Геогр-83.4) Найти все пары чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет условиям $\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \le 8. \end{cases}$

20. (Почв-89.5) Решить неравенство

$$(x^2-4x+3)\cdot\log_{1/\sqrt{2}}\left(\cos^2\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)\geq 2.$$

21. (Геол-95(1).9) Для каждого значения a решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)}=5^{-|x|\cdot(x+1)^2},\\ x\leq 1.\end{cases}$$

22. (М/м-97(1).5) Решить систему

$$\begin{cases}|x+1|-1\leq x,\\ (2^x+2^{x-2}+2^{2-x})\cos\dfrac{\pi x}{2}+\cos(\pi x)+3+2^{2x-3}=0.\end{cases}$$

23. (ЕГЭ.С) Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $3\sin a+5$ и $9\cos 2a-36\sin a-18$ являются решениями неравенства $\dfrac{(25x-3x^2+18)\sqrt{x-1}}{\log_4|x-7|-1}\geq 0$.

24. (ЕГЭ.С) Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a\cdot 2^{a-4}$ и $a^2\cdot 4^{a-4}+104-5a\cdot 2^{a-2}$ являются решениями неравенства $\log_{10,5-x}\left(\log_2\dfrac{x-2}{x-3}\right)\geq 0$.

8. Задачи на доказательство

8.1. Тригонометрические задачи на доказательство

Теоретический материал

Перед тем как приступить к изучению этого раздела, необходимо повторить все основные тригонометрические факты и формулы.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что $\dfrac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\sqrt{3}$.

Решение. Воспользуемся в числителе левой части равенства формулами разности косинусов, приведения и разности синусов:

$$\frac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\cos 40^\circ+(\cos 40^\circ-\cos 20^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{\cos 40^\circ-2\sin 30^\circ\cdot\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 40^0-\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 50^\circ-\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\sqrt{3},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать равенство $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

Решение. Умножим и разделим левую часть равенства на $2\sin\dfrac{\pi}{7}\neq 0$ и воспользуемся в числителе формулой преобразования произведения тригонометрических функций:

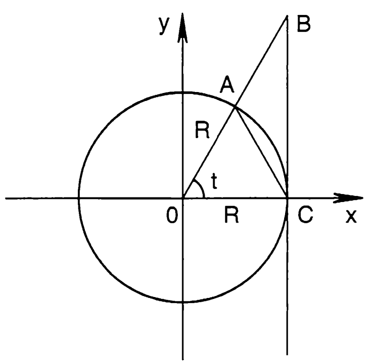
$$\frac{2\sin\dfrac{\pi}{7}\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin\dfrac{3\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{5\pi}{7}-\sin\dfrac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\dfrac{5\pi}{7}}{2\sin\dfrac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

Равенство доказано.

Пример 3. Доказать, что $\sin t<t<\operatorname{tg}t$ при $0<t<\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим окружность радиуса R. Пусть угол AOC равен t. Тогда площадь треугольника AOC равна $\dfrac{1}{2}R^2\sin t$, а площадь сектора AOC равна $\dfrac{1}{2}R^2 t$.



Площадь сектора AOC больше площади треугольника AOC, то есть

$$\frac{1}{2}R^2\sin t<\frac{1}{2}R^2 t \quad\Longleftrightarrow\quad \sin t<t.$$

Площадь треугольника OCB равна $\dfrac{1}{2}R^2\operatorname{tg}t$. Она больше площади сектора AOC, то есть

$$\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}t>\frac{1}{2}R^2 t \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{tg}t>t,$$

что и требовалось доказать.

Задачи

1. Доказать, что $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2$.

2. Доказать, что $\frac{1}{4} \le \sin^6 x + \cos^6 x \le 1$.

3. Доказать, что $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0$.

4. Доказать, что $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

5. Доказать равенство $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

6. Доказать, что $\sin(\pi + \alpha) \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{4}$.

7. При всех значениях $\alpha \ne \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ доказать неравенство
$$3(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 8(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) + 10 \ge 0.$$

8. При всех значениях $\beta \ne \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ доказать неравенство
$$\frac{3(1 + \cos^2 2\beta)}{\sin^2 2\beta} - \frac{8}{\sin 2\beta} + 5 \ge 0.$$

9. Доказать равенство $\dfrac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3$.

10. Доказать, что $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{5}$.

11. Доказать, что $\frac{\pi}{4} < \arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{2}{3}$.

12. Доказать, что $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$.

13. Доказать, что если $0 \le x \le 1$, то $x \sin x + \cos x \ge 1$.

14. Доказать справедливость неравенства $\arcsin x \cdot \arccos x \le \frac{\pi^2}{16}$ и указать, при каких значениях x выполняется равенство.

15. Зная, что $\sin \alpha > 0$ и $\sin 3\alpha > \frac{1}{4}$, доказать, что $\sin \alpha > \frac{109}{1296}$.

16. Доказать, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

17. Имеет ли смысл выражение $\arcsin\left(\sqrt{32} \sin \frac{\pi}{11}\right)$?

18. Имеет ли решение уравнение $\cos(\sin 7x) = \frac{\pi}{5}$?

19. Доказать справедливость неравенства $\cos(\cos x) > 0,5$.

20. Доказать справедливость неравенства $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

8.2. Метод математической индукции

Теоретический материал

Метод математической индукции заключается в следующем.

Пусть есть некое утверждение, зависящее от n, $n \in \mathbb{N}$. Требуется доказать, что оно верно при всех натуральных $n \geq n_0$.

Базис индукции. Проверяется его справедливость при $n = n_0$.

Предположение индукции. Предполагается истинность этого утверждения при $n = k \geq n_0$.

Индукционный шаг. На основании этой информации доказывается выполнение утверждения при $n = k+1$. Тогда данное утверждение справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$.

Метод математической индукции позволяет строго и быстро доказать многие утверждения и теоремы. Обратите внимание на то, что переменная n принимает значения из множества целых чисел. Это принципиально важно! В других случаях метод не применим.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$1^2 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{6} \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что равенство справедливо при $n = k$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

и докажем его истинность при $n = k+1$. То есть нам надо доказать, что

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Выпишем левую часть равенства и используем предположение индукции:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Таким образом, утверждение при $n = k+1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Пример 2. Доказать неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \text{где} \quad x>-1, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n=1$. Получим

$$1+x \geq 1+x \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что неравенство справедливо при $n=k$:

$$(1+x)^k \geq 1+kx$$

и докажем его истинность при $n=k+1$. То есть нам надо доказать, что

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$$

Выпишем левую часть неравенства и используем предположение индукции:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.$$

Таким образом, утверждение при $n=k+1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Замечание. Равенство в неравенстве Бернулли достигается только при $n=1$ или при $x=0$. При остальных n и x неравенство Бернулли является строгим.

Задачи

1. Доказать, что $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
2. Доказать, что $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
3. Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
4. Доказать для любого натурального n равенство
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$
5. Доказать, что $(n-1)!>2^n$ $\forall n\geq 6$.
6. Доказать, что неравенство $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ выполняется при любом натуральном $n\geq 2$.
7. Доказать, что $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
8. Доказать, что $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
9. Доказать, что $2^n>n^2$ $\forall n\geq 5$.

10. Доказать, что $1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

11. Доказать,что при любом натуральном n выполняется неравенство

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

12. Доказать, что $4^n+15n-1 \,\vdots\, 9 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

13. Доказать, что $7^n+12n+17 \,\vdots\, 18 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

8.3. Доказательство неравенств и тождеств

Теоретический материал

При доказательстве неравенств из этого раздела могут оказаться полезными следующие утверждения:

- (*оценка суммы двух взаимно обратных величин*)
  $\left|a+\frac{1}{a}\right|\ge 2$, где $a\ne 0$; равенство достигается при $a=\pm 1$;
- (*среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического*)
  $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$, где $x,y\ge 0$; равенство достигается при $x=y$;
- (*модуль суммы не превосходит суммы модулей*)
  $|x|+|y|\ge|x+y|$; равенство достигается, когда $x\cdot y\ge 0$;
- (*неравенство Бернулли*)
  $(1+x)^n\ge 1+nx$, где $x>-1$ и $n\in\mathbb{N}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\ge 8abc$ при $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$.

Решение. Поскольку среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, справедливы следующие неравенства:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab},\quad b+c\ge 2\sqrt{bc},\quad c+a\ge 2\sqrt{ca}.$$

Перемножив их, получим нужное неравенство.

Пример 2. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на сумму $(a+b+c)$:

$$3+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\ge 9 \iff \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\ge 6.$$

Справедливость последнего неравенства следует из свойства суммы двух взаимно обратных положительных чисел, в соответствии с которым

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2,\quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2.$$

Неравенство доказано.

Пример 3. Доказать неравенство $\dfrac{1}{15}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$.

Решение. Правильная положительная дробь увеличивается с увеличением числителя и знаменателя на одно и тоже положительное число, то есть $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$, где $0<a<b$, $c>0$. В этом легко убедиться непосредственной проверкой:

$$\frac{a+c}{b+c}-\frac{a}{b}=\frac{c(b-a)}{b(b+c)}>0.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4}<\dfrac{4}{5}$,... Пусть $A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}$; тогда

$$A<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101\cdot A},$$

откуда

$$A^2<\frac{1}{101}\quad\Longrightarrow\quad A<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}.$$

Оценим A снизу:

$$\frac{3}{4}>\frac{2}{3};\ \frac{5}{6}>\frac{4}{5};\ \ldots;\ \frac{99}{100}>\frac{98}{99}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{98}}=\frac{1}{200\cdot A}\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad A^2>\frac{1}{200}>\frac{1}{225}\quad\Longrightarrow\quad A>\frac{1}{15}.$$

Неравенство доказано.

Задачи

1. Доказать, что для любых $a\neq 0$, $b\neq 0$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{b^2+1}{b}\right)^2>15.$$

2. Доказать, что $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$.

3. Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство $x+y+\dfrac{1}{xy}\geq 3$.

4. Доказать, что если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

5. Доказать неравенство $\lg 8 \cdot \lg 12 < 1$.

6. Доказать, что если для неотрицательных чисел $xy+yz+zx=1$, то $x+y+z>1$.

7. Сравнить $2^{x-1}+2^{y-1}$ и $\sqrt{2^{x+y}}$.

8. Доказать неравенство $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{100^2}<\dfrac{99}{100}$.

9. Доказать, что если $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$, то $|ac-bd| \leq 1$.

10. Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3} \leq \sqrt{\dfrac{a+b+c}{3}}$.

11. Доказать, что $\dfrac{1}{\log_2 \pi}+\dfrac{1}{\log_5 \pi}+\dfrac{1}{\log_{10} \pi}>4$.

12. Доказать неравенство $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ для произвольных чисел a, b, c, d.

13. Доказать,что для любого значения переменной x выполняется неравенство

$$x^{12}-x^9+x^6-x^3+1>0.$$

14. Доказать, что если $a+b \geq 1$, то $a^4+b^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

15. Доказать, что если $|x-a|+|y-b|<c$, то $|xy-ab|<(|a|+|b|+|c|)c$.

16. Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \leq \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$.

17. Пусть $0 \leq x, y, z \leq \pi$. Доказать, что $\sin \dfrac{x+y+z}{3} \geq \dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{3}$.

18. Доказать, что для любого значения x выполняется неравенство $2^x>x$.

19. Пусть a, b, c — попарно взаимно простые числа, причём $a \neq 1$. Доказать, что они не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

20. Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

21. Могут ли различные числа a_k, a_m, a_n быть одноимёнными членами как арифметической, так и геометрической прогрессий?

22. Положительные числа $a_1, a_2, ..., a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

23. Доказать, что если числа a_1, a_2, ... , a_n отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

24. В арифметической прогрессии $S_m = S_n$ $(m \neq n)$. Доказать,что $S_{m+n} = 0$.

25. Пусть a, b, c — различные простые числа, каждое из которых больше 3. Доказать, что если они образуют арифметическую прогрессию, то её разность кратна 6.

9. Использование особенностей условия задачи

9.1. Оптимизация процесса решения, введение функций, искусственное введение параметров, смена ролей параметра и переменной

Теоретический материал

Любая сложная задача может быть сведена к более простой с помощью различных следствий. Упрощающие предположения основаны на свойствах и особенностях функций, простейшими из которых являются монотонность и ограниченность. После каждого упрощения полезно заново формулировать условие, что особенно важно в задачах с параметрами. Рассмотрим несколько стандартных приёмов.

- Допустим, необходимо решить уравнение $f(x) = c$, где $f(x)$ – возрастающая функция. В силу монотонности функция может принимать значение c не более, чем в одной точке. Нужное значение аргумента нередко легко угадывается.

- Если исходное уравнение может быть представлено в виде равенства композиций функций $y = f(t)$ и $t = g(x)$ или $t = h(x)$, то есть $f(g(x)) = f(h(x))$, где $f(t)$ – монотонная функция, то равенство значений функции $f(t)$ эквивалентно равенству значений её аргументов: $g(x) = h(x)$.

- Если в результате преобразований исходного уравнения удалось разделить переменные, то есть представить его в виде $f(x) = g(y)$, необходимо прежде всего проверить, не являются ли функции $f(x)$ и $g(y)$ ограниченными: одна снизу, а вторая сверху.

Для оптимизации процесса решения в ряде задач полезно использовать метод введения новых параметров, изначально в задаче не содержащихся. Он даёт хорошие результаты в тех случаях, когда, например, требуется найти наибольшее и/или наименьшее значение функции нескольких переменных, связанных дополнительными условиями.

В некоторых задачах с параметром логически оправданным является нетривиальный подход к решению, основанный на смене ролей неизвестной величины и параметра. Он отлично себя зарекомендовал в тех случаях, когда смена ролей приводит к существенному упрощению (прежде всего в смысле восприятия) постановки задачи.

Примеры решения задач

Пример 1. (Хим-89.5) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$. Она нечётная, монотонно возрастает. Докажем эти свойства.

- Функция $f(t)$ определена на всём множестве действительных чисел; $f(-t)=-t\left(2+\sqrt{(-t)^2+3}\right)=-f(t)$, то есть $f(t)$ нечётная.
- Докажем монотонность. Возьмём два значения аргумента t_1 и t_2 такие, что $t_2>t_1$. Рассмотрим разность:

  $$f(t_2)-f(t_1)=2(t_2-t_1)+t_2\sqrt{t_2^2+3}-t_1\sqrt{t_1^2+3};$$

  первое слагаемое положительно по предположению. Рассмотрим остальные:

  – если $0\le t_1<t_2$, то $t_2\sqrt{t_2^2+3}-t_1\sqrt{t_1^2+3}>$
  $>t_2\sqrt{t_1^2+3}-t_1\sqrt{t_1^2+3}=(t_2-t_1)\sqrt{t_1^2+3}>0$;

  – если $t_1<0\le t_2$, то $t_2\sqrt{t_2^2+3}\ge 0$ и $-t_1\sqrt{t_1^2+3}>0$;

  – если $t_1<t_2<0$, то $t_2\sqrt{t_2^2+3}-t_1\sqrt{t_1^2+3}>$
  $>t_2\sqrt{t_2^2+3}-t_1\sqrt{t_2^2+3}=(t_2-t_1)\sqrt{t_2^2+3}>0$;

  значит, $f(t_2)>f(t_1)$, то есть функция возрастает на всей области определения.

Исходное уравнение может быть представлено в виде:

$$f(2x+1)=-f(3x);$$

воспользуемся нечётностью функции $f(t)$:

$$f(2x+1)=f(-3x);$$

воспользуемся монотонностью:

$$2x+1=-3x \iff x=-\frac{1}{5}.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{5}$.

Пример 2. (Хим-97.6) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения x^2+2y^2, если $x^2-xy+2y^2=1$.

Решение. Введём обозначение: $a=x^2+2y^2$. Переформулируем условие задачи: требуется найти наибольшее и наименьшее значения параметра a, при которых система $\begin{cases} a=x^2+2y^2, \\ x^2-xy+2y^2=1 \end{cases}$ имеет решение. Подставив a из первого уравнения во второе, выразим x через параметр и вторую переменную:

$$\begin{cases} a=x^2+2y^2, \\ a-xy=1; \end{cases}$$

- при $y=0$ из второго уравнения $a=1$, из первого уравнения $x=-1$ или $x=1$;

- при $y\neq 0$ из второго уравнения выразим $x=\dfrac{a-1}{y}$ и подставим в первое:

$$a=\left(\frac{a-1}{y}\right)^2+2y^2 \iff 2y^4-ay^2+(a-1)^2=0.$$

Уравнение является квадратным относительно новой переменной $t=y^2>0$:

$$2t^2-at+(a-1)^2=0;$$

$$D=a^2-8(a-1)^2=\left(a-2\sqrt{2}(a-1)\right)\left(a+2\sqrt{2}(a-1)\right).$$

Уравнение должно иметь корни:

$$D\geq 0 \iff a\in\left[\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1};\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\right].$$

При найденных значениях параметра по крайней мере один корень t^* положителен, поскольку абсцисса вершины параболы $f(t)=2t^2-at+(a-1)^2$ положительна: $t_{\text{в}}=\dfrac{a}{4}>0$. Значит, уравнение $2y^4-ay^2+(a-1)^2=0$ имеет по крайней мере два корня $y_1=-\sqrt{t^*}$ и $y_2=\sqrt{t^*}$; соответствующие им значения переменной x вычисляются по формуле $x=\dfrac{a-1}{y}$.

Итак, наибольшее и наименьшее значения выражения x^2+2y^2 (то есть наибольшее и наименьшее значения параметра a) равны, соответственно, $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$ и $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$.

Ответ. $\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1};\ \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$.

Пример 3. (М/м-92.6) Найти все значения x, при каждом из которых неравенство

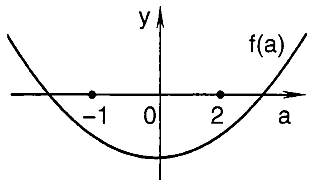
$$(2-a)\cdot x^3+(1-2a)\cdot x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$$

выполняется хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$.

Решение. По смыслу задачи x – параметр задачи, a – переменная. Переформулируем условие: найти все значения параметра x, при которых неравенство

$$f(a)=a^2+a(x^3+2x^2-4)-(2x^3+x^2-6x+5)>0$$

имеет решение на отрезке $[-1;2]$. Данному условию не удовлетворяет только такое расположение параболы $f(a)$, при котором



$$\begin{cases} f(-1)\le 0, \\ f(2)\le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -3x^3-3x^2-6x\le 0, \\ 3x^2+6x-9\le 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(x-1)(x+2)\ge 0, \\ (x-1)(x+3)\le 0; \end{cases} \iff x\in[-2;0]\cup\{1\}.$$

Значит, при всех остальных значениях параметра

$$x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$$

неравенство будет иметь решение на отрезке $[-1;2]$.

Ответ. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Задачи

1. (М/м-77.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$$

2. (Псих-91.5) При каждом значении параметра $a\ge\dfrac{1}{2\pi}$ найти все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{2x+a}{2x^2+2ax+5a^2/2}\right)=\cos\left(\frac{2x-a}{2x^2-2ax+5a^2/2}\right).$$

3. (Псих-86.6) Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\le 3$.

4. (Хим-91.1) Найти максимум и минимум функции $f(x) = \dfrac{3x+1}{(3x+1)^2+1}$.

5. (Псих-99.4) Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;3]$. Определить, при каждом таком p множество значений функции $f(x)$.

6. (Биол-94.5) Найти все значения x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

7. (ЕГЭ.С) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$$

выполняется для всех $x \in [1;3]$.

8. (ВМК-93.6) Найти все значения параметра a, при которых область определения функции

$$y = \frac{1}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}$$

совпадает с областью определения функции

$$y = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \frac{\sqrt{2}}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}.$$

9. (Экон.М-99.6) Для каждого значения b найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$b\sin 2y + \log_4\left(x\sqrt[8]{1-4x^8}\right) = b^2.$$

9.2. Чётность и симметричность по нескольким переменным, исследование единственности решения, необходимые и достаточные условия

Теоретический материал

Нестандартные задачи с параметрами можно существенно упростить, если алгебраическое выражение в условии является чётным. Иногда уравнение, неравенство или система обладает свойством симметрии в более широком смысле, а именно не меняет своего вида при определённой замене переменных, смене переменных местами или других действиях. Нередко такая алгебраическая симметрия бывает неявной и может быть обнаружена только после предварительного преобразования выражения.

Наиболее эффективно информация о симметрии функций используется в задачах о единственности решений или наличии определённого числа решений. Если задача формулируется так: *"Найти все значения параметра, при которых уравнение (неравенство, система) имеет единственное решение"*, то прежде всего необходимо посмотреть, не является ли задача чётной относительно одной из переменных или симметричной относительно двух каких-либо переменных.

- Если задача является чётной относительно переменной x (то есть не меняется при замене x на $(-x)$), то можно рассуждать так: *"Предположим, что x_0 – решение нашей задачи. Тогда в силу чётности относительно x значение $(-x_0)$ тоже будет решением. Поскольку решение должно быть единственным, то $x_0 = -x_0 \Longleftrightarrow x_0 = 0$. Значит, единственным может быть только решение $x = 0$. Подставим это значение в исходную задачу и найдём значения параметра, при которых $x = 0$ является решением (необходимые условия единственности решения). Осталось проверить, не будет ли других решений при найденных значениях параметра (достаточность)."*

- Если задача является симметричной относительно переменных x и y (то есть не меняется при замене $(x;y)$ на $(y;x)$), то можно руководствоваться следующими соображениями: *"Предположим, что $(x_0;y_0)$ – решение задачи. Тогда в силу симметричности задачи $(y_0;x_0)$ также будет решением. Поскольку решение должно быть единственным, то $x_0 = y_0$. Значит, решение задачи будет единственным только при $x = y$. Подставим эту зависимость в исходную задачу и определим те значения параметра, при которых $x = y$ (необходимые условия на параметр). Далее при вычисленных значениях параметра проведём исследование исходной системы и определим количество решений (достаточность)."*

- Задача может быть симметричной относительно замены x на $1/x$. В этом случае рассуждаем следующим образом: *"Предположим, что $x_0 \neq 0$ – решение нашей задачи. Тогда в силу симметричности $1/x_0$ также будет решением. Поскольку решение должно быть единственным, то $x_0 = 1/x_0$, то есть $x_0 = -1$ или $x_0 = 1$. Значит, решение задачи будет единственным только при $x = -1$ или $x = 1$. Подставим эти значения в исходную задачу и определим те значения параметра, при которых $x = -1$ $(x = 1)$ является решением (необходимые условия). Далее при вычисленных значениях параметра определяем количество решений задачи (достаточность)."*

Примеры решения задач

Пример 1. (М/м-90.4) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Решение. Функция в левой части уравнения чётная по переменной x; значит, если x_0 является решением уравнения, то и $-x_0$ также будет решением. Единственным может быть только решение $x = 0$. Подставим это значение переменной в уравнение и найдём те значения параметра, при которых $x = 0$ является корнем:

$$-2a\sin(1) + a^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{или} \quad a = 2\sin(1).$$

1) При $a = 0$ уравнение принимает вид: $x^2 = 0 \iff x = 0$ – единственное решение.

2) При $a = 2\sin(1)$ получаем:

$$x^2 - 4\sin(1)\cdot\sin(\cos x) + 4\sin^2(1) = 0;$$

так как $|\cos x| \le 1$, то $\sin(\cos x) \le \sin(1)$, поэтому:

$$x^2 - 4\sin(1)\cdot\sin(\cos x) + 4\sin^2(1) \ge x^2 \ge 0;$$

равенство достигается при одновременном выполнении двух условий:

$$\begin{cases} x = 0, \\ \cos x = 1; \end{cases} \iff x = 0 \text{ – единственное решение.}$$

Ответ. $0; 2\sin(1)$.

Пример 2. (ВМК-98(1).5) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} + a\cos\left(x - \frac{1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0;$$

заметим, что на области допустимых значений уравнение обладает свойством симметрии относительно замены x на $\frac{1}{x}$. Значит, если x_0 является решением, то и $\frac{1}{x_0}$ будет решением. Необходимым условием единственности решения является равенство: $x = \frac{1}{x}$, то есть $x = -1$ или $x = 1$. Найдём соответствующие им значения параметров и проверим достаточность.

1) При $x = -1$ получаем:

$$\frac{1}{2} + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff a^2 + a - \frac{3}{4} = 0 \iff a = -\frac{3}{2} \text{ или } a = \frac{1}{2};$$

а) при $a = -\frac{3}{2}$ уравнение принимает вид:

$$2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} = -1 + \frac{3}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right);$$

функция слева ограничена снизу: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} \ge 2^{\frac{2}{-2}} = \frac{1}{2}$, функция справа ограничена сверху: $-1 + \frac{3}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{2}$; равенство возможно при выполнении условий:

$$\begin{cases} 2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} = \frac{1}{2}, \\ -1 + \frac{3}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{x} + x = -2, \\ \cos\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1; \end{cases} \iff x = -1;$$

решение единственное. Значит, значение параметра $a = -\frac{3}{2}$ подходит;

б) при $a = \frac{1}{2}$ получаем уравнение: $2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}} = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Докажем, что данное уравнение имеет более одного решения. Введём обозначения: $f(x) = 2^{\frac{2}{\frac{1}{x}+x}}$, $g(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Корень $x = -1$ мы уже знаем. Докажем, что на интервале $(-1; 0)$ есть ещё решения уравнения $f(x) = g(x)$. Прежде всего заметим, что на данном интервале обе функции непрерывны, функция $f(x)$ возрастает и ограничена: $\frac{1}{2} < f(x) < 1$. Далее, так как при изменении x от -1 до 0 функция $h(x) = x - \frac{1}{x}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, то, в силу периодичности косинуса, функция $g(x)$ бесконечное число раз проходит от $\frac{1}{2}$ до $\frac{3}{2}$ и обратно. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет бесконечное число решений на интервале $(-1; 0)$. Поэтому значение параметра $a = \frac{1}{2}$ не подходит.

2) При $x = 1$ получаем: $2 + a + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \iff a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$. Так как дискриминант последнего уравнения отрицателен, то $x = 1$ не является решением исходного уравнения ни при каких значениях параметра.

Ответ. $-\frac{3}{2}$.

Пример 3. (ИСАА-98.7) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}\, y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}\, x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

Решение. Заметим, что задача является чётной по переменной x. Пусть $t = x^2$:

$$\begin{cases} t^2 - (a-1)\sqrt{a+3}\, y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}\, t; \end{cases}$$

подставим y из второго уравнения системы в первое:

$$t^2 - (a-1)(a+3)t + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0;$$

$$f(t) = t^2 - (a-1)(a+3)t + (a-1)(a-2)(a+1)(a+4) = 0.$$

Исходная задача имеет три решения, если корни последнего уравнения различны и удовлетворяют условиям: $t_1 = 0$, $t_2 > 0$. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы парабола $f(t)$ проходила через начало координат и имела положительную абсциссу вершины:

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ t_{\text{в}} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)(a-2)(a+1)(a+4) = 0, \\ (a-1)(a+3) > 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} a = -4; \\ a = 2. \end{array} \right.$$

С учетом ОДЗ остаётся только $a = 2$. Проверять это a не надо, так как мы его нашли при условии, что первое уравнение будет иметь ровно три решения, а, значит, и вся система будет иметь ровно три решения.

Ответ. 2.

Задачи

1. (Псих-95.5) Найти все значения a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$$

имеет единственное решение.

2. (Биол-91.5) Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a\sin^2 z)\left((1-a)\ln(1-xy) + 1\right) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. (Фил-92.5) Найти все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

4. (Биол-95.6) Найти все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два решения.

5. (Хим-84.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4| + \left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|} - |a-2|\right)\cdot|x-2| +$$

$$+\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a| \le 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

6. (Хим-02.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2^{-x^2}\cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

7. (Экон-90.6) Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)\cdot x^2 = 0, \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. (Хим-86.5) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

9.3. Редукция задачи и переформулирование условия

Теоретический материал

В ряде нестандартных задач один из параметров или переменная может принимать всевозможные значения из некоторого множества.

Одна из схем решения задач такого типа состоит в присваивании свободному параметру (переменной) специальных значений, при которых постановка задачи существенно упрощается.

Предположим, задача формулируется так: *"Найти все значения параметра, при которых уравнение (система) выполняется для всех значений x."* Рассуждаем следующим образом: *"Поскольку уравнение должно выполняться для всех x, выберем такое значение переменной x_0, при котором исходное уравнение максимально упрощается. Подставим это значение в уравнение и найдём набор "подозрительных" значений параметра (необходимое условие), которые, в свою очередь, подставим в исходное уравнение (проверяем достаточность). Если для найденного значения параметра уравнение выполняется при всех x, то это значение параметра подходит. Если же уравнение выполняется не при всех значениях x (при этом достаточно найти хотя бы одно такое значение), то рассматриваемое значение параметра не подходит."*

Примеры решения задач

Пример 1. (Почв-98.6) Определить:
а) при каких значениях a существует такое число b, что уравнение
$5\cos x + \sin x + \cos(x-b) = a$ имеет решения;
б) при каких значениях a это уравнение имеет решения при любом значении b?

Решение. а) Преобразуем выражение в левой части уравнения, воспользовавшись методом дополнительного аргумента:

$$\sqrt{26}\cos\left(x - \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) + \cos(x-b) = a;$$

функция $f(x) = \sqrt{26}\cos\left(x - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}\right) + \cos(x-b)$ при всевозможных значениях переменной x и параметра b принимает значения из отрезка $[-\sqrt{26}-1; \sqrt{26}+1]$.

Значит, решение уравнения $f(x) = a$ существует хотя бы при одном b, если $a \in [-\sqrt{26} - 1; \sqrt{26} + 1]$.

б) Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{26} \cos\left(x - \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) = a - \cos(x - b);$$

множество значений левой части есть отрезок $[-\sqrt{26}; \sqrt{26}]$, тогда как множество значений правой части есть отрезок $[a-1; a+1]$. Поскольку это уравнение должно иметь решения при любых значениях b, то

$$\begin{cases} a - 1 \geq -\sqrt{26}, \\ a + 1 \leq \sqrt{26}; \end{cases} \iff -\sqrt{26} + 1 \leq a \leq \sqrt{26} - 1.$$

О т в е т. а) $[-\sqrt{26} - 1; \sqrt{26} + 1]$; б) $[-\sqrt{26} + 1; \sqrt{26} - 1]$.

П р и м е р 2. (Псих-78.4) Найти множество всех пар чисел $(a; b)$, для каждой из которых при всех значениях x справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

Р е ш е н и е. Поскольку по условию задачи равенство должно быть справедливым для всех значений переменной, возьмём $x = 0$:

$$b^2 = \cos(b^2) - 1 \iff b = 0.$$

Значит, другие значения параметра b условию задачи не удовлетворяют; полагаем далее $b = 0$:

$$a(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1.$$

Поскольку последнее равенство также должно выполняться $\forall x$, рассмотрим два "специальных" значения переменной:

- при $x = \dfrac{\pi}{2}$ получаем уравнение: $\cos\dfrac{\pi a}{2} = 1 - a$;
- при $x = \pi$ $\cos \pi a = 1 - 2a \iff 2\cos^2\dfrac{\pi a}{2} - 1 = 1 - 2a$;

подставим выражение тригонометрической функции из первого уравнения во второе:

$$2(1 - a)^2 - 1 = 1 - 2a \iff a = 0 \quad \text{или} \quad a = 1;$$

других значений параметра a быть не может.

Осталось подставить найденные значения параметров $(a; b)$ в исходное уравнение и убедиться в том, что обе пары обращают уравнение в тождество.

О т в е т. $(0; 0)$, $(1; 0)$.

Пример 3. (Геол-97.8) При каких значениях α уравнения

$$x\alpha^2 - \alpha - (x^3 - 5x^2 + 4) = 0,$$
$$(x+1)\alpha^2 + (x^2 - x - 2)\alpha - (2x^3 - 10x^2 + 8) = 0$$

не имеют общего решения?

Решение. Переформулируем задачу. Найдём все значения параметра α, при которых система

$$\begin{cases} x\alpha^2 - \alpha - (x^3 - 5x^2 + 4) = 0, \\ (x+1)\alpha^2 + (x^2 - x - 2)\alpha - (2x^3 - 10x^2 + 8) = 0; \end{cases}$$

имеет решения. Тогда все остальные значения параметра будут удовлетворять условию задачи.

Вычитая из удвоенного первого уравнения системы второе, получаем:

$$(x-1)\alpha^2 - (x^2 - x)\alpha = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \alpha = 0; \\ (x-1)\alpha - (x^2 - x) = 0; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \alpha = 0; \\ x^2 - (\alpha+1)x + \alpha = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \alpha = 0; \\ x = \alpha; \\ x = 1; \end{array}\right.$$

подставляем найденные значения переменной и параметра в исходную систему:

1) при $\alpha = 0$ получаем два одинаковых уравнения: $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$. Подбором находим одно из решений $x = 1$. Значит, при $\alpha = 0$ система имеет решения;

2) при $x = \alpha$, заменяя первое уравнение на разность первого и второго уравнений, получаем:

$$\begin{cases} 5\alpha^2 - \alpha - 4 = 0, \\ 10\alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \end{cases} \iff 5\alpha^2 - \alpha - 4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \alpha = 1; \\ \alpha = -\dfrac{4}{5}; \end{array}\right.$$

значит, при $\alpha = 1$ система имеет решение $x = 1$, при $\alpha = -\dfrac{4}{5}$ у системы есть решение $x = -\dfrac{4}{5}$;

3) при $x = 1$ получаем:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha = 0, \\ 2\alpha^2 - 2\alpha = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \alpha = 0; \\ \alpha = 1; \end{array}\right.$$

оба значения параметра были исследованы ранее.

Итак, система имеет решения при $\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. При остальных α система не имеет решений.

Ответ. $\left(-\infty; -\dfrac{4}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{4}{5}; 0\right) \cup (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Задачи

1. (ИСАА-93.6) Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x - a| \geq a^2$ справедливо для всех x.

2. (М/м-86.5) Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система
$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$
имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

3. (Геол-98(1).8) При каких a для любого $b \geq 2$ неравенство
$$(b-1)x + 2\sqrt{1 - (b-1)^{-2}} < \left(\frac{a+1}{b-1} - b + 1\right)\frac{1}{x}$$
выполняется для всех $x < 0$?

4. (Почв-00.7) Найдите все значения параметра a, при которых при любых значениях параметра b уравнение
$$|x - 2| + b|2x + 1| = a$$
имеет хотя бы одно решение.

5. (Геол-79.6) Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств $abx \geq 4a + 7b + x$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ следует неравенство $ab \geq 5$.

6. (Геогр-85.5) Найти все значения параметра a, удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для каждого из которых выражение
$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$$
принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

7. (ВМК-90.6) Найти все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b неравенство
$$\left|\log_6 \frac{x}{36} + \left(\frac{10a + 3b + 31}{5}\right)x^2 - 9b^2 - 9b - 1\right| \leq \log_6 \frac{36}{x} + \left(\frac{10a + 3b + 41}{5}\right)x^2 -$$
$$-(6b + 2)x + 9b^2 + 15b + 3$$
имеет хотя бы одно решение.

8. (ВМК-98.5) Найти все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств
$$\begin{cases} \max(2 - 3y, y + 2) \leq 5, \\ \sqrt{a^2 + \frac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1 - x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2}\arcsin x(\pi + 2\arcsin x)} \geq y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

9.4. Смешанные задачи

Теоретический материал

В данном пункте собраны примеры, для успешного решения которых необходимо владеть как базовыми навыками логического мышления, так и широким набором нестандартных приёмов решения алгебраических задач.

Примеры решения задач

Пример 1. (ВМК-85.5) Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17} + \sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos\pi y + \cos\pi z)x + 4} = 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + \frac{\sqrt{3}}{2}x - 17 = 0, \\ 3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos\pi y + \cos\pi z)x + 4 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно является квадратным по переменной x. Необходимое условие существования корней – неотрицательность дискриминанта:

$$D_1 = 3(\cos\pi y + \cos\pi z)^2 - 12 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\cos\pi y + \cos\pi z| = 2.$$

1) Равенство $\cos\pi y + \cos\pi z = 2$ равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos\pi y = 1, \\ \cos\pi z = 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 2n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ z = 2m, \ m \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

значит, переменные y и z – чётные целые числа. Подставляя условие $\cos\pi y + \cos\pi z = 2$ во второе уравнение системы, находим значения переменной x: $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0 \iff x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Из первого уравнения системы получаем:

$$2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y + 1 - 17 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 - y^2 + 5z + 3y = 7.$$

Поскольку y и z чётные, выражение в левой части чётное, справа – нечётное число. Следовательно, уравнение решений не имеет.

2) Равенство $\cos\pi y + \cos\pi z = -2$ равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos\pi y = -1, \\ \cos\pi z = -1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = 1 + 2n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ z = 1 + 2m, \ m \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

то есть переменные y и z – нечётные целые числа. Из второго уравнения системы находим x: $3x^2 + 4\sqrt{3}x + 4 = 0 \iff x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Подставляем найденное значение в первое уравнение:

$$2 - 2y^2 + 2z^2 + 10z + 6y - 1 - 17 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 - y^2 + 5z + 3y = 8.$$

Решим полученное уравнение на множестве целых чисел и отберём пары, состоящие из нечётных целых чисел.

$$z^2 - y^2 + 5z + 3y = 8 \iff (z-y)(z+y) + 4(z+y) + z - y = 8 \iff$$
$$\iff (z - y + 4)(z + y + 1) = 12.$$

Если y и z нечётные, то выражение $z - y + 4$ будет принимать чётные значения, а выражение $z + y + 1$ – нечётные; следовательно, есть четыре возможности:
а) $z - y + 4 = 12,\quad z + y + 1 = 1 \iff y = -4,\ z = 4$ – не подходит;
б) $z - y + 4 = -12,\quad z + y + 1 = -1 \iff y = 7,\ z = -9$ – подходит;
в) $z - y + 4 = 4,\quad z + y + 1 = 3 \iff y = 1,\ z = 1$ – подходит;
г) $z - y + 4 = -4,\quad z + y + 1 = -3 \iff y = 2,\ z = -6$ – не подходит.

Ответ. $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; 1; 1\right),\ \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; 7; -9\right).$

Пример 2. (Почв-85.5) Пусть x_0 – больший из корней уравнения

$$x^2 + 2(a - b - 3)x + a - b - 13 = 0.$$

Найти наибольшее значение x_0 при $a \geq 2,\ b \leq 1$.

Решение. Убедимся, что корни существуют:

$$D_1 = (a - b - 3)^2 - (a - b - 13) = (a - b)^2 - 7(a - b) + 22 > 0 \quad \forall a,\ b;$$

преобразуем исходное уравнение:

$$(a - b)(2x + 1) = 13 + 6x - x^2;$$

поскольку $x = -\dfrac{1}{2}$ не является корнем уравнения, выразим разность $a - b$ через переменную:

$$a - b = \frac{13 + 6x - x^2}{2x + 1}.$$

По условию $a \geq 2,\ b \leq 1 \implies a - b \geq 1$. Найдем все допустимые x:

$$\frac{13 + 6x - x^2}{2x + 1} \geq 1 \iff \frac{(x + 2)(x - 6)}{2x + 1} \leq 0 \iff x \in (-\infty; -2] \cup \left(-\frac{1}{2}; 6\right].$$

Наибольшее значение корня $x_0 = 6$; ему соответствует $a - b = 1$, что при ограничениях $a \geq 2,\ b \leq 1$ возможно при $a = 2,\ b = 1$.

Ответ. 6.

Пример 3. (Геогр-80.5) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|y + \dfrac{1}{x}\right| + \left|\dfrac{13}{6} + x - y\right| = \dfrac{13}{6} + x + \dfrac{1}{x}, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{97}{36}; \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x < 0$ и $y > 0$.

Решение. Заметим, что первое уравнение может быть представлено в виде:

$$|f(x,y)| + |g(x,y)| = f(x,y) + g(x,y),$$

где $f(x,y) = y + \dfrac{1}{x}$, $g(x,y) = \dfrac{13}{6} + x - y$; равенство равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x,y) \geq 0, \\ g(x,y) \geq 0; \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} y + \dfrac{1}{x} \geq 0, \\ \dfrac{13}{6} + x - y \geq 0. \end{cases}$$

Складывая неравенства, получаем следствие: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{13}{6} + x \geq 0$, откуда, учитывая ограничение $x < 0$: $x^2 + \dfrac{13}{6}x + 1 \leq 0$.

С другой стороны, из второго неравенства: $y \leq \dfrac{13}{6} + x$; возводим в квадрат, учитывая условие $y > 0$: $y^2 \leq \left(\dfrac{13}{6} + x\right)^2$. Используя равенство: $x^2 + y^2 = \dfrac{97}{36}$, получаем:

$$\frac{97}{36} - x^2 \leq \left(\frac{13}{6} + x\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + \frac{13}{6}x + 1 \geq 0.$$

Значит, $x^2 + \dfrac{13}{6}x + 1 = 0$, то есть $x = -\dfrac{3}{2}$ или $x = -\dfrac{2}{3}$. Из равенства $y^2 = \dfrac{97}{36} - x^2$ определяем соответствующие положительные значения второй переменной: $y = \dfrac{2}{3}$ или $y = \dfrac{3}{2}$. Найденные значения проверяем в исходной системе.

Ответ. $\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Задачи

1. (Геол-95.8) Найти все значения a, при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

2. (Хим-96(1).5) Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 + 5x + 5} \geq 2, \\ x^2 + 6x + 5 \leq 0. \end{cases}$$

3. (Экон-98.7) Найти все значения a, при которых уравнения
$x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0$ и $x^3 - ax^2 - 10a^2x + 10a^3 - 1 = 0$
имеют хотя бы один общий корень.

4. (Фил-80.5) Найти все значения a из промежутка $[1; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения

$$x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$$

принимает наибольшее значение.

5. (Псих-88.6) Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2-2x+1)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\le\sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

6. (Псих-92.4) Найти все значения параметров u и v, при которых существуют два различных корня уравнения

$$x(x^2+x-8)=u,$$

являющихся одновременно корнями уравнения

$$x(x^2-6)=v.$$

7. (М/м-99(2).3) Найти все x, при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x \quad \text{и} \quad |x|(|x|-|x-8|)+24$$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

8. (Псих-98.6) Найти все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right)-b\cdot 2^{\sin\pi bx}-\left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right)+b\cdot 2^{\sin\pi bx}\right|=2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

9. (Фил-82.5) Найти все значения параметра γ, при каждом из которых минимально количество пар (n,m) целых чисел n и m, удовлетворяющих условию $\gamma^3|n|\le\sqrt{2}(\gamma^2-m^2)$.

Часть II: Указания и решения

1. Элементы теории чисел

1.1. Целые числа. Делимость и остатки

Задача 1.

Доказать, что число $n^5 - n$ делится на 30.

Идея. Разложить выражение на множители и проверить делимость на 2, 3, 5.
Указание. Разложить $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$.
Указание. Делимость на 6 вытекает из того, что произведение трёх последовательных чисел $n(n-1)(n+1)$ делится на 2 и на 3.
Указание. При доказательстве делимости на 5 перебрать все возможные остатки от деления на 5 числа n.

Решение. Надо доказать, что $n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ делится на 5 и 6. Делимость на 6 вытекает из того, что произведение трёх последовательных чисел $n(n-1)(n+1)$ делится на 2 и на 3.

Теперь представим число n в виде $n = 5k + r$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$ и переберём возможные остатки:

1) если $r = 0$, то $n \,\vdots\, 5$,
2) если $r = 1$, то $n - 1 \,\vdots\, 5$,
3) если $r = 4$, то $n + 1 \,\vdots\, 5$,
4) если $r = 2$ или $r = 3$, то $n^2 + 1 \,\vdots\, 5$.

Следовательно, в любом случае $n^5 - n$ делится на 5, а значит, и на 30.

Задача 2.

Доказать, что число $n^3 - 7n$ делится на 6.

Идея. Показать, что число является чётным и исследовать делимость на 3.
Указание. Числа n^3 и $7n$ являются числами одной чётности, следовательно, разность их чётна.
Указание. Для доказательства делимости на 3 перебрать остатки от деления на 3.

Решение. Сначала покажем, что число $n^3 - 7n$ делится на 2. При нечётном n числа n^3 и $7n$ являются нечётными, следовательно, разность их чётна. При чётном n числа n^3 и $7n$ являются чётными и разность их чётна.

Теперь проверим делимость на 3. Разложим $n^3 - 7n = n(n^2 - 7)$ и рассмотрим все возможные остатки от деления n на 3:

1) если $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $n \,\vdots\, 3$;

2) при $n = 3k \pm 1$ получаем $n^2 - 7 = 9k \pm 6k - 6 \,\vdots\, 3$.

Значит, $n^3 - 7n$ делится на 3, а, следовательно, делится и на 6.

Задача 3.

Доказать, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каких целых n.

Идея. Перебрать возможные остатки от деления на 3 числа n.

Решение. Рассмотрим возможные случаи:
1) если $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ не делится на 3;
2) при $n = 3k \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$ выражение $n^2 + 1 = 9k^2 \pm 6k + 2$ также не делится на 3.

Задача 4.

Сумма $m^2 + n^2$ делится на 3. Доказать, что она делится на 9.

Идея. Перебрать все возможные остатки от деления на 3 чисел m, n.
Указание. Показать что, если число не делится на 3, то квадрат этого числа при делении на 3 даёт в остатке 1.
Указание. Перебрать все возможные остатки от деления на 3 чисел m, n.

Решение. Если число p не делится на 3, то есть $p = 3k + 1$ или $p = 3k + 2$, то p^2 при делении на 3 даёт остаток 1. Теперь рассмотрим все возможные случаи при делении на 3 чисел m и n:

1) пусть оба числа m, n не делятся на 3, тогда $m^2 + n^2$ при делении на 3 даёт остаток 2;

2) пусть одно число делится на 3, а другое не делится на 3, тогда $m^2 + n^2$ при делении на 3 даёт остаток 1;

3) пусть оба числа делятся на 3, тогда $m^2 + n^2$ делится на 9.

Задача 5.

Доказать, что число $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ делится на 24.

Идея. Использовать то, что произведение k подряд стоящих чисел делится на k.

Решение. Произведение $n(n+1)(n+2)$ делится на 3, поскольку одно из трёх последовательных целых чисел обязательно кратно трём.

Из аналогичных соображений произведение $n(n+1)(n+2)(n+3)$ содержит два чётных множителя, один из которых кратен четырём.

Следовательно, число $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 3 и на 8, то есть на 24.

Задача 6.

Доказать, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при нечётном n.

Идея. Использовать то, что произведение k подряд стоящих чисел делится на k.
Указание. Разложить выражение на множители.

Решение. Проведём следующие преобразования

$$n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n+3) - (n+3) = (n-1)(n+1)(n+3).$$

Положив $n = 2k - 1$, получим

$$(n-1)(n+1)(n+3) = 8(k-1)k(k+1).$$

Поскольку одно из трёх последовательных чисел обязательно делится на 3, а двух – на 2, произведение $(k-1)k(k+1)$ делится на 6; следовательно, $8(k-1)k(k+1)$ делится на 48.

Задача 7.

При каких натуральных n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 120?

Идея. Разложить выражение на множители. Использовать то, что произведение k подряд стоящих чисел делится на k.
Указание. При исследовании делимости на 3 и 8 использовать то, что произведение k подряд стоящих чисел делится на k. При исследовании делимости на 5 перебрать остатки от деления на 5 числа n.

Решение. Проведём следующие преобразования

$$n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = n^3(n+2) - n(n+2) = (n-1)n(n+1)(n+2).$$

Произведение делится на 3, поскольку одно из трёх последовательных целых чисел обязательно кратно трём. Из аналогичных соображений произведение $(n-1)n(n+1)(n+2)$ содержит два чётных множителя, один из которых кратен четырём. Откуда следует, что число $(n-1)n(n+1)(n+2)$ делится на 3 и на 8, а значит, и на 24. Если оно будет делится на 5, то будет делится и на 120. Следовательно, нас устроит лишь $n = 5k + 2,\ k = 0; 1; 2; \ldots$

Ответ. $n = 5k + 2,\ k = 0; 1; 2; \ldots$

Задача 8.

Доказать, что сумма кубов трёх последовательных чисел делится на 9.

Идея. Записать сумму кубов через среднее число и исследовать делимость на 9 полученного выражения.
Указание. Перебрать остатки от деления на 3.

Решение. Покажем, что

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 \vdots 9, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Раскроем скобки

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = (n^3-3n^2+3n-1)+n^3+(n^3+3n^2+3n+1) = 3n^3+6n = 3n(n^2+2).$$

Покажем, что $n(n^2+2) \vdots 3$. Рассмотрим возможные остатки от деления на 3:

1) если $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, то утверждение справедливо;

2) если $n = 3k \pm 1$, то $n^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 \vdots 3$.

Следовательно, сумма кубов трёх последовательных чисел делится на 9.

Задача 9.

Цифры трёхзначного числа переписаны в обратном порядке. Доказать, что разность между исходным и полученным числом делится на 9.

Идея. Использовать десятичную запись исходного и полученного чисел.
Указание. Если первое число имеет вид $100a+10b+c$, то второе – $100c+10b+a$.

Решение. Пусть a, b, c – цифры исходного трёхзначного числа, тогда само число равно $100a + 10b + c$. Новое число равно $100c + 10b + a$. Их разность

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c$$

делится на 9, что и требовалось доказать.

Задача 10.

Докажите, что $43^{43} - 17^{17}$ делится на 10.

Идея. Найти последние цифры чисел 43^{43} и 17^{17}.
Указание. Использовать то, что число, возведённое в натуральную степень оканчивается также как и последняя цифра, возведённая в ту же степень.

Решение. Найдём последние цифры чисел 43^{43} и 17^{17}.
а) Последняя цифра числа 43^{43} совпадает с последней цифрой числа 3^{43}. Представим

$$3^{43} = (3^4)^{10} \cdot 3^3 = 81^{10} \cdot 27.$$

Последняя цифра первого множителя равна 1, второго – 7, следовательно, последняя цифра произведения равна $1 \cdot 7 = 7$.

б) Последняя цифра числа 17^{17} совпадает с последней цифрой числа 7^{17}. Представим

$$7^{17} = (7^4)^4 \cdot 7.$$

Число $(7^4)^4$ оканчивается на 1, поскольку на 1 оканчивается число 7^4. Следовательно, последняя цифра произведения равна $1 \cdot 7 = 7$.

Так как последние цифры чисел 43^{43} и 17^{17} равны, то их разность делится на 10.

Задача 11.

Делится ли на 7 число $1991^{1917} + 1917^{1991}$?

Идея. Найти остатки от деления на 7 каждого из слагаемых.
Указание. Использовать то, что возведение числа в степень можно заменить возведением в ту же степень остатка от деления на 7.

Решение. Найдём остатки от деления на 7 каждого из слагаемых.
а) Сначала найдём остаток от деления на 7 числа 1991^{1917}. Поскольку $1991 = 7 \cdot 284 + 3$, то остаток от деления на 7 числа 1991^{1917} равен остатку от деления на 7 числа 3^{1917}.

Заметим, что 3^3 дает остаток (-1) при делении на 7, следовательно, 3^6 дает остаток $(-1)^2 = 1$. Представим

$$3^{1917} = 3^{6 \cdot 319 + 3} = (3^6)^{319} \cdot 3^3.$$

Поскольку 3^6 имеет остаток 1 при делении на 7, число $(3^6)^{319}$ также имеет остаток 1. Так как остаток второго множителя равен 6, то остаток произведения равен $1 \cdot 6 = 6$. Следовательно, число 1991^{1917} при делении на 7 даёт остаток 6.

б) Найдём остаток при делении на 7 числа 1917^{1991}. Число 1917 при делении на 7 даёт остаток (-1). Следовательно, остаток числа 1917^{1991} равен остатку числа $(-1)^{1991} = -1$.

В итоге получаем, что остаток числа $1991^{1917} + 1917^{1991}$ при делении на 7 равен $6 - 1 = 5$, то есть на 7 оно не делится.

Ответ. Нет.

Задача 12.

Доказать, что для всех натуральных n выражение $\left(8^{2n-1} - 1\right)$ делится на 7.

Идея. Использовать то, что при возведении числа в степень, в эту же степень возводятся и его остатки.
Указание. Число 8^{2n-1}, как и 8, даёт при делении на 7 остаток 1.

Решение. Поскольку $8^{2n-1} = (7+1)^{2n-1}$, число 8^{2n-1} имеет остаток 1 при делении на 7. Следовательно, для всех натуральных n выражение $\left(8^{2n-1}-1\right)$ делится на 7.

Замечание. Утверждение задачи справедливо и в случае, когда степень числа 8 является любым (не только нечётным) натуральным числом.

Задача 13.

Доказать, что $5^n - 3^n + 2n$ делится на 4.

Идея. Перебрать возможные остатки от деления на 4 числа n.
Указание. Использовать то, что возведение числа в степень можно заменить возведением в ту же степень остатка от деления на 4.

Решение. Пусть $n = 4k + r$, где $r = 0, 1, 2, 3$, тогда

$$N = 5^n - 3^n - 2n = 5^{4k+r} - 3^{4k+r} - 2(4k+r) = 625^k \cdot 5^r - 81^k \cdot 3^r - 8k - 2r.$$

Так как числа 625 и 81 при делении на 4 дают остаток 1, то 625^k и 81^k также дают в остатке 1. Следовательно, остаток числа N равен остатку числа $5^r - 3^r - 2r = q$.

При $r = 0$ и $r = 1$ получаем $q = 0$, при $r = 2$ получаем $q = 12 \vdots 4$, при $r = 3$ получаем $q = 92 \vdots 4$. Что и требовалось доказать.

Задача 14.

Найти все натуральные n, при которых число $n \cdot 2^n + 1$ делится на 3.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 3 числа n.
Указание. Представить $n = 3k + r$, $r = 0; 1; 2$ и рассмотреть отдельно чётные и нечётные k.

Решение. Если $n = 3k$, то $n \cdot 2^n + 1$ не делится на 3.
Рассмотрим $n = 3k + r$, где $r = 1$ или $r = 2$. В этом случае

$$n \cdot 2^n + 1 = (3k + r) \cdot 2^{3k+r} + 1 = 3k \cdot 2^{3k+r} + r \cdot 8^k \cdot 2^r + 1.$$

Следовательно, надо исследовать, при каких k и r число $\left(r \cdot 8^k \cdot 2^r + 1\right)$ делится на 3. Рассмотрим отдельно чётные и нечётные k.

а) Пусть $k = 2l$, тогда $r \cdot 8^k \cdot 2^r + 1 = r \cdot 64^l \cdot 2^r + 1$. Так как 64 при делении на 3 дает остаток 1, то и 64^l при делении на 3 тоже дает остаток 1. Таким образом, $r \cdot 64^l \cdot 2^r + 1$ при делении на 3 дает такой же остаток как и число $q = r \cdot 2^r + 1$.
При $r = 1$ и $r = 2$ получаем $q = 3$ и $q = 9$ соответственно. Следовательно, $n \cdot 2^n + 1$ делится на 3 при $n = 3k + 1 = 6l + 1$ и $n = 3k + 2 = 6l + 2$.

б) Пусть теперь $k = 2l + 1$, тогда $r \cdot 8^k \cdot 2^r + 1 = r \cdot 64^l \cdot 8 \cdot 2^r + 1$. Это выражение при делении на 3 дает такой же остаток, как и число $q = r \cdot 8 \cdot 2^r + 1$. При $r = 1$ и $r = 2$ получаем $q = 17$ и $q = 65$ соответственно. Следовательно, исходное число на 3 не делится.

Ответ. $n = 6l + 1$, $n = 6l + 2$, $l \in \mathbb{N}$.

Задача 15.

Доказать, что число $\underbrace{11\ldots1}_{81}$ делится на 81.

Идея. Выразить исходное число через вспомогательное число $\underbrace{11\ldots1}_{9}$.

Указание. Исходное число равно произведению вспомогательного числа и некоторого числа, кратного 9.

Решение. Обозначим $A = \underbrace{11\ldots1}_{9}$ и преобразуем исходное число:

$$\underbrace{11\ldots1}_{81} = A + 10^9A + 10^{9\cdot2}A + \ldots + 10^{9\cdot8}A = A\cdot(1 + 10^9 + 10^{9\cdot2} + \ldots + 10^{9\cdot8}).$$

Сумма цифр второго множителя равна 9, следовательно, он делится на 9. Поскольку число A также кратно 9, произведение делится на 81.

Задача 16.

Доказать признак делимости на 11: "число n кратно 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр с чередующимися знаками кратна 11".

Идея. Записать число в десятичной форме и выделить слагаемое, равное сумме его цифр с чередующимися знаками.

Указание. Использовать то, что $10^{2n} - 1 \,\vdots\, 11$ и $10^{2n+1} + 1 \,\vdots\, 11$.

Решение. Из равенства $10^{2n} - 1 = \underbrace{99...9}_{2n}$ следует, что $10^{2n} - 1 \,\vdots\, 11$. А из равенства $10^{2n+1} + 1 = (10+1)(10^{2n} - 10^{2n-1} + 10^{2n-2} - \ldots + 1)$ следует, что $10^{2n+1} + 1 \,\vdots\, 11$. Запишем число в десятичной форме

$$\overline{a_{2n}a_{2n-1}...a_0} = a_{2n}\cdot10^{2n} + a_{2n-1}\cdot10^{2n-1} + \ldots + a_0 =$$

$$= a_{2n}\cdot\left(10^{2n} - 1\right) + a_{2n-1}\cdot\left(10^{2n-1} + 1\right) + a_{2n-2}\cdot\left(10^{2n-2} - 1\right) +$$

$$+a_{2n-3}\left(10^{2n-3} + 1\right) + \ \ldots\ + a_1\cdot(10+1) +$$

$$+\left(a_{2n} + a_{2n-2} + \ \ldots\ + a_0\right) - \left(a_{2n-1} + a_{2n-3} + \ \ldots\ + a_1\right).$$

Все слагаемые, кроме последних двух, делятся на 11. Последние два слагаемые представляют собой сумму цифр исходного числа с чередующимися знаками. Следовательно, число делится на 11 тогда и только тогда, когда эта сумма делится на 11.

Задача 17.

При каких n число $M = \underbrace{1717\ldots17}_{2n\text{ цифр}}$ делится на 33?

Идея. Использовать признаки делимости на 3 и на 11.
Указание. Число p кратно 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр кратна 3. Число p кратно 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр с чередующимися знаками кратна 11.

Решение. Для того, чтобы число M делилось на 33 надо, чтобы оно делилось на 3 и на 11.

В соответствии с признаком делимости на 3 сумма цифр должна делиться на 3, следовательно, $(1+7)\cdot n = 8n \,\vdots\, 3 \iff n = 3k,\ k \in \mathbb{N}$.

В соответствии с признаком делимости на 11 сумма цифр с чередующимися знаками должна быть кратна 11, то есть $n\cdot(1-7) = -6n \,\vdots\, 11 \iff n = 11p,\ p \in \mathbb{N}$.

Так как n должно делиться и на 3, и на 11, то $n = 33m,\ m \in \mathbb{N}$.

Ответ. $n = 33m,\ m \in \mathbb{N}$.

1.2. Уравнения в целых числах

Задача 1.

Решить в целых числах уравнение $xy + 1 = x + y$.

Идея. Использовать разложение на множители.
Указание. Перенести всё в одну сторону и разложить на множители.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(y-1)(x-1) = 0$. Возможны варианты $x = 1$, y – любое и $y = 1$, x – любое.

Ответ. $(1;k)$, $k \in \mathbb{Z}$; $(l;1)$, $l \in \mathbb{Z}$.

Задача 2.

Решить в целых числах уравнение $x(x+1) = y^2$.

Идея. Разложить на множители и действовать перебором.
Указание. Домножить на 4 и выделить полный квадрат.

Решение. $x(x+1) = y^2 \iff 4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 1 \iff$

$$\iff (2x+1)^2 - 4y^2 = 1 \iff (2x+2y+1)(2x-2y+1) = 1.$$

Следовательно, либо оба множителя равны 1, либо -1. Поскольку множители равны друг другу $2y = 0$, а при $y = 0$ получаем $x = 0$ или -1.

Ответ. $(0;0)$, $(-1;0)$.

Задача 3.

Решить в целых числах уравнение $2x^2 + xy - y^2 - 7x - 4y = 1$.

Идея. Добавив к обеим частям уравнения одно и то же целое число, разложить левую часть на множители и действовать перебором.
Указание. Нужное число p выбрать таким образом, чтобы дискриминант квадратного трёхчлена $2x^2 + x(y-7) - y^2 - 4y + p$ был полным квадратом.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2x^2 + x(y-7) - y^2 - 4y + p = 1 + p$$

и разложим левую часть на множители.

Квадратный трёхчлен $2x^2 + x(y-7) - y^2 - 4y + p$ имеет дискриминант $D = 9y^2 + 18y + 49 - 8p$. При $p = 5$ это полный квадрат. В этом случае получаем корни $x_1 = -y + 1$, $x_2 = \dfrac{y+5}{2}$. Следовательно, уравнение принимает вид

$$(2x - y - 5)(x + y - 1) = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 5 = A, \\ x + y - 1 = B; \end{array} \right.$$

где A и B такие целые числа, что $AB = 6$. Заметим, что одно из этих чисел должно делиться на 3, а другое нет. Сложив уравнения, получим

$$3x - 6 = A + B \quad \Longleftrightarrow \quad \emptyset,$$

поскольку левая часть уравнения делится на 3, а правая нет.

Ответ. Решений нет.

Задача 4.

Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 1982$ не имеет решений в целых числах.

Идея. Показать, что левая часть делится на 4, а правая — нет.
Указание. Рассмотреть различные случаи чётности-нечётности переменных.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(x - y)(x + y) = 1982.$$

Поскольку правая часть уравнения чётная, левая также должна быть чётной. Далее, если $(y + x)$ чётно, то $(y - x)$ тоже чётно, и наоборот. Следовательно, левая часть уравнения делится на 4, но правая часть на 4 не делится. Значит, уравнение не имеет решений.

Задача 5.

Доказать, что уравнение $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ не имеет решений в целых числах.

Идея. Получить противоречие из-за различной чётности равных выражений.
Указание. Показать, что x нечётно.
Указание. Подставить, $x = 2k + 1$ в уравнение и показать, что y нечётно.

Решение. Если x чётно, то вся левая часть уравнения чётна, а правая — нечётна. Следовательно, $x = 2k + 1$. Тогда

$$(2k+1)^2 - 2y^2 + 8z = 3 \iff 4k^2 + 4k - 2y^2 + 8z = 2 \iff 2k^2 + 2k - y^2 + 4z = 1.$$

Если y чётно, то левая часть уравнения чётна, а правая — нечётна. Следовательно, $y = 2l + 1$ и

$$2k(k+1) - 4l^2 - 4l + 4z = 2 \iff k(k+1) - 2l^2 - 2l + 2z = 1.$$

Поскольку произведение двух последовательных чисел чётно, левая часть тоже чётна и, следовательно, не может равняться единице.

Задача 6.

Доказать, что уравнение $x^2 = 3y^2 + 17$ не имеет решений в целых числах.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 3.
Указание. Представить $x = 3k \pm 1$.

Решение. Так как $x^2 + 1 = 3y^2 + 18$, то $x^2 + 1$ должно делиться на 3. Если само x делится на 3, то это неверно. Следовательно, $x = 3k \pm 1$. Тогда

$$x^2 + 1 = 9k^2 \pm 6k + 2$$

не делится на 3, то есть решений нет.

Задача 7.

Решить в целых числах уравнение $3^y = 1 + x^2$.

Идея. Перебрать остатки числа x от деления на 3.
Указание. Рассмотреть отдельно положительные и отрицательные значения y.

Решение.
1) При $y < 0$ левая часть меньше 1, а правая — нет. Значит $y \geq 0$.
2) При $y = 0$ получим $x = 0$.
3) Если $y \geq 1$, то правая часть уравнения должна делиться на 3. Однако, x^2 при делении на 3 даёт в остатке только 0 или 1. Значит, $x^2 + 1$ не делится нацело на 3. Следовательно, при $y \geq 1$ решений нет.

Ответ. $(0; 0)$.

Задача 8.

Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$.

Идея. Подбором найти решения и показать, что других нет.
Указание. Домножить уравнение на $\sqrt{5}$.

Решение. После умножения обеих частей равенства на $\sqrt{5}$, получим:

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{5y-1}=5.$$

Заметим, что $x \geq 1$ и $y \geq 1$. Начнём перебирать x, начиная с 1. При $x=1$ получим $y=2$. При $x=2$ получим $y=1$. При дальнейшем увеличении x значение y будет уменьшаться. Следовательно, других решений быть не может.

Ответ. $(1;2)$, $(2;1)$.

Задача 9.

Решить в целых числах уравнение

$$3(x-3)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33.$$

Идея. Получить ограничения на переменные, далее действовать перебором.
Указание. Для того, чтобы сократить вычислительную работу можно сделать замену $z=3k$.

Решение. Так как правая часть и все остальные слагаемые делятся на 3, то $z=3k$, следовательно,

$$3(x-3)^2+6y^2+18k^2+27y^2k^2=33 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-3)^2+2y^2+6k^2+9y^2k^2=11.$$

Поскольку должно выполняться $6k^2 \leq 11$, возможно лишь $k=0;\pm1$.

При $k=\pm1$ получим

$$(x-3)^2+11y^2=5.$$

Это уравнение при $y^2 \geq 1$ решений не имеет, а при $y=0$ — нет целых x.

При $k=0$ получим

$$(x-3)^2+2y^2=11.$$

Откуда $y^2 \leq 4$. Возможные варианты:
1) $y=0$ — нет целых x;
2) $y=\pm1$, $x=0$ или 6;
3) $y=\pm2$ — нет целых x.

Ответ. $(0;-1;0)$, $(6;-1;0)$, $(0;1;0)$, $(6;1;0)$.

Задача 10.

Решить в целых числах уравнение $x^2 - 4xy = 4y^2$.

Идея. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно x.

Решение. Решая квадратное уравнение, получим $x_{1,2} = 2y \pm 2\sqrt{2}y$, где $y \in \mathbb{Z}$. Целое значение x может принимать только при $y = 0$. В этом случае получаем ответ $(0; 0)$.

Ответ. (0;0).

Задача 11.

Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.

Идея. Доказать, что y должно нацело делиться на x и наоборот.
Указание. Преобразовать уравнение к виду $y(x-1) = x$.

Решение. Так как

$$xy = x + y \iff y(x-1) = x,$$

то x должно нацело делиться на y. Аналогично доказывается, что y делится на x. Следовательно, $x = y$, откуда $x^2 = 2x$. В результате получаем $x = 0$, $y = 0$ и $x = 2$, $y = 2$.

Замечание. Можно было воспользоваться разложением на множители

$$(x-1)(y-1) = 1$$

и рассмотреть варианты: оба множителя равны 1 или ± 1.

Ответ. $(0; 0)$, $(2; 2)$.

Задача 12.

Решить в натуральных числах уравнение $xz + 4y = yx^2 + z^2y$.

Идея. Получить ограничения на x и z, далее действовать перебором.
Указание. Выразить y через x и z.

Решение. Так как $x^2 + z^2 - 4 \neq 0$ (иначе не существует решения уравнения), то $y = \dfrac{zx}{x^2 + z^2 - 4}$. Поскольку $y \in N$,

$$y \geq 1 \iff x^2 + z^2 - 4 \leq xz.$$

Домножив неравенство на 4, получим

$$4x^2 - 4xz + 4z^2 \leq 16 \iff (2x - z)^2 + 3z^2 \leq 16.$$

Из последнего неравенства следует, что $z^2 \le 4$ и $(2x-z)^2 \le 9$. Следовательно, $z \le 2$ и

$$2x - z \le 3 \iff 2x \le 3 + z \iff 2x \le 5.$$

Таким образом, возможно лишь $z = 1; 2$ и $x = 1; 2$. Рассмотрим все варианты:
1) $x = z = 1 \implies y < 0$
2) $x = 1,\ z = 2,\ y = 2$
3) $x = 2,\ z = 1,\ y = 2$
4) $x = z = 2,\ y = 1$.

Ответ. $(1;2;2)$, $(2;2;1)$, $(2;1;2)$.

Задача 13.

Решить в натуральных числах уравнение $2^x - 3^y = 1$.

Идея. В случае чётного x рассмотреть остатки от деления на 3, в случае нечётного – остатки отделения на 8.
Указание. В случае нечётного x отдельно рассмотреть четные и нечётные y.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2^x - 1 = 3^y$ и исследуем делимость левой части на 3.

Пусть x нечётно, то есть $x = 2n+1$. Из представления $2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n = 2 \cdot (3+1)^n$ следует, что 2^{2n+1} при делении на 3 даёт в остатке 2. Поэтому $2^{2n+1} - 1$ при делении на 3 даёт остаток 1. То есть $2^{2n+1} - 1$ не делится нацело на 3 и при нечётных x исходное уравнение не имеет решений.

Рассмотрим теперь чётные x, то есть $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $x = 2$, то $y = 1$. При $n \ge 2$ получаем $2^{2n} \vdots 8$. Но тогда на 8 должна делиться и сумма $3^y + 1$.

а) Пусть $y = 2k$, тогда $3^{2k} = 9^k = (8+1)^k$, т.е. 3^{2k} при делении на 8 имеет остаток 1. Таким образом, при чётных значениях y исходное уравнение решений не имеет.

б) Для $y = 2k+1$ получаем, что $3^{2k+1} + 1 = 3 \cdot 9^k + 1$ при делении на 8 имеет остаток 4, то есть и при нечётных значениях y решений нет.

Ответ. $(2;1)$.

Задача 14.

Решить в целых числах уравнение $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

Идея. Разложить на множители и исследовать их возможные значения с помощью чётности-нечётности.
Указание. Использовать представление $y = 2k+1$.

Решение.
1) При $x < 0$ левая часть уравнения не является целой, следовательно, $x \geq 0$.

2) При $x = 0$ получаем $y = \pm 2$.

3) Если $x > 0$, то левая часть является нечётной, следовательно, y должно быть нечётным, т.е. $|y| = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Подставив это в уравнение, получим

$$3 \cdot 2^x = 4k(k+1).$$

Рассмотрим два случая.

а) Если k чётно, то $(k+1)$ — нечётно, но множителями числа $k+1$ могут быть только тройка и двойки, значит, $k+1=3$. В этом случае $y = \pm 5$, $x = 3$.

б) Пусть k нечётно. Но его множителями могут быть только тройка и двойки, значит $k = 3$. В этом случае $y = \pm 7$, $x = 4$.

Ответ. $(0; \pm 2)$, $(3; \pm 5)$, $(4; \pm 7)$.

Задача 15.

Решить в натуральных числах уравнение $3^x - 2^y = 1$.

Идея. Разложить на множители выражение $3^x - 1$ и получить ограничения на x из того, что каждый множитель должен быть степенью двойки.
Указание. Отдельно рассмотреть чётные и нечётные x.

Решение. Отдельно рассмотрим чётные и нечётные x.
1) Если $x = 2m$, то

$$3^{2m} - 1 = 2^y \iff (3^m - 1)(3^m + 1) = 2^y,$$

причём каждый множитель должен быть степенью двойки. Пусть $3^m - 1 = 2^k$, $3^m + 1 = 2^l$. Так как $m \in \mathbb{N}$, то $k \geq 1$, $l \geq 2$. Получаем

$$2^k + 2^l = 2 \cdot 3^m \iff 2^{k-1} + 2^{l-1} = 3^m.$$

При $k \geq 2$ левая часть является чётной, а правая — нет. Следовательно, $k = 1$. Тогда $3^m - 1 = 2^k = 2$ и $m = 1$. В результате $x = 2$, $y = 3$.

2) Пусть x нечётно. Разложим левую часть уравнения $3^x - 1 = 2^y$ на множители

$$3^x - 1 = (3-1)(3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 1).$$

Число слагаемых во второй скобке равно x (т.е. нечётно), каждое слагаемое нечётно, следовательно, всё выражение нечётно. Но произведение множителей является степенью двойки, значит, второй множитель равен 1. В этом случае $x = 1$, $y = 1$.

Ответ. $(1; 1)$, $(2; 3)$.

Задача 16.

Решить в натуральных числах уравнение $x+y+z=xyz$.

Идея. Решить уравнение в случае, когда одна из переменных равна 1 и доказать, что других решений нет.
Указание. Выразить одну переменную через остальные и исследовать, в каком случае полученная дробь будет целым числом.

Решение. Пусть $z=1$, тогда

$$x+y+1=xy \quad \Longleftrightarrow \quad x(y-1)=y+1.$$

Отсюда видно, что x и y отличны от 1 и

$$x=\frac{y+1}{y-1}=1+\frac{2}{y-1}.$$

Так $x \in \mathbb{N}$, то 2 должно делиться на $y-1$ и, следовательно, $y=2$ или 3. Таким образом, мы получили часть ответа: $(2;3;1)$, $(3;2;1)$.

Поскольку x,y,z входят в уравнение симметрично, аналогичным образом получается другая часть ответа $(1;2;3)$, $(1;3;2)$, $(2;1;3)$, $(3;1;2)$.

Теперь докажем, что больше решений нет. Случай, когда одна из переменных равна 1, мы уже рассмотрели. Пусть теперь $x,y,z \geq 2$.

Перепишем уравнение в виде

$$y+z=x(yz-1) \quad \Longleftrightarrow \quad x=\frac{y+z}{yz-1}.$$

Но $x \geq 2$, следовательно,

$$y+z \geq 2(yz-1) \quad \Longleftrightarrow \quad z+2 \geq y(2z-1)$$

Откуда

$$y \leq \frac{z+2}{2z-1}=\frac{1}{2}+\frac{2,5}{2z-1} \leq \frac{1}{2}+\frac{2,5}{2\cdot 2-1}<2,$$

что противоречит тому, что $y \geq 2$, т.е. других решений нет.

Ответ. $(2;3;1)$, $(3;2;1)$, $(1;2;3)$, $(1;3;2)$, $(2;1;3)$, $(3;1;2)$.

Задача 17.

Решить в целых числах уравнение $x^2+y^2+z^2=2xyz$.

Идея. Рассмотреть все возможные варианты чётности-нечётности переменных.
Указание. Показать, что все переменные должны быть чётными и перейти к новым переменным.

Решение. Правая часть уравнения чётная. Левая часть будет чётной в одном из двух случаев:

1) все переменные чётные;
2) одна — чётная, две — нечётные.

Сначала покажем, что во втором случае решений нет. Пусть

$$x = 2k,\ y = 2n+1,\ z = 2l+1, \text{тогда}$$

$$4k^2 + 4n^2 + 4n + 4l^2 + 4l + 2 = 4k(2n+1)(2l+1).$$

Противоречие в том, что правая часть делится на 4, а левая — нет. Значит, все переменные чётные:

$$x = 2k,\ y = 2n,\ z = 2l.$$

Получаем

$$4k^2 + 4n^2 + 4l^2 = 16knl \iff k^2 + n^2 + l^2 = 4knl.$$

Аналогичным образом показывается, что новые переменные являются чётными. Т.е. старые делятся на 4. Продолжая эту процедуру, получим, что старые переменные делятся на 2 в любой степени. Следовательно, $x = y = z = 0$.

Ответ. $(0;0;0)$.

1.3. Смешанные задачи на целые числа

Задача 1.

Определить p, если p, $p+10$, $p+14$ – простые числа.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 3 числа p.
Указание. Представить p в виде $3k+r$, где $r = 0;1;2$.

Решение. Рассмотрим возможные варианты:

1) если $p = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, то $p+14 = 3k+15 \,\vdots\, 3$ и, следовательно, не является простым;
2) если $p = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}$, то $p+10 = 3k+12 \,\vdots\, 3$ и, следовательно, не является простым;
3) если $p = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, то $p = 3$ (так как p – простое число). В этом случае $p+10 = 13$, $p+14 = 17$ простые числа.

Ответ. 3.

Задача 2.

Числа p и q – простые, $p, q > 3$. Доказать, что $p^2 - q^2$ делится на 24.

Идея. Разложить выражение на множители и перебрать возможные остатки от деления на 2 и 3.
Указание. Применить формулу разности квадратов двух чисел. Простые числа большие 3 - нечётные.

Решение. Так как p и q – простые числа и $p,q>3$, то они являются нечётными, то есть

$$p=2k+1,\quad q=2l+1,\quad k,l\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$p^2-q^2=(p-q)(p+q)=(2k-2l)(2k+2l+2)=4(k-l)(k+l+1).$$

Покажем, что произведение $(k-l)(k+l+1)$ делится на 6. Если k и l одинаковой чётности, то первый множитель делится на 2, если разной – то второй.

Осталось продемонстрировать делимость на 3. Так как p и q – простые, то имеют вид $p=3m_1+r_1$, $q=3m_2+r_2$, где r_1,r_2 принимают значение 1 или 2. В случае, когда $r_1=r_2$, первый множитель делится на 3. В противном случае на 3 делится второй множитель. Следовательно, p^2-q^2 делится на 24.

Задача 3.

При каких целых q существует целое решение уравнения $x^3+2qx+1=0$?

Идея. Использовать разложение на множители.
Указание. Перенести 1 вправо, а в левой части вынести x.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x(x^2+2q)=-1.$$

Произведение двух целых чисел равно -1, значит, одно из них равно 1, другое равно -1. Следовательно, $x^2+2q=1+2q=\pm1$, откуда $q=-1;\ 0$.

Ответ. $-1;\ 0$.

Задача 4.

Доказать, что если две положительные несократимые дроби в сумме равны 1, то их знаменатели равны.

Идея. Показать, что знаменатель одной дроби должен делиться на знаменатель другой.
Указание. Домножить уравнение на знаменатель одной из дробей и использовать несократимость второй дроби.

Решение. Пусть $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ – две положительные несократимые дроби и

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=1.$$

Умножив уравнение на q, получим

$$p+\frac{r}{s}q=q.$$

Так как $\frac{r}{s}q\in\mathbb{N}$ и дробь $\frac{r}{s}$ несократима, то q делится s. Аналогично доказывается, что s делится на q. Следовательно, $q=s$. Что и требовалось доказать.

Задача 5.

Доказать, что число $n^4 + 64$ составное при любом $n \in \mathbb{N}$.

Идея. Разложить выражение $n^4 + 64$ на множители.
Указание. Добавить и вычесть $16n^2$ и применить формулу разности квадратов.

Решение. Преобразуем

$$n^4 + 64 = n^4 + 16n^2 + 64 - 16n^2 = (n^2 + 8)^2 - (4n)^2 = (n^2 - 4n + 8)(n^2 + 4n + 8).$$

Первый множитель $n^2 - 4n + 8 = (n-2)^2 + 4 \geq 4$, второй множитель $n^2 + 4n + 8 \geq 13$ при натуральных n. Следовательно, оба множителя отличны от 1 и исходное число является составным.

Задача 6.

Доказать, что число $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ является точным квадратом при любом натуральном n.

Идея. Арифметическими преобразованиями привести исходное выражение к полному квадрату.
Указание. Перемножить первый множитель с последним, второй – с предпоследним и, сделав соответствующую замену, представить произведение в виде $A^2 - 1$.

Решение. Представим исходное выражение в виде

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = [n(n+3)] \cdot [(n+1)(n+2)] + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1.$$

Положив $A = n^2 + 3n + 1$, получим

$$(A-1)(A+1) + 1 = A^2.$$

Таким образом, исходное выражение равно $A^2 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

Задача 7.

Покажите, что всякое нечётное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

Идея. К записи нечётного числа $2n+1$ прибавить и вычесть n^2.
Указание. Воспользоваться формулой квадрата суммы.

Решение. Рассмотрим нечётное число $2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$. Справедливо

$$2n + 1 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = (n+1)^2 - n^2.$$

Следовательно, всякое нечётное число является разностью квадратов двух последовательных целых чисел.

Задача 8.

Доказать, что $2^{3^{1995}} + 3^{1995^3}$ – составное число.

Идея. Разложить на множители с помощью формул сокращённого умножения.
Указание. Представить исходное число в виде $a^3 + b^3$.

Решение. Представим число $2^{3^{1995}}$ в виде $(2^{3^{1994}})^3$, а число 3^{1995^3} в виде $(3^{1995^2 \cdot 665})^3$. Так как с помощью формулы суммы кубов исходное число можно представить в виде произведения двух сомножителей отличных от 1, то исходное число является составным.

Задача 9.

Доказать, что если число n не является степенью двойки, то число $k^n + l^n$ – составное (n, k, l – натуральные числа; $n, k, l > 1$).

Идея. Разложить выражение на множители.
Указание. Воспользоваться тем, что при нечётных s справедливо равенство

$$a^s + b^s = (a+b)(a^{s-1} - a^{s-2}b + \ldots - ab^{s-2} + b^{s-1}).$$

Указание. Показать, что оба множителя отличны от 1.

Решение. Так как n не является степенью двойки, то $n = (2p+1)m$, $p, m \in \mathbb{N}$, тогда

$$k^n + l^n = k^{(2p+1)m} + l^{(2p+1)m} = (k^m)^{2p+1} + (l^m)^{2p+1} =$$
$$= (k^m + l^m)\left((k^m)^{2p} - (k^m)^{2p-1} \cdot (l^m) + \ldots + (l^m)^{2p}\right).$$

Первый множитель больше 1. Поскольку $k, l, n > 1$, справедливо $k^m + l^m < k^n + l^n$, следовательно, второй множитель тоже больше 1. Это означает, что $k^n + l^n$ – число составное.

Задача 10.

Известно, что a, b, c – целые числа, и $a + b = c$. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа.

Идея. Подстановкой избавиться от переменной c.
Указание. Разложить выражение на множители, предварительно выделив полный квадрат из суммы первых двух слагаемых.

Решение. Проведем следующие преобразования:

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + b^4 + (a+b)^4 =$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + (a+b)^4 = [(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2] + [(a+b)^4 - a^2b^2] =$$

$$= [(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)] + [((a + b)^2 - ab)((a + b)^2 + ab)] =$$
$$= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) + (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 + 3ab) =$$
$$= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab + a^2 + b^2 + 3ab) = 2(a^2 + b^2 + ab)^2.$$

Следовательно, исходное выражение есть удвоенный квадрат числа $a^2 + b^2 + ab$.

Задача 11.

Пусть p и q – два последовательных простых числа. Может ли их сумма быть простым числом?

Идея. Привести соответствующий пример.
Указание. Исследовать вопрос чётности-нечётности чисел.

Решение. Все три числа одновременно быть нечётными не могут. Следовательно, хотя бы одно из них чётно. Единственным четным простым числом является 2. Следующим простым числом является 3. Их сумма также является простым числом.

Ответ. Да.

Задача 12.

Сумма $k^2 + m^2 + n^2$ делится на 4. Доказать, что числа k, m, n – чётные.

Идея. Перебрать все возможные случаи чётности-нечётности переменных.
Указание. Число нечётных переменных должно быть чётно.

Решение. Рассмотрим возможные случаи.

1) Если все переменные нечётные, то сумма $k^2 + m^2 + n^2$ будет нечётной, что противоречит условию.

2) Если только одна переменная является нечётной, то сумма также нечётна.

3) Пусть две переменные нечётны, а одна – чётна. Например,

$$k = 2l + 1, \quad m = 2p + 1, \quad n = 2s.$$

Тогда величина $k^2 + m^2 + n^2 = 4l^2 + 4l + 4p^2 + 4p + 4s^2 + 2$ не делится на 4.

Следовательно, все переменные являются чётными.

Задача 13.

Найти все целые n, при которых дробь $\dfrac{22n + 3}{26n + 4}$ сократима.

Идея. Предположить сократимость дроби на некоторое число $k \neq 1$ и записать этот факт в виде двух равенств для числителя и знаменателя.
Указание. Исключить из уравнений переменную n и получить уравнение для k.

Решение. Пусть дробь $\dfrac{22n+3}{26n+4}$ сократима на k, тогда

$$22n + 3 = kl, \quad 26n + 4 = km, \quad k \in \mathbb{N},\ l, m \in \mathbb{Z}.$$

Исключая из этих уравнений переменную n, получим, что $k(11m - 13l) = 5$. То есть, дробь сократима на $k = 5$. Теперь найдем n. Так как

$$\frac{22n+3}{26n+4} = \frac{20n+2n+3}{25n+n+4},$$

то $2n + 3 \mathbin{\vdots} 5$ и $n + 4 \mathbin{\vdots} 5$, что возможно лишь при $n = 5p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $n = 5p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$.

Задача 14.

Доказать, что дробь $\dfrac{2n^2-1}{n+1}$ несократима ни при каком n.

Идея. Выделить целую часть и доказать несократимость дробной части.

Указание. $\dfrac{2n^2-1}{n+1} = 2n - 2 + \dfrac{1}{n+1}$.

Решение. Преобразуем исходную дробь, выделив из неё целую часть:

$$\frac{2n^2-1}{n+1} = \frac{2n^2+2n-2n-1}{n+1} = 2n - \frac{2n+1}{n+1} = 2n - \frac{2n+2-1}{n+1} = 2n - 2 + \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку дробь $\dfrac{1}{n+1}$ несократима ни при каких n, исходная дробь также несократима.

Задача 15.

При каких натуральных n сократима дробь $\dfrac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}$?

Идея. Выделить целую часть и исследовать сократимость дробной части.

Указание. Дробная часть $\dfrac{6n}{n^2-n+3}$ может быть сократима либо на множитель числа 6, либо на множитель числа n.

Решение. Преобразуем дробь

$$\frac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3} = \frac{n^3-n^2+3n-6n}{n^2-n+3} = n - \frac{6n}{n^2-n+3}.$$

Если сократима дробь $\dfrac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}$, то сократима дробь $\dfrac{6n}{n^2-n+3}$.

Заметим, что дробь может быть сократима либо на множитель числа 6, либо на множитель числа n.

Рассмотрим первый случай. На 2 дробь сократима быть не может, так как $n^2-n=n(n-1)$ – чётное число. Поэтому знаменатель является нечётным числом. Значит, дробь сократима на 3. Следовательно, на 3 должно делиться $n(n-1)$, а это возможно при $n=3k$ и $n=3k+1$.

Теперь рассмотрим второй случай, когда дробь сократима на q – множитель числа n. В этом случае 3 (последнее слагаемое знаменателя) также должно делиться на q. Следовательно, $q=3$, а случай, когда дробь сократима на 3 уже рассмотрен.

Ответ. $n=3k$, $n=3k+1$, $k\in\mathbb{N}$.

Задача 16.

Доказать, что число, состоящее из n $(n>1)$ одинаковых цифр, не является точным квадратом.

Идея. Первым делом показать, что число, состоящее из n единиц, не является точным квадратом. Для этого рассмотреть остатки от деления на 4.
Указание. Квадрат нечётного числа при делении на 4 имеет остаток 1.

Решение. При $n\geq 3$ число из n единиц можно представить в виде

$$B=100p+11=4(25p+2)+3,\quad p\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, оно имеет остаток 3 при делении на 4. Но квадрат натурального числа l либо кратен 4 (при $l=2m$), либо имеет остаток 1 (при $l=2m+1$), т.е. число из n единиц не является полным квадратом.

Число, состоящее из n одинаковых цифр, можно представить в виде $A=k\cdot B$, где $k=1;4;5;6$ или 9, поскольку только на одну из этих цифр может оканчиваться квадрат целого числа.

Рассмотрим случай, когда k является полным квадратом, т.е. $k=1;4;9$. Если бы число A было полным квадратом, то и число B также было квадратом, что неверно.

При $k=5$ число A делится на 5, но не делится на 25. Следовательно, оно не является полным квадратом. При $k=6$ число A делится на 2, но не делится на 4. Следовательно, и при этом k оно также не является полным квадратом.

Задача 17.

Могут ли числа $11, 12, 13$ быть членами, не обязательно последовательными, одной геометрической прогрессии?

Идея. Предположить, что могут и из соответствующих равенств исключить первый член и знаменатель прогрессии.
Указание. Противоречие получить из свойств делимости.

Решение. Пусть $10 = b_1 q^m$, $11 = b_1 q^n$, $12 = b_1 q^k$. Пусть $m < n < k$ (в остальных случаях доказательство проводится аналогично). Исключив b_1, получим

$$\frac{11}{10} = q^{n-m}, \quad \frac{12}{11} = q^{k-n}.$$

Исключив q, получим равенство в целых числах

$$11^{k-m} = 12^{n-m} 10^{k-n}.$$

Левая часть делится на 11, а правая нет. Значит, наше предположение неверно.

Ответ. Нет.

Задача 18.

Решить в целых числах уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}} = y$ (всего 1992 корня).

Идея. Показать, что выражение с любым меньшим числом корней также будет целым числом.
Указание. Найти x из условий $\sqrt{x + \sqrt{x}} \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$.

Решение. Если выражение с 1992 корнями является целым числом, то аналогичное выражение с 1991 корнем также будет целым числом. Для доказательства достаточно возвести исходное уравнение в квадрат и перенести x слева направо. Проведя эту процедуру нужное число раз, мы получим, что

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} \in \mathbb{Z}, \quad \sqrt{x} \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим $n = \sqrt{x} \geq 0$, $k = \sqrt{x + \sqrt{x}} \geq 0$, тогда

$$n^2 + n = k^2.$$

Так как $n^2 + n$ есть полный квадрат и в силу оценок

$$n^2 \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

получаем, что

$$n^2 + n = n^2 \iff n = 0.$$

Следовательно, $x = 0$, $y = 0$.

Ответ. $(0; 0)$.

1.4. Рационадьные и иррациональные числа

Задача 1.

Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ иррационально.

Идея. Действовать от противного.
Указание. Предположить, что данное число равно $r \in \mathbb{Q}$, уединить $\sqrt[3]{3}$ и возвести равенство в куб.

Решение. Допустим, что $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=r\in\mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt[3]{3}=r-\sqrt{2}$. Возведём это равенство в куб и выразим $\sqrt{2}$, получим:

$$\sqrt{2}=\frac{r^3+6r-3}{3r^2+2}\in\mathbb{Q}.$$

Так как $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, то наше предположение неверно и $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ иррационально.

Задача 2.

Доказать, что число $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ иррационально.

Идея. Действовать от противного.
Указание. Возвести число в куб.

Решение. Допустим, что число рационально, то есть $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}=r\in\mathbb{Q}$. Возведём это равенство в куб и выразим $\sqrt[3]{6}$:

$$2+3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}+3=r^3 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt[3]{6}=\frac{r^3-5}{3(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})}=\frac{r^3-5}{3r}.$$

Получили, что $\sqrt[3]{6}$ – рациональное число, но это не так. Пришли к противоречию, следовательно, $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ – иррациональное число.

Задача 3.

Является ли рациональным число $\sqrt{3-\sqrt{4+\sqrt{12}}}+\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}$?

Идея. С помощью арифметических преобразований упростить запись числа.
Указание. Выделить полные квадраты.

Решение. Так как $4+\sqrt{12}=4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$ и $4-\sqrt{12}=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$, то

$$\sqrt{3-\sqrt{4+\sqrt{12}}}+\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}=\sqrt{3-(\sqrt{3}+1)}+\sqrt{3+(\sqrt{3}-1)}=$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

Следовательно, исходное число иррационально.

Ответ. Нет.

Задача 4.

Один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $1+\sqrt{3}$. Найти p и q, если известно, что они рациональные.

Идея. Подставить корень в уравнение и получить условие на коэффициенты.
Указание. В полученном уравнении сгруппировать иррациональные слагаемые отдельно от рациональных.

Решение. Подставим данный корень в уравнение:

$$(1+\sqrt{3})^2 + p(1+\sqrt{3}) + q = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (4+p+q) = -\sqrt{3}(2+p).$$

При $p \neq -2$ слева – рациональное число, а справа – иррациональное. Следовательно, $p=-2$. При этом p получаем $q=-2$.

Ответ. $p=-2$, $q=-2$.

Задача 5.

Является ли рациональным число $\sin 25°$?

Идея. Действовать от противного.
Указание. Воспользоваться формулой синуса тройного угла.

Решение. Допустим, что число $\sin 25°$ – рациональное число. Тогда рациональным будет число $\sin 75° = 3\sin 25° - 4\sin^3 25°$, но

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \notin \mathbb{Q}.$$

Пришли к противоречию, следовательно, $\sin 25°$ – иррациональное число.

Ответ. Нет.

Задача 6.

Определить первые 4 знака после запятой у числа $\sqrt[3]{0,9999}$.

Идея. Использовать монотонность показательной функции.
Указание. Если число меньше 1, то корень из него больше, чем само число.

Решение. По свойству степени получим

$$0,9999 < \sqrt[7]{0,9999} < 1,$$

следовательно, первые четыре цифры у этого числа будут девятки.

Ответ. Девятки.

Задача 7.

Решить в рациональных числах уравнение $2^x = 3^y$.

Идея. Найти одно решение и показать, что других нет.
Указание. Использовать иррациональность соответствующего логарифма.

Решение. При $x = 0$ получим $y = 0$ и наоборот. Теперь рассмотрим $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Прологарифмируем уравнение по основанию 2:

$$\log_2 2^x = \log_2 3^y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y\log_2 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2 3 = \frac{x}{y}.$$

Так как $\log_2 3$ – число иррациональное, а $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, то получаем противоречие. Следовательно, ненулевых решений нет.

Ответ. $x = y = 0$.

Задача 8.

Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?

Идея. Привести соответствующий пример.
Указание. В качестве первого числа взять радикал, в качестве второго — логарифм.

Решение. Числа $\sqrt{2}$ и $\log_2 9$ являются иррациональными, а $\sqrt{2}^{\log_2 9} = 3 \in \mathbb{Q}$.

Ответ. Да.

Задача 9.

Доказать, что число $0,123456789101112\ldots$ (после запятой выписаны все натуральные числа подряд) является иррациональным.

Идея. Показать, что у десятичной записи числа нет периода.
Указание. Использовать то, что каждая цифра встречается в десятичной записи любое число раз подряд.

Решение. Пусть число рациональное. Тогда в его десятичной записи есть период из k цифр. Но в записи числа сколь угодно далеко от начала встречаются k нулей подряд. Следовательно, в периоде содержатся одни нули, а это противоречит условию.

Задача 10.

Доказать, что между любыми двумя различными иррациональными числами есть рациональное число.

Идея. Рассмотреть десятичную запись этих чисел.
Указание. Обрубить большее число таким образом, чтобы полученное число оставалось больше меньшего числа.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что оба числа меньше 1 и имеют вид

$$a = 0, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots;$$

$$b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n b_{n+1} \ldots$$

Пусть цифры a_i и b_i совпадают при $i \le n$, а $a_{n+1} > b_{n+1}$. Рассмотрим число $c = 0, a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$. Оно рационально и $b < c < a$. Следовательно, c искомое рациональное число.

Задача 11.

Доказать, что $\cos 2^\circ$ иррациональное число.

Идея. Показать, что если $\cos 2^\circ$ рациональное число, то и $\sin 18^\circ$ рациональное число.
Указание. Значение $\sin 18^\circ$ можно вычислить непосредственно с помощью формул двойного и тройного углов.

Решение. Заметим, что если $\cos x \in \mathbb{Q}$, то

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \in \mathbb{Q}, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \in \mathbb{Q}.$$

Пусть $\cos 2^\circ \in \mathbb{Q}$, тогда

$$\cos 6^\circ \in \mathbb{Q} \implies \cos 18^\circ \in \mathbb{Q} \implies \cos 36^\circ \in \mathbb{Q} \implies \cos 72^\circ \in \mathbb{Q}.$$

Вычислим $\cos 72^\circ$, равный $\sin 18^\circ$. Для этого преобразуем равенство $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$ следующим образом:

$$4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ \iff 4\cos^2 18^\circ - 3 = 2\sin 18^\circ \iff$$

$$\iff 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0.$$

Так как $\sin 18^\circ > 0$, то нам подходит только положительный корень. Значит, $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \notin \mathbb{Q}$. Следовательно, $\cos 2^\circ$ также иррациональное число.

Задача 12.

Доказать, что $\cos 1^\circ$ и $\sin 1^\circ$ есть иррациональные числа.

Идея. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.
Указание. Применить формулу косинуса двойного угла.

Решение. Если $\cos 1^\circ$ или $\sin 1^\circ$ рациональное число, то и число $\cos 2^\circ = 2\cos^2 1^\circ - 1 = 1 - 2\sin^2 1^\circ$ тоже рациональное, а это не так.

Задача 13.

Определить первый знак после запятой у числа $\sin 80^\circ$.

Идея. Оценить $\sin 80^\circ$ через $\sin 75^\circ$.
Указание. $\sin 75^\circ$ вычислить непосредственно.

Решение. $\sin 80^\circ > \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} > 0,9$.
Следовательно, первый знак после запятой у числа $\sin 80^\circ$ девятка.

Ответ. 9.

Задача 14.

Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что $\left|\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} - a\right| < 1$.

Идея. Определить два натуральных числа, между которыми находится $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Указание. Показать, что $2 < \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} < 3$.

Решение. Докажем, что

$$2 < \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} < 3.$$

Правое неравенство справедливо, так как $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}/2} < 3$. Для доказательства левого неравенства возведём обе части в степень $\sqrt{2}$:

$$2^{\sqrt{2}} < 3$$

и докажем более сильное неравенство

$$2^{\frac{3}{2}} < 3.$$

После возведения в квадрат получим очевидное неравенство $8 < 9$. Следовательно, $\left|\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} - 2\right| < 1$.

Ответ. 2.

Задача 15.

Доказать, что уравнение $x^3 + x^2y + y^3 = 0$ не имеет ненулевых рациональных решений.

Идея. Действовать от противного.
Указание. Предположить противное и, поделив уравнение на y^3, показать, что у получившегося уравнения нет рациональных корней (использовать для этого теорему Безу).

Решение. Рассмотрим ненулевое решение x, y. Поделив исходное уравнение на y^3 и сделав замену $t = x/y$, получим уравнение

$$t^3 + t^2 + 1 = 0.$$

Если это уравнение имеет рациональные корни, то по теореме Безу это могут быть только $t = \pm 1$. Подстановкой убеждаемся, что это не так. Следовательно, исходное уравнение не имеет ненулевых рациональных решений.

1.5. Сравнение чисел

Задача 1.

Сравнить числа: $10^{\log_9 3}$ и $7^{\log_4 2}$.

Идея. Вычислить значения логарифмов непосредственно.
Указание. $10^{\log_9 3} = \sqrt{10}$, $7^{\log_4 2} = \sqrt{7}$.

Решение. Поскольку $10^{\log_9 3} = \sqrt{10}$, а $7^{\log_4 2} = \sqrt{7}$, то $10^{\log_9 3} > 7^{\log_4 2}$.

Ответ. $10^{\log_9 3} > 7^{\log_4 2}$.

Задача 2.

Что больше: $\log_4 7$ или $\log_{1/3} 2$?

Идея. Определить знаки логарифмов.

Решение. $\log_4 7 > 0 > \log_{1/3} 2$.

Ответ. $\log_4 7 > \log_{1/3} 2$.

Задача 3.

Что больше: $\log_{11} 12$ или $\log_{12} 13$?

Идея. Использовать убывание $\log_n (n+1)$ с ростом n.

Решение. Так как $\log_{n-1} n > \log_n (n+1)$, то $\log_{11} 12 > \log_{12} 13$.

Ответ. $\log_{11} 12 > \log_{12} 13$.

Задача 4.

Сравнить числа: $\log_2 \pi + \log_\pi 2$ и 2.

Идея. Воспользоваться оценкой суммы двух взаимнообратных чисел.
Указание. Привести логарифмы к одному основанию.

Решение. Так как $a + \dfrac{1}{a} > 2$ при $a > 1$, то $\log_2 \pi + \log_\pi 2 = \log_2 \pi + \dfrac{1}{\log_2 \pi} > 2$.

Ответ. $\log_2 \pi + \log_\pi 2 > 2$.

Задача 5.

Что больше: $\log_2 5$ или $\log_3 5$?

Идея. Воспользоваться монотонностью логарифма.
Указание. Привести логарифмы к одному основанию.

Решение. $\log_2 5 \vee \log_3 5 \iff \dfrac{1}{\log_5 2} \vee \dfrac{1}{\log_5 3} \iff \log_5 3 > \log_5 2.$

Ответ. $\log_2 5 > \log_3 5$.

Задача 6.

Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 2$?

Идея. Использовать метод промежуточного числа, то есть указать число, которое лежит между двумя заданными.
Указание. В качестве промежуточного использовать число 1.

Решение. $\log_2 3 > 1 > \log_3 2$.

Ответ. $\log_2 3 > \log_3 2$.

Задача 7.

Сравнить числа: $\log_{11} 119$ и $\log_{15} 227$.

Идея. Использовать метод промежуточного числа, то есть указать число, которое лежит между двумя заданными.
Указание. В качестве промежуточного использовать число 2.

Решение. $\log_{11} 119 < \log_{11} 121 = 2 = \log_{15} 225 < \log_{15} 227$.

Ответ. $\log_{11} 119 < \log_{15} 227$.

Задача 8.

Сравнить числа: $4^{\sqrt{\log_4 5}}$ и $5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

Идея. Привести оба выражения к одному основанию степени.
Указание. Применить основное логарифмическое тождество.

Решение. Используя свойства логарифмов, преобразуем первое слагаемое

$$4^{\sqrt{\log_4 5}} = 4^{\frac{\log_4 5}{\sqrt{\log_4 5}}} = \left(4^{\log_4 5}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\log_4 5}}} = 5^{\sqrt{\log_5 4}}.$$

Ответ. $4^{\sqrt{\log_4 5}} = 5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

Задача 9.

Выяснить, что больше: 3^{40} или 4^{30}.

Идея. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному неравенству.
Указание. Возвести обе части неравенства в степень $1/10$.

Решение. Возведём обе части формального неравенства в степень $1/10$:

$$(3^{40})^{\frac{1}{10}} \vee (4^{30})^{\frac{1}{10}} \quad \Longleftrightarrow \quad 3^4 \vee 4^3 \quad \Longleftrightarrow \quad 81 \vee 64.$$

Из неравенства $81 > 64$ следует, что $3^{40} > 4^{30}$.

Ответ. $3^{40} > 4^{30}$.

Задача 10.

Что больше: $\sqrt[9]{9!}$ или $\sqrt[8]{8!}$?

Идея. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному неравенству.
Указание. Возвести обе части неравенства в степень 72 и сократить общие множители.

Решение. После возведения неравенства $\sqrt[9]{9!} \vee \sqrt[8]{8!}$ в степень 72 получим:

$$(9!)^8 \vee (8!)^9 \quad \Longleftrightarrow \quad (8!)^8 \cdot 9^8 \vee (8!)^8 \cdot (8!).$$

Сократив на $(8!)^8$ получим:

$$9^8 \vee 8! \quad \Longleftrightarrow \quad 9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 9 \vee 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8.$$

Слева стоит произведение восьми девяток, а справа — произведение восьми чисел, каждое из которых меньше чем 9. Следовательно, левое число больше правого.

Ответ. $\sqrt[9]{9!} > \sqrt[8]{8!}$.

Задача 11.

Определить знак числа $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5$.

Идея. Определить знак каждого из множителей.
Указание. Использовать то, что $\sin x$ положителен в первой и второй четвертях, а $\cos x$ — в первой и четвёртой.

Решение.
1) $\sin 2 > 0$, так как $2 \in (0; \pi)$.
2) $\cos 3 < 0$, так как $3 \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.
3) $\sin 5 < 0$, так как $5 \in (\pi; 2\pi)$.
Следовательно, $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5 > 0$.

Ответ. $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5 > 0$.

Задача 12.

Какое из чисел больше: $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1$ или $\dfrac{1}{2}$?

Идея. Упростить выражение $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3}$ и свести неравенство к очевидному.
Указание. Представить выражение $2\cos 2 + 4\cos 1 + 3$ в виде квадрата суммы двух чисел.
Указание. Преобразовать $\cos 2$ по формуле косинуса двойного угла.

Решение. $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1 = \sqrt{2(2\cos^2 1 - 1) + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1 =$

$$= \sqrt{(2\cos 1 + 1)^2} - 2\cos 1 = |2\cos 1 + 1| - 2\cos 1 = 1 > \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1 > \dfrac{1}{2}$.

Задача 13.

Какой знак имеет число $\lg(\operatorname{arctg} 2)$?

Идея. Сравнить $\operatorname{arctg} 2$ с известным углом.
Указание. Использовать монотонность логарифма и тангенса.

Решение. В силу монотонности десятичного логарифма и тангенса в первой четверти, получим:

$$\lg(\operatorname{arctg} 2) \ \vee \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{arctg} 2 \ \vee \ 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \ \vee \ \operatorname{tg} 1.$$

Но так как $2 > \sqrt{3} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} > \operatorname{tg} 1$, то $2 > \operatorname{tg} 1$ и $\lg(\operatorname{arctg} 2) > 0$.

Ответ. $\lg(\operatorname{arctg} 2) > 0$.

Задача 14.

Что больше: $\frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$?

Идея. Сравнить тангенсы этих углов.
Указание. Определить четверть, в которой лежат эти углы.

Решение. Покажем, что второй угол, также как и первый, лежит в первой четверти, где функция $\operatorname{tg}x$ монотонно возрастает:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\quad\text{поскольку}\quad 0<\frac{1}{4}<\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{5}{8}\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\quad\text{поскольку}\quad 0<\frac{5}{8}<\sqrt{3},$$

следовательно,

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Теперь вычислим $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8})$ и сравним его с $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}\right)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{5}{8}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}}=\frac{28}{27}>1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Из того, что тангенс второго угла больше тангенса первого следует (так как оба угла лежат в первой четверти), что и сам второй угол больше первого.

Ответ. $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$.

Задача 15.

Что больше: $\sin 3$ или $\sin 3^\circ$?

Идея. Использовать монотонное возрастание функции $\sin x$ в первой четверти.
Указание. Для того, чтобы оба угла лежали в первой четверти заменить $\sin 3$ на $\sin(\pi-3)$.

Решение. Поскольку $\sin 3=\sin(\pi-3)$, будем сравнивать $\sin(\pi-3)$ и $\sin 3^\circ$. Так как оба угла лежат в первой четверти, где функция $y=\sin x$ монотонно возрастает, то будем сравнивать сами углы:

$$\pi-3\ \vee\ \frac{3\pi}{180}\quad\Longleftrightarrow\quad 60(\pi-3)\ \vee\ \pi\quad\Longleftrightarrow\quad 59\pi\ \vee\ 180\quad\Longleftrightarrow\quad \pi\ \vee\ 3\frac{3}{59}.$$

Так как $\pi>3,1>3\frac{3}{59}$, то $\sin 3>\sin 3^\circ$.

Ответ. $\sin 3>\sin 3^\circ$.

Задача 16.

Расположить в порядке возрастания числа: $\sqrt{\frac{2}{7}}$, $\sin\frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

Идея. Использовать метод промежуточного числа.
Указание. В качестве промежуточного угла использовать угол $\pi/6$.

Решение. Сначала расположим в порядке возрастания числа $\sqrt{\frac{2}{7}}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$:

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2}{7}} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.$$

Теперь сравним синус и тангенс угла $\pi/6$ с синусом и тангенсом заданных углов. Так как углы $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{5}$ лежат в первой четверти, то $\sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{\pi}{6}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.
Следовательно, $\sin\frac{\pi}{7} < \sqrt{\frac{2}{7}} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

Ответ. $\sin\frac{\pi}{7} < \sqrt{\frac{2}{7}} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

Задача 17.

Сравнить логарифмы: $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

Идея. Использовать метод промежуточного числа, то есть указать число, которое лежит между двумя заданными.
Указание. Определить, между какими двумя целыми числами лежат оба логарифма и сравнить их с серединой этого отрезка.

Решение. Оба логарифма принадлежат отрезку $[1;2]$. Сравним их значения с серединой отрезка, то есть с числом $3/2$:

$$\log_2 3 \vee \frac{3}{2} \iff 3 \vee 2^{\frac{3}{2}} \iff 3^2 \vee 2^3 \iff 9 > 8;$$

$$\log_5 8 \vee \frac{3}{2} \iff 8 \vee 5^{\frac{3}{2}} \iff 8^2 \vee 5^3 \iff 64 < 125.$$

Следовательно, $\log_2 3 > \frac{3}{2} > \log_5 8$.

Ответ. $\log_2 3 > \log_5 8$.

Задача 18.

Сравнить числа: $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

Идея. Выразить второй логарифм через первый.
Указание. Привести логарифмы к одному основанию.

Решение. Преобразуем неравенство следующим образом:

$$\log_3 7 \vee \log_7 27 \iff \log_3 7 \vee 3\log_7 3 \iff (\log_3 7)^2 \vee 3.$$

Сравним $\log_3 7$ и $\sqrt{3}$. Оба числа лежат на отрезке [1;2]. В результате сравнения с серединой отрезка получаем, что они принадлежат промежутку [3/2; 2]. Теперь выясним, как они соотносятся с серединой нового отрезка:

$$\log_3 7 \vee \frac{7}{4} \iff 7 \vee 3^{\frac{7}{4}} \iff 7^4 \vee 3^7 \iff 2401 > 2187;$$

$$\sqrt{3} \vee \frac{7}{4} \iff 3 \vee \frac{49}{16} \iff 48 < 49.$$

Следовательно, $\log_3 7 > \sqrt{3}$ и $\log_3 7 > \log_7 27$.

Ответ. $\log_3 7 > \log_7 27$.

Задача 19.

Что больше: $2^{\sqrt{3}}$ или $3^{\sqrt{2}}$?

Идея. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному неравенству.
Указание. Возвести обе части неравенства в степень $\sqrt{2}$ и использовать метод промежуточного числа.

Решение. Возведем неравенство $2^{\sqrt{3}} \vee 3^{\sqrt{2}}$ в степень $\sqrt{2}$:

$$2^{\sqrt{6}} \vee 3^2 \iff 2^{\sqrt{6}} \vee 9.$$

Так как $\sqrt{6} < 3$, то $2^{\sqrt{6}} < 8 < 9$. Следовательно, второе число больше первого.

Ответ. $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.

Задача 20.

Сравнить числа: $\sin 31^\circ$ и $\operatorname{tg} 30^\circ$.

Идея. Использовать метод промежуточного числа, то есть указать число, которое лежит между двумя заданными.
Указание. Представить $\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ)$ и оценить это выражение сверху, а $\operatorname{tg} 30^\circ$ — снизу.

Решение. Оценим величину $\sin 31^\circ$:

$$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 1^\circ + \sin 1^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\cos 1^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 1^\circ.$$

С учётом неравенств $\cos 1^\circ < 1$ и $\sin 1^\circ = \sin\frac{\pi}{180} < \frac{\pi}{180} < 0,02$, получим, что $\sin 31^\circ < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,02 < 0,55$. Но $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0,55$, следовательно, $\sin 31^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$.

Ответ. $\sin 31^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$.

Задача 21.

Сравнить числа: $\operatorname{tg} 55^\circ$ и $1,4$.

Идея. Свести задачу к оценке $\operatorname{tg} 10^\circ$.
Указание. Выразить $\operatorname{tg} 55^\circ$ через $\operatorname{tg} 45^\circ$ и $\operatorname{tg} 10^\circ$.

Решение. Поскольку $\operatorname{tg} 55^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 10^\circ) = \dfrac{1+\operatorname{tg} 10^\circ}{1-\operatorname{tg} 10^\circ}$, формальное неравенство $\operatorname{tg} 55^\circ \vee 1,4$ равносильно неравенству

$$\frac{1+\operatorname{tg} 10^\circ}{1-\operatorname{tg} 10^\circ} \vee 1,4.$$

После домножения на знаменатель (он положительный, поэтому знак неравенства сохраняется) получим

$$1+\operatorname{tg} 10^\circ \vee 1,4 - 1,4\operatorname{tg} 10^\circ \iff 2,4\operatorname{tg} 10^\circ \vee 0,4 \iff \operatorname{tg} 10^\circ \vee \frac{1}{6}.$$

Докажем, что $\operatorname{tg} 10^\circ > \dfrac{1}{6}$. Поскольку $\operatorname{tg} 10^\circ > \sin 10^\circ$, достаточно доказать, что $\sin 10^\circ > \dfrac{1}{6}$. Из формулы синуса тройного угла получим

$$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ \implies \sin 10^\circ = \frac{1}{3}\sin 30^\circ + \frac{4}{3}\sin^3 10^\circ > \frac{1}{6}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} 55^\circ > 1,4$.

Ответ. $\operatorname{tg} 55^\circ > 1,4$.

Задача 22.

Выяснить, что больше $10^{\sqrt{11}}$ или $11^{\sqrt{10}}$.

Идея. Использовать метод промежуточного числа для того, чтобы избавиться от радикалов, и неравенство Бернулли для того, чтобы упростить вычисления.
Указание. Возвести обе части неравенства в степень $\sqrt{11}$ и применить оценку $10,5 > \sqrt{110}$.

Решение. Докажем, что $10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}$. Возведём неравенство в степень $\sqrt{11}$:

$$10^{11} > 11^{\sqrt{110}}.$$

Поскольку $10,5 > \sqrt{110}$, нам достаточно доказать, что

$$10^{11} > 11^{10,5}.$$

Возведём неравенство в квадрат:

$$10^{22} > 11^{21} \iff 10 \cdot 2^{21} \cdot (5^3)^7 > 121^{10} \cdot 11.$$

Поделим неравенство на 121^7:

$$10 \cdot 2^{21} \cdot \left(\frac{125}{121}\right)^7 > 121^3 \cdot 11.$$

С помощью неравенства Бернулли получим следующую оценку:

$$\left(\frac{125}{121}\right)^7 = \left(1 + \frac{4}{121}\right)^7 \geq 1 + \frac{4}{121} \cdot 7 > 1{,}1.$$

Теперь нам достаточно доказать, что

$$10 \cdot 2^{21} \cdot 1{,}1 > 121^3 \cdot 11.$$

Сократим обе части на 11 и возведём в степень $1/3$. Получим

$$2^7 > 121 \iff 128 > 121.$$

Следовательно, неравенство $10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}$ доказано.

Ответ. $10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}$.

Задача 23.

Что больше: $\sqrt[3]{40} + 1$ или $\sqrt[3]{88}$?

Идея. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному неравенству.

Указание. Составить формальное неравенство, перенести $\sqrt[3]{40}$ направо, вынести 2 за скобки и домножить неравенство до разности кубов правой части $\left(a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\right)$.

Указание. Использовать оценки: $\sqrt[3]{121} < \sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[3]{55} < \sqrt[3]{64} = 4$ и $\sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} = 3$.

Решение. Составим формальное неравенство и перенесём $\sqrt[3]{40}$ направо:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[3]{40} + 1 & \vee & \sqrt[3]{88} \\ 1 & \vee & \sqrt[3]{88} - \sqrt[3]{40} \\ 1 & \vee & 2(\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{5}) \end{array}$$

домножим неравенство до разности кубов правой части $\left(a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\right)$:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{55} + \sqrt[3]{25} & \vee & 2(11-5) \\ \sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{55} + \sqrt[3]{25} & \vee & 12 \end{array}$$

Так как $\sqrt[3]{121} < \sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[3]{55} < \sqrt[3]{64} = 4$ и $\sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} = 3$, то $\sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{55} + \sqrt[3]{25} < 5 + 4 + 3 = 12$. Значит, $\sqrt[3]{40} + 1 < \sqrt[3]{88}$.

Ответ. $\sqrt[3]{40} + 1 < \sqrt[3]{88}$.

Задача 24.

Сравнить числа: $\log_2 14$ и $\sqrt{15}$.

Идея. Использовать метод промежуточного числа, то есть указать число, которое лежит между двумя заданными.

Указание. Промежуточное число искать в виде $4-\dfrac{1}{n}$.

Решение. Оба числа лежат на отрезке [3;4]. Поскольку они оба близки к числу 4, промежуточное число удобно искать в виде $4-\dfrac{1}{n}$, где $n>2$. При непосредственной проверке оказывается, что $n=3;4;5$ не годится. Проверим $n=6$:

$$1)\ \sqrt{15} \vee 3\frac{5}{6} \iff 15 \vee \left(\frac{23}{6}\right)^2 \iff 15\cdot 36 \vee 23^2 \iff 540>529.$$

$$2)\ \log_2 14 \vee 3\frac{5}{6} \iff 1+\log_2 7 \vee 3\frac{5}{6} \iff \log_2 7 \vee \frac{17}{6} \iff 7 \vee 2^{\frac{17}{6}}$$
$$\iff 7^6 \vee 2^{17} \iff 49^3 \vee 1024\cdot 2^7$$

Для того, чтобы доказать, что $49^3<1024\cdot 2^7$ достаточно убедиться в справедливости более сильного неравенства: $50^3<1000\cdot 2^7$. А оно выполняется, так как $5^3=125<2^7=128$.

Таким образом, число $3\frac{5}{6}$ на роль промежуточного числа подходит, и из неравенства $\log_2 14<3\frac{5}{6}<\sqrt{15}$ следует, что $\log_2 14<\sqrt{15}$.

Ответ. $\log_2 14<\sqrt{15}$.

Задача 25.

Сравнить числа: $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

Идея. В обоих логарифмах перейти к основанию 3.

Указание. В обоих логарифмах перейти к основанию 3. Далее для удобства сделать замену $a=\log_3 7$, $a>0$ и сравнить полученные выражения.

Решение. В обоих логарифмах перейдем к основанию 3:

$$\log_{189} 1323=\frac{\log_3 1323}{\log_3 189}=\frac{3+2\cdot\log_3 7}{3+\log_3 7},$$

$$\log_{63} 147=\frac{\log_3 147}{\log_3 63}=\frac{1+2\cdot\log_3 7}{2+\log_3 7}.$$

Сделаем замену переменных $a=\log_3 7$, $a>0$ и сравним полученные выражения:

$$\frac{3+2a}{3+a} \vee \frac{1+2a}{2+a} \iff (3+2a)(2+a) \vee (3+a)(1+2a) \iff 6 \vee 3.$$

Так как $6>3$, то $\log_{189} 1323>\log_{63} 147$.

Ответ. $\log_{189} 1323>\log_{63} 147$.

Задача 26.

Сравнить два числа: $\dfrac{\log_3 4\cdot\log_3 6\cdot\ldots\cdot\log_3 80}{2\log_3 5\cdot\log_3 7\cdot\ldots\cdot\log_3 79}$ и 1.

Идея. Преобразовать неравенство с помощью формулы перехода к другому основанию.

Указание. Преобразовать неравенство с помощью формулы перехода к другому основанию:

$$\log_3 4\cdot\log_5 6\cdot\ldots\cdot\log_{79} 80 \ \vee\ 2.$$

Указание. Обозначить выражение, стоящее в левой части неравенства, через A и положить $B=\log_4 5\cdot\log_6 7\cdot\ldots\cdot\log_{80} 81$. Поскольку $AB=\log_3 81=4$ и, согласно утверждению 1, число $A>B$, получить

$$A^2>AB=4.$$

Решение. Домножим неравенство на 2 и преобразуем левую часть с помощью формулы перехода к другому основанию:

$$\log_3 4\cdot\log_5 6\cdot\ldots\cdot\log_{79} 80 \ \vee\ 2.$$

Обозначим выражение, стоящее в левой части неравенства, через A и положим $B=\log_4 5\cdot\log_6 7\cdot\ldots\cdot\log_{80} 81$. Поскольку $AB=\log_3 81=4$ и, согласно утверждению 1, число $A>B$, получим

$$A^2>AB=4.$$

Следовательно, $A>2$ и $\dfrac{\log_3 4\cdot\log_3 6\cdot\ldots\cdot\log_3 80}{2\log_3 5\cdot\log_3 7\cdot\ldots\cdot\log_3 79}>1$.

Ответ. Первое число больше.

2. Тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции

2.1. Основные свойства арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями

Задача 1.

Доказать, что $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

Идея. Воспользоваться определением арксинуса.

Указание. Переписать исходное равенство в виде $\arcsin x=-\arcsin(-x)$ и воспользоваться определением арксинуса.

Указание. Показать, что

1) $\sin(-\arcsin(-x))=x$;

2) $-\arcsin(-x)\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Исходное равенство равносильно равенству

$$\arcsin x = -\arcsin(-x),$$

для доказательства которого, согласно определению арксинуса, достаточно проверить выполнение двух условий:

1) $\sin(-\arcsin(-x)) = x$;
2) $-\arcsin(-x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

С учётом нечётности синуса получаем, что

$$\sin(-\arcsin(-x)) = -\sin(\arcsin(-x)) = -(-x) = x;$$

следовательно, первое условие выполняется. Далее, проверим справедливость неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \le -\arcsin(-x) \le \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le \arcsin(-x) \le \frac{\pi}{2}.$$

Справедливость последнего неравенства следует из определения арксинуса. Утверждение доказано.

Задача 2.

Доказать, что $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Идея. Воспользоваться определением арккосинуса.
Указание. Переписать исходное равенство в виде $\arccos x = \pi - \arccos(-x)$ и воспользоваться определением арккосинуса.
Указание. Показать, что $\begin{cases} \cos(\pi - \arccos(-x)) = x, \\ 0 \le \pi - \arccos(-x) \le \pi. \end{cases}$

Решение. Исходное равенство равносильно следующему:

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x),$$

для доказательства которого, согласно определению арккосинуса, достаточно проверить выполнение двух условий:

1) $\cos(\pi - \arccos(-x)) = x$;
2) $0 \le \pi - \arccos(-x) \le \pi$.

С учётом свойств косинуса получаем, что

$$\cos(\pi - \arccos(-x)) = -\cos(\arccos(-x)) = -(-x) = x;$$

значит, первое условие выполняется. Далее, проверим справедливость неравенства

$$0 \le \pi - \arccos(-x) \le \pi \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi \le -\arccos(-x) \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \le \arccos(-x) \le \pi.$$

Справедливость последнего неравенства следует из определения арккосинуса. Утверждение доказано.

Задача 3. (ЕГЭ.В)

Вычислить $5\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Идея. Использовать табличное значение косинуса.

Указание. $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$; $\arcsin(0) = 0$.

Решение. Подставим значение косинуса: $5\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right) = 5\arcsin 0 = 0$.

Ответ. 0.

Задача 4. (ЕГЭ.В)

Вычислить $\dfrac{8}{\pi}\operatorname{arcctg}(\cos\pi)$.

Идея. Подставить табличное значение косинуса.

Указание. $\cos\pi = -1$; $\operatorname{arcctg}(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. $\dfrac{8}{\pi}\operatorname{arcctg}(\cos\pi) = \dfrac{8}{\pi}\operatorname{arcctg}(-1) = \dfrac{8}{\pi}\cdot\dfrac{3\pi}{4} = 6$.

Ответ. 6.

Задача 5. (У)

Вычислить $\arcsin\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)$.

Идея. Найти угол $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ такой, что $\sin\alpha = \sin\dfrac{8\pi}{7}$.

Указание. Использовать формулы приведения.

Указание. $\sin\dfrac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$.

Решение. Нам надо найти угол $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ такой, что $\sin\alpha = \sin\dfrac{8\pi}{7}$. Так как $\sin\dfrac{8\pi}{7} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$, то $\alpha = -\dfrac{\pi}{7}$.

Ответ. $-\dfrac{\pi}{7}$.

Задача 6. (У)

Вычислить $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

Идея. Воспользоваться определением арккосинуса и основным тригонометрическим тождеством.

Указание. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$, $0 \le \alpha \le \pi$.

Решение. Положим $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, тогда по определению арккосинуса

$$\cos\alpha = -\frac{1}{4}, \quad 0 \le \alpha \le \pi.$$

Так как $\alpha \in [0;\pi]$, то $\sin\alpha \ge 0$. Поэтому из основного тригонометрического тождества получаем

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Задача 7. (У)

Вычислить $\cos(\operatorname{arcctg}(-2))$.

Идея. Вычислить $\cos\alpha$, зная, что $\operatorname{ctg}\alpha = -2$ и $0 < \alpha < \pi$.

Указание. Использовать основное тригонометрическое тождество.

Указание. Найти $\cos\alpha$ из системы $\begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -2, \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \end{cases}$

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arcctg}(-2)$, тогда по определению арккотангенса $\alpha \in (0;\pi)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -2$. Поскольку $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ и $\alpha \in (0;\pi)$, то угол α принадлежит второй четверти. Значит, $\cos\alpha < 0$. Найдём $\cos\alpha$ из формулы

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Ответ. $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Задача 8. (У)

Вычислить $\sin(2\operatorname{arctg} 6)$.

Идея. Выразить синус двойного угла через тангенс одинарного.

Указание. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Решение. Введём обозначение $\alpha = \operatorname{arctg} 6$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = 6$. Требуется найти $\sin 2\alpha$. Выразив синус двойного угла через тангенс одинарного, получим

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{12}{37}.$$

Ответ. $\dfrac{12}{37}$.

Задача 9. (ЕГЭ.В)

Найти значение выражения $5\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{7}\right)\right)$.

Идея. Воспользоваться формулой приведения и вычислить значение косинуса по известному значению тангенса.

Указание. По формуле приведения

$$5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right) = 5\sqrt{2}\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right).$$

Далее воспользуемся формулой, связывающей косинус и тангенс.

Указание. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Решение. Прежде всего воспользуемся формулой приведения:

$$5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right) = 5\sqrt{2}\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right).$$

Затем применим формулу, связывающую косинус и тангенс:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \Longleftrightarrow \quad |\cos x| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Поскольку согласно определению арктангенса $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{7}\right) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{7}\right)\right) > 0$. Значит,

$$5\sqrt{2}\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right) = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right)}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}} = 7.$$

Ответ. 7.

Задача 10. (ЕГЭ.В)

Найти значение выражения $\operatorname{tg}^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Идея. Зная косинус угла, вычислить его тангенс.

Указание. Воспользоваться тем, что $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$; для нахождения значения квадрата синуса использовать основное тригонометрическое тождество.

Решение. Обозначим $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. Надо найти $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$. Используем определение тангенса и основное тригонометрическое тождество:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 15.$$

Ответ. 15.

Задача 11. (ЕГЭ.В)

Найти значение выражения $\frac{4}{3}\operatorname{tg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Идея. Сначала упростить выражение, используя свойство периодичности тангенса; затем по синусу угла вычислить тангенс.

Указание. Использовать периодичность тангенса и нечётность арксинуса.

Указание. При вычислении значения $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ использовать определение тангенса и основное тригонометрическое тождество.

Решение. Используем периодичность тангенса и нечётность арксинуса:

$$\frac{4}{3}\operatorname{tg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4}{3}\operatorname{tg}\left(-\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4}{3}\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right).$$

Обозначим $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$. Следовательно, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Найти надо $\frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$. Используя определение тангенса и основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$\frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{4\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \frac{4\cdot\frac{3}{5}}{3\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = 1.$$

Ответ. 1.

Задача 12. (У)

Вычислить $\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)+\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

Идея. Использовать формулу косинуса суммы.
Указание. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

Указание. Вычислить $\cos\alpha$ и $\sin\beta$, $\cos\beta$, где $\alpha=\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $\beta=\operatorname{arctg}(-2)$.

Указание. $\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$, $\quad\sin^2\beta=\dfrac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\dfrac{4}{5}$.

Решение. Пусть $\alpha=\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\beta=\operatorname{arctg}(-2)$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$. Тогда $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=-2$. Для того, чтобы вычислить

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

надо найти значения $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$. По основному тригонометрическому тождеству

$$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9};$$

по формуле, связывающей синус и тангенс,

$$\sin^2\beta=\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{4}{5},\quad\cos^2\beta=\frac{1}{5}.$$

Осталось определиться со знаками. С учётом того, что $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$,

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad\sin\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{3\sqrt{5}}$.

Ответ. $\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

Задача 13. (У)

Вычислить $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

Идея. Применить формулу косинуса суммы.
Указание. Воспользоваться формулой косинуса суммы и равенствами $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $\quad\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Представим косинус суммы в виде разности:

$$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Используя равенства $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, получаем

$$\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{13}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{12+5\sqrt{3}}{26}.$$

Ответ. $-\dfrac{12+5\sqrt{3}}{26}$.

Задача 14. (У)

Вычислить $\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right)$.

Идея. Найти $\sin\alpha$, где $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{ctg}2\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

Указание. По значению $\operatorname{ctg}2\alpha$ найти значение $\operatorname{tg}\alpha$, после чего вычислить $\sin\alpha$.

Указание. $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

Решение. Положим $\alpha=\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)$, тогда α лежит в первой четверти и $\operatorname{ctg}2\alpha=-\dfrac{3}{4}$. Так как $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$, то $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=-\dfrac{3}{4}$. Из полученного квадратного уравнения

$$4\operatorname{tg}^2\alpha-6\operatorname{tg}\alpha-4=0$$

находим $\operatorname{tg}\alpha=2$ (отрицательное значение тангенса не подходит, так как угол α лежит в первой четверти). Зная тангенс, по основному тригонометрическому тождеству определим модуль синуса:

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=4 \quad\Longleftrightarrow\quad |\sin\alpha|=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Так как угол лежит в первой четверти, подходит только положительное значение.

Ответ. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Задача 15. (У)

Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{4}{7}\right)\right)$.

Идея. Найти $\operatorname{ctg}\alpha$, где $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\cos 2\alpha = -\dfrac{4}{7}$.

Указание. По значению $\cos 2\alpha$ найти значение $\sin^2\alpha$, после чего вычислить $\operatorname{ctg}\alpha$.

Указание. Использовать формулы $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ и $\operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$.

Решение. Положим $\alpha = \dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{4}{7}\right)$, тогда α лежит в первой четверти и $\cos 2\alpha = -\dfrac{4}{7}$. Из равенства $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ следует, что $\sin^2\alpha = \dfrac{11}{14}$. Далее вычисляем модуль котангенса:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{14}{11} - 1 = \frac{3}{11} \quad \Longleftrightarrow \quad |\operatorname{ctg}\alpha| = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

Так как угол α лежит в первой четверти, подходит только положительное значение.

Ответ. $\sqrt{\dfrac{3}{11}}$.

Задача 16. (У)

Вычислить $\arccos(\cos 10)$.

Идея. Указать угол $\alpha \in [0;\pi]$ такой, что $\cos\alpha = \cos 10$.
Указание. Выбрать угол α из углов вида $\pm 10 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Обозначим $\alpha = \arccos(\cos 10)$, тогда

$$\begin{cases} \alpha \in [0;\pi], \\ \cos\alpha = \cos 10; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in [0;\pi], \\ 2\sin\dfrac{\alpha+10}{2}\sin\dfrac{\alpha-10}{2} = 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in [0;\pi], \\ \alpha = \pm 10 + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Проверим попадание найденных α на отрезок $[0;\pi]$:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le 10 + 2\pi n \le \pi, \ n \in \mathbb{Z}; \\ 0 \le -10 + 2\pi n \le \pi, \ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -10 \le 2\pi n \le \pi - 10, \ n \in \mathbb{Z}; \\ 10 \le 2\pi n \le \pi + 10, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Первое двойное неравенство решений в целых числах не имеет, второе справедливо только при $n = 2$. В результате $\alpha = 4\pi - 10$.

Ответ. $4\pi - 10$.

Задача 17. (У)

Вычислить $\arcsin(\sin 14)$.

Идея. Указать угол $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ такой, что $\sin\alpha = \sin 14$.
Указание. Выбрать угол α из углов вида $14 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $\pi - 14 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Решение. Обозначим $\alpha = \arcsin(\sin 14)$, тогда

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin\alpha = \sin 14; \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ 2\sin\frac{\alpha - 14}{2}\cos\frac{\alpha + 14}{2} = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \left[\begin{array}{l} \alpha = 14 + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ \alpha = \pi - 14 + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \end{cases}$$

Проверим попадание найденных α на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \le 14 + 2\pi n \le \frac{\pi}{2}, \ n \in \mathbb{Z}; \\ -\frac{\pi}{2} \le \pi - 14 + 2\pi m \le \frac{\pi}{2}, \ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4} - \frac{7}{\pi} \le n \le \frac{1}{4} - \frac{7}{\pi}, \ n \in \mathbb{Z}; \\ -\frac{3}{4} + \frac{7}{\pi} \le m \le -\frac{1}{4} + \frac{7}{\pi}, \ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Второе двойное неравенство в целых числах решений не имеет, первое справедливо только при $n = -2$. В результате $\alpha = 14 - 4\pi$.

Ответ. $14 - 4\pi$.

Задача 18. (У)

Доказать, что $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4} + \mathrm{arctg}\,\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$.

Идея. Сравнить тангенсы соответствующих углов.
Указание. Вычислить значения тангенса от каждой из частей равенства $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,\frac{7}{23}$.
Указание. Проверить, что углы лежат в промежутке, где функция $\mathrm{tg}\,x$ монотонна.

Решение. Докажем , что $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\,\frac{7}{23}$. Поскольку аргументы арктангенсов не превосходят единицы, оба арктангенса принимают значения из промежутка от нуля до $\pi/4$. Следовательно, обе части равенства лежат в первой четверти, и нам достаточно проверить равенство их тангенсов:

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{7}{23}\right)\iff\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4^2}}=\frac{1-\frac{7}{23}}{1+\frac{7}{23}}\iff\frac{8}{15}=\frac{8}{15},$$

что и требовалось доказать.

Задача 19. (МГУ-53)

Упростить выражение $\cos\left(2\arccos\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}\right)$.

Идея. Применить формулу косинуса двойного угла.
Указание. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

Решение. Применим формулу косинуса двойного угла:

$$\cos\left(2\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)=2\cos^2\left(\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)-1=2\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)^2-1=x.$$

Ответ. x.

Задача 20. (МГУ-53)

Упростить выражение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{b}\right)$.

Идея. Выразить сумму тангенсов через тригонометрические функции суммы и разности аргументов.

Указание. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

Решение. Положим $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{b}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a}{b}$. Воспользуемся для слагаемых левой части уравнения определением тангенса, приведём дроби к общему знаменателю и применим в числителе формулу синуса суммы, а в знаменателе – формулу произведения косинусов:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}.$$

Поскольку $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, $\alpha-\beta=\arccos\dfrac{a}{b}$, получаем:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(\arccos\frac{a}{b}\right)}=\frac{2}{a/b}=\frac{2b}{a}.$$

Ответ. $\dfrac{2b}{a}$.

2.2. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Задача 1. (У)

Доказать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{5}$.

Идея. Использовать метод промежуточной числовой границы, то есть указать число, которое лежит между двумя заданными.

Указание. В качестве промежуточного числа использовать $\frac{\pi}{6}$.

Решение. Справедлива цепочка неравенств:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5}.$$

Следовательно, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{5}$.

Задача 2. (У)

Что больше: $\frac{\pi}{4}$ или $\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}$?

Идея. Сравнить синусы углов.

Указание. $\arcsin\frac{1}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, $\arccos\frac{2}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Указание. Убедиться в том, что сравниваемые углы лежат в промежутке, где функция $\sin x$ монотонна, а именно в первой четверти.

Указание. Вычислить синусы углов и сравнить.

Решение. Покажем, что углы в левой и правой частях принадлежат первой четверти, где функция $\sin x$ монотонно возрастает.

1) Угол в левой части $\frac{\pi}{4} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Рассмотрим правую часть.

- $\arcsin\frac{1}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, поскольку $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$.
- $\arccos\frac{2}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, поскольку $\frac{2}{3} > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, а в первой четверти косинус убывает.

Следовательно, $\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вычислим $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right)$ и сравним его с $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2+2\sqrt{10}}{9}.$$

Сравним значения синусов:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2+2\sqrt{10}}{9} & \vee & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 4+4\sqrt{10} & \vee & 9\sqrt{2} \\ 16+32\sqrt{10}+160 & > & 162. \end{array}$$

Значит, $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right) > \sin\frac{\pi}{4}$. Поскольку оба угла лежат в первой четверти и синус второго угла больше синуса первого, второй угол больше первого.

Ответ. $\frac{\pi}{4} < \arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}$.

Задача 3. (У)

Решить уравнение $\sin(5\,\mathrm{arcctg}\,x) = 1$.

Идея. Найти значение $\mathrm{arcctg}\,x$ из исходного уравнения и вычислить x, используя определение арккотангенса.

Указание. $\mathrm{arcctg}\,x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Указание. Отобрать $n \in \mathbb{Z}$ такие, что $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} \in (0;\pi)$.

Решение. Решаем простейшее тригонометрическое уравнение:

$$\sin(5\,\mathrm{arcctg}\,x) = 1 \iff 5\,\mathrm{arcctg}\,x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff \mathrm{arcctg}\,x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}.$$

По определению арккотангенса

$$\begin{cases} x = \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}\right), & n \in \mathbb{Z}, \\ 0 < \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5} < \pi. \end{cases}$$

Отберём значения $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие двойному неравенству:

$$0 < \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5} < \pi \iff -\frac{1}{4} < n < \frac{9}{4}.$$

Подходят значения $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$; соответствующие значения переменной $x = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{10}$, $x = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2} = 0$, $x = \mathrm{ctg}\,\frac{9\pi}{10}$.

Ответ. $\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{10}$; 0; $\mathrm{ctg}\,\frac{9\pi}{10}$.

Задача 4. (У)

Решить уравнение $\sin(3\arccos x) = \dfrac{1}{2}$.

Идея. Найти значение $\arccos x$ из исходного уравнения и вычислить x, используя определение арккосинуса.

Указание. $3\arccos x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ или $3\arccos x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Указание. Произвести отбор n и m с учётом области значений арккосинуса.

Решение. Решаем простейшее тригонометрическое уравнение:

$$\sin(3\arccos x) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 3\arccos x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ 3\arccos x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Отберём допустимые значения n и m, исходя из области значений арккосинуса.

1) $0 \le \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \le 3\pi \iff -\dfrac{1}{12} \le n \le \dfrac{17}{12}$. Подходят $n = 0$ или $n = 1$, при этом $x = \cos\dfrac{\pi}{18}$ или $x = \cos\dfrac{13\pi}{18}$.

2) $0 \le \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m \le 3\pi \iff -\dfrac{5}{12} \le m \le \dfrac{13}{12}$. Подходят $m = 0$ или $m = 1$, при этом $x = \cos\dfrac{5\pi}{18}$ или $x = \cos\dfrac{17\pi}{18}$.

Объединяя результаты и используя равенства $\cos\dfrac{17\pi}{18} = -\cos\dfrac{\pi}{18}$, $\cos\dfrac{13\pi}{18} = -\cos\dfrac{5\pi}{18}$, получаем ответ.

Ответ. $\pm\cos\dfrac{\pi}{18}$; $\pm\cos\dfrac{5\pi}{18}$.

Задача 5. (У)

Решить уравнение $\arccos(\pi\log_3 \operatorname{tg} x) = 0$.

Идея. Воспользоваться определением арккосинуса.

Указание. $\arccos t = 0 \iff t = 1$.

Решение. $\arccos(\pi\log_3 \operatorname{tg} x) = 0 \iff \pi\log_3 \operatorname{tg} x = 1 \iff$

$$\iff \log_3 \operatorname{tg} x = \frac{1}{\pi} \iff \operatorname{tg} x = 3^{\frac{1}{\pi}} \iff x = \operatorname{arctg} 3^{\frac{1}{\pi}} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\operatorname{arctg} 3^{\frac{1}{\pi}} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. (У)

Решить уравнение $2\arcsin x = \arcsin 2x$.

Идея. Вычислить значения x, при которых синусы от обеих частей равенства равны.
Указание. Вычислить значение синуса от обеих частей равенства.
Указание. Воспользоваться формулой синуса двойного угла.
Указание. Найти значение x, при котором синусы равны. Сделать проверку, так как равенство синусов ещё не означает равенства углов.

Решение. Возьмём синус от обеих частей равенства. При этом могут появиться посторонние корни, так как равенство синусов не гарантирует равенства углов.

$$\sin(2\arcsin x) = \sin(\arcsin 2x) \iff 2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) = 2x \iff$$

$$\iff 2x\cdot\sqrt{1-x^2} = 2x \iff x = 0.$$

Проверкой убеждаемся, что найденное значение является решением исходного уравнения.

Ответ. 0.

Задача 7. (У)

Решить уравнение $\arcsin x - \operatorname{arcctg} x = 0$.

Идея. Перенести $\operatorname{arcctg} x$ в правую часть равенства и вычислить значения x, при которых синусы от обеих частей равны.
Указание. Переписать уравнение в виде $\arcsin x = \operatorname{arcctg} x$.
Указание. Убедиться в том, что обе части получившегося уравнения принимают значения из первой четверти.
Указание. Взять синус от обеих частей.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\arcsin x = \operatorname{arcctg} x$. Так как по определению $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, то левая и правая части уравнения могут принимать значения из промежутка $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; следовательно, $0 < x \le 1$. Берём синус от обеих частей полученного уравнения и переходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} x = \sin(\operatorname{arcctg} x), \\ 0 < x \le 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ 0 < x \le 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 = 0, \\ 0 < x \le 1; \end{cases} \iff x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Ответ. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 8. (У)

Решить уравнение $2\,\mathrm{arctg}\,x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi.$

Идея. Уединить второе слагаемое в левой части и воспользоваться определением арксинуса.

Указание. Перенести первое слагаемое в правую часть и взять синус от обеих частей полученного равенства.

Указание. Согласно определению арксинуса должно выполняться условие $\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right].$

Решение. Область допустимых значений заданного уравнения

$$-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \mathbb{R}.$$

Запишем уравнение в виде

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x.$$

По определению арксинуса это означает, что

$$\begin{cases} \sin(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, \\ \pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Из второго условия получаем ограничения для переменной x:

$$\mathrm{arctg}\,x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right] \quad\Longleftrightarrow\quad x \ge 1.$$

Рассмотрим первое уравнение системы. Покажем, что оно справедливо для всех допустимых значений переменной. Действительно, так как $\sin 2t = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,t}{1+\mathrm{tg}^2\,t}$, то

$$\sin(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x) = \sin(2\,\mathrm{arctg}\,x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Значит, решения исходного уравнения $x \ge 1$.

Ответ. $[1;+\infty)$.

Задача 9. (У)

Решить уравнение $\mathrm{arctg}\,(2+\cos x) - \mathrm{arctg}\,(1+\cos x) = \dfrac{\pi}{4}.$

Идея. Перенести вычитаемое в правую часть и воспользоваться определением арктангенса.

Указание. Сделать замену $y = \cos x + 1$.

Указание. Перенести вычитаемое в правую часть и взять тангенс от обеих частей равенства; учесть область значений арктангенса.

Указание. Решить полученное уравнение, воспользовавшись методом расщепления.

Решение. Положим $y = \cos x + 1$, тогда уравнение принимает вид

$$\operatorname{arctg}(y+1) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y.$$

Перейдём к равносильной системе, используя определение арктангенса:

$$\begin{cases} y+1 = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y\right), \\ -\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решим уравнение, применив в правой части формулу тангенса суммы:

$$y + 1 = \frac{1+y}{1-y} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &y = 0; \\ &y = -1. \end{aligned}\right.$$

Оба найденных значения переменной y удовлетворяют двойному неравенству системы. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{aligned} &\cos x + 1 = 0; \\ &\cos x + 1 = -1; \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\cos x = -1; \\ &\cos x = -2 < -1; \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. (Экон-99.4)

Решить уравнение $x = \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6x + \cos 7x)$.

Идея. Домножить уравнение на 6 и воспользоваться определением арктангенса.

Указание. Взять тангенс от обеих частей равенства, предварительно домножив левую и правую части на 6.

Указание. Отобрать решения полученного равенства согласно ограничениям $-\dfrac{\pi}{2} < 6x < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Домножим левую и правую части уравнения на 6:

$$6x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6x + \cos 7x).$$

Согласно определению арктангенса уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < 6x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 6x + \cos 7x; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -\dfrac{\pi}{12} < x < \dfrac{\pi}{12}, \\ \cos 7x = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -\dfrac{\pi}{12} < x < \dfrac{\pi}{12}, \\ x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отберём корни по условию:

$$-\frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} < \frac{\pi}{12} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{13}{12} < n < \frac{1}{12};$$

значит, $n = -1$ или $n = 0$, то есть $x = \pm\dfrac{\pi}{14}$.

Ответ. $\pm\dfrac{\pi}{14}$.

Задача 11. (Экон-99.6)

Решить уравнение $x + \dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 5x + \cos 8x) = \dfrac{\pi}{10}$.

Идея. Уединить $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 5x + \cos 8x)$ и воспользоваться определением арктангенса.

Указание. Исходное уравнение запишется в виде

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 5x + \cos 8x) = \frac{\pi}{2} - 5x,$$

где правая часть принимает значения из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Указание. Взять тангенс от обеих частей равенства и решить полученное уравнение.

Указание. Произвести отбор значений целочисленной переменной.

Решение. Уравнение приводится к виду

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 5x + \cos 8x) = \frac{\pi}{2} - 5x.$$

Переходим к равносильной системе, используя определение арктангенса:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} 5x + \cos 8x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 5x\right), \\ -\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - 5x < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \cos 8x = 0, \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{5}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{8}, \ n \in \mathbb{Z}, \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{5}. \end{cases}$$

Отберём корни:

$$0 < \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8} < \frac{\pi}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < n < \frac{11}{10}.$$

Полученному неравенству удовлетворяют два значения $n = 0$ или $n = 1$, при этом $x = \dfrac{\pi}{16}$ или $x = \dfrac{3\pi}{16}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{16}$; $\dfrac{3\pi}{16}$.

Задача 12. (Геол-74.3)

Определить, при каких целых значениях k система $\begin{cases} (\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k, \\ \operatorname{arctg} x + \arccos y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ имеет решения, и найти все эти решения.

Идея. Сделав замену переменных, свести первое уравнение к квадратному, а второе – к линейному.

Указание. Исходная система приводится к виду $\begin{cases} u^2 + z^2 = k\pi^2, \\ u + z = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$
где $u = \operatorname{arctg} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z = \arccos y \in [0; \pi]$.

Указание. Полученная система имеет решение только при $k = 1$.

Решение. Пусть $u = \operatorname{arctg} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z = \arccos y \in [0; \pi]$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u^2 + z^2 = k\pi^2, \\ u + z = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $u = \dfrac{\pi}{2} - z$ и подставим в первое:

$$\left(\frac{\pi}{2} - z\right)^2 + z^2 = k\pi^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2z^2 - \pi z + \pi^2\left(\frac{1}{4} - k\right) = 0.$$

Корни квадратного уравнения существуют при неотрицательном дискриминанте:

$$D = \pi^2 - 8\pi^2\left(\frac{1}{4} - k\right) = \pi^2(8k - 1) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 8k \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad k \in \mathbb{N}.$$

Корни уравнения $z = \dfrac{\pi - \pi\sqrt{8k-1}}{4}$ или $z = \dfrac{\pi + \pi\sqrt{8k-1}}{4}$. Поскольку $z \in [0; \pi]$, первое значение сразу исключаем как отрицательное. Проверяем второй корень:

$$0 \leq \frac{\pi + \pi\sqrt{8k-1}}{4} \leq \pi \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq \pi\sqrt{8k-1} \leq 3\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{5}{4}.$$

Значит, $k = 1$; соответствующие ему значения новых переменных

$$z = \frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{7}); \quad u = \frac{\pi}{2} - z = \frac{\pi}{4}(1 - \sqrt{7}).$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi - \pi\sqrt{7}}{4}, \\ \arccos y = \dfrac{\pi + \pi\sqrt{7}}{4}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} \dfrac{\pi - \pi\sqrt{7}}{4}, \\ y = \cos \dfrac{\pi + \pi\sqrt{7}}{4}. \end{cases}$$

Ответ. При $k = 1$; $\left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi - \pi\sqrt{7}}{4}; \cos \dfrac{\pi + \pi\sqrt{7}}{4}\right)$.

Задача 13. (ВМК-96.4)

Решить неравенство $\arccos 3x + \arcsin(x+1) \le \dfrac{7\pi}{6}$.

Идея. Уединить $\arccos 3x$ и воспользоваться монотонностью арккосинуса.
Указание. Показать, что обратные тригонометрические функции определены при $-\dfrac{1}{3} \le x \le 0$.

Указание. Переписав неравенство в виде $\arccos 3x \le \dfrac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1)$, убедиться в том, что обе его части принимают значения из второй четверти.
Указание. Сравнить косинусы этих углов с учётом убывания косинуса во второй четверти.

Решение. Обратные тригонометрические функции, входящие в неравенство, определены при следующих условиях:

$$\begin{cases} -1 \le x+1 \le 1, \\ -1 \le 3x \le 1; \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \le x \le 0, \\ -\dfrac{1}{3} \le x \le \dfrac{1}{3}; \end{cases} \iff -\frac{1}{3} \le x \le 0.$$

Перепишем неравенство в виде

$$\arccos 3x \le \frac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1).$$

В силу возрастания арксинуса для $x \in \left[-\dfrac{1}{3}; 0\right]$ справедлива цепочка неравенств:

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} < \arcsin\frac{2}{3} \le \arcsin(x+1) \le \arcsin 1 = \frac{\pi}{2};$$

следовательно, $\dfrac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1) \in \left[\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right]$. При $x \in \left[-\dfrac{1}{3}; 0\right]$ угол $\arccos 3x$ также лежит во второй четверти. Возьмём косинус от обеих частей неравенства и воспользуемся монотонным убыванием косинуса во второй четверти:

$$\begin{cases} \cos(\arccos 3x) \ge \cos\left(\dfrac{7\pi}{6} - \arcsin(x+1)\right), \\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x \ge \cos\dfrac{7\pi}{6} \cdot \sqrt{1-(x+1)^2} + \sin\dfrac{7\pi}{6} \cdot (x+1), \\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{3} \cdot \sqrt{-2x - x^2} \ge -7x - 1, \\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 0. \end{cases}$$

Значения $x \in \left(-\frac{1}{7}; 0\right]$ входят в ответ, так как в этом случае левая часть неравенства с радикалом неотрицательна, а правая – отрицательна. При $x \in \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{7}\right]$ обе части неравенства неотрицательны и, следовательно, можно сравнить квадраты этих выражений:

$$3(-2x - x^2) \geq 49x^2 + 14x + 1 \iff 52x^2 + 20x + 1 \leq 0 \iff$$

$$\iff \frac{-5 - 2\sqrt{3}}{26} \leq x \leq \frac{-5 + 2\sqrt{3}}{26}.$$

Сравниваем числа:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{-5 - 2\sqrt{3}}{26} & \vee & -\dfrac{1}{3} \\ -15 - 6\sqrt{3} & \vee & -26 \\ 11 & > & 6\sqrt{3} = \sqrt{108}, \end{array}$$

то есть $\dfrac{-5 - 2\sqrt{3}}{26} > -\dfrac{1}{3}$.
Сравниваем числа:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{-5 + 2\sqrt{3}}{26} & \vee & -\dfrac{1}{7} \\ -35 + 14\sqrt{3} & \vee & -26 \\ 14\sqrt{3} & > & 9, \end{array}$$

то есть $\dfrac{-5 + 2\sqrt{3}}{26} > -\dfrac{1}{7}$. В итоге $\dfrac{-5 - 2\sqrt{3}}{26} \leq x \leq -\dfrac{1}{7}$. Объединяя с предыдущим результатом, получаем окончательно $\dfrac{-5 - 2\sqrt{3}}{26} \leq x \leq 0$.

Ответ. $\left[\dfrac{-5 - 2\sqrt{3}}{26}; 0\right]$.

Задача 14. (Экон-95.5)

Найти все $x \in [-3; 1]$, для которых неравенство
$x(\pi(x+1) - 4\,\mathrm{arctg}\,(3m^2 + 12m + 11)) > 0$ выполняется при любых целых m.

Идея. Уединить $\mathrm{arctg}\,(3m^2 + 12m + 11)$ в левой части неравенства, найти область его значений и выбрать значения переменной x таким образом, чтобы неравенство выполнялось на всей области значений функции в левой части.
Указание. Отдельно рассмотреть случаи $x > 0$ и $x < 0$.

Указание. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x \le 1, \\ \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) < \dfrac{\pi(x+1)}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x < 0, \\ \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) > \dfrac{\pi(x+1)}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Указание. Найти область значений функции $f(m) = \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11)$ и выбрать x таким образом, чтобы правая часть полученного неравенства была больше (меньше) любого из значений левой части.

Указание. $\forall m \in \mathbb{Z} \quad \dfrac{\pi}{2} > f(m) \ge f(-2) = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем для положительных и отрицательных значений переменной x.

1) При $0 < x \le 1 \quad \pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) > 0 \iff$

$$\iff \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) < \frac{\pi(x+1)}{4}.$$

Пусть $f(m) = \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11)$, $g(x) = \dfrac{\pi(x+1)}{4}$, тогда неравенство $f(m) < g(x)$ должно выполняться $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Найдём область значений функции $f(m)$. Рассмотрим аргумент арктангенса $t(m) = 3m^2 + 12m + 11$. Заметим, что $t(m) \ge t(-2) = -1$, поэтому $f(m) = \operatorname{arctg}(t(m))$ будет принимать значения из промежутка $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Значит, условие задачи будет выполнено при $g(x) \ge \dfrac{\pi}{2}$, то есть

$$\frac{\pi(x+1)}{4} \ge \frac{\pi}{2} \quad \iff \quad x \ge 1.$$

Вспоминая, что $0 < x \le 1$, получаем, что в данном случае $x = 1$.

2) При $-3 \le x < 0 \quad \pi(x+1) - 4\operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) < 0 \iff$

$$\iff \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) > \frac{\pi(x+1)}{4}.$$

Учитывая область значений функции $f(m)$, найденную в пункте 1), заключаем, что условие задачи будет выполнено при $g(x) < -\dfrac{\pi}{4}$, то есть

$$\frac{\pi(x+1)}{4} < -\frac{\pi}{4} \quad \iff \quad x < -2.$$

Вспоминая, что $-3 \le x < 0$, получаем, что в данном случае $-3 \le x < -2$.

Замечание. Нетрудно видеть, что условие $m \in \mathbb{Z}$ в постановке задачи излишне, так как минимальное значение функции $t(m) = 3m^2 + 12m + 11$, принципиально влияющее на построение оценок, достигается именно при целочисленном значении m.

Ответ. $[-3; -2) \cup \{1\}$.

2.3. Отбор решений в тригонометрических уравнениях. Тригонометрические неравенства

Задача 1. (Почв-82.2)

Решить уравнение $\sqrt{2-3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}$.

Идея. Приравнять подкоренные выражения и отобрать решения полученного уравнения, удовлетворяющие условию $\sin x \geq 0$.
Указание. Выразить косинус двойного угла через синус одинарного.

Решение. Перейдём к равносильной системе, приравняв подкоренные выражения:

$$\begin{cases} 2-3\cos 2x = \sin x, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Применим в уравнении формулу косинуса двойного угла:

$$6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $\sin x = -\dfrac{1}{3} < 0$ (не подходит) или $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. (Псих-96.3)

Найти область определения функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}$

Идея. Область определения задаётся положительностью подкоренного выражения. Соответствующее неравенство удобнее всего решать методом вспомогательного аргумента.
Указание. Область определения функции $f(x)$ задаётся неравенством

$$-6\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x + 8 - \sqrt{3} > 0,$$

которое после применения формул понижения степени и синуса двойного угла сводится к неравенству для линейного тригонометрического выражения.
Указание. Линейное тригонометрическое неравенство решить с помощью метода вспомогательного аргумента.

Решение. Область определения заданной функции задаётся неравенством

$$-6\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x + 8 - \sqrt{3} > 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3(1-\cos 4x) - \sin 4x > \sqrt{3} - 8 \quad \Longleftrightarrow \quad 3\cos 4x - \sin 4x > \sqrt{3} - 5.$$

Преобразуем выражение в левой части последнего неравенства по методу вспомогательного аргумента. Для этого делим обе части неравенства на $\sqrt{10}$:

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\cos 4x - \frac{1}{\sqrt{10}}\sin 4x > \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}};$$

положим $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$, тогда $\cos(4x+\varphi) > \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}}$. Сравним числа:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}} & \vee & -1 \\ \sqrt{3}+\sqrt{10} & \vee & 5 \\ 13+2\sqrt{30} & \vee & 25 \\ \sqrt{30} & < & 6=\sqrt{36}. \end{array}$$

Итак, правая часть полученного неравенства меньше нижней границы области значений косинуса; значит, неравенство справедливо при любых значениях аргумента косинуса, то есть $x \in \mathbb{R}$.

О т в е т. $\mathbb{R}$.

Задача 3. (Хим-88.2)

Решить уравнение $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1} + \sin x = 0$.

И д е я. Решать исходное уравнение как стандартное уравнение с радикалом.
У к а з а н и е. Уравнение равносильно квадратному уравнению
$\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1 = (-\sin x)^2$, где $\sin x \le 0$.

Р е ш е н и е. Переписав уравнение в виде

$$\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1} = -\sin x,$$

перейдём к равносильному уравнению при $\sin x \le 0$:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 1 = (-\sin x)^2 \iff \cos^2 x + \frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -2\sqrt{2}; \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Первое значение не принадлежит области значений косинуса, поэтому, учитывая, что $\sin x \le 0$, получаем окончательно $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. (ВМК-93.2)

На отрезке $0 \le x \le \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}$.

Идея. Решить уравнение как стандартное уравнение с радикалом.
Указание. Исходное уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} 1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2, \\ \sqrt{3}\cos x - \sin x \ge 0. \end{cases}$$

Указание. Выражение в левой части неравенства удобнее всего преобразовать по методу вспомогательного аргумента.

Решение. Решая уравнение, как стандартное уравнение с радикалом, получаем систему:

$$\begin{cases} 1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2, \\ \sqrt{3}\cos x - \sin x \ge 0. \end{cases}$$

Уравнение системы после раскрытия скобок превращается в тождество, а неравенство преобразуем по методу вспомогательного аргумента:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \ge 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что по условию задачи $0 \le x \le \pi$, оставляем только $0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ. $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Задача 5. (Псих-87.4)

Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \cos 3x}$.

Идея. Приравнять подкоренные выражения и отобрать решения полученного уравнения, удовлетворяющие условию $\cos x \le \dfrac{3}{4}$.

Указание. При решении полученного уравнения воспользоваться формулой разности косинусов.

Решение. Приравняем подкоренные выражения и перейдём к равносильной системе:

$$\sqrt{\frac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} - \cos 3x} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3}{4} - \cos x = \dfrac{3}{4} - \cos 3x, \\ \cos x \le \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Из уравнения

$$\cos 3x - \cos x = 0 \iff 2\sin x \sin 2x = 0 \iff x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Условию $\cos x \le \frac{3}{4}$ удовлетворяют $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = \pi + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pi + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. (ВМК-00.1)

Решить неравенство $\sin x \sin|x| \ge -\frac{1}{2}$.

Идея. Раскрыть модуль по определению.
Указание. Раскрыв модуль по определению, решить неравенство на тригонометрическом круге.

Решение. Раскроем модуль по определению.
1) При $x \ge 0$ получаем $\sin^2 x \ge -\frac{1}{2}$. Это неравенство справедливо при $\forall x \in \mathbb{R}$; значит, все рассматриваемые $x \ge 0$ подходят.
2) При $x < 0$ неравенство принимает вид

$$-\sin^2 x \ge -\frac{1}{2} \iff \sin^2 x \le \frac{1}{2} \iff |\sin x| \le \frac{1}{\sqrt{2}};$$

значит, $-\frac{\pi}{4} + \pi n \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Осталось отобрать отрицательные значения переменной:

а) если $n = 0$, то $-\frac{\pi}{4} \le x \le 0$;

б) если $n < 0$, то $-\frac{\pi}{4} + \pi n \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Ответ. $\left[-\frac{\pi}{4} - \pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n\right] \bigcup \left[-\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 7. (У)

Решить неравенство $\left|\frac{3\sin x}{2 + \cos x}\right| \le \sqrt{3}$.

Идея. С помощью равносильного перехода $|t| \le A \iff -A \le t \le A$ избавиться от модуля, решить соответствующее двойное неравенство.
Указание. Воспользоваться методом вспомогательного аргумента.

Решение. $$\left|\frac{3\sin x}{2+\cos x}\right| \le \sqrt{3} \iff \begin{cases} \dfrac{3\sin x}{2+\cos x} \le \sqrt{3}, \\ \dfrac{3\sin x}{2+\cos x} \ge -\sqrt{3}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3\sin x - \sqrt{3}\cos x \le 2\sqrt{3}, \\ 3\sin x + \sqrt{3}\cos x \ge -2\sqrt{3}; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \le 1, \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \ge -1; \end{cases} \iff x \in \mathbb{R}.$$

Ответ. $x \in \mathbb{R}$.

Задача 8. (Геол-94.6)

Решить неравенство $4\cos x - \sin 2x > 0$.

Идея. Применив формулу синуса двойного угла, разложить левую часть на множители и свести к простейшему тригонометрическому неравенству.
Указание. Формула синуса двойного угла: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
Указание. Неравенство приводится к виду $2\cos x\,(2-\sin x) > 0$.

Решение. Применив формулу синуса двойного угла, получаем

$$2\cos x\,(2-\sin x) > 0.$$

Согласно области значений синуса выражение в скобках всегда положительно, поэтому неравенство равносильно условию

$$\cos x > 0 \iff -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 9. (М/м-71.2)

Найти все x из отрезка $0 \le x \le \pi$, удовлетворяющие неравенству
$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Идея. Разложить неравенство на множители.
Указание. Применив формулу синуса двойного угла и перенеся все слагаемые в левую часть, неравенство можно преобразовать к виду

$$(2\sin x - 1)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0.$$

Указание. Учитывая ограниченность заданного интервала, можно найти на нём все точки смены знака левой части неравенства, после чего применить метод интервалов (исследовать промежутки знакопостоянства).

Решение. Неравенство преобразуем к виду

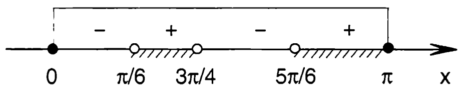
$$2\sin x\cos x - \cos x + \sqrt{2}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \iff$$

$$\iff \cos x\,(2\sin x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sin x - 1) > 0 \iff (2\sin x - 1)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0.$$

На заданном в условии отрезке $[0;\pi]$ находим нули сомножителей (точки смены знака левой части):

1) $\sin x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6}$ или $x = \frac{5\pi}{6}$;

2) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies x = \frac{3\pi}{4}$.



Отметив найденные значения на числовой оси и расставив знаки выражения, получаем, что неравенству удовлетворяют два промежутка: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{6} < x \le \pi$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$.

Задача 10. (ВМК-71.2)

Найти все решения неравенства $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

Идея. Рассмотрев данное неравенство как стандартное с радикалом, перейти к тригонометрическому неравенству с дополнительными условиями отбора решений.

Указание. После возведения неравенства в квадрат получим равносильную систему

$$\begin{cases} 0 \le \sin 2x < \frac{1}{2}, \\ \cos x - \sin x > 0, \\ -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

Указание. Получив условия для x из неравенств с синусом двойного угла, сопоставить их с решениями неравенства $\cos x - \sin x > 0$, полученными с помощью метода вспомогательного аргумента, и заданным интервалом $(-\pi;\pi)$.

Решение. Возведём неравенство в квадрат и перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} 0 \le \sin 2x < \frac{1}{2}, \\ \cos x - \sin x > 0, \\ -\pi < x < \pi; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le \sin 2x < \frac{1}{2}, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0, \\ -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

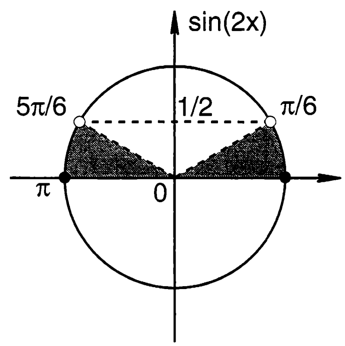
Решим неравенства последовательно.

1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0 \iff -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff$

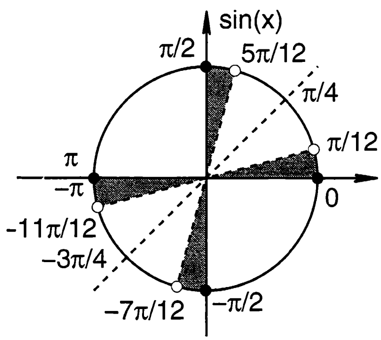
$$\iff -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

С учётом ограничения $x \in (-\pi; \pi)$ получаем, что $-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ (выполняется только при $n = 0$).

2) $0 \le \sin 2x < \frac{1}{2}$; решениями этого неравенства являются углы из закрашенных областей на тригонометрическом круге, то есть



$$\left[\begin{array}{l} 2\pi n \le 2x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m < 2x \le \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \pi n \le x < \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \frac{5\pi}{12} + \pi m < x \le \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



Отметив соответствующие области на тригонометрическом круге (закрашенные области) и добавив ранее полученное ограничение $-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, получаем окончательно, что $-\frac{7\pi}{12} < x \le -\frac{\pi}{2}$ или $0 \le x < \frac{\pi}{12}$.

Ответ. $\left(-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{12}\right)$.

Задача 11. (ИСАА-94.4)

Решить неравенство $2\sin x - 1 \le \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$.

Идея. Выписать ограничение на подкоренное выражение и найти соответствующие значения $\sin x$.
Указание. Подкоренное выражение неотрицательно только при $\sin x = -1$.
Указание. Проверить справедливость исходного неравенства при найденном значении $\sin x$ подстановкой.

Решение. Разложив подкоренное выражение на множители, получим

$$\sqrt{6(\sin x + 1)(\sin x - 2)} \ge 2\sin x - 1.$$

Область определения задаётся условием

$$(\sin x + 1)(\sin x - 2) \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x \le -1; \\ \sin x \ge 2. \end{array}\right.$$

Очевидно, что единственно возможным, в соответствии с областью значений синуса, вариантом остаётся $\sin x = -1$. Проверим его в исходном неравенстве:

$$0 \ge 2 \cdot (-1) - 1.$$

Неравенство справедливо. Итак, $\sin x = -1 \iff x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. (Хим-98(1).3)

Найти все числа x из промежутка $[-\pi; \pi]$, удовлетворяющие неравенствам $(4 + \sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3} + 1 \le \cos 2x \le 5\cos x - 3$.

Идея. Решить отдельно каждое из неравенств как квадратное относительно соответствующей тригонометрической функции.
Указание. В первом случае выразить косинус двойного угла через $\sin x$, во втором случае – через $\cos x$.
Указание. Пересечение полученных промежутков удобнее всего искать с помощью тригонометрической окружности.

Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (4 + \sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3} + 1 \le \cos 2x, \\ \cos 2x \le 5\cos x - 3. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой косинуса двойного аргумента в двух вариантах:

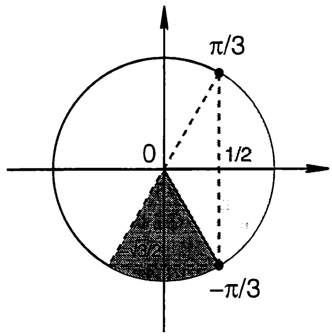
$$\begin{cases} (4 + \sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3} + 1 \le 1 - 2\sin^2 x, \\ 2\cos^2 x - 1 \le 5\cos x - 3; \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin^2 x + (4 + \sqrt{3})\sin x + 2\sqrt{3} \le 0, \\ 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \le 0. \end{cases}$$

Заметим, что дискриминант квадратного трёхчлена в первом неравенстве представляет собой квадрат разности $D = (4-\sqrt{3})^2$; решаем квадратные неравенства:

$$\begin{cases} -2 \le \sin x \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \dfrac{1}{2} \le \cos x \le 2. \end{cases}$$

В силу ограниченности синуса и косинуса получаем систему $\begin{cases} \sin x \le -\sqrt{3}/2, \\ \cos x \ge 1/2. \end{cases}$

Для решения этой системы неравенств удобнее использовать тригонометрическую окружность;



цветом на рисунке выделены углы, удовлетворяющие неравенствам системы; решением системы является серия $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; с учётом условия $-\pi \le x \le \pi$ получаем, что $x = -\dfrac{\pi}{3}$ – единственное решение задачи.

О т в е т. $-\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 13. (Геогр-77.5)

Решить уравнение $2\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x}$.

И д е я. Возведя обе части в квадрат с учётом равносильности перехода, применить формулы понижения степени и преобразования произведения тригонометрических функций, после чего решить квадратное уравнение с непосредственной подстановкой результатов в соответствующие условия.
У к а з а н и е. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + 4\sin 4x \cos 2x = 4\sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge 0; \end{cases}$$

полученной после возведения исходного уравнения в квадрат и применения формулы синуса двойного угла.

Указание. Решениями квадратного уравнения являются серии $x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n$ или $x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$, которые следует подставить в неравенство $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0$ для отбора целочисленных переменных.

Решение. При выполнении условия $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0$ исходное уравнение равносильно следующему:

$$1 + 4\sin 4x \cos 2x = 4\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \iff$$

$$\iff 1 + 2(\sin 6x + \sin 2x) = 2\left(1 - \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \iff$$

$$\iff 2\sin 6x + 2\sin 2x = 1 + 2\sin 6x \iff \sin 2x = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Проверяем выполнение неравенства $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geq 0$.

1) Если $x = \dfrac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \cos \pi n = (-1)^n \geq 0 \iff$$

$$\iff n = 2k,\ k \in \mathbb{Z};$$

тогда $x = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Если $x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi m\right) = -\cos \pi m = -(-1)^m \geq 0 \iff$$

$$\iff m = 2l + 1,\ l \in \mathbb{Z};$$

тогда $x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi(2l + 1) = \dfrac{17\pi}{12} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n$, $\dfrac{17\pi}{12} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 14. (М/м-95(1).4)

Найти все значения $x \in [0; \pi]$, при которых выражения $\operatorname{tg} x$ и $\dfrac{1}{\cos 2x} - 2\cos 2x$ имеют разные знаки.

Идея. Если два выражения имеют разные знаки, то их произведение отрицательно.

Указание. Составленное неравенство для отрицательного произведения заданных выражений удобнее всего решать модификацией метода интервалов для данного случая (решение традиционным расщеплением приводит к достаточно громоздким выкладкам).

Указание. Неравенство для произведения заданных выражений приводится к виду $\dfrac{\cos 4x}{\cos x \cos 2x} > 0$, где $0 < x < \pi$. Его удобнее всего решать модифицированным методом интервалов, найдя на заданном промежутке все точки смены знака числителя и знаменателя дроби, после чего исследовать знаки всей дроби на соответствующих интервалах.

Решение. Два выражения имеют разные знаки, если их произведение отрицательно; значит,

$$\operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{1}{\cos 2x} - 2\cos 2x\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sin x \cdot \left(1 - 2\cos^2 2x\right)}{\cos x \cos 2x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sin x \cos 4x}{\cos x \cos 2x} > 0.$$

Учитывая, что $x \in [0;\pi]$, а значения $x = 0$ и $x = \pi$ решениями неравенства не являются, можно утверждать, что $\sin x > 0$; остаётся неравенство

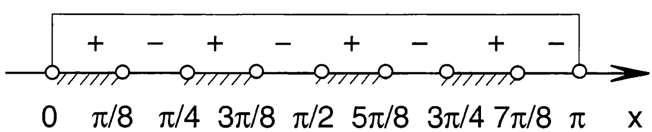
$$\frac{\cos 4x}{\cos x \cos 2x} > 0.$$

Найдём нули числителя и знаменателя на $(0;\pi)$.

1) $\cos 4x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, то есть $x = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}$ — точки смены знака числителя.

2) $\cos x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

3) $\cos 2x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}$, то есть $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$.

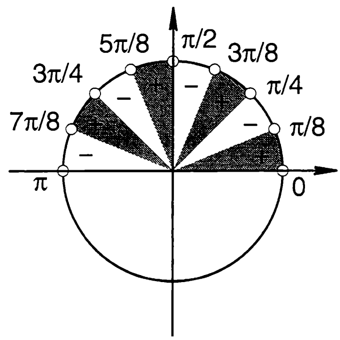


Отметив все точки смены знака рассматриваемой дроби в интервале $(0;\pi)$, определяем её знаки (например, при $x = \dfrac{\pi}{16}$ дробь положительна, остальные знаки чередуются между собой).

Таким образом, решениями являются интервалы $\left(0;\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{8}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{8}\right)$ $\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{7\pi}{8}\right)$.

Ответ. $\left(0;\dfrac{\pi}{8}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{8}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{7\pi}{8}\right)$.

Замечание. Применение модификации метода интервалов для данной задачи, несмотря на немонотонность тригонометрических функций, стало возможным благодаря ограничениям на область допустимых значений переменной (в нашем случае это интервал). Формально это позволяет от тригонометрической окружности, то есть значений углов, отмеченных на ней, эквивалентно перейти к числовой оси ("развернуть" окружность в прямую), традиционной для стандартного метода интервалов.



В ряде пособий можно встретить исследование знаков выражений прямо на тригонометрической окружности, без перехода к числовой прямой, однако такой приём возможен только при отсутствии наложений (в силу периодичности) соответствующих интервалов знакопостоянства и точек смены знака внутри рассматриваемого промежутка (например, без числовой оси можно исследовать интервал $[0; 2\pi)$, тогда как интервал $(-\pi; 5\pi]$ уже будет содержать накладывающиеся точки).

2.4. Смешанные задачи

Задача 1. (У)

Решить неравенство $\log_{|\cos x|} |x| < 0$.

Идея. Использовать убывание логарифма с основанием меньше, чем 1.
Указание. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) < 0$, где $0 < a(x) < 1$, равносильно условию $f(x) > 1$.

Решение. Так как основание логарифма не может быть равно нулю или единице, то $x \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ и, следовательно, $0 < |\cos x| < 1$. В этом случае

$$\log_{|\cos x|} |x| < 0 \iff |x| > 1.$$

Ответ. $|x| > 1, \quad x \neq \dfrac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$

Задача 2. (У)

Решить неравенство $\log_{(x^2-1)} \operatorname{ctg} x \le 0$.

Идея. Перейти к равносильной совокупности на основе свойств логарифмической функции.

Указание. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) \le 0$ равносильно совокупности систем условий $\begin{cases} a(x) > 1, \\ 0 < f(x) \le 1; \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) \ge 1. \end{cases}$

Решение. $\log_{(x^2-1)} \operatorname{ctg} x \le 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 > 1, \\ 0 < \operatorname{ctg} x \le 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x^2 - 1 < 1, \\ \operatorname{ctg} x \ge 1; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty), \\ \dfrac{\pi}{4} + \pi k \le x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}), \\ \pi n < x \le \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Для первой системы при $k \ne 0$ получим $\dfrac{\pi}{4} + \pi k \le x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ и при $k = 0$ получим $\sqrt{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Здесь мы воспользовались тем, что $\dfrac{\pi}{4} < \sqrt{2} < \dfrac{\pi}{2}$.

Вторая система решений не имеет, так как $-\dfrac{3\pi}{4} < -\sqrt{2}$, а $\dfrac{\pi}{4} < 1$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + \pi k \le x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $\sqrt{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 3. (ЕГЭ.С)

Найти множество значений функции $y = \arcsin \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}(\cos 2006x + \sin 2006x)}}{2}$.

Идея. Преобразовать подкоренное выражение таким образом, чтобы в него входила только одна тригонометрическая функция.

Указание. Использовать метод вспомогательного аргумента.

Указание. $\cos 2006x + \sin 2006x = \sqrt{2} \sin\left(2006x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, используя метод вспомогательного аргумента:

$$y = \arcsin \frac{\sqrt{\sqrt{2}(\cos 2006x + \sin 2006x)}}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\sin\left(2006x + \frac{\pi}{4}\right)\right)}}{2} =$$

$$= \arcsin \sqrt{\frac{\sin\left(2006x + \frac{\pi}{4}\right)}{2}}.$$

С учётом неотрицательности подкоренного выражения синус принимает значения от нуля до 1; следовательно, $y \in \left[\arcsin 0; \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, то есть $y \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

О т в е т. $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Задача 4. (М/м-70.1)

Решить неравенство $\log_2(1+\cos 4x) \le 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x$.

И д е я. Перейдя от логарифмического неравенства к тригонометрическому с условиями равносильности, решить его с использованием тригонометрической окружности.

У к а з а н и е. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 1+\cos 4x \le 2\sin^2 x, \\ 1+\cos 4x > 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Для решения системы удобнее всего применить формулу косинуса двойного угла и привести первое неравенство к неравенству с модулями.

У к а з а н и е. С помощью формулы косинуса двойного угла система приводится к виду

$$\begin{cases} 2\cos^2 2x \le 2\sin^2 x, \\ \cos 2x \ne 0, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 1+\cos 4x \le 2\sin^2 x, \\ 1+\cos 4x > 0, \\ \sin x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos^2 2x \le 2\sin^2 x, \\ \cos 2x \ne 0, \\ \sin x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} |\cos 2x| \le |\sin x|, \\ x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

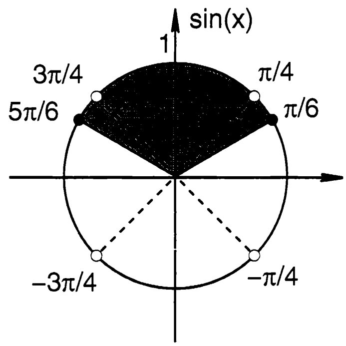
Учитывая положительность синуса, снимаем второй модуль:

$$\begin{cases} \left|1 - 2\sin^2 x\right| \le \sin x, \\ x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Раскрываем оставшийся модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x \le \sin x, \\ 1 - 2\sin^2 x \ge -\sin x, \\ x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 \ge 0, \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 \le 0, \\ x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}, \\ \sin x > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x \le -1; \\ \sin x \ge \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \\ -\dfrac{1}{2} \le \sin x \le 1, \\ \sin x > 0, \\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le \sin x \le 1, \\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Выполняем отбор на тригонометрической окружности:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x \ne \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ. $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \bigcup \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \bigcup \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$; $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (Хим-89.3)

Решить уравнение $\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2 \cos x = 0$.

Идея. Используя формулу суммы логарифмов, перейти к тригонометрическому уравнению с отбором корней.
Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (3\sin x - \cos x)\cos x = 1, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Указание. Уравнение полученной системы равносильно совокупности двух условий: $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = 2$.

Решение. Преобразовав сумму логарифмов в логарифм произведения, переходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} \log_2\left(3\sin x\cos x - \cos^2 x\right) = 0, \\ \cos x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 1, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

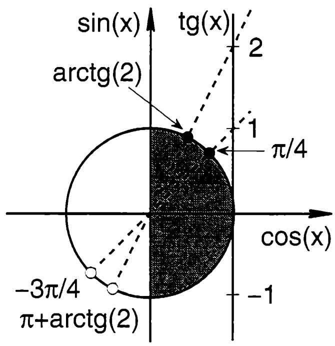
Применим основное тригонометрическое тождество:

$$\begin{cases} \sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0, \\ \cos x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1; \\ \operatorname{tg} x = 2; \end{array}\right. \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Используя тригонометрическую окружность и ось тангенсов, находим значения переменной: $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.



Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\operatorname{arctg} 2 + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. (Хим-70.3)

Найти все значения x, лежащие в промежутке $-1 < x < 4$ и удовлетворяющие неравенству $\log_{0,75}\sin x \geq \log_{9/16} 0,75$.

Идея. Перейдя от логарифмического неравенства к тригонометрическому, решить его совместно с предложенным условием на тригонометрической окружности.

Указание. Исходное неравенство равносильно тригонометрическому:

$$0 < \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Указание. Произвести отбор решений неравенства, удовлетворяющих условию $-1 < x < 4$, с помощью тригонометрической окружности.

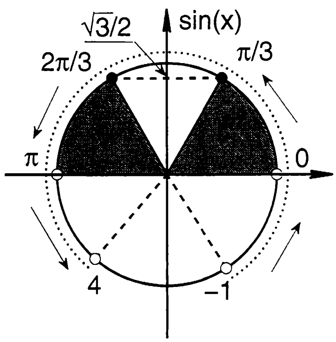
Решение. Преобразуем заданное неравенство:

$$\log_{\frac{3}{4}} \sin x \geq \log_{\frac{3}{4}} \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Используя тригонометрическую окружность, решим это неравенство совместно с условием $x \in (-1; 4)$.

Решения неравенства с синусом находятся в закрашенных областях; угол (-1) лежит в IV четверти, угол (4) лежит в III четверти, причём для просмотра всех углов, находящихся в интервале $(-1; 4)$, не требуется полного оборота по окружности.

Значит, решениями тригонометрического неравенства будут числовые промежутки без условий периодичности, а именно $0 < x \leq \dfrac{\pi}{3}$ или $\dfrac{2\pi}{3} \leq x < \pi$.



Ответ. $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right)$.

Задача 7. (Экон.К-74.3)

Решить уравнение $\log_{\cos 2x - \sin 2x}(1 - \cos x - \sin x) = 1$.

Идея. Перейти от логарифмического уравнения к тригонометрическому, разложить его на множители и проверить выполнение условий на область определения непосредственной подстановкой.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \cos x - \sin x = \cos 2x - \sin 2x, \\ 0 < \cos 2x - \sin 2x \neq 1. \end{cases}$$

Указание. Применить формулы двойных углов в уравнении для разложения его на множители: $(\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \cos x - \sin x = \cos 2x - \sin 2x, \\ \cos 2x - \sin 2x > 0, \\ \cos 2x - \sin 2x \neq 1. \end{cases}$$

Применив формулы двойных углов в правой части уравнения, получаем

$$1-\cos x-\sin x=1-2\sin^2 x-2\sin x\cos x \iff$$

$$\iff 2\sin x(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0;\\ 2\sin x-1=0;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1;\\ \sin x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Проверяем для каждой серии выполнение условия $0<\cos 2x-\sin 2x\neq 1$.

1) При $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\cos 2x-\sin 2x=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)-\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\dfrac{\pi}{2}=0+1=1$ – не подходит.

2) При $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$ $\cos 2x-\sin 2x=\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$ – не подходит.

3) При $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos 2x-\sin 2x=\cos\dfrac{5\pi}{3}-\sin\dfrac{5\pi}{3}=\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ – подходит.

Значит, решением уравнения является серия $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ответ. $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Задача 8. (ЕГЭ.С)

Найти множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in\left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3};\operatorname{arctg}2\right]$.

Идея. Разбить отрезок на промежутки монотонности функции $y=\sin 2x$. На каждом из этих промежутков вычислить минимальное и максимальное значение функции.

Указание. На отрезке $\left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3};\dfrac{\pi}{4}\right]$ функция $y=\sin 2x$ возрастает.

Указание. На промежутке $\left(\dfrac{\pi}{4};\operatorname{arctg}2\right]$ функция $y=\sin 2x$ убывает.

Указание. Для вычисления значений на концах промежутков удобно использовать формулу $\sin 2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Решение. Разобьём указанный в условии отрезок $\left[\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3};\operatorname{arctg}2\right]$ на промежутки, на которых функция $y=\sin 2x$ является монотонной.

1) На отрезке $\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{3};\frac{\pi}{4}\right]$ функция $y=\sin 2x$ возрастает. Следовательно, на этом отрезке

$$y_{min}=y\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}}=0,6;$$

$$y_{max}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

2) На промежутке $\left(\frac{\pi}{4};\operatorname{arctg}2\right]$ функция $y=\sin 2x$ убывает. Следовательно, на этом отрезке

$$y_{min}=y(\operatorname{arctg}2)=\sin(2\operatorname{arctg}2)=\frac{2\operatorname{tg}\operatorname{arctg}2}{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg}2}=\frac{4}{1+4}=0,8;$$

$$y_{max}=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

В результате на исходном отрезке $y\in[0,6;1]$.

Ответ. $[0,6;1]$.

Задача 9. (ЕГЭ.С)

Найти множество значений функции $y=\sin 2x$, если $x\in\left[\arccos\frac{5}{13};\frac{5\pi}{12}\right]$.

Идея. Убедиться в монотонности данной функции на данном отрезке. Минимальными и максимальными значениями будут значения на концах отрезка.
Указание. На данном отрезке функция $y=\sin 2x$ убывает.
Указание. Воспользоваться оценкой:

$$\frac{\pi}{4}<\arccos\frac{5}{13}<\frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}.$$

Указание. Для вычисления значения на левом конце отрезка использовать формулу $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

Решение. На отрезке $\left[\arccos\frac{5}{13};\frac{5\pi}{12}\right]$ функция $y=\sin 2x$ убывает, так как

$$\frac{\pi}{2}<2\arccos\frac{5}{13}<2\cdot\frac{5\pi}{12}<\pi.$$

Значит,

$$y_{max}=y\left(\arccos\frac{5}{13}\right)=\sin\left(2\arccos\frac{5}{13}\right)=$$

$$=2\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arccos\frac{5}{13}\right)=2\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}\cdot\frac{5}{13}=\frac{120}{169}.$$

$$y_{min} = y\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

В результате на исходном отрезке $y \in \left[\frac{1}{2}; \frac{120}{169}\right]$.

Ответ. $\left[\frac{1}{2}; \frac{120}{169}\right]$.

Задача 10. (М/м-99(1).1)

Решить уравнение $\sqrt[8]{\dfrac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\dfrac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0.$

Идея. Преобразовав выражения под радикалами и разнося последние по разным частям, возвести полученное уравнение в двенадцатую степень с последующим отбором решений.

Указание. Применив формулу косинуса двойного угла и формулу приведения для тангенса, можно свести уравнение к виду $\sqrt[8]{\operatorname{ctg}^2 2x} = -\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x}$.

Указание. Возвести полученное уравнение в степень 12.

Решение. Применим формулы приведения и косинуса двойного угла:

$$\sqrt[8]{\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}} = -\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[4]{|\operatorname{ctg} 2x|} = -\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x}.$$

В силу неотрицательности левой части из уравнения следует, что $\operatorname{ctg} 2x \le 0$. Раскрываем модуль, учитывая знак $\operatorname{ctg} 2x$, и возводим уравнение в степень 12:

$$\sqrt[4]{-\operatorname{ctg} 2x} = -\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2x} \quad \Longleftrightarrow \quad -\operatorname{ctg}^3 2x = \operatorname{ctg}^4 2x \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{ctg}^2 2x\,(\operatorname{ctg} 2x + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} 2x = 0; \\ \operatorname{ctg} 2x = -1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ 2x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi m}{2},\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2};\ n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Задача 11. (Филол-99.4)

Решить уравнение $\log_{1-2\cos z}(\cos 2z + \sin z + 2) = 0$.

Идея. Перейти от логарифмического уравнения к тригонометрическому. Отбор решений провести на тригонометрической окружности.

У к а з а н и е. Логарифмическое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2z + \sin z + 2 = 1, \\ 0 < 1 - 2\cos z \neq 1. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Решая систему, получаем, что $\sin z = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ при $0 \neq \cos z < \dfrac{1}{2}$.

У к а з а н и е. Отбор решений провести на тригонометрической окружности.

Р е ш е н и е. Снимая логарифм, получаем:

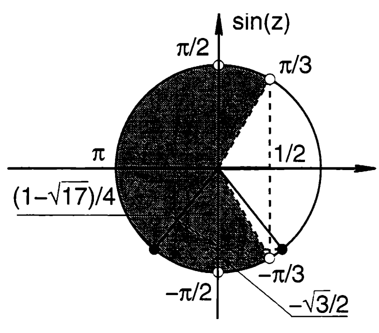
$$\begin{cases} \cos 2z + \sin z + 2 = 1, \\ 1 - 2\cos z > 0, \\ 1 - 2\cos z \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin^2 z - \sin z - 2 = 0, \\ \cos z < \dfrac{1}{2}, \\ \cos z \neq 0. \end{cases}$$

Из уравнения получаем $\sin z = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ или $\sin z = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$ – не подходит. Значит, решением уравнения является $\sin z = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$.

Отберём решения по второму условию системы на тригонометрической окружности. Решения неравенства $\cos z < \dfrac{1}{2}$ отмечены на рисунке цветом. Значение $\cos z = \dfrac{1}{2}$ соответствует в интервале $(-\pi; \pi]$ углам $\pm\dfrac{\pi}{3}$; по оси синусов $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Сравним:

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \vee & \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ -2\sqrt{3} & \vee & 1-\sqrt{17} \\ \sqrt{17} & \vee & 2\sqrt{3}+1 \\ 17 & \vee & 13+4\sqrt{3} \\ 1 & < & \sqrt{3}; \end{array}$$

значит, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$. Таким образом, можно однозначно установить расположение соответствующих углов (по величине) в IV четверти.



Итак, системе удовлетворяет лишь серия

$$x = \pi - \arcsin\frac{1-\sqrt{17}}{4} + 2\pi n = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pi + \arcsin\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. (Экон-00.5)

Найти все значения x, при которых числа $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$, $5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

Идея. Использовать критерий того, что три числа составляют геометрическую прогрессию.
Указание. Числа a, b, c составляют геометрическую прогрессию, если $b^2 = ac$.
Указание. Прогрессия с положительными членами будет возрастающей, если $\dfrac{b}{a} > 1$.
Указание. Данные числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, если

$$\begin{cases} \cos\left(5x + \dfrac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right), \\ -\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x + \dfrac{3\pi}{4}\right) > 0. \end{cases}$$

Решение. Для того чтобы три положительных числа a, b и c составляли возрастающую геометрическую прогрессию, требуется выполнение критерия геометрической прогрессии ($b^2 = ac$) и условия на её знаменатель $\left(q = \dfrac{b}{a} > 1\right)$. Составим равносильную систему:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)} \cdot 5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}, \\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)} : \left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)} > 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5^{\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)} \cdot 5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = 5^{-2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}, \\ 5^{-\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)} : 5^{\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)} > 5^0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos\left(5x + \dfrac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right), \\ -\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x + \dfrac{3\pi}{4}\right) > 0; \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right), \\ 2\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) < 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0; \\ \sin 2x = 1; \end{array}\right. \\ 2\sin 4x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) > 0. \end{cases}$$

1) Если $\sin 2x = 1$, то $\cos 2x = 0$ и, значит, $\sin 4x = 0$. Поэтому неравенство не выполняется.
2) Если $\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \iff 3x = \dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \iff x = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$, то выполнение неравенства проверим непосредственной подстановкой:

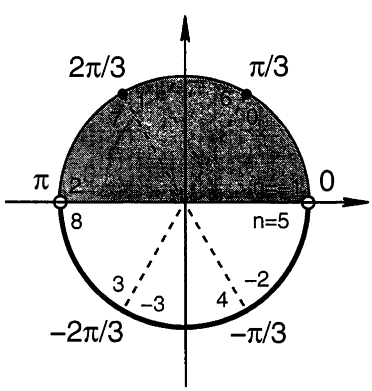
$$2\sin 4x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi n}{3}\right)+\sin\pi n =$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi n}{3}\right) = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi n-\frac{\pi n}{3}\right) = \sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{3}\right)\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{3}\right) > 0.$$

Таким образом, среди всех $n\in\mathbb{Z}$ требуется выбрать только те, при которых $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi n}{3}\right) > 0$. Воспользовавшись тригонометрической окружностью, получаем, что подходят лишь $n = \ldots;0;6;\ldots$ и $n = \ldots;1;7;\ldots$; то есть $n = 6k$ или $n = 6m+1$, где $k,m\in\mathbb{Z}$. Окончательно получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}\cdot 6k = \dfrac{\pi}{12}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}\cdot(6m+1) = \dfrac{5\pi}{12}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



Ответ. $\dfrac{\pi}{12}+2\pi k,\ \dfrac{5\pi}{12}+2\pi m;\quad k,m\in\mathbb{Z}$.

Задача 13. (Физ-95(2).7)

При каких значениях x числа $a_1 = \sin x$, $a_2 = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $a_3 = \sin 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше нуля?

Идея. Использовать определение и критерий арифметической прогрессии.

Указание. Условие задачи эквивалентно выполнению системы

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}, \\ d = a_2 - a_1 > 0. \end{cases}$$

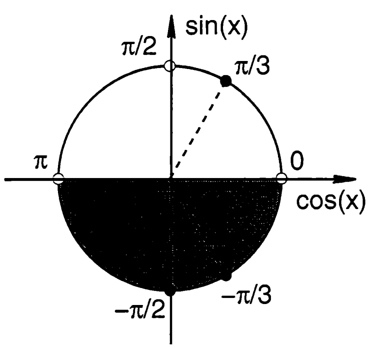
Указание. С помощью тригонометрических преобразований система приводится к виду

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0; \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \\ \sin x < 0, \\ \cos x \neq 1. \end{cases}$$

Решение. Используя критерий арифметической прогрессии $\left(a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}\right)$ и выражение для её разности $(d = a_2 - a_1 > 0)$, получаем:

$$\begin{cases} \sin 2x = \sin x + \sin 3x, \\ \sin x \cos x - \sin x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin 2x = 2\sin 2x \cos x, \\ \sin x(\cos x - 1) > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0; \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \\ \sin x < 0, \\ \cos x \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \\ \sin x < 0, \\ \cos x \neq 1. \end{cases}$$



Используя тригонометрическую окружность, отбираем серии $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Замечание. В постановке задачи использовано индексированное обозначение чисел: a_1, a_2, a_3. Это подразумевает определённый порядок следования данных чисел в арифметической прогрессии.

Ответ. $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.

Задача 14. (Экон-88.6)

Найти все значения параметра a, при которых неравенство
$|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\le 3$ выполняется при всех x.

Идея. Преобразовать подмодульное выражение таким образом, чтобы оно содержало только одну тригонометрическую функцию.
Указание. Перейти к двойному углу.
Указание. С помощью формул синуса и косинуса двойного угла неравенство приводится к виду $|a\sin 2x-\cos 2x+2+a|\le 3$.
Указание. Применить метод вспомогательного аргумента.

Решение. Преобразуем подмодульное выражение, используя формулы синуса и косинуса двойного угла и метод вспомогательного аргумента:

$$|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\le 3 \iff$$

$$\iff \left|\frac{3}{2}(1-\cos 2x)+a\sin 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 2x)+a\right|\le 3 \iff$$

$$\iff |a\sin 2x-\cos 2x+2+a|\le 3 \iff$$

$$\iff \begin{cases}\cos 2x-a\sin 2x\le a+5,\\ \cos 2x-a\sin 2x\ge a-1;\end{cases} \iff \begin{cases}\cos(2x+\varphi)\le \dfrac{a+5}{\sqrt{a^2+1}},\\ \cos(2x+\varphi)\ge \dfrac{a-1}{\sqrt{a^2+1}};\end{cases}$$

где $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. Для того чтобы полученная система неравенств была справедлива $\forall x\in\mathbb{R}$, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases}\dfrac{a+5}{\sqrt{a^2+1}}\ge 1,\\ \dfrac{a-1}{\sqrt{a^2+1}}\le -1;\end{cases} \iff \begin{cases}\sqrt{a^2+1}\le a+5,\\ \sqrt{a^2+1}\le 1-a;\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}a^2+1\le a^2+25+10a,\\ a^2+1\le 1+a^2-2a,\\ -5\le a\le 1;\end{cases} \iff -\frac{12}{5}\le a\le 0.$$

Ответ. $-\dfrac{12}{5}\le a\le 0$.

Задача 15. (ВМК-95.4)

Решить неравенство $\log_{\cos x}\cos^2 x \ge \log_{\cos x-\frac{1}{2}}\left(\cos^2 x-\cos x-x^2-14x-\dfrac{51}{4}\right)$.

Идея. Найти числовое значение левой части неравенства и использовать монотонность логарифма в правой части.

Указание. При $1/2<\cos x<1$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\cos^2 x-\cos x-x^2-14x-\frac{51}{4}\ge\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Указание. Среди решений получившегося неравенства $x^2+14x+13\le 0$ отобрать значения x такие, что $1/2<\cos x<1$.

Решение. Так как основания логарифмов должны быть больше нуля и не должны равняться единице, то необходимо, чтобы выполнялось неравенство $1/2<\cos x<1$. При таких ограничениях первый логарифм равен двум, а основание второго логарифма меньше единицы. Поэтому исходное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}1/2<\cos x<1,\\ \cos^2 x-\cos x-x^2-14x-\dfrac{51}{4}\ge\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)^2;\end{cases}\iff$$

$$\iff\quad\begin{cases}1/2<\cos x<1,\\ x^2+14x+13\le 0;\end{cases}\iff\quad\begin{cases}x\in\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ x\ne 2\pi n;\ n\in\mathbb{Z},\\ -13\le x\le -1.\end{cases}$$

Для решения полученной системы неравенств рассмотрим различные значения n:

1) При $n=0$ $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{3},\ x\ne 0,\\ -13\le x\le -1;\end{cases}\iff -\dfrac{\pi}{3}<x\le -1.$

2) При $n=-1$ $\begin{cases}-\dfrac{7\pi}{3}<x<-\dfrac{5\pi}{3},\ x\ne -2\pi,\\ -13\le x\le -1;\end{cases}\iff -\dfrac{7\pi}{3}<x<-\dfrac{5\pi}{3},\ x\ne -2\pi.$

3) При $n=-2$ $\begin{cases}-\dfrac{13\pi}{3}<x<-\dfrac{11\pi}{3},\ x\ne -4\pi,\\ -13\le x\le -1;\end{cases}\iff -13\le x<-\dfrac{11\pi}{3}, x\ne -4\pi.$

При остальных значениях n решений нет.

Ответ. $[-13;-4\pi)\bigcup\left(-4\pi;-\dfrac{11\pi}{3}\right)\bigcup\left(-\dfrac{7\pi}{3};-2\pi\right)\bigcup\left(-2\pi;-\dfrac{5\pi}{3}\right)\bigcup\left(-\dfrac{\pi}{3};-1\right]$.

Задача 16. (ВМК-89.4)

Решить неравенство $1\le|\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}$.

Идея. Показать, что основание степени строго меньше 1 и, следовательно, показатель степени должен быть меньше либо равен нулю.

Указание. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\le 0,$$

которое решается расщеплением.

Указание. Возможные варианты: радикал равен нулю, логарифм определён; радикал положителен, логарифм меньше либо равен нулю.

Указание. $\log_{|\cos x|}\dfrac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\le 0 \iff \begin{cases}0<|\cos x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ |\sin x|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

Решение. Так как $|\cos x|$ находится в основании логарифма, то $0<|\cos x|<1$, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\le 0.$$

Рассмотрим возможные варианты: радикал равен нулю, логарифм определён; радикал положителен, логарифм меньше либо равен нулю.

1) Если $\sqrt{2x-3}=0$, то $x=\dfrac{3}{2}$ – решение неравенства, так как $\dfrac{3}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$, а на этом интервале $\log_{|\cos x|}\dfrac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}$ определён.

2) Пусть $\sqrt{2x-3}>0$, то есть $x>\dfrac{3}{2}$, тогда

$$\log_{|\cos x|}\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\le 0 \iff \begin{cases}\dfrac{2\sqrt{3}|\sin x|+1}{8(1-2\cos^2 x)}\ge 1,\\ 0<|\cos x|<1;\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}1-2\cos^2 x>0,\\ 2\sqrt{3}|\sin x|+1\ge 8-16(1-\sin^2 x),\\ 0<|\cos x|<1;\end{cases} \iff \begin{cases}0<|\cos x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ |\sin x|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases} \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}<|\sin x|\le\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{4}+\pi n<x\le\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ \dfrac{2\pi}{3}+\pi m\le x<\dfrac{3\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Так как $x>3/2$, то отрицательные значения n и m не подходят. Проверим остальные значения.

$n=0$: $\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{3}$ – не подходит;

$n=1$: $\dfrac{5\pi}{4}<x\le\dfrac{4\pi}{3}$ – верно; значит, при всех $n\in\mathbb{N}$ тоже верно;

$m=0$: $\dfrac{2\pi}{3}\le x<\dfrac{3\pi}{4}$ – подходит; значит, все $m\in\mathbb{N}_0$ тоже подходят.

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{\pi}{3}+\pi n\right]\cup\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\cup\left[\dfrac{2\pi}{3}+\pi m;\dfrac{3\pi}{4}+\pi m\right)$; $n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}_0$.

3. Полезные преобразования и замены переменных

3.1. Использование формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата

Задача 1. **(ЕГЭ.В)**

Решить систему уравнений $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases}$

Идея. Сделать замену переменных $u = \lg x$, $v = \lg y$. Выразить u из первого уравнения и подставить во второе.
Указание. Ввести новые переменные $u = \lg x$, $v = \lg y$. В новых обозначениях система примет вид $\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = 5. \end{cases}$
Указание. Выразить u из первого уравнения и подставить во второе.

Решение. Сделаем замену переменных $u = \lg x$, $v = \lg y$. В новых обозначениях система принимает вид

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = 5; \end{cases} \iff \begin{cases} u = v + 1, \\ v^2 + 2v + 1 + v^2 = 5; \end{cases} \iff \begin{cases} u = v + 1, \\ (v+2)(v-1) = 0; \end{cases}$$

1) $v = -2;\quad u = -1 \implies x = 0,1;\quad y = 0,01;$
2) $v = 1;\quad u = 2 \implies x = 100;\quad y = 10.$

Ответ. $(0,1;\ 0,01)$, $(100;\ 10)$.

Задача 2. **(У)**

Разложить на множители многочлен $x^4 + 1$.

Идея. Использовать формулу разности квадратов.
Указание. Дополнить исходное выражение до квадрата суммы.

Решение. Преобразуем исходное выражение следующим образом:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Ответ. $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

Задача 3. **(У)**

Разложить $x^4 + x^2 + 1$ в произведение двух многочленов.

Идея. Использовать формулу разности квадратов.
Указание. Дополнить исходное выражение до квадрата суммы.

Решение. Преобразуем исходное выражение следующим образом:

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Ответ. $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

Задача 4. (Экон.М-96.2)

Решить систему уравнений $\left\{\begin{array}{l} x+3^y=2, \\ x^3+27^y=26. \end{array}\right.$

Идея. Воспользоваться формулой разложения суммы кубов в произведение.
Указание. Второе уравнение системы можно преобразовать по формуле для суммы кубов:

$$(x+3^y)(x^2-x\cdot 3^y+9^y)=26.$$

Указание. Выразить из первого уравнения $3^y=2-x$ и подставить во второй сомножитель преобразованного второго уравнения. Получится квадратное уравнение относительно x:

$$x^2-2x-3=0\,.$$

Указание. Решая полученное квадратное уравнение, найти значения переменной x и по формуле $y=\log_3(2-x)$ соответствующие им значения переменной y.

Решение. Разложим выражение в левой части второго уравнения по формуле суммы кубов:

$$(x+3^y)(x^2-x\cdot 3^y+9^y)=26.$$

Выразим из первого уравнения $3^y=2-x$ и подставим во второе. Получим квадратное уравнение относительно переменной x:

$$x^2-x(2-x)+(2-x)^2=13 \quad\Longleftrightarrow\quad 3x^2-6x-9=0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad x^2-2x-3=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x-3)(x+1)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Так как $2-x=3^y>0$, то подходит только $x=-1$. Значение второй переменной находим из первого уравнения: $y=\log_3(2-x)=\log_3 3=1$.

Ответ. $(-1;1)$.

Задача 5. (Экон-96.1)

Решить систему $\left\{\begin{array}{l} |-x|-\sqrt[3]{y+3}=1, \\ (-x\sqrt{-x})^2-y-3=7. \end{array}\right.$

Идея. Разложить второе уравнение на множители, воспользовавшись формулой преобразования суммы кубов в произведение.

Указание. Модуль в первом уравнении можно снять, так как второе уравнение системы определено только при $x \le 0$ (должен иметь смысл $\sqrt{-x}$); следовательно, $-x \ge 0$ и $|-x| = -x$.
Указание. Сделать замену $z = \sqrt[3]{y+3}$. Тогда второе уравнение системы приводится к виду
$$(-x-z)(x^2 - xz + z^2) = 7.$$

Указание. Используя первое уравнение системы, выразить $z = -x - 1$ и подставить во второе уравнение. Получится квадратное уравнение относительно переменной x:
$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Указание. Найти корни квадратного уравнения, исключить посторонний корень. Затем из уравнения $\sqrt[3]{y+3} = -x - 1$ найти значение переменной y.

Решение. Модуль в первом уравнении можно снять, так как второе уравнение системы определено только при $x \le 0$ ($\sqrt{-x}$ должен иметь смысл); следовательно, $-x \ge 0$ и $|-x| = -x$. Сделаем замену $z = \sqrt[3]{y+3}$. Левая часть второго уравнения представляет собой сумму кубов. Преобразуем её в произведение:
$$\begin{cases} -x - z = 1, \\ -\left(x^3 + z^3\right) = 7; \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = -1, \\ -(x+z)(x^2 - xz + z^2) = 7; \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} z = -x - 1, \\ x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = 7; \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x - 1, \\ x^2 + x - 2 = 0. \end{cases}$$

Корни второго уравнения $x = -2$ и $x = 1$. Учитывая, что $x \le 0$, получаем окончательно, что $x = -2$, $y = z^3 - 3 = (-x-1)^3 - 3 = (-(-2)-1)^3 - 3 = -2$.

Ответ. $(-2; -2)$.

Задача 6. (М/м-90.3)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3} - 1}{1+x} \le x$.

Идея. Перенести x из правой части в левую, привести к общему знаменателю и воспользоваться формулой преобразования разности кубов в произведение. Далее применить метод интервалов.
Указание. После переноса в левую часть и приведения к общему знаменателю получаем неравенство
$$\frac{\sqrt{1-x^3} - (x^2 + x + 1)}{x+1} \le 0.$$

Указание. $\sqrt{1-x^3} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x^2+x+1}$.
Указание. Разложив числитель на множители и воспользовавшись неравенством $\sqrt{x^2+x+1} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, получим
$$\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \le 0.$$

У к а з а н и е. Домножить обе части последнего неравенства на выражение $\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+x+1}>0$, сопряжённое с числителем. Решить полученное неравенство методом интервалов.

Р е ш е н и е. Неравенство имеет смысл при $x \le 1$, $x \ne -1$. Перенесём x из правой части в левую и приведём выражение в левой части к общему знаменателю:

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-(x^2+x+1)}{x+1} \le 0.$$

Воспользуемся на области определения формулой преобразования разности кубов в произведение:

$$\sqrt{1-x^3}=\sqrt{(1-x)\cdot(x^2+x+1)}\,.$$

Заметим, что $\forall x \in \mathbb{R}\quad x^2+x+1>0 \implies \sqrt{x^2+x+1}>0$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x^2+x+1}-(\sqrt{x^2+x+1})^2}{x+1} \le 0 \iff$$

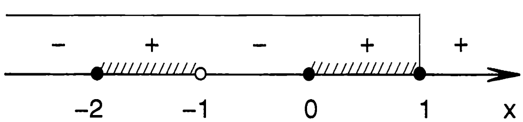
$$\iff \frac{\sqrt{x^2+x+1}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+x+1}\right)}{x+1} \le 0 \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \le 0\,.$$

Домножим обе части последнего неравенства на сопряжённое к числителю положительное выражение $\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+x+1}$ и применим формулу разности квадратов:

$$\frac{(1-x)-(x^2+x+1)}{x+1} \le 0 \iff \frac{x(x+2)}{x+1} \ge 0\,.$$

Решая это неравенство стандартным методом интервалов, получим с учётом области определения, что $x \in [-2;-1) \cup [0;1]$.



О т в е т. $[-2;-1)\cup[0;1]$.

Задача 7. (М/м-96(1).2)

Решить неравенство $\dfrac{x^3-8+6x\cdot(2-x)}{|3-4x|} \le \sqrt{4x-3}$.

И д е я. Заметив, что на области определения $|3-4x| = 4x-3$, перенести радикал в левую часть, привести выражение к общему знаменателю и воспользоваться формулой преобразования разности кубов в произведение.

Указание. После снятия модуля и приведения к общему знаменателю получим

$$\frac{x^3-8-6x(x-2)-\left(\sqrt{4x-3}\right)^3}{4x-3}\le 0.$$

Указание. Сгруппировав слагаемые, получим в числителе разность кубов:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)-6x(x-2)-\left(\sqrt{4x-3}\right)^3}{4x-3}\le 0 \iff \frac{(x-2)^3-\left(\sqrt{4x-3}\right)^3}{4x-3}\le 0.$$

Указание. На области определения знаменатель положителен, поэтому последнее неравенство равносильно неравенству для числителя:

$$(x-2)^3\le\left(\sqrt{4x-3}\right)^3.$$

Решение. Неравенство имеет смысл при $4x-3>0$. Следовательно, на области определения модуль раскрывается однозначно: $|3-4x|=4x-3$. Перенесём все слагаемые в левую часть, приведём к общему знаменателю и преобразуем числитель к разности кубов:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)-6x(x-2)-\left(\sqrt{4x-3}\right)^3}{4x-3}\le 0 \iff \frac{(x-2)^3-\left(\sqrt{4x-3}\right)^3}{4x-3}\le 0.$$

Поскольку на области определения знаменатель положителен, остаётся неравенство для числителя:

$$\begin{cases}(x-2)^3\le\left(\sqrt{4x-3}\right)^3,\\ 4x-3\ne 0;\end{cases} \iff \begin{cases}\sqrt{4x-3}\ge x-2,\\ 4x-3\ne 0;\end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2<0,\\ 4x-3>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-2\ge 0,\\ 4x-3\ge x^2-4x+4;\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\dfrac{3}{4}<x<2;\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ (x-7)(x-1)\le 0;\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\dfrac{3}{4}<x<2;\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ 1\le x\le 7;\end{cases}\end{array}\right. \iff \frac{3}{4}<x\le 7.$$

Ответ. $\left(\dfrac{3}{4};7\right]$.

Задача 8. (Геогр-95(1).1)

Решить систему $\begin{cases}\sqrt{x}(x+3y)=36,\\ \sqrt{y}(3x+y)=28.\end{cases}$

Идея. Сделать замену. Получить эквивалентную систему, состоящую из суммы и разности уравнений исходной системы. Воспользоваться формулами кубов суммы и разности.

Указание. Сделать замену $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$. После почленного сложения и вычитания система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 64, \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 8. \end{cases}$$

Указание. Свернуть выражения в левых частях уравнений соответственно в куб суммы и разности:

$$\begin{cases} (a+b)^3 = 64, \\ (a-b)^3 = 8; \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = 4, \\ a-b = 2. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ и преобразуем систему, почленно складывая и вычитая уравнения:

$$\begin{cases} a(a^2 + 3b^2) = 36, \\ b(3a^2 + b^2) = 28; \end{cases} \iff \begin{cases} a^3 + 3ab^2 = 36, \\ 3a^2b + b^3 = 28; \end{cases} \iff \begin{cases} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 64, \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 8. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами куба суммы и разности:

$$\begin{cases} (a+b)^3 = 64, \\ (a-b)^3 = 8; \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = 4, \\ a-b = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3, \\ b = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 9, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ. $(9;1)$.

Задача 9. (Псих-88.2)

Решить уравнение $32^{3(x^3-8)} = 8^{19(2x-x^2)}$.

Идея. Привести выражения в левой и правой частях уравнения к степеням по основанию 2 и перейти к равенству показателей, которое будет эквивалентно исходному уравнению. Получившееся рациональное уравнение решить методом разложения на множители.
Указание. Привести левую и правую части к степеням по одному основанию и перейти к равенству показателей:

$$2^{15(x^3-8)} = 2^{57(2x-x^2)} \iff 15(x^3 - 8) = 57(2x - x^2).$$

Указание. После разложения на множители уравнение примет вид

$$(x-2)(5x^2 + 29x + 20) = 0.$$

Решение. Приведём выражения в левой и правой частях уравнения к степеням по одному основанию и перейдём к равносильному уравнению для показателей:

$$2^{15(x^3-8)} = 2^{57(2x-x^2)} \iff 15(x^3 - 8) = 57(2x - x^2).$$

Перенесём все слагаемые в левую часть, воспользуемся формулой для разности кубов и разложим многочлен на множители:

$$5(x-2)(x^2 + 2x + 4) + 19x(x-2) = 0 \iff (x-2)(5x^2 + 29x + 20) = 0 \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ 5x^2 + 29x + 20 = 0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = -5; \\ x = -\dfrac{4}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{-5;\ -\frac{4}{5};\ 2\right\}$.

Задача 10. (Почв-93.2)

Решить уравнение $\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0$.

Идея. Воспользоваться формулой преобразования разности кубов в произведение и разложить уравнение на множители.
Указание. По формуле разности кубов

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x).$$

Указание. Вынести общий множитель $(\sin x - \cos x)$ за скобки:

$$(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x + 1) = 0.$$

Указание. Полученное уравнение эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0; \\ 2 + \dfrac{1}{2}\sin 2x = 0. \end{array}\right.$$

Решение. Воспользуемся формулой преобразования разности кубов в произведение, разложим уравнение на множители и решим методом расщепления:

$$(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) + \sin x - \cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\sin x - \cos x)(1 + \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\sin x - \cos x)\left(2 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0; \\ 2 + \dfrac{1}{2}\sin 2x = 0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0; \\ \sin 2x = -4 < -1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 11. (Геогр-80.4)

Решить уравнение $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

Идея. Воспользоваться формулой преобразования суммы кубов в произведение. Далее путём тригонометрических преобразований свести уравнение к квадратному.

Указание. По формуле суммы кубов

$$\cos^6 x + \sin^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x.$$

Указание. В полученном выражении выделить полный квадрат и воспользоваться формулой синуса двойного аргумента:

$$\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Указание. После указанных преобразований уравнение принимает вид

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, свести уравнение к квадратному относительно $\cos 2x$:

$$\frac{3}{4}\cos^2 2x - \frac{15}{8}\cos 2x + \frac{3}{4} = 0\,.$$

Решение. Используя формулу суммы кубов, преобразуем левую часть уравнения:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x.$$

Выделим полный квадрат и применим формулу синуса двойного угла:

$$\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

После выполненных преобразований уравнение стало квадратным относительно функции $\cos 2x$:

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{15}{8}\cos 2x - \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x - \frac{15}{8}\cos 2x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4}\cos^2 2x - \frac{15}{8}\cos 2x + \frac{3}{4} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\cos^2 2x - 5\cos 2x + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 2 > 1; \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \cos 2x = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 12. (Георг-98.2)

Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

Идея. Записать систему из двух уравнений, используя формулу n-го члена геометрической прогрессии $(b_n = b_1 q^{n-1})$. Воспользоваться формулой преобразования разности кубов в произведение.

Указание. Из условия задачи составить систему уравнений для определения первого члена (b) и знаменателя прогрессии (q):

$$\begin{cases} b + bq + bq^2 = -7, \\ bq - bq^4 = 14. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться во втором уравнении формулой для разности кубов:

$$\begin{cases} b(1+q+q^2) = -7, \\ bq(1-q)(1+q+q^2) = 14; \end{cases} \iff \begin{cases} b(1+q+q^2) = -7, \\ q(1-q)(-7) = 14. \end{cases}$$

Указание. Второе уравнение полученной системы является квадратным и имеет два корня. Произвести отбор решений, соответствующих убывающей геометрической прогрессии.

Решение. Используя формулу n-го члена геометрической прогрессии, формализуем условие задачи. Пусть b и q – первый член и знаменатель прогрессии соответственно, тогда

$$\begin{cases} b + bq + bq^2 = -7, \\ bq - bq^4 = 14. \end{cases}$$

Раскладываем на множители оба уравнения системы:

$$\begin{cases} b(1+q+q^2) = -7, \\ bq(1-q^3) = 14; \end{cases} \iff \begin{cases} b(1+q+q^2) = -7, \\ bq(1-q)(1+q+q^2) = 14; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b(1+q+q^2) = -7, \\ q(1-q)b(1+q+q^2) = 14; \end{cases} \iff \begin{cases} b(1+q+q^2) = -7, \\ q(1-q)(-7) = 14; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} b(1+q+q^2) = -7, \\ q(1-q) = -2; \end{cases} \iff \begin{cases} b(1+q+q^2) = -7, \\ (q-2)(q+1) = 0. \end{cases}$$

Корни второго уравнения $q = 2$ и $q = -1$. По условию задачи прогрессия должна быть убывающий, поэтому $q = -1$ не подходит. При $q = 2$ из первого уравнения находим $b = -1$. Найденные значения первого члена и знаменателя соответствуют убывающей геометрической прогрессии.

Ответ. 2.

Задача 13. (ВМК-93.1)

Решить неравенство $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x - x^2 - 2) \geq 0$.

Идея. Проверить, имеет ли смысл неравенство, сравнив основание логарифма в левой части с нулём. Сравнить основание логарифма с единицей и свести логарифмическое неравенство к системе квадратных неравенств.

Указание. Показать, что $8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$. Тогда основание логарифма примет вид $\sqrt{7} - \sqrt{3}$. Для него справедливы оценки: $0 < \sqrt{7} - \sqrt{3} < 1$.

Указание. Так как основание логарифма меньше единицы, исходное логарифмическое неравенство эквивалентно системе квадратных неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} 4x - x^2 - 2 \leq 1\,, \\ 4x - x^2 - 2 > 0\,. \end{array}\right.$$

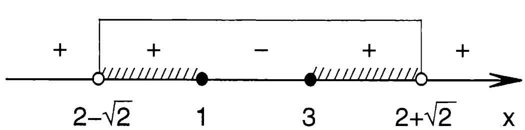
Решение. Заметим, что выражение, стоящее под корнем в основании логарифма является полным квадратом $8-2\sqrt{7} = (\sqrt{7}-1)^2$. Тогда основание логарифма примет вид $\sqrt{7} - \sqrt{3}$. Очевидно, что оно больше нуля. Сравним основание логарифма с единицей:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{7} - \sqrt{3} & \vee & 1 \\ \sqrt{7} & \vee & \sqrt{3} + 1 \\ 7 & \vee & 4 + 2\sqrt{3} \\ 3 & \vee & 2\sqrt{3} \\ 9 & < & 12. \end{array}$$

Итак, основание логарифма меньше единицы. Поэтому исходное логарифмическое неравенство эквивалентно системе квадратных неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x - x^2 - 2 \leq 1, \\ 4x - x^2 - 2 > 0; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 4x + 2 < 0; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} (x-3)(x-1) \geq 0, \\ \left(x - (2 + \sqrt{2})\right)\left(x - (2 - \sqrt{2})\right) < 0. \end{array}\right.$$



Применяя метод интервалов, получим: $x \in (2 - \sqrt{2};\ 1] \cup [3;\ 2 + \sqrt{2})$.

Ответ. $(2 - \sqrt{2};\ 1] \cup [3;\ 2 + \sqrt{2})$.

Задача 14. (Почв-95(1).5)

Найти все значения a, при которых уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет решений.

Идея. Используя формулу косинуса двойного угла, свести уравнение к квадратному относительно $\cos x$. Выяснить, при каких условиях квадратное уравнение либо не имеет корней, либо его корни по модулю больше единицы.

Указание. После применения формулы косинуса двойного аргумента исходное уравнение принимает вид $4\cos^2 x - 4a\cos x + a^2 = 0$.

Указание. Корень полученного квадратного уравнения $\cos x = \dfrac{a}{2}$.

Решение. Применим к первому слагаемому формулу косинуса двойного угла:

$$4\cos^2 x - 4a\cos x + a^2 = 0 \iff (2\cos x - a)^2 = 0 \iff \cos x = \frac{a}{2}.$$

Полученное простейшее тригонометрическое уравнение не имеет решений, если

$$\left|\frac{a}{2}\right| > 1 \iff |a| > 2.$$

Ответ. $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

Задача 15. (Хим-95.5)

Решить систему $\begin{cases} 2^{-x}\cdot y^4 - 2y^2 + 2^x \le 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$

Идея. Домножить обе части неравенства на 2^x и проанализировать область возможных решений.

Указание. Домножая обе части неравенства на положительную величину 2^x, получаем

$$y^4 - 2y^2 2^x + 2^{2x} \le 0 \iff (y^2 - 2^x)^2 \le 0 \iff y^2 = 2^x.$$

Указание. Подставить выражение для 2^x в уравнение и разложить на множители.

Решение. Домножим обе части неравенства на $2^x > 0$:

$$y^4 - 2y^2 2^x + 2^{2x} \le 0 \iff (y^2 - 2^x)^2 \le 0 \iff y^2 = 2^x.$$

Подставим полученную зависимость в уравнение:

$$\left(y^2\right)^3 - (y^2)^2 + y^2 - 1 = 0 \iff (y^2)^2\cdot(y^2 - 1) + y^2 - 1 = 0 \iff$$

$$\iff (y^4 + 1)\cdot(y^2 - 1) = 0 \iff y^2 = 1 \iff y = \pm 1.$$

Тогда $2^x = 1 \iff x = 0$.

Ответ. $(0; \pm 1)$.

Задача 16. (Экон-79.4)

Решить систему уравнений $\left\{\begin{array}{l} 3x^2+2y^2-3x+5y=3, \\ 4,5x^2+3y^2-3x+8y=7. \end{array}\right.$

Идея. Использовать метод алгебраического сложения уравнений, умножив первое уравнение системы на 3, второе на -2 и сложив.

Указание. Умножить обе части первого уравнения на 3, обе части второго уравнения на -2 и почленно сложить. Получится линейное уравнение $3x+y=5$.

Указание. Выразить $y=5-3x$ и подставить в первое уравнение исходной системы. Получится квадратное уравнение относительно переменной x:

$$21x^2-78x+72=0\,.$$

Решение. Умножив обе части первого уравнения на 3, обе части второго уравнения на -2 и почленно сложив, получим уравнение $3x+y=5$. Перейдём к равносильной системе:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2+2y^2-3x+5y=3, \\ 3x+y=5; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \quad \left\{\begin{array}{l} 3x^2+2(25-30x+9x^2)-3x+25-15x=3, \\ y=5-3x; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \quad \left\{\begin{array}{l} 7x^2-26x+24=0, \\ y=5-3x. \end{array}\right.$$

Корни квадратного уравнения $x_1=2,\ x_2=\dfrac{12}{7}$. Соответствующие значения второй переменной $y_1=5-3\cdot 2=-1,\quad y_2=5-3\cdot\dfrac{12}{7}=-\dfrac{1}{7}$.

Ответ. $(2;\ -1),\ \left(\dfrac{12}{7};\ -\dfrac{1}{7}\right)$.

Задача 17. (Хим-98.3)

Решить систему $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+2(x-y)+2=0, \\ z^2+xz+yz-4=0. \end{array}\right.$

Идея. Выделить полные квадраты в первом уравнении системы. По найденным значениям x и y из второго уравнения определить значение третьей переменной.

Указание. Выделим полные квадраты в первом уравнении:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=0\,.$$

Указание. Решение первого уравнения $x=-1,\ y=1$. Из второго уравнения определяется значение z.

Решение. Выделим в первом уравнении полные квадраты:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)+2=0, \\ z^2+xz+yz-4=0; \end{cases} \iff \begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=0, \\ z^2+xz+yz-4=0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=-1, \\ y=1, \\ z^2=4; \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1, \\ y=1, \\ z=\pm 2. \end{cases}$$

Ответ. $(-1;\ 1;\ -2)$, $(-1;\ 1;\ 2)$.

Задача 18. (У)

Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$

Идея. С помощью подстановки избавиться от одного из уравнений и одной неизвестной.

Указание. Выразить из первого уравнения x и подставить во второе. В получившемся уравнении выделить полные квадраты.

Решение. Выразим из первого уравнения x и подставим во второе, получим

$$-2yz-2y^2-z^2=4 \iff z^2+2yz+2y^2=-4 \iff (z+y)^2+y^2=-4.$$

Решений нет, так как сумма квадратов не может быть отрицательной.

Ответ. Решений нет.

Задача 19. (У)

Решить систему $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx, \\ 2x+3y-6z-1=0. \end{cases}$

Идея. Выделить полные квадраты.

Указание. В первом уравнении перенести всё в одну сторону и выделить три полных квадрата.

Решение. Домножим первое уравнение системы на 2, перенесём всё в левую часть уравнения и выделим полные квадраты:

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0 \iff (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0,$$

следовательно, $x=y=z$. С учётом этого, из второго уравнения $x=y=z=-1$.

Ответ. $(-1;-1;-1)$.

Задача 20. (Почв-79.5)

Решить систему уравнений $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$

Идея. Избавиться от произведений вида xy. Для этого умножить первое уравнение на 5, второе уравнение на 2 и сложить. Выделить полные квадраты и проанализировать полученное уравнение.

Указание. Умножив первое уравнение на 5, второе уравнение на 2 и сложив, получим

$$56(x^2 - 4x + 4) + 21(y^2 - 2y + 1) = 0.$$

Указание. Выделим полные квадраты:

$$56(x-2)^2 + 21(y-2)^2 = 0.$$

Указание. Единственное возможное решение полученного уравнения $x = 2$, $y = 1$. Подстановкой в одно из уравнений исходной системы убедиться в том, что найденные значения являются решением системы.

Решение. Умножим обе части первого уравнения на 5, обе части второго уравнения на 2 и почленно сложим:

$$56x^2 + 21y^2 - 224x - 42y + 245 = 0.$$

Полученное уравнение не содержит произведений вида xy. Выделим полные квадраты:

$$56 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 21 \cdot (y^2 - 2y + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 56 \cdot (x-2)^2 + 21 \cdot (y-1)^2 = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $x - 2 = 0$ и $y - 1 = 0$, то есть $x = 2$ и $y = 1$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что найденные значения составляют решение исходной системы.

Ответ. $(2;\ 1)$.

Замечание. Можно также рассмотреть первое уравнение как квадратное относительно переменной x и выписать условие неотрицательности дискриминанта. Решая соответствующее квадратное неравенство, находим $y = 1$.

Задача 21. (ИСАА-94.6)

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение
$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x - 2} = 2\sqrt{2} - 3$ имеет решение.

Идея. *(Первый способ)* Выделить полный квадрат.

Указание. Заметить, что $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$. Тогда в уравнении можно выделить полный квадрат:

$$\Big(ax + (\sqrt{2} - 1)\Big)^2 + \sqrt{x - 2} = 0.$$

Указание. Решение этого уравнения существует только при равенстве нулю обоих слагаемых:

$$ax + (\sqrt{2} - 1) = 0 \quad \text{и} \quad x - 2 = 0.$$

Решение. Заметим, что $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$. Тогда в уравнении можно выделить полный квадрат:

$$\left(ax + (\sqrt{2} - 1)\right)^2 + \sqrt{x-2} = 0.$$

Решение этого уравнения существует только при равенстве нулю обоих слагаемых:

$$\begin{cases} ax + (\sqrt{2} - 1) = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2, \\ a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Значит, при $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ есть решение $x = 2$, при других значениях a решений нет.

Идея. *(Второй способ)* Уравнение является квадратным относительно a. Записать условие существования решения (a) относительно параметра x.
Указание. Уравнение можно записать как квадратное относительно a:

$$x^2a^2 + 2x(\sqrt{2} - 1)a + \sqrt{x-2} - 2\sqrt{2} + 3 = 0.$$

Указание. Решение квадратного уравнения существует только при неотрицательном дискриминанте:

$$D/4 = x^2(\sqrt{2}-1)^2 - x^2\sqrt{x-2} - (3 - 2\sqrt{2})x^2 = -x^2\sqrt{x-2} \geq 0 \quad \iff \quad x = 2.$$

Указание. Подставить найденное значение x в квадратное уравнение и вычислить его корни.

Решение. Уравнение можно записать как квадратное относительно a:

$$x^2a^2 + 2x(\sqrt{2} - 1)a + \sqrt{x-2} - 2\sqrt{2} + 3 = 0.$$

Корни квадратного уравнения существуют при неотрицательном дискриминанте:

$$D/4 = x^2(\sqrt{2}-1)^2 - x^2\sqrt{x-2} - (3 - 2\sqrt{2})x^2 = -x^2\sqrt{x-2} \geq 0 \quad \iff \quad x = 2.$$

Для найденного значения x решим квадратное уравнение для определения a, при этом заметим, что $3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$:

$$4a^2 + 4(\sqrt{2}-1)a + (\sqrt{2}-1)^2 = 0 \quad \iff \quad (2a + \sqrt{2} - 1)^2 = 0 \quad \iff \quad a = \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

Итак, при $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ $x = 2$, при других значениях a решений нет.

Ответ. $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Задача 22. (У)

Решить неравенство $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 > \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Идея. Преобразовать неравенство к виду: сумма квадратов нескольких выражений больше нуля.

Указание. Домножить неравенство на $4(x^2+1) > 0$ и собрать два полных квадрата.

Решение. Домножим неравенство на $4(x^2+1) > 0$ и соберём два полных квадрата:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{2x}{x^2+1} \iff (2x+1)^2(x^2+1) > 8x \iff$$

$$\iff (2x+1)^2\cdot x^2 + (2x+1)^2 - 8x > 0 \iff (2x^2+x)^2 + (2x-1)^2 > 0.$$

Последнее неравенство справедливо для любого x, так как оба квадрата одновременно в ноль обращаться не могут.

Замечание. Для доказательства неравенства можно было воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{2x+1}{2} \geq \sqrt{2x}.$$

Тогда

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 \geq 2x \geq \frac{2x}{x^2+1}.$$

Причём при $x \neq 0$ последнее неравенство является строгим, а предпоследнее — при $x \neq 1/2$. Следовательно, при любом x исходное неравенство будет строгим.

Ответ. $x \in \mathbb{R}$.

Задача 23. (У)

Решить неравенство $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}} < x - \sqrt{x-\dfrac{9}{x}}$.

Идея. Возвести неравенство в квадрат и упростить с помощью алгебраических преобразований.

Указание. Определить возможные значения x из условия неотрицательности правой части и подкоренных выражений и возвести неравенство в квадрат.

Указание. В получившемся неравенстве выделить полный квадрат.

Решение. При отрицательном x правая часть неравенства отрицательна и оно не имеет смысла. Значит $x > 0$. Из условия неотрицательности подкоренных выражений получаем $x \geq 3$. При этих x обе части неравенства неотрицательны и его можно возвести в квадрат:

$$9 - \frac{9}{x} < x^2 - 2x\sqrt{x - \frac{9}{x}} + x - \frac{9}{x} \iff x^2 - 2x\sqrt{x - \frac{9}{x}} + x - 9 > 0 \iff$$

$$\iff (x^2 - 9) - 2\sqrt{x}\sqrt{x^2 - 9} + x > 0 \iff \left(\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x}\right)^2 > 0 \iff$$

$$\iff \sqrt{x^2 - 9} \neq \sqrt{x} \iff x \neq \frac{1 + \sqrt{37}}{2}.$$

Ответ. $x \in \left[3; \frac{1 + \sqrt{37}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1 + \sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$.

Задача 24. (Геол.ОГ-82.6)

Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 8\cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0, \\ x + y = z. \end{cases}$$

Идея. Свести первое уравнение системы к квадратному относительно $\cos(x - y)$ при помощи формулы преобразования произведения косинусов в сумму. Рассмотреть, при каких значениях $\cos(x + y)$ полученное квадратное уравнение имеет решения.

Указание. Преобразовав произведение косинусов в сумму, привести первое уравнение системы к виду

$$4(\cos(x + y) + \cos(x - y))\cos(x - y) + 1 = 0 \iff$$

$$\iff 4\cos^2(x - y) + 4\cos(x + y)\cos(x - y) + 1 = 0.$$

Указание. Выделить полный квадрат:

$$(2\cos(x - y) + \cos(x + y))^2 + 1 - \cos^2(x + y) = 0.$$

Указание. Это уравнение эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos(x + y) = 1, \\ \cos(x - y) = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos(x + y) = -1, \\ \cos(x - y) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Так как z не входит в первое уравнение, то второе уравнение системы можно использовать только для нахождения z, а x и y надо искать из первого уравнения. Преобразуем в первом уравнении произведение косинусов в сумму:

$$8\cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0 \iff$$

$$\iff 4(\cos(x + y) + \cos(x - y))\cos(x - y) + 1 = 0 \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4\cos^2(x-y) + 4\cos(x+y)\cos(x-y) + 1 = 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$(2\cos(x-y) + \cos(x+y))^2 + 1 - \cos^2(x+y) = 0.$$

Так как косинус не превосходит единицы, то полученное уравнение эквивалентно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \cos(x+y) = 1, \\ \cos(x-y) = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \cos(x+y) = -1, \\ \cos(x-y) = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x+y = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ x-y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x+y = \pi + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}, \\ x-y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Решая полученные системы линейных уравнений, находим значения переменных x и y. Из второго уравнения исходной системы определяем z.

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi(k_1+l_1)\ ;\ -\dfrac{\pi}{3} + \pi(k_1-l_1);\ 2\pi k_1\right)$,
$\left(-\dfrac{\pi}{3} + \pi(k_2+l_2)\ ;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi(k_2-l_2);\ 2\pi k_2\right)$,
$\left(\dfrac{2\pi}{3} + \pi(m_1+n_1)\ ;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi(m_1-n_1);\ \pi + 2\pi m_1\right)$,
$\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi(m_2+n_2)\ ;\ \dfrac{2\pi}{3} + \pi(m_2-n_2);\ \pi + 2\pi m_2\right)$; $n_1, n_2, l_1, l_2, m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Замечание. При решении систем вида $\left\{\begin{array}{l} \cos(x+y) = 1, \\ \cos(x-y) = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$ необходимо брать для серий решений каждого уравнения разные целочисленные параметры, чтобы перебрать все возможные пары.

Задача 25. (Геол-90.5)

Найти все пары действительных чисел m и n, при которых уравнение
$(3x^2 - 2m^2 + mn)^2 + (3m^2 - mn + 2n^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$ имеет хотя бы одно решение.

Идея. Перенести слагаемые из правой части уравнения в левую и выделить полный квадрат.
Указание. Уравнение приводится к виду

$$(3x^2 - 2m^2 + mn)^2 + (3m^2 - mn + 2n^2 - 12x)^2 + (x-2)^2 = 0.$$

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 - 2m^2 + mn = 0, \\ 3m^2 - mn + 2n^2 - 12x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12 - 2m^2 + mn = 0, \\ 3m^2 - mn + 2n^2 - 24 = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Указание. Умножить обе части первого уравнения на 2 и почленно сложить его со вторым уравнением:

$$2n^2 + mn - m^2 = 0.$$

Указание. Рассмотреть последнее уравнение как квадратное относительно новой переменной $\dfrac{n}{m}$.

Решение. Перенесём слагаемые из правой части уравнения в левую и выделим полный квадрат:

$$(3x^2 - 2m^2 + mn)^2 + (3m^2 - mn + 2n^2 - 12x)^2 + (x-2)^2 = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x^2 - 2m^2 + mn = 0, \\ 3m^2 - mn + 2n^2 - 12x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 12 - 2m^2 + mn = 0, \\ 3m^2 - mn + 2n^2 - 24 = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 2 и сложим почленно со вторым уравнением:

$$2n^2 + mn - m^2 = 0.$$

Поскольку $m = 0$ не является решением первого уравнения системы, разделим на $m^2 \neq 0$; получим квадратное уравнение относительно величины $\dfrac{n}{m}$:

$$2\left(\frac{n}{m}\right)^2 + \frac{n}{m} - 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{n}{m} = -1; \\ \dfrac{n}{m} = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

1) При $m = -n$: $12 - 2n^2 - n^2 = 0 \implies n^2 = 4 \iff n = \pm 2,\ m = \mp 2.$

2) При $m = 2n$: $12 - 8n^2 + 2n^2 = 0 \implies n^2 = 2 \iff n = \pm\sqrt{2},\ m = \pm 2\sqrt{2}.$

Ответ. $(-2;\ 2)$, $(2;\ -2)$, $(2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

3.2. Замены переменных в рациональных уравнениях, неравенствах и системах

Задача 1. (Геогр-97.1)

Решить неравенство $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3} > 2.$

Идея. Сделать замену переменной $t = |x-1|$, $t \geq 0$. Учесть положительность знаменателя дроби.

Указание. Произвести замену переменной $t = |x-1|$; в результате получаем неравенство $\dfrac{t+10}{4t+3} > 2$.

Указание. Поскольку знаменатель в левой части всегда положителен, исходное неравенство равносильно неравенству $t + 10 > 2(4t+3)$.

Р е ш е н и е. Выполним замену переменной $t = |x-1|$, $t \geq 0$; в новых обозначениях неравенство принимает вид

$$\frac{t+10}{4t+3} > 2\,.$$

Учитывая, что знаменатель всегда положителен, получаем равносильное неравенство

$$t+10 > 2(4t+3) \quad \Longleftrightarrow \quad t < \frac{4}{7}.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$|x-1| < \frac{4}{7} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}.$$

О т в е т. $\left(\frac{3}{7};\ \frac{11}{7}\right)$.

Задача 2. (Почв-98.3)

Решить неравенство $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geq \dfrac{2}{|x+1|-2}$.

И д е я. Свести неравенство к обычному рациональному неравенству с помощью соответствующей замены.

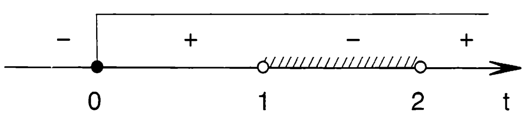
У к а з а н и е. Произвести замену переменной $t = |x-1|$, найти t, потом вернуться к переменной x.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $|x+1| = t$. Заметим, что $t \geq 0$, так как модуль числа – величина неотрицательная. Получим дробно-рациональное неравенство относительно t:

$$\frac{1}{t-1} \geq \frac{2}{t-2}.$$

Решим это неравенство методом интервалов.

$$\frac{t-2-2t+2}{(t-1)(t-2)} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-t}{(t-1)(t-2)} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{t}{(t-1)(t-2)} \leq 0.$$



Неравенству удовлетворяют значения $t = 0$ и $1 < t < 2$. Вернёмся к исходной переменной:

1) $t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x+1| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1.$

2) $1 < t < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < |x+1| < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -3 < x < -2; \\ 0 < x < 1. \end{array}\right.$

Окончательно получим $\left[\begin{array}{l} -3 < x < -2; \\ x = -1; \\ 0 < x < 1. \end{array}\right.$ Обратите внимание на то, что изолированная точка $x = -1$ также является решением исходного неравенства.

О т в е т. $(-3;-2) \cup \{-1\} \cup (0;1)$.

Задача 3. (У)

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2|x-y|+y=2, \\ |x-y|-2y=6. \end{cases}$

Идея. Заменить $|x-y|$ новой переменной.
Указание. Сделать замену $t=|x-y|$ и решить получившуюся линейную систему.

Решение. Пусть $t=|x-y|$, тогда

$$\begin{cases} 2t+y=2, \\ t-2y=6; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2, \\ t=2; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2, \\ \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=-4. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ. $(-4;\ -2)$, $(0;\ -2)$.

Задача 4. (У)

Решить уравнение $2x^4+3x^3+2x^2+3x+2=0$.

Идея. Решить уравнение как возвратное.
Указание. Поделить уравнение на x^2 и, сделав замену, свести его к квадратному.

Решение. Так как $x=0$ не является решением нашего уравнения, то можем поделить его на x^2. Получим

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0.$$

Положим $y=x+\dfrac{1}{x}$, тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$ и уравнение примет вид:

$$2y^2+3y-2=0 \iff \left[\begin{array}{l} y=-2, \\ y=\dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-2, \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \iff x=-1.$$

Ответ. -1.

Задача 5. (У)

Решить уравнение $(x+3)^4+(x+5)^4=4$.

Идея. С помощью подходящей замены свести уравнение к биквадратному.
Указание. Сделать замену переменных $y=x+4$.

Решение. После замены $y = x + 4$ уравнение примет вид:

$$(y-1)^4 + (y+1)^4 = 4 \iff y^4 + 6y^2 - 1 = 0 \iff y^2 = -3 + \sqrt{10}.$$

Возвращаясь к x, получим $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{\sqrt{10} - 3}$.

Ответ. $-4 \pm \sqrt{\sqrt{10} - 3}$.

Задача 6. (У)

Разложить на множители многочлен $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$.

Идея. Свести многочлен 4-ой степени к многочлену 2-ой с помощью соответствующей замены.

Указание. Перемножить отдельно крайние скобки, отдельно – средние и сделать замену замену $t = (x+1)(x+7)$.

Решение. Сделаем замену переменных $t = (x+1)(x+7)$, тогда получим

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = t(t+8) + 15 = t^2 + 8t + 15 = (t+3)(t+5) =$$

$$= (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) = (x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})(x+2)(x+6).$$

Ответ. $(x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})(x+2)(x+6)$.

Задача 7. (У)

Решить уравнение $x^4 - 3x^2(x+1) + 2(x+1)^2 = 0$.

Идея. Свести уравнение к квадратному относительно новой переменной.

Указание. Поделить уравнение на $(x+1)^2$ и сделать замену $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Решение. Заметим, что $x = -1$ не является корнем, разделим обе части уравнения на $(x+1)^2$ и сделаем замену $y = \dfrac{x^2}{x+1}$. Получим уравнение

$$y^2 - 3y + 2 = 0,$$

корнями которого являются $y_1 = 2$ и $y_2 = 1$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x+1} = 2; \\ \dfrac{x^2}{x+1} = 1; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 2 = 0; \\ x^2 - x - 1 = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}; \\ x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ. $1 \pm \sqrt{3}$, $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Задача 8. (У)

Решить систему $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

Идея. Свести систему к линейной.
Указание. Заменить все произведения новыми переменными.

Решение. Сделав замену $a = xy,\ b = yz,\ c = zx$, получим линейную систему

$$\begin{cases} a + b = 8, \\ b + c = 9, \\ c + a = 5; \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2, \\ b = 6, \\ c = 3; \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{x} = 2, \quad \frac{b}{a} = \frac{z}{x} = 3,$$

то есть $y = 2x,\ z = 3x$. Подставляя это в любое из уравнений исходной системы, получим $x = \pm 1$ и, соответственно, $y = \pm 2,\ z = \pm 3$.

Ответ. $(1;2;3),\ (-1;-2;-3)$.

Задача 9. (У)

Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$

Идея. Заменить сумму и произведение переменных.
Указание. Во втором уравнении выделить полный квадрат и сделать замену $a = x + y,\ b = xy$.

Решение. Положим $a = x + y,\ b = xy$, тогда

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ a^2 - b = 13. \end{cases}$$

Решая подстановкой, найдём $a = -5,\ b = 12$ и $a = 4,\ b = 3$. Возвращаясь к переменным x, y, получим, что в первом случае решений нет, во втором случае $x = 1,\ y = 3$ и $x = 3;\ y = 1$.

Ответ. $(1;3),\ (3;1)$.

Задача 10. (Геол-98(2).7)

Решить систему уравнений $\begin{cases} x(1 + y) = y + 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

Идея. Сделать замену переменных $v = xy$, $u = x - y$.

Указание. Приведя систему к виду $\begin{cases} x - y + xy = 7, \\ xy(x-y) = 6; \end{cases}$ сделать замену переменных $v = xy$, $u = x - y$.

Указание. После замены переменных система принимает вид $\begin{cases} u + v = 7, \\ uv = 6. \end{cases}$

Указание. Не забыть вернуться к исходным переменным.

Решение. Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} x(1+y) = y + 7, \\ x^2y - xy^2 = 6; \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + xy = 7, \\ xy(x-y) = 6. \end{cases}$$

Пусть $v = xy$, $u = x - y$. После замены система принимает вид

$$\begin{cases} u + v = 7, \\ uv = 6; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 6, \\ v = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1, \\ v = 6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Рассмотрим отдельно каждую систему совокупности.

1) $\begin{cases} u = 6, \\ v = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 6, \\ xy = 1; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 - \sqrt{10}, \\ y = -3 - \sqrt{10}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 + \sqrt{10}, \\ y = -3 + \sqrt{10}. \end{cases} \end{array} \right.$

2) $\begin{cases} u = 1, \\ v = 6; \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = -3. \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ. $(3+\sqrt{10};\ -3+\sqrt{10})$, $(3-\sqrt{10};\ -3-\sqrt{10})$, $(3;\ 2)$, $(-2;\ -3)$.

Задача 11. (У)

Решить систему $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8. \end{cases}$

Идея. Получить однородное уравнение.

Указание. Домножить первое уравнение на 8, второе — на 3 и вычесть одно из другого.

Указание. Сделать замену $t = \dfrac{x}{y}$.

Решение. Домножим первое уравнение на 8, второе — на 3

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8; \end{cases} \iff \begin{cases} 8x^2 - 8y^2 = 24, \\ 3x^2 + 3xy + 6y^2 = 24. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$5x^2 - 3xy - 14y^2 = 0.$$

Поделим это уравнение на y^2 ($y = 0$ — не является решением системы) и обозначим $t = \dfrac{x}{y}$. Полученное квадратное уравнение

$$5t^2 - 3t - 14 = 0$$

имеет корни 2 и $-\dfrac{7}{5}$. В первом случае $x = 2y$, во втором $x = -\dfrac{7}{5}y$. Подставив это в первое уравнение исходной системы, получим ответ.

Ответ. $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\dfrac{7}{2\sqrt{2}};-\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{7}{2\sqrt{2}};\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)$.

Задача 12. (Геол-98(1).6)

Решить неравенство $\left|\dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| - 3x + 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{3x^2}{2} - \left|\dfrac{x^2}{2} + x - \sqrt{2}\right|$.

Идея. Сделать замену переменной $y = \dfrac{x^2}{2} + x$. Получить линейное неравенство с модулями, которое решить стандартным способом.
Указание. После замены неравенство принимает вид

$$\left|y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 3\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left|y - \sqrt{2}\right|.$$

Указание. Рассмотреть неравенство на трёх промежутках:

$$y < \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \le y < \sqrt{2}, \qquad y \ge \sqrt{2}.$$

Указание. После решения неравенства относительно y необходимо вернуться к исходной переменной x.

Решение. Пусть $\dfrac{x^2}{2} + x = y$. После замены переменной неравенство принимает вид

$$\left|y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 3\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left|y - \sqrt{2}\right|.$$

Рассмотрим неравенство на трёх промежутках: $y < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le y < \sqrt{2}$, $y \ge \sqrt{2}$.

1) При $y < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} - y < 3\left(y - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} + y \iff y > \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$; значит, решений нет.

2) При $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le y < \sqrt{2}$ $\quad y - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 3\left(y - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2} + y \iff y > \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
Следовательно, $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} < y < \sqrt{2}$.

3) При $y \ge \sqrt{2}$ $\quad y - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 3\left(y - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - y + \sqrt{2} \iff y > 0$. Следовательно, $y \ge \sqrt{2}$.

Объединяя три случая, получаем $y > \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\frac{x^2}{2} + x > \frac{2\sqrt{2}}{3} \iff \left[\begin{array}{l} x > -1 + \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}}; \\ x < -1 - \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}}. \end{array} \right.$$

Ответ. $\left(-\infty;\ -1 - \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1}\right) \bigcup \left(-1 + \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3} + 1};\ +\infty\right)$.

Задача 13. (У)

При каких a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = a \end{cases}$ имеет решение?

Идея. Получить однородное уравнение.

Указание. Домножить первое уравнение на a и вычесть из второго.

Указание. Сделать замену $t = \frac{x}{y}$.

Решение. 1) Если $y = 0$, то $\begin{cases} x^2 = 1, \\ x^2 = a; \end{cases}$ и решения есть только при $a = 1$.

2) Рассмотрим случай, когда $y \neq 0$ и $a \neq 1$. Умножим первое уравнение исходной системы на a и приравняем левые части уравнений:

$$ax^2 + ay^2 = x^2 + xy + y^2 \iff (a-1)x^2 - xy + (a-1)y^2 = 0.$$

Разделим на y^2, сделаем замену $t = \frac{x}{y}$, получим квадратное уравнение

$$(a-1)t^2 - t + a - 1 = 0.$$

Если это уравнение будет иметь решение t_0, то, подставив $x = t_0 y$ в первое уравнение исходной системы, найдём x, а затем и y. Выпишем условие существования решения квадратного уравнения:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)^2 \leq \frac{1}{4}, \\ a \neq 1; \end{cases} \iff a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right].$$

Объединяя случаи, получаем ответ.

Ответ. $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Задача 14. (Экон.К-74.5)

Найти все действительные значения величины h, при которых уравнение $x(x+1)(x+h)(x+1+h)=h^2$ имеет четыре действительных корня.

Идея. Скомбинировать сомножители по два и сделать замену переменной $t=x^2+x(h+1)$.

Указание. Исходное уравнение можно представить в следующем виде:

$$(x^2+x(h+1))(x^2+x(h+1)+h)=h^2.$$

Сделать замену переменной $t=x^2+x(h+1)$.

Указание. После замены переменной привести уравнение к виду $t^2+th-h^2=0$ и рассмотреть случаи $h=0$ и $h\neq 0$.

Указание. Если $h=0$, то $t=0$; значит, исходное уравнение имеет только два корня $x=0$ и $x=-1$, поэтому $h=0$ не подходит. Если $h\neq 0$, то исходное уравнение эквивалентно совокупности двух квадратных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x(h+1)+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}h=0; \\ x^2+x(h+1)-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}h=0. \end{array}\right.$$

Указание. Совокупность имеет 4 решения, если каждое уравнение имеет по два различных решения, но общих корней у этих уравнений нет. Это возможно только в случае, если каждое уравнение имеет строго положительный дискриминант, а система из этих двух уравнений не имеет решений:

$$\begin{cases} D_1=h^2-2\sqrt{5}h+1>0\,, \\ D_2=h^2+2\sqrt{5}h+1>0\,, \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}h\neq-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}h\,. \end{cases}$$

Решение. Перемножим второй множитель с третьим, а первый – с четвёртым:

$$x(x+1)(x+h)(x+1+h)=h^2 \quad\Longleftrightarrow\quad (x^2+x(h+1))(x^2+x(h+1)+h)=h^2.$$

Сделаем замену переменной $t=x^2+x(h+1)$. Тогда уравнение примет вид

$$t(t+h)=h^2 \quad\Longleftrightarrow\quad t^2+th-h^2=0, \quad\Longleftrightarrow\quad t_{12}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}h.$$

Если $h=0$, то $t=0$ и, значит, исходное уравнение имеет только два корня $x=0$ и $x=-1$, поэтому $h=0$ не подходит.

Если $h\neq 0$, то исходное уравнение эквивалентно совокупности двух квадратных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x(h+1)+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}h=0; \\ x^2+x(h+1)-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}h=0. \end{array}\right.$$

Совокупность имеет 4 решения в том и только в том случае, когда каждое уравнение имеет по два различных решения, а общих корней у этих уравнений нет. Заметим, что при $h \neq 0$ квадратные уравнения не имеют общих корней, поскольку

$$x^2 + x(h+1) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}h \neq x^2 + x(h+1) - \frac{\sqrt{5}-1}{2}h.$$

Значит, для существования четырёх различных решений системы достаточно потребовать положительности дискриминантов квадратных уравнений:

$$\begin{cases} D_1 = (h+1)^2 - 2h(1+\sqrt{5}) = h^2 - 2\sqrt{5}h + 1 > 0, \\ D_2 = (h+1)^2 + 2h(\sqrt{5}-1) = h^2 + 2\sqrt{5}h + 1 > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} h > \sqrt{5}+2; \\ h < \sqrt{5}-2; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} h > -\sqrt{5}+2; \\ h < -\sqrt{5}-2. \end{array} \right. \end{cases}$$

Отсюда легко получаем ответ.

Ответ. $(-\infty; -\sqrt{5}-2) \cup (-\sqrt{5}+2; 0) \cup (0; \sqrt{5}-2) \cup (\sqrt{5}+2; +\infty)$.

3.3. Замены переменных в иррациональных уравнениях, неравенствах и системах

Задача 1. (ЕГЭ.В)

Решить уравнение $\sqrt{x^2+1-2x} - 6\sqrt{x-1} = 7$.

Идея. Выполнить замену переменной $t = \sqrt{x-1}$ и свести исходное уравнение к квадратному.

Указание. Сделать замену переменной $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$. Уравнение примет вид $t^2 - 6t - 7 = 0 \iff (t-7)(t+1) = 0$.

Указание. Произвести отбор корней по условию $t \geq 0$.

Решение. Сделаем замену переменной $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$; уравнение примет вид

$$t^2 - 6t - 7 = 0 \quad \iff \quad (t-7)(t+1) = 0.$$

Так как $t \geq 0$, то значение $t = -1$ не подходит. Остаётся $t = 7$, то есть

$$\sqrt{x-1} = 7 \quad \iff \quad x = 50.$$

Ответ. 50.

Задача 2. (ЕГЭ.В)

Решить уравнение $\sqrt{x^2-4x+4}-6=5\sqrt{2-x}$.

Идея. Сделать замену $t=\sqrt{2-x}$ и свести исходное уравнение к квадратному относительно новой переменной.
Указание. Ввести новую переменную $t=\sqrt{2-x}$, $t\geq 0$; уравнение примет вид

$$t^2-5t-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (t-6)(t+1)=0.$$

Указание. Произвести отбор корней по условию $t\geq 0$.

Решение. Сделаем замену переменной $t=\sqrt{2-x}$, $t\geq 0$; уравнение примет вид

$$t^2-5t-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (t-6)(t+1)=0.$$

Так как $t\geq 0$, то корень $t=-1$ не подходит. Значит,

$$t=6 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{2-x}=6 \quad\Longleftrightarrow\quad x=-34.$$

Ответ. -34.

Задача 3. (Экон.К-83.1)

Решить уравнение $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$.

Идея. С помощью замены $t=\sqrt{x^2+11}$ уравнение сводится к квадратному относительно введённой переменной.
Указание. Сделать замену $t=\sqrt{x^2+11}$; уравнение принимает вид

$$t^2+t-42=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (t+7)(t-6)=0.$$

Указание. Произвести отбор корней по условию $t\geq\sqrt{11}$.

Решение. Произведём замену переменной $t=\sqrt{x^2+11}$, $t\geq\sqrt{11}$. Уравнение принимает вид

$$x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42 \quad\Longleftrightarrow\quad t^2+t-42=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (t+7)(t-6)=0.$$

Корень $t=-7$ не подходит, так как $t\geq\sqrt{11}$. Остаётся значение

$$t=6 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{x^2+11}=6 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm 5.$$

Ответ. -5; 5.

Задача 4. (Геол-94(2).3)

Решить уравнение $y^2 + 2\sqrt{y^2 + 3y - 4} - 4 + 3y = 0$.

Идея. С помощью замены $t = \sqrt{y^2 + 3y - 4}$ свести уравнение к квадратному относительно новой переменной.

Указание. Сделать замену $t = \sqrt{y^2 + 3y - 4}$.

Указание. После замены переменной уравнение приводится к виду

$$t^2 + 2t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t(t+2) = 0.$$

Указание. Отобрать корни по условию $t \geq 0$.

Решение. Произведём замену переменной $t = \sqrt{y^2 + 3y - 4}$, $t \geq 0$; получаем уравнение

$$t^2 + 2t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t(t+2) = 0.$$

Поскольку $t \geq 0$, остаётся корень $t = 0$. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\sqrt{y^2 + 3y - 4} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y+4)(y-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = -4; \\ y = 1. \end{array}\right.$$

Ответ. -4; 1.

Задача 5. (У)

Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} + \dfrac{1}{x} = 5$.

Идея. Свести уравнение к квадратному.

Указание. Сделать замену $t = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$.

Решение. В результате замены $t = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1} \geq 0$ наше уравнение примет вид

$$t + t^2 - 1 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 + t - 6 = 0,$$

откуда $t = 2 \iff \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1} = 2 \iff x = \dfrac{1}{3}$.

Ответ. $1/3$.

Задача 6. (У)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 34, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 23 - \dfrac{1}{\sqrt{xy}}. \end{cases}$

Идея. Сделать замену $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $v = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

Указание. В получившейся после первой замены системе заменить сумму и произведение.

Решение. Сделаем замену переменных $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$ и $v = \dfrac{1}{\sqrt{y}} > 0$:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 34, \\ u + v = 23 - uv; \end{cases} \iff \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 34, \\ u + v + uv = 23. \end{cases}$$

Теперь заменим $a = u + v$ и $b = uv$:

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 34, \\ a + b = 23; \end{cases} \iff \begin{cases} b = 23 - a, \\ \left[\begin{array}{l} a = 8, \\ a = -10. \end{array} \right. \end{cases}$$

Так как $a = u + v > 0$, то нам подходит только $a = 8$. Возвращаясь к переменным u и v, а затем к x и y, получим

$$\begin{cases} a = 8, \\ b = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 8, \\ uv = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} v = 8 - u, \\ u^2 - 8u + 15 = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v = 8 - u, \\ \left[\begin{array}{l} u = 5; \\ u = 3; \end{array} \right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 5, \\ v = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3, \\ v = 5; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1/25, \\ y = 1/9; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1/9, \\ y = 1/25. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ. $\left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{25}\right)$, $\left(\dfrac{1}{25}; \dfrac{1}{9}\right)$.

Задача 7. (У)

Решить уравнение $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$.

Идея. Выделить полные квадраты под внешними радикалами.
Указание. Сделать замену $y = \sqrt{x-1}$.

Решение. Сделав замену переменной $y = \sqrt{x-1}$, $y \geq 0$, получим

$$\sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 1 \iff |y - 2| + |y - 3| = 1.$$

Откуда $2 \leq y \leq 3$, следовательно, $5 \leq x \leq 10$.

Ответ. $[5; 10]$.

Задача 8. (ВМК-96(1).1)

Решить неравенство $\sqrt{(2x+1)^4-(2x+1)^2}+(2x+1)^2 \ge 0.$

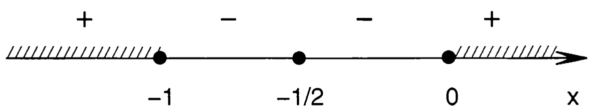
Идея. В левой части неравенства стоит сумма двух неотрицательных чисел. Следовательно, неравенство выполнено всегда, когда оно имеет смысл.
Указание. Чтобы неравенство имело смысл, подкоренное выражение должно быть неотрицательным, то есть $(2x+1)^4-(2x+1)^2 \ge 0$.

Решение. Левая часть неравенства представляет собой сумму двух неотрицательных чисел. Следовательно, неравенство выполнено всегда, когда оно имеет смысл:

$$(2x+1)^4-(2x+1)^2 \ge 0 \iff (2x+1)^2((2x+1)^2-1) \ge 0 \iff$$

$$\iff (2x+1)^2(2x+1-1)(2x+1+1 \ge 0 \iff 4x(2x+1)^2(x+1) \ge 0.$$

Решим неравенство методом интервалов.



Ответ. $(-\infty;\ -1] \cup \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \cup [0;\ +\infty)$.

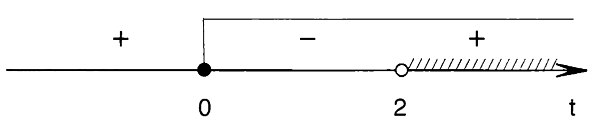
Задача 9. (Почв-96(1).3)

Решить неравенство $\dfrac{2}{2-\sqrt{x+3}} \le 1.$

Идея. Сделать замену переменной $t=\sqrt{x+3}$. После замены неравенство становится дробно-рациональным.
Указание. Произвести замену переменной $t=\sqrt{x+3}$.
Указание. После замены переменной привести неравенство к виду $\dfrac{t}{t-2} \ge 0$ и решить методом интервалов.
Указание. Не забыть вернуться к исходной переменной.

Решение. Введём новую переменную $t=\sqrt{x+3}$, $t \ge 0$:

$$\frac{2}{2-t} \le 1 \iff \frac{2-2+t}{2-t} \le 0 \iff \frac{t}{t-2} \ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} t \le 0; \\ t > 2. \end{array}\right.$$



Учитывая, что $t \geq 0$, получаем $t \in \{0\} \cup (2;+\infty)$; возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=0;\\ \sqrt{x+3}>2;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=-3;\\ x>1.\end{array}\right.$$

Ответ. $\{-3\} \cup (1;\ +\infty)$.

Задача 10. (Геол-91.3)

Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} \geq \dfrac{2}{4-\sqrt{x}}$.

Идея. С помощью замены $t = \sqrt{x}$ свести иррациональное неравенство к дробно-рациональному. Воспользоваться методом интервалов.

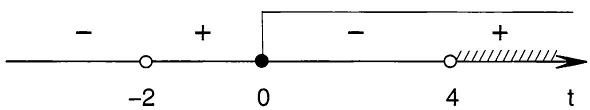
Указание. Сделать замену переменной $t = \sqrt{x}$.

Указание. После замены переменной привести неравенство к виду $\dfrac{3t}{(t+2)(t-4)} \geq 0$; решить методом интервалов.

Решение. Сделаем замену переменной $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0$. В новых обозначениях неравенство принимает вид

$$\frac{1}{t+2}+\frac{2}{t-4} \geq 0 \iff \frac{3t}{(t+2)(t-4)} \geq 0.$$

Решаем методом интервалов.



Учитывая, что $t \geq 0$, получаем $t \in \{0\} \cup (4;+\infty)$; возвращаемся к исходной переменной: $x \in \{0\} \cup (16;+\infty)$.

Ответ. $\{0\} \cup (16;\ +\infty)$.

Задача 11. (Биол-93.3)

Решить неравенство $5\sqrt{1-\dfrac{1}{z}} > \dfrac{7z-1}{z}$.

Идея. С помощью замены переменной $t = \sqrt{1-\dfrac{1}{z}}$ свести неравенство к квадратному.

Указание. Сделать замену переменной $t = \sqrt{1-\dfrac{1}{z}}$.

Указание. Привести неравенство к виду $t^2 - 5t + 6 < 0$.

Указание. Вернуться к исходной переменной.

Р е ш е н и е. Преобразуем неравенство:

$$5\sqrt{1-\frac{1}{z}} > \frac{7z-1}{z} \quad \Longleftrightarrow \quad 5\sqrt{1-\frac{1}{z}} > 6+\left(1-\frac{1}{z}\right).$$

Сделаем замену переменной $t=\sqrt{1-\dfrac{1}{z}}$:

$$5t > 6+t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2-5t+6<0 \quad \Longleftrightarrow \quad (t-2)(t-3)<0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2<t<3.$$

Вернёмся к переменной z:

$$2<\sqrt{1-\frac{1}{z}}<3 \quad \Longleftrightarrow \quad 4<1-\frac{1}{z}<9 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad -8<\frac{1}{z}<-3 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{3}<z<-\frac{1}{8}.$$

О т в е т. $\left(-\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{8}\right)$.

Задача 12. (ВМК-83.5)

Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$, и найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет только один корень.

И д е я. Уравнение имеет смысл при $x\le -1$ и $x>3$. В каждом из этих случаев внести $|x-3|$ под корень и сделать замену $\sqrt{(x+1)(x-3)}=t$.
У к а з а н и е. При $x>3$ уравнение принимает вид

$$(x-3)(x+1)+3\sqrt{(x+1)(x-3)}=(a-1)(a+2).$$

При $x\le -1$ уравнение можно записать так:

$$(x-3)(x+1)-3\sqrt{(x+1)(x-3)}=(a-1)(a+2).$$

Рассмотреть каждый из случаев отдельно, сделав замену

$$\sqrt{(x+1)(x-3)}=t, \quad t\ge 0.$$

У к а з а н и е. При $x>3$ после замены получим уравнение

$$t^2+3t-(a-1)(a+2)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=a-1, \\ t=-2-a. \end{array}\right.$$

Для каждого t вернуться к исходной переменной x.
У к а з а н и е. Аналогично, при $x\le -1$

$$t^2-3t-(a-1)(a+2)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=1-a, \\ t=a+2. \end{array}\right.$$

Вернуться к исходной переменной x.
У к а з а н и е. Объединив случаи, выписать решения при различных a. Найти значения параметра, при которых существует единственное решение.

Решение. Уравнение имеет смысл при $x \le -1$ и $x > 3$. Внесём во втором слагаемом $|x-3|$ под корень и учтём знак множителя $(x-3)$.
При $x > 3$ уравнение принимает вид

$$(x-3)(x+1) + 3\sqrt{(x+1)(x-3)} = (a-1)(a+2).$$

При $x \le -1$ уравнение можно записать так:

$$(x-3)(x+1) - 3\sqrt{(x+1)(x-3)} = (a-1)(a+2).$$

Рассмотрим каждый из случаев отдельно, сделав замену $\sqrt{(x+1)(x-3)} = t$.

1) При $x > 3$ получаем уравнение

$$t^2 + 3t - (a-1)(a+2) = 0;$$

$$D = 9 + 4a^2 + 4a - 8 = (2a+1)^2;$$

$t = \dfrac{-3 \pm (2a+1)}{2}$, то есть $t = a-1$ или $t = -2-a$.

а) Рассмотрим первый корень $t = a-1$:

$$\sqrt{(x+1)(x-3)} = a-1 \iff \begin{cases} a-1 \ge 0, \\ (x+1)(x-3) = (a-1)^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \ge 1, \\ x^2 - 2x - 3 - (a-1)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \ge 1, \\ x = 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4}. \end{cases}$$

Так как рассматриваем только $x > 3$, то решением является

$$x_1 = 1 + \sqrt{(a-1)^2 + 4} \quad \text{при} \quad a > 1.$$

б) Аналогично рассмотрев второй корень $t = -a-2$, получаем, что решением является

$$x_2 = 1 + \sqrt{(a+2)^2 + 4} \quad \text{при} \quad a < -2.$$

2) Теперь рассмотрим случай $x \le -1$:

$$t^2 - 3t - (a-1)(a+2) = 0;$$

$$D = 9 + 4a^2 + 4a - 8 = (2a+1)^2;$$

$t = \dfrac{3 \pm (2a+1)}{2}$, то есть $t = 1-a$ или $t = a+2$.

а) Рассмотрим первый корень $t = 1-a$:

$$\sqrt{(x+1)(x-3)} = 1-a \iff \begin{cases} 1-a \ge 0, \\ (x+1)(x-3) = (a-1)^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \le 1, \\ x^2 - 2x - 3 - (a-1)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \le 1, \\ x = 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4}. \end{cases}$$

Так как $x \le -1$, то решением является

$$x_3 = 1 - \sqrt{(a-1)^2 + 4} \quad \text{при} \quad a \le 1.$$

б) Аналогично рассмотрев второй корень $t = a + 2$, получаем, что решением является
$$x_4 = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4} \quad \text{при} \quad a \geq -2.$$

Собираем найденные решения вместе:

- при $a < -2$ есть два решения x_2 и x_3;
- при $-2 \leq a \leq 1$ есть два решения x_3 и x_4;
- при $a > 1$ есть два решения x_1 и x_4;

причём из этих пар решений совпадать могут только x_3 и x_4, так как они из одного случая $x \leq -1$, а остальные пары решений из разных случаев: $x_2 > 3$, а $x_3 \leq -1$ и $x_1 > 3$, а $x_4 \leq -1$.

Найдём $a \in [-2; 1]$, при которых $x_3 = x_4$:
$$1-\sqrt{(a-1)^2+4} = 1-\sqrt{(a+2)^2+4} \quad \Longleftrightarrow \quad (a-1)^2 = (a+2)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $a = -\frac{1}{2}$ уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{3}{2}$. Осталось выписать ответ.

Ответ. $x = 1 - \sqrt{(a-1)^2+4}$ и $x = 1 + \sqrt{(a+2)^2+4}$ при $a < -2$;
$x = 1 - \sqrt{(a-1)^2+4}$ и $x = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4}$ при $-2 \leq a < -1/2$;
$x = -3/2$ при $a = -1/2$;
$x = 1 - \sqrt{(a-1)^2+4}$ и $x = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4}$ при $-1/2 < a \leq 1$;
$x = 1 + \sqrt{(a-1)^2+4}$ и $x = 1 - \sqrt{(a+2)^2+4}$ при $a > 1$;
при $a = -1/2$ уравнение имеет только один корень.

Задача 13. (ВМК-90.4)

Решить неравенство $\sqrt{9v^2-48v-21} + \sqrt{9v^2-51v-15} \leq |3v-6|$.

Идея. Заметив, что разность подкоренных выражений равна выражению, стоящему под модулем, сделать замену переменных
$$x = \sqrt{9v^2-48v-21}, \quad y = \sqrt{9v^2-51v-15}.$$

Указание. Выполнив замену
$$x = \sqrt{9v^2-48v-21}, \quad y = \sqrt{9v^2-51v-15},$$
и используя очевидное ограничение $x + y \geq 0$ (так как $x \geq 0$ и $y \geq 0$), привести неравенство к виду
$$(x+y)(|x-y|-1) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x+y=0, \\ |x-y| \geq 1. \end{array}\right.$$

Указание. Из уравнения совокупности следует, что $x = y = 0$. Из равенства $x = y$ получаем $v = 2$, однако при подстановке найденного значения в уравнение $x = 0$ убеждаемся в том, что $v = 2$ корнем не является.
Указание. Неравенство совокупности дважды возведём в квадрат:

$$(x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \geq 0.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим

$$27v^2 - 162v - 109 \leq 0.$$

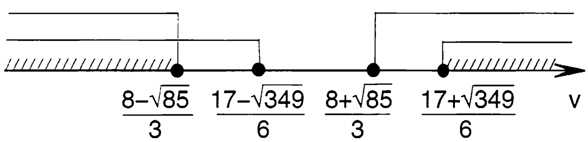
Осталось решить неравенство методом интервалов и учесть ОДЗ.

Решение. Неравенство имеет смысл только при неотрицательных значениях подкоренных выражений (ОДЗ):

$$\begin{cases} 9v^2 - 48v - 21 \geq 0, \\ 9v^2 - 51v - 15 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v \in \left(-\infty; \dfrac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \cup \left[\dfrac{8+\sqrt{85}}{3}; +\infty\right), \\ v \in \left(-\infty; \dfrac{17-\sqrt{349}}{6}\right] \cup \left[\dfrac{17+\sqrt{349}}{6}; +\infty\right); \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad v \in \left(-\infty; \frac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \bigcup \left[\frac{17+\sqrt{349}}{6}; +\infty\right).$$



Легко заметить, что разность подкоренных выражений равна выражению, стоящему под модулем в правой части неравенства:

$$(9v^2 - 48v - 21) - (9v^2 - 51v - 15) = 3v - 6.$$

Сделаем замену переменных $x = \sqrt{9v^2 - 48v - 21} \geq 0$, $y = \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \geq 0$. В новых обозначениях неравенство принимает вид

$$x + y \leq |x^2 - y^2| \quad \iff \quad x + y \leq |x + y| \cdot |x - y|.$$

Так как $x \geq 0$ и $y \geq 0$, то $x + y \geq 0$ и, следовательно, $|x + y| = x + y$. Раскладываем на множители:

$$(x + y)(|x - y| - 1) \geq 0 \quad \iff \quad \left[\begin{array}{l} x + y = 0; \\ |x - y| \geq 1. \end{array} \right.$$

Из уравнения совокупности, в силу неотрицательности x и y, следует, что $x = 0$ и $y = 0$, то есть

$$\begin{cases} 9v^2 - 48v - 21 = 0, \\ 9v^2 - 51v - 15 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} v = 2, \\ 9v^2 - 51v - 15 = 0; \end{cases} \iff \varnothing.$$

Переходим к неравенству совокупности. Возведём его в квадрат:

$$|x - y| \geq 1 \iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 1 \iff x^2 + y^2 - 1 \geq 2xy.$$

Поскольку $2xy \geq 0$, должно выполняться неравенство $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$. Еще раз возводим неравенство в квадрат:

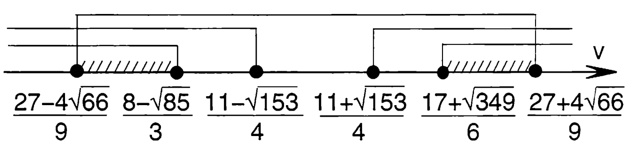
$$\begin{cases} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 \geq 4x^2y^2, \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\begin{cases} (3v - 6)^2 - 2(18v^2 - 99v - 36) + 1 \geq 0, \\ 18v^2 - 99v - 36 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 27v^2 - 162v - 109 \leq 0, \\ 2v^2 - 11v - 4 \geq 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} v \in \left[\dfrac{27 - 4\sqrt{66}}{9}; \dfrac{27 + 4\sqrt{66}}{9}\right], \\ v \in \left(-\infty; \dfrac{11 - \sqrt{153}}{4}\right] \bigcup \left[\dfrac{11 + \sqrt{153}}{4}.\right) \end{cases}$$



С учётом области определения получаем, что

$$v \in \left[\frac{27 - 4\sqrt{66}}{9}; \frac{8 - \sqrt{85}}{3}\right] \bigcup \left[\frac{17 + \sqrt{349}}{6}; \frac{27 + 4\sqrt{66}}{9}\right].$$

Ответ. $\left[\dfrac{27 - 4\sqrt{66}}{9}; \dfrac{8 - \sqrt{85}}{3}\right] \bigcup \left[\dfrac{17 + \sqrt{349}}{6}; \dfrac{27 + 4\sqrt{66}}{9}\right].$

Задача 14. (М/м-80.4)

Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{cases}$

Идея. С помощью замены переменных $u = x^3$, $v = \sqrt{y}$ задача сводится к решению системы из одного линейного и одного квадратного уравнений.
Указание. После замены переменных система принимает вид

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ 5u^2 - 8uv + 2v^2 = 2, \end{cases}$$

где $u = x^3$, $v = \sqrt{y}$.

Решение. Сделаем замену переменных $u = x^3$, $v = \sqrt{y}$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ 5u^2 - 8uv + 2v^2 = 2, \end{cases} \iff \begin{cases} u = v + 1, \\ 5(v+1)^2 - 8(v+1)v + 2v^2 = 2, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} u = v + 1, \\ v^2 - 2v - 3 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} u = v + 1, \\ \left[\begin{array}{l} v = -1; \\ v = 3. \end{array} \right. \end{cases}$$

Так как $v = \sqrt{y} \geq 0$, то подходит единственная пара $v = 3$, $u = 4$. Возвращаясь к переменным x, y, получаем $x = \sqrt[3]{4}$, $y = 9$.

Ответ. $(\sqrt[3]{4};\ 9)$.

Задача 15. (Хим-91.3)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$

Идея. Сделать замену переменных $\sqrt{2x-1} = u$, $\sqrt{y+3} = v$.
Указание. Привести систему к виду

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ (2x-1)(y+3) = 4 \end{cases}$$

и сделать замену переменных $\sqrt{2x-1} = u$, $\sqrt{y+3} = v$.
Указание. Полученная система $\begin{cases} u + v = 3, \\ u^2v^2 = 4 \end{cases}$ легко решается. При решении необходимо проверить выполнение ограничений $u \geq 0$, $v \geq 0$.
Указание. Не забыть вернуться к исходным переменным.

Решение. Разложим многочлен в левой части второго уравнения системы на множители:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ (2x-1)(y+3) = 4. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных $u = \sqrt{2x-1} \geq 0$, $v = \sqrt{y+3} \geq 0$:

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^2v^2 = 4; \end{cases} \iff \begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1, \\ v = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2, \\ v = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Значит, $x = 1$, $y = 1$ или $x = \dfrac{5}{2}$, $y = -2$.

Ответ. $(1;\ 1)$, $\left(\dfrac{5}{2};\ -2\right)$.

Задача 16. (Геол-00.5)

Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$

Идея. Сделать замену переменных $t = \sqrt{x+y}$. Из первого уравнения найти значение суммы $x+y$, далее из второго уравнения найти значение произведения xy и решить полученную систему.

Указание. Сделать замену переменных $t = \sqrt{x+y}$, $t \geq 0$. Первое уравнение системы является квадратным относительно новой переменной.

Указание. Найдя из первого уравнения $\sqrt{x+y} = 5 \iff x + y = 25$, преобразовать второе уравнение системы к виду $(x+y)^2 - 2xy = 325$.

Указание. Зная $x + y$, найти xy и решить получившуюся систему.

Решение. В первом уравнении системы выполним замену переменных $t = \sqrt{x+y}$. В новых обозначениях уравнение становится квадратным:

$$t^2 + t - 30 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} t = -6\,; \\ t = 5\,. \end{array} \right.$$

Так как $t \geq 0$, то остаётся единственный корень $t = 5$. Значит,

$$\sqrt{x+y} = 5 \iff x + y = 25.$$

Преобразуем второе уравнение системы, выделив квадрат суммы переменных:

$$x^2 + y^2 = 325 \iff (x+y)^2 - 2xy = 325\,.$$

Учитывая, что $x + y = 25$, находим значение произведения:

$$625 - 2xy = 325 \iff xy = 150.$$

Получили систему для определения x и y:

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ xy = 150, \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 10, \\ y = 15; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 15, \\ y = 10. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ. $(15;\ 10)$, $(10;\ 15)$.

Задача 17. (ВКНМ-00(1).3)

Решить неравенство $\sqrt{2-\dfrac{2}{x+1}}<\sqrt{2+\dfrac{2}{x}}+1$.

Идея. Преобразовать неравенство, приведя выражения под радикалами к общему знаменателю, и сделать замену переменной.

Указание. Привести выражения под радикалами к общему знаменателю:

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}}<\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Указание. Сделать замену $t=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

Указание. С учётом того, что $t>0$, решить получившееся неравенство:

$$t-\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{2}}<0.$$

Указание. Не забыть вернуться к старой переменной.

Решение. Приведём выражения под радикалами к общему знаменателю:

$$\sqrt{2-\frac{2}{x+1}}<\sqrt{2+\frac{2}{x}}+1 \iff \sqrt{\frac{2x}{x+1}}<\sqrt{\frac{2(x+1)}{x}}+1 \iff$$

$$\iff \sqrt{\frac{x}{x+1}}<\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сделаем замену $t=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$. Тогда, с учётом ограничения $t>0$, получим неравенство

$$t-\frac{1}{t}-\frac{1}{\sqrt{2}}<0 \iff t^2-\frac{t}{\sqrt{2}}-1<0 \iff 0<t<\sqrt{2}.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$0<\sqrt{\frac{x}{x+1}}<\sqrt{2} \iff 0<\frac{x}{x+1}<2 \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-2;\\ x>-1;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x<-1;\\ x>0;\end{array}\right.\end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x<-2;\\ x>0.\end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;\ -2)\cup(0;\ +\infty)$.

Задача 18. **(У)**

Решить уравнение $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

Идея. Свести уравнение к квадратному с помощью подходящей замены.
Указание. Возвести обе части уравнения в квадрат и сделать замену переменной $a=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. Так как правая часть уравнения положительна, то, с учётом ОДЗ получаем, что уравнение имеет смысл только при $x>1$. Возведём обе части в квадрат:

$$x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144} \iff \frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}.$$

Заменив $a=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ $(a>0)$, получим квадратное уравнение $a^2+2a-\dfrac{1225}{144}=0$, с корнями $a_1=\dfrac{25}{12}$ и $a_2=-\dfrac{49}{12}$. Так как $a>0$, то

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12} \iff 144x^4-625x^2+625=0,$$

откуда, учитывая условие $x>1$, получаем $x_1=\dfrac{5}{3}$, $x_2=\dfrac{5}{4}$.

Ответ. $\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{5}{4}$.

3.4. Замены переменных в показательных и логарифмических уравнениях, неравенствах и системах

Задача 1. **(ЕГЭ.В)**

Решить уравнение $2^x+2^{1-x}=3$.

Идея. С помощью замены переменной $t=2^x$ свести уравнение к дробно-рациональному.
Указание. Сделав замену $t=2^x$, $t>0$, привести уравнение к виду

$$t+\frac{2}{t}=3.$$

Решение. Сделаем замену $t=2^x$, $t>0$. Тогда уравнение примет вид

$$t+\frac{2}{t}=3 \iff t^2-3t+2=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=1; \\ t=2. \end{array}\right.$$

Значит, $x=0$ или $x=1$.

Ответ. 0; 1.

Задача 2. (ЕГЭ.В)

Решить уравнение $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0$.

Идея. Преобразовать левую часть уравнения и при помощи замены $t = \lg x$ свести уравнение к квадратному.
Указание. Привести уравнение к виду $4\lg^2 x + \lg x - 5 = 0$.
Указание. Ввести новую переменную $t = \lg x$ и решить получившееся квадратное уравнение.

Решение. Преобразуем логарифмы в левой части уравнения:

$$4\lg^2 x + \lg x - 5 = 0.$$

Пусть $t = \lg x$, тогда уравнение примет вид

$$4t^2 + t - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 1; \\ t = -\dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$$

Значит, $x = 10$ или $x = 10^{-\frac{5}{4}}$.

Ответ. 10; $10^{-\frac{5}{4}}$.

Задача 3. (ЕГЭ.В)

Решить уравнение $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}$.

Идея. Преобразовать уравнение и при помощи замены $t = 5^{\sqrt{x}}$ свести его к квадратному.
Указание. Привести уравнение к виду $5^{2\sqrt{x}} - 30 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 125 = 0$.
Указание. Сделать замену переменной $t = 5^{\sqrt{x}}$, $t \geq 1$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$5^{2\sqrt{x}} - 30 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 125 = 0.$$

Сделаем замену переменной $t = 5^{\sqrt{x}}$, $t \geq 1$. В новых обозначениях уравнение становится квадратным:

$$t^2 - 30t + 125 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 5; \\ t = 25; \end{array}\right.$$

то есть $x = 1$ или $x = 4$.

Ответ. 1; 4.

Задача 4. (ИСАА-98.2)

Решить уравнение $2^{-2x^2+1} - 12 \cdot 2^{-x^2} + 5 = 0$.

Идея. При помощи замены переменной свести показательное уравнение к квадратному.
Указание. Сделать замену переменной $t = 2^{-x^2}$.
Указание. Решить полученное квадратное уравнение $2t^2 - 12t + 5 = 0$.

Решение. Сделаем очевидную замену переменной $t = 2^{-x^2}$, $t > 0$; получим квадратное уравнение

$$2t^2 - 12t + 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t_{12} = \frac{6 \pm \sqrt{26}}{2}.$$

Вернёмся к переменной x:

$2^{-x^2} = \dfrac{6+\sqrt{26}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = -\log_2 \dfrac{6+\sqrt{26}}{2} < 0$ – нет решений.

$2^{-x^2} = \dfrac{6-\sqrt{26}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = -\log_2 \dfrac{6-\sqrt{26}}{2} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\log_2 \dfrac{2}{6-\sqrt{26}}}$.

Ответ. $\pm\sqrt{-\log_2 \dfrac{6-\sqrt{26}}{2}}$; в другом виде $\pm\sqrt{\log_2 \dfrac{6+\sqrt{26}}{5}}$.

Задача 5. (Экон.М-98.4)

Решить уравнение $3^{2(x+1)^2+1} - 87 \cdot 3^{x^2+2x} + 18 = 0$.

Идея. Преобразовать левую часть уравнения. Сделав замену переменной, свести уравнение к квадратному.
Указание. Привести исходное уравнение к виду

$$3 \cdot 3^{2(x+1)^2} - 29 \cdot 3^{(x+1)^2} + 18 = 0.$$

Указание. Сделать замену переменной $t = 3^{(x+1)^2}$, $t \geq 1$.
Указание. Решить полученное квадратное уравнение; выполнить отбор корней.

Решение. Приведём уравнение к виду

$$3 \cdot 3^{2(x+1)^2} - 29 \cdot 3^{(x+1)^2} + 18 = 0.$$

Сделав замену переменной $t = 3^{(x+1)^2}$, $t \geq 1$, получаем квадратное уравнение

$$3t^2 - 29t + 18 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 9; \\ t = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Условию $t \geq 1$ удовлетворяет единственный корень $t = 9$; возвращаемся к исходной переменной:

$$3^{(x+1)^2} = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+1)^2 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Ответ. $-1 \pm \sqrt{2}$.

Задача 6. (Почв-73.5)

Найти все решения уравнения $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

Идея. Преобразовать правую часть уравнения и, сделав замену переменной, свести уравнение к квадратному.

Указание. Привести уравнение к виду $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 2^{3x^2+x}$.

Указание. Сделать замену $y = 2^{3x^2+x}$, $y > 0$.

Решение. Приведём уравнение к виду

$$4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 2^{3x^2+x}.$$

Пусть $y = 2^{3x^2+x}$, $y > 0$; относительно новой переменной уравнение является квадратным:

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y-4)(y+2) = 0.$$

Поскольку $y > 0$, остаётся корень $y = 4$. Вернёмся к исходной переменной:

$$2^{3x^2+x} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2 + x = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2 + x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ. -1; $\dfrac{2}{3}$.

Задача 7. (Физ-80.3)

Решить уравнение $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$.

Идея. Преобразовать уравнение и сделать замену переменной.

Указание. Привести уравнение к виду $3\sqrt{\log_3 x} - (\log_3 x + 1) - 1 = 0$.

Указание. Сделать замену $t = \sqrt{\log_3 x}$ и решить получившееся квадратное уравнение.

Указание. Не забыть вернуться к исходной переменной.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3\sqrt{\log_3 x} - (\log_3 x + 1) - 1 = 0.$$

Сделаем замену $t = \sqrt{\log_3 x}$, тогда

$$3t - t^2 - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 1; \\ t = 2. \end{array}\right.$$

Значит, $x = 3$ или $x = 81$.

Ответ. 3; 81.

Задача 8. (Физ-74.3)

Решить уравнение $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$.

Идея. Преобразовать левую часть уравнения и при помощи замены переменной свести уравнение к квадратному.

Указание. Привести уравнение к виду

$$\sqrt[3]{(\log_2 x)^2} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0.$$

Указание. Сделать замену переменной $t = \sqrt[3]{\log_2 x}$.

Указание. Решить получившееся квадратное уравнение $t^2 - t - 6 = 0$. Вернуться к переменной x.

Решение. В левой части уравнения перейдём к логарифмам по основанию 2:

$$\sqrt[3]{(\log_2 x)^2} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0.$$

Сделаем замену переменной $t = \sqrt[3]{\log_2 x}$, после которой уравнение приобретает вид

$$t^2 - t - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 3\,; \\ t = -2\,. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\log_2 x} = 3\,; \\ \sqrt[3]{\log_2 x} = -2\,; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2^{27}\,; \\ x = 2^{-8}\,. \end{array}\right.$$

Ответ. 2^{-8}, 2^{27}.

Задача 9. (ИСАА-93.4)

Решить уравнение $\log_x(3x-2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) + 4\log_x\left(\dfrac{x}{3x-2}\right)}$.

Идея. Преобразовать логарифмические выражения в правой части и сделать замену переменной.

Указание. Исходное уравнение привести к виду

$$\log_x(3x-2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) - 4\log_x(3x-2) + 4}\,.$$

Указание. Выполнить замену $\log_x(3x-2) = t$.

Указание. Не забыть вернуться к старой переменной.

Решение. Перейдём в правой части уравнения от логарифма частного к разности логарифмов:

$$\log_x(3x-2) - 2 = \sqrt{\log_x^2(3x-2) - 4\log_x(3x-2) + 4}\,.$$

Сделаем замену $\log_x(3x-2)=t$. Тогда уравнение примет вид

$$t-2=\sqrt{t^2-4t+4} \iff t-2=|t-2| \iff t\ge 2.$$

Возвращаемся к переменной x и решаем получившееся неравенство модифицированным методом интервалов:

$$\log_x(3x-2)\ge 2 \iff \log_x x^2-\log_x(3x-2)\le 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)(x^2-3x+2)\le 0, \\ x>\dfrac{2}{3}, \\ x\ne 1; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3}<x<1; \\ 1<x\le 2. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left(\dfrac{2}{3};\ 1\right)\cup(1;\ 2]$.

Задача 10. (Экон-79.5)

Решить уравнение $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(21+23x+6x^2)=4$.

Идея. Упростить левую часть уравнения путём эквивалентных преобразований; при помощи замены переменной свести уравнение к дробно-рациональному.
Указание. Равносильными преобразованиями привести уравнение к виду

$$2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)-3=0.$$

Указание. Сделать замену переменной $t=\log_{2x+3}(3x+7)$; получить дробно-рациональное уравнение.
Указание. Вернуться к исходной переменной.

Решение. Разложим подлогарифменные функции на множители:

$$\log_{3x+7}(2x+3)^2+\log_{2x+3}(2x+3)(3x+7)=4 \iff$$

$$\iff 2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)-3=0.$$

Введём новую переменную $t=\log_{2x+3}(3x+7)$. В новых обозначениях уравнение становится дробно-рациональным:

$$t+\frac{2}{t}-3=0 \iff \frac{t^2-3t+2}{t}=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=1; \\ t=2. \end{array}\right.$$

Найдём соответствующие значения переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{2x+3}(3x+7)=1; \\ \log_{2x+3}(3x+7)=2; \end{array}\right. \iff \begin{cases} 2x+3>0, \\ 2x+3\ne 1; \\ \left[\begin{array}{l} 3x+7=2x+3; \\ 3x+7=(2x+3)^2; \end{array}\right. \end{cases} \iff x=-\frac{1}{4}.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{4}$.

Задача 11. (Георг-78.4)

Решить неравенство $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>\log_3(3x^2-4x+2)$.

Идея. Привести логарифмы в левой и правой частях неравенства к одному основанию и, сделав замену переменной, свести исходное неравенство к квадратному.
Указание. Привести логарифм в правой части неравенства к основанию 9:

$$\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>2\log_9(3x^2-4x+2)\,.$$

Указание. Сделать замену переменной $t=\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}$ и решить получившееся квадратное неравенство $2t^2-t-1<0$.
Указание. Вернуться к исходной переменной.

Решение. Приведём логарифмы к одному основанию:

$$\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>2\log_9(3x^2-4x+2).$$

Введём новую переменную $t=\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}$, $t\ge 0$; получим квадратное неравенство

$$t+1>2t^2 \quad\Longleftrightarrow\quad 2t^2-t-1<0 \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{2}<t<1\,.$$

Вернёмся к переменной x:

$$-\frac{1}{2}<\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}<1 \quad\Longleftrightarrow\quad 0\le\log_9(3x^2-4x+2)<1 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 1\le 3x^2-4x+2<9 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 3x^2-4x+1\ge 0\,,\\ 3x^2-4x-7<0. \end{cases}$$

Решаем неравенства: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le\dfrac{1}{3};\\ x\ge 1\,; \end{array}\right.\\ -1<x<\dfrac{7}{3}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} -1<x\le\dfrac{1}{3}\,;\\ 1\le x<\dfrac{7}{3}\,. \end{array}\right.$

Ответ. $\left(-1;\ \dfrac{1}{3}\right]\cup\left[1;\ \dfrac{7}{3}\right)$.

Задача 12. (М/м-74.2)

Решить неравенство $\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}<\log_5(5x^2-10x+10)$.

Идея. Преобразовать правую часть и свести неравенство к квадратному при помощи замены переменной.
Указание. Привести неравенство к виду

$$1-\log_5(x^2-2x+2)+\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}-2<0.$$

Указание. Сделать замену переменной $y = \sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)}$.
Указание. Решить получившееся квадратное неравенство и вернуться к исходной переменной.

Решение. В правой части неравенства перейдём от логарифма произведения к сумме логарифмов и перенесём все слагаемые в левую часть:

$$1 - \log_5(x^2 - 2x + 2) + \sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} - 2 < 0.$$

Сделаем замену переменной $y = \sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)}$. После замены неравенство принимает вид

$$y^2 + y - 2 < 0 \iff (y+2)(y-1) < 0 \iff -2 < y < 1.$$

Вернёмся к переменной x:

$$-2 < \sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < 1 \iff 0 \le 1 - \log_5(x^2 - 2x + 2) < 1 \iff$$

$$\iff 0 < \log_5(x^2 - 2x + 2) \le 1 \iff 1 < x^2 - 2x + 2 \le 5 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0, \\ x^2 - 2x + 1 > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x \ne 1. \end{cases}$$

Ответ. $[-1;\ 1) \cup (1;\ 3]$.

Задача 13. (Геогр-90.3)

Решить неравенство $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$.

Идея. Преобразовать левую часть и, сделав нужную замену переменной, свести показательное неравенство к дробно-рациональному.

Указание. Привести неравенство к виду $\dfrac{2 \cdot 2^{1+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$.

Указание. Выполнив замену переменной $t = 2^{1+\sqrt{x-1}}$, $t \ge 2$, получить дробно-рациональное неравенство $\dfrac{t-16}{t-8} > 0$.

Указание. Вернуться к переменной x.

Решение. Преобразуем неравенство: $\dfrac{2 \cdot 2^{1+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1$. Пусть $t = 2^{1+\sqrt{x-1}}$, $t \ge 2$; относительно новой переменной неравенство является дробно-рациональным:

$$\frac{2t - 24}{t - 8} > 1 \iff \frac{t - 16}{t - 8} > 0 \iff \left[\begin{array}{l} t < 8; \\ t > 16. \end{array} \right.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

1) $t < 8 \implies 2^{1+\sqrt{x-1}} < 8 \iff 1 + \sqrt{x-1} < 3 \iff 1 \le x < 5.$

2) $t > 16 \implies 2^{1+\sqrt{x-1}} > 16 \iff 1 + \sqrt{x-1} > 4 \iff x > 10.$

Ответ. $[1;\ 5) \cup (10;\ +\infty)$.

Задача 14. (М/м-76.2)

Решить неравенство $\dfrac{7}{9^x-2}\geq\dfrac{2}{3^x-1}$.

Идея. Сделать замену переменной и свести исходное неравенство к дробно-рациональному. Решить неравенство методом интервалов относительно новой переменной, а затем вернуться к переменной x.

Указание. Сделать замену переменной $t=3^x$, $t>0$.

Указание. После замены исходное неравенство привести к дробно-рациональному виду

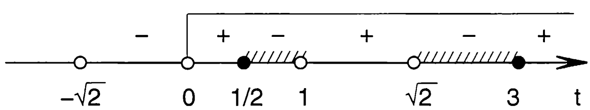
$$\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-3)}{(t-1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}\leq 0.$$

Указание. Решить неравенство методом интервалов; вернуться к исходной переменной.

Решение. Сделаем замену переменной $t=3^x$, $t>0$:

$$\frac{7}{t^2-2}\geq\frac{2}{t-1}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{7t-7-2t^2+4}{(t-1)(t^2-2)}\geq 0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad\frac{2t^2-7t+3}{(t-1)(t^2-2)}\leq 0\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-3)}{(t-1)(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}\leq 0.$$



Неравенство выполнено при $\dfrac{1}{2}\leq t<1$ и $\sqrt{2}<t\leq 3$. Возвращаемся к исходной переменной:

1) $\dfrac{1}{2}\leq t<1\quad\Longrightarrow\quad\dfrac{1}{2}\leq 3^x<1\quad\Longleftrightarrow\quad-\log_3 2\leq x<0.$

2) $\sqrt{2}<t\leq 3\quad\Longrightarrow\quad\sqrt{2}<3^x\leq 3\quad\Longleftrightarrow\quad\dfrac{1}{2}\log_3 2<x\leq 1.$

Ответ. $[-\log_3 2;\ 0)\cup\left(\dfrac{1}{2}\log_3 2;\ 1\right]$.

Задача 15. (Экон-99.2)

Решить неравенство $4\cdot\sqrt{\dfrac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14}\leq 14\cdot\sqrt{\dfrac{2^{x-2}}{2^x-1}}$.

Идея. Преобразовать неравенство и при помощи замены переменной свести его к дробно-рациональному.

Указание. Привести неравенство к виду $4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \le 7 \cdot \sqrt{\frac{2^x}{2^x - 1}}$.

Указание. Сделать замену переменной $t = \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}}$. Привести неравенство к виду $\frac{4t^2 - \sqrt{14}t - 7}{t} \le 0$.

Решение. Преобразуем правую часть неравенства:

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \le 7 \cdot \sqrt{\frac{2^x}{2^x - 1}}.$$

Пусть $t = \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}}$, $t > 0$; относительно новой переменной неравенство приводится к дробно-рациональному виду:

$$4t + \sqrt{14} \le \frac{7}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4t^2 - \sqrt{14}t - 7}{t} \le 0.$$

Найдём корни числителя:

$$D = 14 + 28 \cdot 4 = 14 \cdot (1 + 8) = 9 \cdot 14;$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{14}}{2}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Поскольку $t > 0$, решением неравенства является промежуток $0 < t \le \frac{\sqrt{14}}{4}$. Определим соответствующие значения исходной переменной:

$$0 < \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} \le \frac{\sqrt{14}}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \frac{2^x - 1}{2^x} \le \frac{7}{8} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ 8 \cdot 2^x - 8 - 7 \cdot 2^x \le 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ 2^x \le 8; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x \le 3.$$

Ответ. $(0; 3]$.

Задача 16. (Псих-81.4)

Решить уравнение $\frac{4}{3}\left(\log_3(5x - 6)^3\right)^2 - \left(\log_3(5x - 6)^3\right)\log_3 x^6 = -6\left(\log_3 \frac{1}{x}\right)^2$.

Идея. Преобразовать уравнение; ввести новую переменную; привести уравнение к квадратному.

Указание. Привести уравнение к виду

$$12(\log_3(5x - 6))^2 - 18(\log_3(5x - 6))\log_3 x + 6\,(\log_3 x)^2 = 0.$$

Указание. Так как $x = 1$ корнем не является (не входит в ОДЗ), то $\log_3 x \neq 0$, поэтому можно обе части уравнения разделить на $6(\log_3 x)^2$.
Указание. После деления на $6(\log_3 x)^2$ и преобразований логарифмов получаем уравнение

$$2\log_x^2(5x-6) - 3\log_x(5x-6) + 1 = 0.$$

Указание. Сделав замену $t = \log_x(5x-6)$, привести уравнение к виду

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Далее необходимо решить это уравнение, вернуться к исходной переменной, решить полученные логарифмические уравнения и отобрать корни, которые входят в ОДЗ.

Решение. Выражения под знаком логарифма должны быть положительны, поэтому ОДЗ задаётся неравенством $x > \frac{6}{5}$. Выполним несложные преобразования логарифмов:

$$12(\log_3(5x-6))^2 - 18(\log_3(5x-6))\log_3 x + 6\left(\log_3 x\right)^2 = 0.$$

Так как $x = 1$ не входит в ОДЗ, то $\log_3 x \neq 0$, поэтому можно разделить обе части уравнения на $6(\log_3 x)^2$; в результате получим

$$2\log_x^2(5x-6) - 3\log_x(5x-6) + 1 = 0.$$

Сделаем замену переменной $t = \log_x(5x-6)$, тогда

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Вернёмся к исходной переменной.

1) $t = 1 \quad \Longrightarrow \quad \log_x(5x-6) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 5x - 6 = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$

2) $t = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \log_x(5x-6) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad (5x-6)^2 = x \quad \Longleftrightarrow \quad 25x^2 - 61x + 36 = 0;$

$$D = 3721 - 3600 = 121 = 11^2, \quad x_{12} = \frac{61 \pm 11}{50}.$$

$x_1 = 1$ не удовлетворяет ОДЗ, $x_2 = \frac{36}{25}$ подходит.

Ответ. $\frac{3}{2}$; $\frac{36}{25}$.

Задача 17. (Псих-89.3)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0,2)^3 + y = 1. \end{cases}$

Идея. Преобразовать уравнения системы, сделать замену переменной.

Указание. Привести систему к виду $\begin{cases} 2\log_x 5 + 2(y-1) = 0, \\ (\log_x 5)^3 + (y-1) = 0. \end{cases}$

Указание. После замены переменных $p = \log_x 5$, $q = y-1$ система принимает вид $\begin{cases} p + q = 0, \\ p^3 + q = 0. \end{cases}$ Далее необходимо решить уравнения и отобрать корни.

Решение. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0,2)^3 + y = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} 2\log_x 5 + 2(y-1) = 0, \\ (\log_x 5)^3 + (y-1) = 0. \end{cases}$$

После замены переменных $p = \log_x 5$, $q = y - 1$ система принимает вид

$$\begin{cases} p + q = 0, \\ p^3 + q = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} q = -p, \\ p^3 - p = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} q = -p, \\ p(p-1)(p+1) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение даёт три возможных значения переменной p.

1) При $p = 0 \implies \log_x 5 = 0$; это уравнение не имеет решений.

2) При $p = 1$, $q = -1 \implies \log_x 5 = 1,\ y - 1 = -1 \iff x = 5,\ y = 0$.

3) При $p = -1$, $q = 1 \implies \log_x 5 = -1,\ y - 1 = 1 \iff x = \dfrac{1}{5},\ y = 2$.

Ответ. $(5;\ 0)$, $\left(\dfrac{1}{5};\ 2\right)$.

Задача 18. (Геол.ОГ-74.2)

(Геол.ОГ-74.2) Решить систему неравенств $\begin{cases} 3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0, \\ 3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0. \end{cases}$

Идея. Преобразовать неравенства системы и при помощи замены переменной свести их к квадратным.

Указание. Привести неравенства системы к виду

$$\begin{cases} 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 > 0, \\ 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 < 0. \end{cases}$$

Указание. При помощи замены переменной $y = 3^x$, $y > 0$ каждое из неравенств системы приводится к квадратному:

$$\begin{cases} y^2 - 3y + 2 > 0, \\ y^2 - 2y - 3 < 0; \end{cases}$$

Указание. Вернуться к исходной переменной.

Решение. Преобразуем неравенства системы:

$$\begin{cases} 3 \cdot (3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2) > 0, \\ 9 \cdot (3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3) < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 > 0, \\ 3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 < 0. \end{cases}$$

С помощью замены переменной $y = 3^x$, $y > 0$ каждое из неравенств системы приводится к квадратному:

$$\begin{cases} y^2 - 3y + 2 > 0, \\ y^2 - 2y - 3 < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} (y-2)(y-1) > 0, \\ (y-3)(y+1) < 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} -1 < y < 1; \\ 2 < y < 3. \end{array} \right.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получаем:

$$\left[\begin{array}{l} -1 < 3^x < 1, \\ 2 < 3^x < 3; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ \log_3 2 < x < 1. \end{array} \right.$$

Ответ. $(-\infty;\ 0) \cup (\log_3 2;\ 1)$.

Задача 19. (Экон-75.3)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{3 + \log_x(1-y)} = \log_x x(1-y), \\ xy = -6. \end{cases}$

Идея. Преобразовать первое уравнение системы и при помощи замены переменной свести его к квадратному относительно введённой неизвестной.
Указание. Привести первое уравнение к виду

$$3 + \log_x(1-y) - \sqrt{3 + \log_x(1-y)} - 2 = 0.$$

Указание. В первом уравнении сделать замену переменной $t = \sqrt{3 + \log_x(1-y)}$, $t \geq 0$. Решить получившееся квадратное уравнение $t^2 - t - 2 = 0$.
Указание. Вернувшись к переменным x и y, из первого уравнения получить:

$$\begin{cases} x = 1 - y, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Указание. В итоге получается система для определения x и y:

$$\begin{cases} x = 1 - y, \\ xy = -6, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решение. Приведём первое уравнение системы к виду

$$3 + \log_x(1-y) - \sqrt{3 + \log_x(1-y)} - 2 = 0.$$

В этом уравнении сделаем замену $t = \sqrt{3 + \log_x(1-y)}$, $t \geq 0$:

$$t^2 - t - 2 = 0 \iff (t-2)(t+1) = 0.$$

Поскольку $t \geq 0$, остаётся корень $t = 2$. Вернёмся к переменным x и y:

$$\sqrt{3 + \log_x(1-y)} = 2 \iff \log_x(1-y) = 1 \iff \begin{cases} x = 1 - y, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Получается система для определения значений x и y:

$$\begin{cases} x = 1 - y\,, \\ xy = -6\,, \\ x > 0, \\ x \neq 1\,; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ. $(3;\ -2)$.

Задача 20. (ВМК-97.4)

Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$

Идея. Произвести замену переменных $u = 2^x$, $u > 0$, $v = 3^y$, $v > 0$. Решить полученную систему двух квадратных уравнений и вернуться к исходным переменным.

Указание. После замены переменных система принимает вид

$$\begin{cases} u^2 + 5u - 2v = 2, \\ 2v^2 + u + 2v = 1. \end{cases}$$

Указание. Из левой и правой частей первого уравнения системы вычесть соответственно удвоенные левую и правую части второго уравнения и записать полученное уравнение вместо первого уравнения системы.

Решение. Произведём замену переменных $u = 2^x$, $v = 3^y$, $u > 0$, $v > 0$. Исходная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} u^2 + 5u - 2v = 2, \\ 2v^2 + u + 2v = 1. \end{cases}$$

Вычтем из левой и правой частей первого уравнения системы соответственно удвоенные левую и правую части второго уравнения и запишем полученное уравнение вместо первого уравнения:

$$\begin{cases} u^2 - 4v^2 + 3u - 6v = 0, \\ 2v^2 + u + 2v = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} (u - 2v) \cdot (u + 2v + 3) = 0, \\ 2v^2 + u + 2v = 1. \end{cases}$$

Так как $u > 0$ и $v > 0$, то $u+2v+3 > 0$, поэтому система равносильна следующей:

$$\begin{cases} u = 2v, \\ 2v^2 + u + 2v = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} u = 2v, \\ 2v^2 + 4v - 1 = 0. \end{cases}$$

Из двух корней квадратного уравнения $v_1 = (-2 + \sqrt{6})/2$ и $v_2 = (-2 - \sqrt{6})/2$ положительным является лишь v_1; значит,

$$\begin{cases} v = \dfrac{-2 + \sqrt{6}}{2}, \\ u = -2 + \sqrt{6}; \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} y = \log_3 \dfrac{\sqrt{6} - 2}{2}, \\ x = \log_2(\sqrt{6} - 2). \end{cases}$$

Ответ. $\left(\log_2\left(\sqrt{6} - 2\right); \log_3 \dfrac{\sqrt{6} - 2}{2}\right)$.

Задача 21. (Хим-85.5)

Решить систему уравнений
$$\begin{cases} |x-y| - \log_2^2(|x|+y+1) + 6 = 0, \\ (x-y)^2 - 6(x-y)\log_2(|x|+y+1) + 5\log_2^2(|x|+y+1) = 0. \end{cases}$$

Идея. Сделать замену переменных $u = \log_2(|x|+y+1)$, $v = x - y$; решить полученные уравнения и произвести отбор корней.
Указание. После замены переменных $u = \log_2(|x|+y+1)$, $v = x - y$ система уравнений принимает вид
$$\begin{cases} |v| - u^2 + 6 = 0, \\ v^2 - 6vu + 5v^2 = 0. \end{cases}$$

Указание. Если $u = 0$, то из второго уравнения получаем, что $v = 0$, но эти значения не обращают первое уравнение в тождество. После деления обеих частей второго уравнения на $u^2 \neq 0$ получаем систему
$$\begin{cases} |v| - u^2 + 6 = 0, \\ \left(\dfrac{v}{u}\right)^2 - 6\left(\dfrac{v}{u}\right) + 5 = 0. \end{cases}$$

Указание. $\left(\dfrac{v}{u}\right)^2 - 6\left(\dfrac{v}{u}\right) + 5 = 0 \iff \left(\dfrac{v}{u} - 1\right)\left(\dfrac{v}{u} - 5\right) = 0$. Значит, либо $v = u$, либо $v = 5u$.
Указание. Пусть $(u_0,\ v_0)$ – решение системы, тогда
$$\begin{cases} x - y = v_0, \\ |x| + y + 1 = 2^{u_0}; \end{cases} \implies 2^{u_0} + v_0 = |x| + x + 1 \geq 1.$$

Используя полученное следствие, исключить найденные значения u и v, которые заведомо не удовлетворяют условию задачи.
Указание. Если $v = u$, то
$$u^2 - |u| - 6 = 0 \iff (|u|-3)(|u|+2) = 0 \iff |u| = 3 \iff u = \pm 3;$$

- при $u = v = -3$ $2^{-3} - 3 < 0$; следовательно, это значение не подходит.
- при $u = v = 3$ $2^3 + 3 = 11 > 1$; это значение подходит.

Указание. Если $v = 5u$, то
$$u^2 - 5|u| - 6 = 0 \iff (|u|-6)(|u|+1) = 0 \iff |u| = 6 \iff u = \pm 6;$$

- при $u = -6$, $v = -30$ $2^{-6} - 30 < 0$; следовательно, это значение не подходит.
- при $u = 6$, $v = 30$ $2^6 + 30 = 94 > 1$; это значение подходит.

Указание. Для каждой найденной пары $(u;\ v)$ решить систему
$$\begin{cases} x - y = v, \\ |x| + y + 1 = 2^u \end{cases}$$
для определения значений переменных x и y.

Решение. Сделаем замену переменных $u = \log_2(|x|+y+1)$, $v = x-y$; система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} |v| - u^2 + 6 = 0, \\ v^2 - 6vu + 5v^2 = 0. \end{cases}$$

Если $u = 0$, то из второго уравнения получаем, что $v = 0$, но эти значения не являются решением первого уравнения системы. Разделим обе части второго уравнения на $u^2 \neq 0$:

$$\begin{cases} |v| - u^2 + 6 = 0, \\ \left(\dfrac{v}{u}\right)^2 - 6\left(\dfrac{v}{u}\right) + 5 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 6\left(\frac{v}{u}\right) + 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{v}{u} - 1\right)\left(\frac{v}{u} - 5\right) = 0.$$

Значит, либо $v = u$, либо $v = 5u$.

Получим полезное следствие. Пусть $(u_0,\ v_0)$ – решение системы, тогда

$$\begin{cases} x - y = v_0, \\ |x| + y + 1 = 2^{u_0}; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2^{u_0} + v_0 = |x| + x + 1 \geq 1.$$

Последнее неравенство будем использовать, чтобы исключить значения u и v, которые заведомо не удовлетворяют условию задачи.

1) Если $v = u$, то

$$u^2 - |u| - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (|u| - 3)(|u| + 2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u| = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad u = \pm 3;$$

- при $u = v = -3$ $\quad 2^{-3} - 3 < 0$; следовательно, это значение не подходит.
- при $u = v = 3$ $\quad 2^3 + 3 = 11 > 1$; это значение подходит.

Возвращаемся к исходным переменным:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ |x| + y + 1 = 8, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x - 3, \\ |x| + x = 10, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases}$$

2) Если $v = 5u$, то

$$u^2 - 5|u| - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (|u| - 6)(|u| + 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u| = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad u = \pm 6;$$

- при $u = -6$, $v = -30$ $\quad 2^{-6} - 30 < 0$; не подходит.
- при $u = 6$, $v = 30$ $\quad 2^6 + 30 = 94 > 1$; подходит.

Итак, для второго случая:

$$\begin{cases} x - y = 30, \\ |x| + y + 1 = 64, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = x - 30, \\ |x| + x = 93, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{93}{2}, \\ y = \dfrac{33}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $(5;\ 2)$, $\left(\dfrac{93}{2};\ \dfrac{33}{2}\right)$.

Задача 22. (Хим-00.6)

Решить уравнение $(26+15\sqrt{3})^x - 5(7+4\sqrt{3})^x + 6(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 5.$

Идея. Преобразовать левую часть уравнения, используя формулы сокращённого умножения (куб суммы и квадрат суммы) и свойства степеней. Сделать замену переменных и свести уравнение к возвратному уравнению относительно введённой переменной.

Указание. Привести уравнение к виду

$$((2+\sqrt{3})^3)^x - 5((2+\sqrt{3})^2)^x + 6(2+\sqrt{3})^x + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^x} = 5.$$

Указание. Сделав замену переменной $t = (2+\sqrt{3})^x$, $t > 0$, поделить уравнение на t:

$$t^2 + \frac{1}{t^2} - 5\left(t + \frac{1}{t}\right) + 6 = 0.$$

Указание. Сделать вторую замену переменной $p = t + \dfrac{1}{t}$. Тогда

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = p^2 - 2,$$

и уравнение приводится к виду

$$p^2 - 2 - 5p + 6 = 0.$$

Решение. Воспользуемся в левой части уравнения формулами сокращённого умножения (куб суммы и квадрат суммы) и свойствами степеней:

$$((2+\sqrt{3})^3)^x - 5((2+\sqrt{3})^2)^x + 6(2+\sqrt{3})^x + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^x} = 5.$$

Сделаем замену переменной $t = (2+\sqrt{3})^x$, $t > 0$:

$$t^3 - 5t^2 + 6t + \frac{1}{t} = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 + \frac{1}{t^2} - 5\left(t + \frac{1}{t}\right) + 6 = 0.$$

Сделаем ещё одну замену переменной $p = t + \dfrac{1}{t}$, тогда уравнение запишется следующим образом:

$$p^2 - 2 - 5p + 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 - 5p + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (p-1)(p-4) = 0.$$

Поскольку $t > 0$, то $p = t + \dfrac{1}{t} \geq 2$, поэтому $p = 1$ не подходит. Значит,

$$p = t + \frac{1}{t} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{t^2 - 4t + 1}{t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2 \pm \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Ответ. ± 1.

3.5. Замены в тригонометрических уравнениях и тригонометрические замены

Задача 1. (Геол-00.4)

Решить неравенство $4\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \le 3$.

Идея. Перенести все слагаемые в левую часть; воспользоваться следствием из основного тригонометрического тождества; привести к общему знаменателю; выделить полный квадрат и решить дробно-рациональное неравенство.
Указание. Воспользоваться следствием из основного тригонометрического тождества: $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Указание. Привести неравенство к виду $\dfrac{(2\cos^2 x - 1)^2}{\cos^2 x} \le 0$.

Решение. Воспользуемся следствием из основного тригонометрического тождества $\left(\operatorname{tg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$ и преобразуем неравенство:

$$4\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 4 \le 0 \iff \frac{(2\cos^2 x - 1)^2}{\cos^2 x} \le 0 \iff$$

$$\iff \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. (У)

Решить неравенство $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x \ge 0$.

Идея. Разложить левую часть неравенства на множители.
Указание. Домножить обе части неравенства на $\operatorname{tg}^4 x$ и сделать замену переменной $y = \operatorname{tg} x$.

Решение. Областью определения являются $x \ne \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Сделаем замену $y = \operatorname{tg} x$ (где $y \ne 0$) и домножим обе части неравенства на y^4. Получим

$$y^7 + y + y^8 + 1 \ge 0 \iff y^7(y+1) + y + 1 \ge 0 \iff$$

$$\iff (y+1)(y^7+1) \ge 0 \iff y \in \mathbb{R}.$$

С учётом области допустимых значений получим ответ.

Ответ. $x \in \mathbb{R}$, $x \ne \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. (Псих-76.4)

Найти все корни уравнения $\sqrt{5+4\sin x-4\cos^2 x}=2+\cos 2x$.

Идея. Используя основное тригонометрическое тождество и формулу для косинуса двойного аргумента, при помощи замены переменной свести уравнение к квадратному с модулем.
Указание. Используя основное тригонометрическое тождество и формулу для косинуса двойного аргумента, привести уравнение к виду

$$|2\sin x+1|=3-2\sin^2 x.$$

Указание. Сделав замену переменной $t=\sin x$, $|t|\le 1$, решить получившееся стандартное уравнение с модулем. Вернуться к переменной x.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой для косинуса двойного аргумента:

$$\sqrt{4\sin^2 x+4\sin x+1}=3-2\sin^2 x \quad\Longleftrightarrow\quad |2\sin x+1|=3-2\sin^2 x.$$

Сделаем замену переменной $t=\sin x$, $|t|\le 1 \implies 3-2t^2>0$. С учётом последнего неравенства снимаем модуль через геометрический смысл:

$$|2t+1|=3-2t^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 2t+1=3-2t^2; \\ 2t+1=2t^2-3; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 2t^2+2t-2=0; \\ 2t^2-2t-4=0; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t^2+t-1=0; \\ t^2-t-2=0; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \left(t+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0; \\ (t-2)(t+1)=0. \end{array}\right.$$

Так как $|t|\le 1$, то подходят только два решения.
1) $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x=(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$
2) $\sin x=-1 \quad\Longleftrightarrow\quad x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ответ. $(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+\pi n,\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}.$

Задача 4. (ВМК-96(1).3)

Решить уравнение $\sqrt{12\sin x-\dfrac{9}{2}\cos 2x+\dfrac{17}{2}}=\dfrac{9}{8}+4\sin x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x.$

Идея. Используя формулу двойного угла и основное тригонометрическое тождество, получить уравнение относительно $\sin x$; сделать соответствующую замену переменной.

Указание. Используя формулу двойного угла и основное тригонометрическое тождество, привести уравнение к виду

$$|3\sin x + 2| = \frac{13}{8} + 4\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x.$$

Указание. Сделать замену переменной $t = \sin x$, $|t| \leq 1$. Полученное квадратное уравнение с модулем относительно t

$$|3t + 2| = \frac{13}{8} + 4t - \frac{1}{2}t^2$$

решить, раскрывая модуль по определению.
Указание. Отобрать найденные значения, учитывая, что $|t| \leq 1$. Вернуться к переменной x.

Решение. Преобразуем уравнение, используя формулу двойного угла и основное тригонометрическое тождество:

$$\sqrt{12\sin x - \frac{9}{2}\cos 2x + \frac{17}{2}} = \frac{9}{8} + 4\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x \iff$$

$$\iff \sqrt{9\sin^2 x + 12\sin x + 4} = \frac{13}{8} + 4\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x \iff$$

$$\iff \sqrt{(3\sin x + 2)^2} = \frac{13}{8} + 4\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x \iff$$

$$\iff |3\sin x + 2| = \frac{13}{8} + 4\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x.$$

Сделаем замену переменной $t = \sin x$, $|t| \leq 1$; получим квадратное уравнение с модулем относительно новой переменной:

$$|3t + 2| = \frac{13}{8} + 4t - \frac{1}{2}t^2.$$

Раскроем модуль по определению.

$$1)\ \begin{cases} 3t + 2 < 0, \\ -3t - 2 = \dfrac{13}{8} + 4t - \dfrac{1}{2}t^2; \end{cases} \iff \begin{cases} t < -\dfrac{2}{3}, \\ t^2 - 14t - \dfrac{29}{4} = 0; \end{cases} \iff \varnothing.$$

$$2)\ \begin{cases} 3t + 2 \geq 0, \\ 3t + 2 = \dfrac{13}{8} + 4t - \dfrac{1}{2}t^2; \end{cases} \iff \begin{cases} t \geq -\dfrac{2}{3}, \\ t^2 - 2t + \dfrac{3}{4} = 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2}; \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array} \right.$$

Так как $|t| \leq 1$, то подходит только корень $t = \frac{1}{2}$. Найдём соответствующие значения переменной x:

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (Биол-76.1)

Решить уравнение $|\sin x + \cos x| = 1 + \sin 2x$.

И д е я. Преобразовать правую часть уравнения и с помощью замены переменных свести уравнение к квадратному.

У к а з а н и е. Привести правую часть уравнения к виду $1+\sin 2x = (\sin x+\cos x)^2$.

У к а з а н и е. Сделать замену переменной $t = |\sin x + \cos x|$, $t \geq 0$. Получившееся квадратное уравнение $t = t^2$ легко решается. Не забудьте вернуться к переменной x.

Р е ш е н и е. Заметим, что $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$, и сделаем замену переменной $t = |\sin x + \cos x|$, $t \geq 0$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$t = t^2 \iff \left[\begin{array}{l} t = 0; \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к исходной переменной.

1) $\sin x + \cos x = 0 \iff \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \iff x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

2) $\sin x + \cos x = \pm 1 \iff \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

О т в е т. $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \dfrac{\pi k}{2};\ n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. (Биол-85.5)

Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение $8x(2x^2-1)\cdot(8x^4-8x^2+1) = 1$?

И д е я. Так как задача рассматривается на отрезке $[0; 1]$, то можно сделать тригонометрическую замену переменной $t = \cos x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Получится тригонометрическое уравнение, левая часть которого легко сворачивается в произведение косинусов.

У к а з а н и е. Сделать замену $t = \cos x$. Тогда для того, чтобы ответить на вопрос задачи, надо подсчитать количество решений уравнения

$$8\cos t(2\cos^2 t - 1)\cdot(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1) = 1$$

на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

У к а з а н и е. Последний сомножитель левой части уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 = 8\cos^2 t(\cos^2 t - 1) + 1 = 1 - 2\sin^2 2t = \cos 4t.$$

Итак, уравнение принимает вид

$$8\cos t\cos 2t\cos 4t = 1.$$

Указание. Значения переменной t, при которых $\sin t = 0$, не являются решениями уравнения. Умножить обе части уравнения на $\sin t$:

$$8\sin t\cos t\cos 2t\cos 4t = \sin t \iff \sin 8t = \sin t.$$

Решив это уравнение, посчитайте количество решений, попавших на полуинтервал $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, предварительно исключив те решения, при которых $\sin t = 0$.

Решение. Для любого числа x из отрезка $[0;1]$ существует (и притом единственное) число t из отрезка $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ такое, что $x = \cos t$. Заменив x на $\cos t$, придём к уравнению

$$8\cos t(2\cos^2 t - 1)\cdot(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1) = 1. \qquad (*)$$

Требуется определить число корней уравнения $(*)$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Преобразуем выражение, стоящее в последних скобках уравнения $(*)$:

$$8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 = 8\cos^2 t(\cos^2 t - 1) + 1 = 1 - 2\sin^2 2t = \cos 4t.$$

Тогда уравнение $(*)$ преобразуется к виду

$$8\cos t\cos 2t\cos 4t = 1. \qquad (**)$$

Так как решения уравнения $\sin t = 0$ не являются решениями уравнения $(**)$, домножим последнее на $\sin t$, при этом мы вносим постороннее решение $t = 0$, которое надо будет потом исключить.

$$8\sin t\cos t\cos 2t\cos 4t = \sin t \iff 4\sin 2t\cos 2t\cos 4t = \sin t \iff$$

$$\iff \sin 8t = \sin t \iff \sin 8t - \sin t = 0 \iff$$

$$\iff 2\sin\left(\frac{7t}{2}\right)\cos\left(\frac{9t}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{7t}{2}\right) = 0; \\ \cos\left(\dfrac{9t}{2}\right) = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}; \\ t = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi k}{9},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Учитывая, наконец, условие $t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, окончательно получим: $t = \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{\pi}{9}, \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ. 3 корня.

Задача 7. (Экон.К-85.5)

Среди всех решений (x, y, z, v) системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + v^2 = 9, \\ xv + yz \geq 6; \end{cases}$ найти такие, при каждом из которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

Идея. Сделать тригонометрическую замену переменных; решить неравенство системы и найти, при каких значениях новых переменных достигается максимум заданной функции; затем вернуться к исходным переменным.
Указание. Так как $x^2 + y^2 = 4$, то удобно сделать замену

$$x = 2\sin t, \quad y = 2\cos t.$$

Аналогично, для $z^2 + v^2 = 9$ удобно сделать замену

$$z = 3\sin p, \quad v = 3\cos p.$$

Указание. После замены переменных неравенство примет вид

$$\sin(t+p) \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t+p = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Указание. Записать $x + z$ в новых переменных и преобразовать с учётом полученного значения $t + p$:

$$x + z = 2\sin t + 3\sin p = 2\sin t + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n - t\right) = 2\sin t + 3\cos t =$$

$$= \sqrt{13}\sin\left(t + \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \leq \sqrt{13}.$$

Указание. Значение $\sqrt{13}$ достигается, например, в точке

$$t + \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{\pi}{2}, \quad p = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Указание. Необходимо вернуться исходным переменным.

Решение. Так как $x^2 + y^2 = 4$, то удобно сделать замену

$$x = 2\sin t, \quad y = 2\cos t.$$

Аналогично, для $z^2 + v^2 = 9$ удобно сделать замену

$$z = 3\sin p, \quad v = 3\cos p.$$

После замены переменных неравенство принимает вид

$$6\sin t\cos p + 6\cos t\sin p \geq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(t+p) \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t+p = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Запишем искомую сумму $x + z$ в новых переменных и преобразуем с учётом полученного значения $t + p$:

$$x + z = 2\sin t + 3\sin p = 2\sin t + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n - t\right) = 2\sin t + 3\cos t =$$

$$= \sqrt{13}\sin\left(t + \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \leq \sqrt{13}.$$

Значение $\sqrt{13}$ достигается, например, в точке

$$t + \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{\pi}{2}, \quad p = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Вернёмся к исходным переменным:

$$t = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y = \frac{6}{\sqrt{13}};$$

$$p = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{9}{\sqrt{13}}, \quad v = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Ответ. $\frac{4}{\sqrt{13}}$; $\frac{6}{\sqrt{13}}$; $\frac{9}{\sqrt{13}}$; $\frac{6}{\sqrt{13}}$.

Задача 8. (М/м-75.2)

Найти все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющие условию $x > 0$ и системе уравнений $\begin{cases} \sin\left((x-\sqrt{\pi})^2 + y^2\right) = 0, \\ \log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2\log_{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}} = 2. \end{cases}$

Идея. При помощи замены переменных свести второе уравнение системы к квадратному. Найти значение суммы $x^2 + y^2$ и далее определить значения x и y из первого уравнения.

Указание. Сделать замену переменных $t = \sqrt{\log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}}$ во втором уравнении.

Указание. При решении получившегося уравнения $t^2 + t - 2 = 0$ учесть, что $t \geq 0$. Вернуться к переменным x, y: $x^2 + y^2 = 2\pi$.

Указание. Воспользоваться найденным решением второго уравнения системы при рассмотрении первого.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его можно записать следующим образом:

$$\log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{\log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}} = 2.$$

Сделаем замену переменных $t = \sqrt{\log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}}$, $t \geq 0$. После замены получаем:

$$t^2 + t = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 + t - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (t+2)(t-1) = 0.$$

Поскольку $t \geq 0$, остаётся корень $t = 1$. Вернемся к переменным x, y:

$$\sqrt{\log_{\sqrt{2\pi}}\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 2\pi.$$

Рассмотрим первое уравнение системы.

$$\sin\left((x-\sqrt{\pi})^2 + y^2\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-\sqrt{\pi})^2 + y^2 = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Принимая во внимание решение второго уравнения, получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{\pi}x + y^2 = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x^2 + y^2 = 2\pi; \end{cases} \iff \begin{cases} \pi(2-k) = 2\sqrt{\pi}x, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x^2 + y^2 = 2\pi; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{\pi}(2-k)}{2}, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x^2 + y^2 = 2\pi. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x^2 + y^2 = 2\pi$ следует ограничение на x:

$$-\sqrt{2\pi} \le x \le \sqrt{2\pi}.$$

Учитывая это ограничение и ограничение из условия задачи ($x > 0$), получаем, что $x = \sqrt{\pi}$ или $x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Находим соответствующие значения второй переменной y и получаем ответ.

Ответ. $(\sqrt{\pi};\ \pm\sqrt{\pi})$, $\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$.

Задача 9. (Экон.К-75.1)

Найти все действительные решения уравнения

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{\sin x} = \frac{10}{3}.$$

Идея. Выделив в подкоренных выражениях полные квадраты, заметить, что произведение радикалов, стоящих в левой части уравнения, равно 1. Значит, они взаимообратны. Сделать соответствующую замену и свести уравнение к дробно-рациональному относительно введённой переменной.

Указание. Заметить, что $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$, $(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1) = 1$, и сделать замену $t = (\sqrt{2}+1)^{\sin x}$, $t > 0$.

Указание. Решить получившееся дробно-рациональное уравнение $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{10}{3}$ и вернуться к переменной x.

Решение. Выделим в подкоренных выражениях полные квадраты:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1, \quad \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Заметим, что $(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1) = 1$. Сделаем замену $t = (\sqrt{2}+1)^{\sin x}$, $t > 0$. Тогда уравнение принимает вид

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \iff 3t^2 - 10t + 3 = 0 \iff 3(t-3)\left(t - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

1) $t = (\sqrt{2}+1)^{\sin x} = 3 \iff \sin x = \log_{\sqrt{2}+1} 3 > 1 \implies \varnothing.$

2) $t = (\sqrt{2}+1)^{\sin x} = \dfrac{1}{3} \iff \sin x = -\log_{\sqrt{2}+1} 3 < -1 \implies \varnothing.$

Ответ. Нет решений.

4. Нестандартные текстовые задачи

4.1. Недоопределённые задачи

Задача 1. (Почв-83.1)

Поле разделено на три участка. За день были вспаханы половина первого участка и 3/4 второго участка, а третий участок, который составляет четвертую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханная за день площадь поля в два раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

Идея. Составить систему из двух уравнений с тремя неизвестными, подстановкой исключить одну из неизвестных и из оставшегося уравнения найти отношение нужных переменных.

Указание. Обозначить за неизвестные общую площадь поля, площадь первого и площадь второго участков.

Указание. Если S – общая площадь поля, x – площадь первого участка, y – площадь второго, то третий участок имеет площадь $S/4$.

Указание. Согласно условию задачи $x+y+\frac{S}{4}=S$, $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y+\frac{S}{4}=2y$. Найти надо $\frac{2y}{S}$.

Указание. Исключить из системы переменную x.

Решение. Пусть S – общая площадь поля, x – площадь первого участка, y – площадь второго. Тогда третий участок имеет площадь $S/4$ и

$$x+y+\frac{S}{4}=S.$$

Так как за день были вспаханы половина первого участка, 3/4 второго участка и весь третий участок, то вся вспаханная площадь равна $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y+\frac{S}{4}$, что по условию задачи в два раза больше площади второго участка, то есть равно $2y$. Следовательно,

$$\frac{x}{2}+\frac{3}{4}y+\frac{S}{4}=2y.$$

Найти надо $\frac{2y}{S}$. Исключим из системы x. Из первого уравнения следует, что $x=\frac{3S}{4}-y$. Подставив это значение во второе уравнение, получим:

$$\frac{3S}{8}-\frac{y}{2}+\frac{3}{4}y+\frac{S}{4}=2y \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{5S}{8}=\frac{7y}{4},$$

откуда искомая величина равна $\frac{2y}{S}=\frac{5}{7}$.

Ответ. $\frac{5}{7}$.

Задача 2. (Почв-78.3)

Имеются два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

Идея. Определить процентное содержание золота в исходных слитках из того, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота. Далее составить уравнение с двумя неизвестными, из которого найти их отношение.

Указание. При сплавке A кг $p\%$-го и A кг $2,5p\%$ слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота, следовательно,

$$A\cdot\frac{2,5p}{100}+A\cdot\frac{p}{100}=2A\cdot\frac{35}{100}.$$

Указание. Условие того, что при сплавке y кг первого и x кг второго слитков получается слиток, в котором содержится 40% золота, приводит (при $p=20;\ 2,5p=50$) к уравнению:

$$y\cdot\frac{50}{100}+x\cdot\frac{20}{100}=(x+y)\cdot\frac{40}{100}.$$

Решение. Пусть второй слиток весит x кг и содержит $p\%$ золота, а первый слиток весит y кг и содержит $2,5p\%$ золота.

При сплавке A кг первого и A кг второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота, то есть

$$A\cdot\frac{2,5p}{100}+A\cdot\frac{p}{100}=2A\cdot\frac{35}{100},$$

откуда $p=20;\ 2,5p=50$.

При сплавке y кг первого и x кг второго слитков получается слиток, в котором содержится 40% золота, то есть

$$y\cdot\frac{50}{100}+x\cdot\frac{20}{100}=(x+y)\cdot\frac{40}{100}\iff 2x+5y=4(x+y)\iff\frac{y}{x}=2.$$

Ответ. В 2 раза.

Задача 3. (Геол-97(2).6)

В момент, когда два бассейна были пустыми, 4 трубы одинаковой производительности были подключены для заполнения первого бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/6$ его объёма, одну трубу переключили для заполнения второго бассейна. Когда первый бассейн был заполнен на $1/2$ его объёма, еще 2 трубы переключили для заполнения второго бассейна. После этого оба бассейна наполнились доверху одновременно. Найти отношение объёмов бассейнов. (Временем на переключения пренебречь).

Идея. Обозначить за неизвестные величины объёмы бассейнов и производительность одной трубы. Для составления уравнения использовать тот факт, что после второго переключения труб оба бассейна наполнились одновременно.

Указание. Выразить объёмы, оставшиеся незаполненными к моменту второго переключения, через введённые неизвестные, поделить на соответствующие производительности и полученные величины приравнять.

Указание. Пусть x – объём первого бассейна, y – объём второго бассейна, p – производительность одной трубы. Тогда время между первым и вторым переключениями труб, в течение которого первый бассейн наполнялся тремя трубами (от объема $\dfrac{1}{6}x$ до объема $\dfrac{1}{2}x$), а второй – одной, равно $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\right)x}{3p}$.

Решение. Пусть x – объём первого бассейна, y – объём второго бассейна, p – производительность одной трубы. Требуется найти величину x/y.

После второго переключения труб оба бассейна наполнились одновременно. Это значит, что оставшиеся незаполненными к моменту второго переключения труб части объёмов бассейнов заполнились одновременно, при этом первый бассейн заполнялся одной трубой производительностью p, а второй бассейн – тремя трубами совместной производительностью $3p$.

Выясним, какие объёмы остались незаполненными к моменту второго переключения.

Время между первым и вторым переключениями труб, в течение которого первый бассейн наполнялся тремя трубами (от объема $\frac{1}{6}x$ до объема $\frac{1}{2}x$), а второй – одной, равно $\dfrac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})x}{3p}$.

В течение этого времени во втором бассейне заполнился объём

$$\frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})x}{3p}\cdot p=\frac{1}{9}x.$$

Значит, к моменту второго переключения труб в первом бассейне незаполненным остался объём $x-\frac{1}{2}x$, а во втором бассейне объём $y-\frac{1}{9}x$.

Время, необходимое для заполнения этих объёмов, по условию одинаково:
$\dfrac{\frac{1}{2}x}{p}=\dfrac{(y-\frac{1}{9}x)}{3p} \iff \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{9}x=y \iff \dfrac{x}{y}=\dfrac{18}{29}$.

Ответ. $\dfrac{18}{29}$.

Задача 4. (Фил-90.4)

От двух сплавов массами 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

Идея. Обозначить за неизвестные величины искомую массу и процентные содержания магния в первом и втором сплаве. Выразить через эти величины процентные содержания магния в каждом из новых сплавов и приравнять их друг другу.

Указание. Процентное содержание вещества в смеси равно отношению массы этого вещества к массе всей смеси.

Указание. Пусть $m = 7$ кг и $n = 3$ кг – массы данных сплавов, $p\%, q\%$ – процентное содержание магния в этих сплавах, x кг – искомая масса каждого из отрезанных кусков. Тогда согласно условию:

$$\frac{p\cdot(m-x)+q\cdot x}{m-x+x}=\frac{p\cdot x+q\cdot(n-x)}{n-x+x}.$$

Решение. Пусть $m = 7$ кг и $n = 3$ кг – массы данных сплавов, $p\%, q\%$ – процентное содержание магния в этих сплавах, x кг – искомая масса каждого из отрезанных кусков. Так как процентное содержание вещества в смеси равно отношению массы этого вещества к массе всей смеси, умноженному на 100%, то в соответствии с условием можно написать уравнение:

$$\frac{p\cdot(m-x)+q\cdot x}{m-x+x}=\frac{p\cdot x+q\cdot(n-x)}{n-x+x}\iff$$

$$\iff pmn-pnx+qnx=pmx+qmn-mqx\iff$$

$$\iff x(qn-pn+qm-pm)=qmn-pmn\iff$$

$$\iff x(q-p)(m+n)=(q-p)mn,$$

откуда, с учётом того, что $q\neq p$, следует: $x=\dfrac{mn}{m+n}=\dfrac{7\cdot 3}{10}=2{,}1.$

Ответ. 2,1 кг.

Задача 5. (Геогр-88.3)

Из пункта A в пункт C, находящийся на расстоянии 20 км от A, выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B, расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A, в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом?

Идея. Приняв за неизвестные величины скорости грузовика, автобуса и пешехода и время, через которое встретились грузовик и автобус, составить систему из трёх уравнений.

Указание. Пусть $v_г, v_а, v_п$ км/ч – скорости грузовика, автобуса и пешехода, а t ч – время, через которое встретились грузовик и автобус. Тогда согласно условию:

$$\begin{cases} (v_г + v_а)t = 20, \\ (v_а + v_п)\dfrac{t}{3} = 5, \\ v_г\left(t + \dfrac{1}{2}\right) = v_п\left(t + \dfrac{1}{2}\right) + 15. \end{cases}$$

Указание. Полученную систему удобно решать подстановкой, последовательно сокращая количество неизвестных и количество уравнений.

Решение. Пусть $v_г, v_а, v_п$ км/ч – скорости грузовика, автобуса и пешехода, а t ч – время, через которое встретились грузовик и автобус.

Так как грузовик и автобус проехали вместе 20 км за время t, то $(v_г+v_а)t = 20$.

Так как автобус и пешеход прошли 5 км за время $t/3$, то $(v_а + v_п)\dfrac{t}{3} = 5$.

Грузовик догнал пешехода через $t + \dfrac{1}{2}$, при этом грузовик проехал на 15 км больше, чем прошёл пешеход, следовательно,

$$v_г\left(t + \frac{1}{2}\right) = v_п\left(t + \frac{1}{2}\right) + 15.$$

В итоге получаем систему:

$$\begin{cases} (v_г + v_а)t = 20, \\ (v_а + v_п)\dfrac{t}{3} = 5, \\ v_г\left(t + \dfrac{1}{2}\right) = v_п\left(t + \dfrac{1}{2}\right) + 15; \end{cases} \iff \begin{cases} v_г + v_а = \dfrac{20}{t}, \\ v_а + v_п = \dfrac{15}{t}, \\ v_г - v_п = \dfrac{15}{t + \frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Сложив последние два уравнения, придём к системе:

$$\begin{cases} v_г + v_а = \dfrac{20}{t}, \\ v_а + v_г = \dfrac{15}{t} + \dfrac{15}{t + \frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Приравняв правые части уравнений, получим:

$$\frac{20}{t} = \frac{15}{t} + \frac{15}{t + \frac{1}{2}},$$

откуда $t = 1/4$ часа, следовательно, искомое время равно $t + \frac{1}{2}$ часа, то есть 45 минут.

Ответ. 45 минут.

Задача 6. (ВМК-89.3)

Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут – мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

Идея. Приняв за неизвестные величины скорости пешехода, велосипедиста, мотоциклиста, расстояние от пункта A до места встречи и расстояние от места встречи до пункта B, составить систему из трёх уравнений с пятью неизвестными.

Указание. Пусть $v_п, v_в, v_м$ – скорости пешехода, велосипедиста, мотоциклиста. Пусть S_1 – расстояние от пункта A до места встречи и S_2 – расстояние от места встречи до пункта B. Тогда:

$$\begin{cases} S_1\left(\dfrac{1}{v_п}-\dfrac{1}{v_в}\right)=2, \\ S_1\left(\dfrac{1}{v_п}-\dfrac{1}{v_м}\right)=2,5, \\ S_2\left(\dfrac{1}{v_п}-\dfrac{1}{v_м}\right)=1. \end{cases}$$

Найти надо величину $S_2\left(\dfrac{1}{v_п}-\dfrac{1}{v_в}\right)$.

Указание. Полученную систему удобно решать подстановкой, последовательно сокращая количество неизвестных и количество уравнений.

Решение. Пусть $v_п, v_в, v_м$ – скорости пешехода, велосипедиста, мотоциклиста. Пусть S_1 – расстояние от пункта A до места встречи и S_2 – расстояние от места встречи до пункта B. Так как велосипедист выехал из пункта A через 2 часа после выхода пешехода, а мотоциклист через 2 часа 30 минут, то

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{v_п}-\dfrac{S_1}{v_в}=2, \\ \dfrac{S_1}{v_п}-\dfrac{S_1}{v_м}=2,5. \end{cases}$$

Поскольку пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста, то

$$\frac{S_2}{v_п}-\frac{S_2}{v_м}=1;$$

причём найти надо величину

$$x=\frac{S_2}{v_п}-\frac{S_2}{v_в}.$$

В результате получаем систему:

$$\begin{cases} S_1\left(\dfrac{1}{v_\text{п}} - \dfrac{1}{v_\text{в}}\right) = 2, \\ S_1\left(\dfrac{1}{v_\text{п}} - \dfrac{1}{v_\text{м}}\right) = 2,5, \\ S_2\left(\dfrac{1}{v_\text{п}} - \dfrac{1}{v_\text{в}}\right) = x, \\ S_2\left(\dfrac{1}{v_\text{п}} - \dfrac{1}{v_\text{м}}\right) = 1. \end{cases}$$

Поделив первое уравнение на второе, а третье на четвёртое, получим:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{v_\text{п}} - \dfrac{1}{v_\text{в}}\right) : \left(\dfrac{1}{v_\text{п}} - \dfrac{1}{v_\text{м}}\right) = \dfrac{4}{5}, \\ \left(\dfrac{1}{v_\text{п}} - \dfrac{1}{v_\text{в}}\right) : \left(\dfrac{1}{v_\text{п}} - \dfrac{1}{v_\text{м}}\right) = x; \end{cases}$$

откуда $x = \dfrac{4}{5}$ часа $= 48$ минут.

Ответ. 48 минут.

Задача 7. (Псих-82.5)

Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довёз пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда беспрепятственно и добрался. В результате мотоциклист затратил на дорогу до пункта A в два с половиной раза больше времени, чем если бы он ехал из пункта B в пункт A, не подвозя пешехода. Во сколько раз медленнее пешеход добрался бы до пункта B, если бы весь путь от A до B он прошел пешком?

Идея. Приняв за неизвестные величины скорости мотоциклиста и пешехода, всё расстояние AB и ту часть, которую проехал мотоциклист до встречи с пешеходом, составить систему из двух уравнений с четырьмя неизвестными.
Указание. Первое уравнение: время, затраченное мотоциклистом на дорогу до пункта A, увеличилось в два с половиной раза из-за возвращения в пункт B.
Указание. Второе уравнение: время движения пешехода до момента встречи равно времени движения мотоциклиста до момента встречи.
Указание. Выразить искомую величину через введённые переменные.

Решение. Пусть $v_\text{м}$ км/ч и $v_\text{п}$ км/ч – скорости мотоциклиста и пешехода. Пусть S км – всё расстояние AB, а S_1 км – та часть, которую проехал мотоциклист до встречи с пешеходом.

Так как время, затраченное мотоциклистом на дорогу до пункта A, увеличилось в два с половиной раза из-за возвращения в пункт B, то

$$\frac{S}{v_\text{м}} \cdot 2,5 = \frac{S + 2S_1}{v_\text{м}} \iff 2,5S = S + 2S_1 \iff S_1 = \frac{3}{4}S.$$

Следовательно, до встречи мотоциклист проехал $3S/4$, а пешеход прошёл $S/4$. Так как время движения пешехода до момента встречи равно времени движения мотоциклиста до момента встречи, то

$$\frac{S/4}{v_п} = \frac{3S/4}{v_м} \iff v_м = 3v_п.$$

Теперь выразим искомую величину через наши переменные. Время, которое затратил пешеход: $\dfrac{S/4}{v_п} + \dfrac{3S/4}{v_м}$. Если бы он весь путь от A до B он прошёл пешком, то затратил бы $\dfrac{S}{v_п}$. Искомое отношение равно:

$$\frac{\dfrac{S}{v_п}}{\dfrac{S/4}{v_п} + \dfrac{3S/4}{v_м}} = \frac{\dfrac{S}{v_п}}{\dfrac{S/4}{v_п} + \dfrac{S/4}{v_п}} = \frac{\dfrac{S}{v_п}}{\dfrac{S/2}{v_п}} = 2.$$

Ответ. В 2 раза.

Задача 8. (Геол-94(2).9)

Четыре бригады разрабатывали месторождение железной руды в течение трёх лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. По одному месяцу на первом и третьем году работа не велась, а всё остальное время (то есть в течение 34 месяцев) работала только одна из бригад. Отношения времён работы первой, второй, третьей и четвёртой бригад и количество выработанной продукции соответственно равны:
в первый год 3 : 2 : 4 : 2 и 10 млн.т,
во второй год 4 : 2 : 5 : 1 и 9 млн.т,
в третий год 4 : 3 : 3 : 1 и 8 млн.т.
Сколько млн.т железной руды выработали бы за 7 месяцев четыре бригады, работая все вместе?

Идея. Обозначить за неизвестные величины производительности бригад и составить три линейных уравнения с четырьмя неизвестными.
Указание. Пусть x, y, z и v млн.т/месяц – производительности первой, второй, третьей и четвёртой бригад. Тогда

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z + 2v = 10, \\ 4x + 2y + 5z + v = 9, \\ 4x + 3y + 3z + v = 8. \end{cases}$$

Указание. Для поиска искомой линейной комбинации переменных $7(x + y + z + v)$ удобно использовать метод неопределённых коэффициентов.
Указание. Домножив первое уравнение на a, второе на b, третье на c и сложив их, получим:

$$(3a + 4b + 4c)x + (2a + 2b + 3c)y + (4a + 5b + 3c)z + (2a + b + c)v = 10a + 9b + 8c.$$

Приравняв каждый из коэффициентов при переменных x, y, z, v к семи, получим систему уравнений для a, b, c.

Указание. Системму $\begin{cases} 3a+4b+4c=7, \\ 2a+2b+3c=7, \\ 4a+5b+3c=7, \\ 2a+b+c=7; \end{cases}$ можно решить с помощью подстановки.

Решение. Пусть x, y, z и v млн.т/месяц – производительности первой, второй, третьей и четвёртой бригад.

В первый год было выработано 10 млн.т, работа велась 11 месяцев и времена работы бригад относились как 3 : 2 : 4 : 2, следовательно,

$$3x+2y+4z+2v=10.$$

Во второй год было выработано 9 млн.т, работа велась 12 месяцев и времена работы бригад относились как 4 : 2 : 5 : 1, следовательно,

$$4x+2y+5z+v=9.$$

В третий год было выработано 8 млн.т, работа велась 11 месяцев и времена работы бригад относились как 4 : 3 : 3 : 1, следовательно,

$$4x+3y+3z+v=8.$$

Для того, чтобы найти, сколько млн.т железной руды выработали бы за 7 месяцев четыре бригады, работая все вместе, надо вычислить величину $7(x+y+z+v)$.

Домножим первое уравнение на a, второе на b, третье на c и сложим. После приведения подобных членов получим:

$$(3a+4b+4c)x+(2a+2b+3c)y+(4a+5b+3c)z+(2a+b+c)v=10a+9b+8c.$$

Приравняв каждый из коэффициентов при переменных x, y, z, v семи, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3a+4b+4c=7, \\ 2a+2b+3c=7, \\ 4a+5b+3c=7, \\ 2a+b+c=7. \end{cases}$$

Решив систему подстановкой, найдём: $a=\frac{21}{5}$, $b=-\frac{14}{5}$, $c=\frac{7}{5}$.

Подставив эти значения в последнее уравнение с переменными x, y, z, v, получим:

$$7x+7y+7z+7v=10\cdot\frac{21}{5}-9\cdot\frac{14}{5}+8\cdot\frac{7}{5}=28.$$

Ответ. 28 млн.т.

4.2. Неравенства в текстовых задачах

Задача 1. (Физ-68.3)

Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп., за альбомы – 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем альбомов. Сколько купили книг, если цена одной книги больше, чем на 1 руб. превосходит цену одного альбома?

Идея. Обозначив за неизвестные величины количество книг и альбомов, а также их цены соответственно, составить основные уравнения задачи с дополнительными условиями и воспользоваться целочисленностью переменных.
Указание. Если было куплено n альбомов по a руб., $n+6$ книг по b руб., то получим: $b(n+6) = 10,56$; $an = 0,56$; $b - a > 1$.
Указание. Для решения задачи удобно перейти к неравенству для $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Обозначим для решения задачи: n альбомов по a руб., $n+6$ книг по b руб. Тогда из условия находим ($n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{cases} b(n+6) = 10,56; \\ an = 0,56; \\ b - a > 1. \end{cases} \implies b = \frac{10,56}{n+6}, \ a = \frac{0,56}{n};$$

подставляем в неравенство: $\dfrac{10,56}{n+6} - \dfrac{0,56}{n} > 1, \ n \in N \implies$

$$10,56n - 0,56n - 6 \cdot 0,56 > n^2 + 6n \iff n^2 - 4n + 3,36 < 0 \iff 1,2 < n < 2,8.$$

Так как $n \in \mathbb{N}$, то $n = 2 \implies n + 6 = 8$.

Ответ. 8 книг.

Задача 2. (Псих-84.5)

Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого её членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.

Идея. Составив уравнение и неравенство, соответствующие условию задачи, свести их к неравенству с целочисленным отбором решений.
Указание. Если $a_1 \in \mathbb{Z}$ и $d \in \mathbb{Z}$, соответственно, первый член прогрессии и её разность, то условие задачи приводит к системе:

$$\begin{cases} a_1 + d = 2, \quad a_1, d \in \mathbb{Z}, \\ (a_1 + 2d)^2 + (a_1 + 3d)^2 < 4. \end{cases}$$

Указание. Выразив, например, разность прогрессии из уравнения и подставив её в неравенство, можно решить его либо как квадратное по традиционному алгоритму, либо оценкой модулей соответствующих слагаемых.

Решение. Пусть a_1 – первый член, d – разность рассматриваемой прогрессии. Тогда из условия задачи получаем $(a_1, d \in \mathbb{Z})$:

$$\begin{cases} a_1 + d = 2, \\ a_3^2 + a_4^2 < 4. \end{cases}$$

Учитывая, что $a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d$, находим:

$$\begin{cases} d = 2 - a_1, \\ (a_1 + 2(2 - a_1))^2 + (a_1 + 3(2 - a_1))^2 < 4. \end{cases}$$

Решим неравенство:

$$(a_1 - 4)^2 + (2a_1 - 6)^2 < 4 \iff 5a_1^2 - 32a_1 + 48 < 0 \iff \frac{12}{5} < a_1 < 4.$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, получаем, что $a_1 = 3,\ d = -1$.

Ответ. 3.

Задача 3. (Геогр-97(1).4)

Танкер может заполняться через две трубы, причём его заполнение через первую трубу происходит на 5 часов медленнее, чем через вторую. При каких значениях времени заполнения танкера через первую трубу его заполнение через обе трубы одновременно занимает не менее 6 часов?

Идея. Составить неравенство для времени заполнения и решить его с учётом естественного смысла переменной.

Указание. Если t ч – время заполнения танкера через первую трубу, то искомое время задается дробью $\dfrac{1}{\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t-5}}$.

Решение. Если t ч – время заполнения танкера первой трубой, а его объем равен единичному, то $\dfrac{1}{t}$ и $\dfrac{1}{t-5}$ – производительности первой и второй труб соответственно. Тогда время совместного заполнения танкера выражается дробью (неравенство составлено сразу из требования условия):

$$\frac{1}{\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t-5}} \geq 6 \iff \frac{t(t-5)}{2t-5} \geq 6.$$

По смыслу задачи $t > 5$, поэтому

$$t^2 - 5t \geq 12t - 30 \iff t^2 - 17t + 30 \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} t \leq 2; \\ t \geq 15; \end{array} \right. \implies t \geq 15.$$

Ответ. $[15; +\infty)$.

Задача 4. (Хим-97.4)

N насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 2 часа, второй за 4 часа, $\ldots, n$-ый – за 2^n часов. Каким должно быть наименьшее число насосов n, чтобы все n насосов, работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 1 час и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 1 час?

Идея. Составив формулу для вычисления времени наполнения бассейна всеми насосами с учётом их совместной производительности, решить заданное условием задачи неравенство.

Указание. Приняв объем бассейна за единицу, производительность k-ого насоса выразить как $\frac{1}{2^k}$. Тогда совместная производительность $n \in N$ насосов выражается суммой

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2^k},$$

вычисляемой по формуле суммы n членов геометрической прогрессии.

Решение. Если принять объём бассейна за единицу, то производительность n-ого насоса ($n \in \mathbb{N}$) принимает вид: $\frac{1}{2^n}$, время наполнения бассейна одновременно работающими n насосами равно:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}.$$

В знаменателе стоит сумма n членов геометрической прогрессии, $b_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Тогда для ответа на первый вопрос получаем неравенство:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}<1+\frac{1}{60} \iff 1-\frac{1}{2^n}>\frac{60}{61} \iff \frac{1}{2^n}<\frac{1}{61} \iff 2^n>61 \implies n\geq 6,$$

так как $n \in \mathbb{N}$. Значит, наименьшее число насосов, отвечающих условию задачи, равно 6.

Для ответа на второй вопрос получаем неравенство:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}<1 \iff 1-\frac{1}{2^n}>1 \iff \frac{1}{2^n}<0 \iff \emptyset.$$

Следовательно, быстрее, чем за 1 час наполнить бассейн нельзя.

Ответ. 6 насосов; нет.

Задача 5. (М/м-92.4)

Один рабочий на новом станке производит за 1 час число деталей, большее 8, а на старом станке – на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

Идея. Обозначив за неизвестные величины производительности труда и дневную норму, составить основное уравнение задачи и организовать перебор целочисленных значений переменных.

Указание. Если p деталей – производительность на первом станке, а n деталей – дневная норма, причём $p, n \in \mathbb{N}$, то получаем по условию:

$$\frac{n}{2(p-3)} = \frac{n}{p} - 1,\ p > 8,\ p \in \mathbb{N},\ \frac{n}{p} \in \mathbb{N}.$$

Указание. Из основного уравнения задачи с учётом целочисленности переменных получается, что $(p-6)$ – делитель 36.

Решение. Пусть $p \in \mathbb{N}$ деталей в час – производительность рабочего на новом станке, $n \in \mathbb{N}$ деталей – дневная норма, тогда из условия получаем:

$$\frac{n}{2(p-3)} = \frac{n}{p} - 1,\ p > 8,\ p \in \mathbb{N},\ \frac{n}{p} \in \mathbb{N}.$$

Выразим n из уравнения:

$$n = \frac{p(2p-6)}{p-6} = \frac{2(p^2-6p)+6(p-6)+36}{p-6} = 2p + 6 + \frac{36}{p-6}.$$

Значит, $(p-6)$ – делитель 36, так как $n \in \mathbb{N}$;
$(p-6) \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 9;\ 12;\ 18;\ 36\}$, проверим все варианты с учётом p>8:
$p = 9:\ \ n = 18 + 6 + 12 = 36$ – подходит;
$p = 10:\ n = 20 + 6 + 9 = 35$ – не подходит,так как по условию $\dfrac{n}{p} \in \mathbb{N}$;
$p = 12:\ n = 24 + 6 + 6 = 36$ – подходит;
$p = 15:\ n = 30 + 6 + 4 = 40$ – не подходит;
$p = 18:\ n = 36 + 6 + 3 = 45$ – не подходит;
$p = 24:\ n = 48 + 6 + 2 = 56$ – не подходит;
$p = 42:\ n = 84 + 6 + 1 = 91$ – не подходит;

Получается, что $n = 36$, и достигается это значение при $p = 9$ и при $p = 12$.

Ответ. 36.

Задача 6. (Экон-85.5)

Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут, вслед за ним вышел ещё один пешеход. В пункт B сначала пришёл один из пешеходов, а другой достиг B не раньше, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они бы прибыли в пункт B с интервалом не более, чем в 20 минут. Определить, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

Идея. Составить модель задачи на основе естественных переменных и параметров. Затем рассмотреть её для разных вариантов прибытия пешеходов в конечный пункт и случаев отношений их скоростей.

Указание. Удобно обозначить за x и y км/ч скорости пешеходов, за S км – весь путь, за t_1 ч – интервал выхода пешеходов из пункта A, и за t_2 ч – разность времени прибытия пешеходов в пункт B. После чего составить два варианта модели, в зависимости от того, кто из пешеходов первым придёт в пункт B.

Указание. Переменные $t_1 \le \dfrac{2}{3}$ и $t_2 \ge 1$ эффективнее применить для составления уравнения времени прибытия пешеходов, а не неравенства.

Указание. В каждом из рассматриваемых случаев понадобится два варианта соотношений между скоростями пешеходов $x = \dfrac{3}{2}y$ и $y = \dfrac{3}{2}x$.

Указание. Если в пункт B первым придёт второй пешеход, то реализуется следующая система:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x} = \dfrac{S}{y} + t_1 + t_2, \quad t_1 \le \dfrac{2}{3},\ t_2 \ge 1, \\ \left|\dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{y}\right| \le \dfrac{1}{3} \text{ – условие одновременного выхода из пункта } A, \\ x = \dfrac{3}{2}y \ \text{ или } \ y = \dfrac{3}{2}x. \end{cases}$$

Указание. После преобразования системы становится очевидно, что она несовместна, то есть второй пешеход не может обогнать первого.

Решение. Пусть S км – весь путь AB, x км/ч – скорость первого пешехода, y км/ч – скорость второго пешехода. Обозначим за t_1 ч – интервал выхода пешеходов из пункта A и за t_2 ч – разность времени прибытия пешеходов в пункт B.

Предположим, что в пункт B первым придёт второй пешеход, тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x} = \dfrac{S}{y} + t_1 + t_2, \quad t_1 \le \dfrac{2}{3},\ t_2 \ge 1, \\ \left|\dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{y}\right| \le \dfrac{1}{3} \text{ – условие одновременного выхода из пункта } A, \\ x = \dfrac{3}{2}y \ \text{ или } \ y = \dfrac{3}{2}x. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $\dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{y} = t_1 + t_2 \ge 1$, что противоречит неравенству $\left|\dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{y}\right| \le \dfrac{1}{3}$, значит, данное предположение неверно.

Предположим, что первым в пункт B первым придёт первый пешеход, тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x} + t_2 = \dfrac{S}{y} + t_1, \quad t_1 \le \dfrac{2}{3},\ t_2 \ge 1, \\ \left|\dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{y}\right| \le \dfrac{1}{3} \text{ – условие одновременного выхода из пункта } A, \\ x = \dfrac{3}{2}y \ \text{ или } \ y = \dfrac{3}{2}x. \end{cases}$$

Из уравнения получаем $\dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{y} = t_1 - t_2$, но $t_1 - t_2 \le \dfrac{2}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3}$, поэтому система приобретает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{y} - \dfrac{S}{x} \ge \dfrac{1}{3}, \\ \left|\dfrac{S}{y} - \dfrac{S}{x}\right| \le \dfrac{1}{3}, \\ x = \dfrac{3}{2}y \ \text{ или } \ y = \dfrac{3}{2}x, \end{cases}$$

следовательно, $\dfrac{S}{y} - \dfrac{S}{x} = \dfrac{1}{3}$.

Далее рассматриваем два случая:

1) $y = \dfrac{3}{2}x$, тогда $\dfrac{2S}{3x} - \dfrac{S}{x} = \dfrac{1}{3}$, следовательно, $\dfrac{S}{x} \le 0$, что противоречит смыслу задачи;

2) $x = \dfrac{3}{2}y$, тогда $\dfrac{S}{y} - \dfrac{2S}{3y} = \dfrac{1}{3}$, следовательно, $\dfrac{S}{y} = 1$, а $\dfrac{S}{x} = \dfrac{2}{3}$, эти значения не противоречат смыслу задачи.

Ответ. 40 минут и 1 час соответственно.

Задача 7. (Геол.ОГ-83.5)

Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10 км, 5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 ч, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ ч, пункт C – в $9\frac{3}{8}$ ч, пункт D – в $9\frac{2}{3}$ ч. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v, не превосходила 51,7 мин?

Идея. Составив основное неравенство, исследовать функцию в нём на возрастание и убывание на соответствующих промежутках.

Замечание. Функция времени движения от скорости в итоге строится как сумма модулей, поэтому её исследование по стандартному алгоритму раскрытия через точки смены знака приводит к требуемому результату. Однако этот путь приводит к трудоёмким вычислениям.

Указание. Отклонение от расписания при прохождении пункта B записывается как: $\left|\dfrac{10}{v} - \dfrac{1}{5}\right|$ ч.

Указание. Отклонение от расписания при прохождении пункта C записывается как: $\left|\dfrac{15}{v} - \dfrac{3}{8}\right|$ ч.

Указание. Основное неравенство задачи имеет вид:

$$\left|\frac{10}{v}-\frac{1}{5}\right|+\left|\frac{15}{v}-\frac{3}{8}\right|+\left|\frac{20}{v}-\frac{2}{3}\right|+\frac{26}{v}\le\frac{51,7}{60}.$$

Указание. Рассмотрев левую часть неравенства как функцию от $\mathrm{t}=\dfrac{5}{v}>0$, заметить, что её наименьшее значение достигается в точке $\mathrm{t}=\dfrac{1}{10}$ и равно в точности правой части.

Решение. Если скорость автобуса v км/ч, что сумма отклонений от расписания за весь маршрут имеет вид:

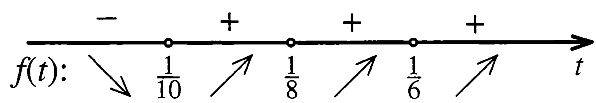
$$h(v)=\left|\frac{10}{v}-\frac{1}{5}\right|+\left|\frac{15}{v}-\frac{3}{8}\right|+\left|\frac{20}{v}-\frac{2}{3}\right|+\frac{26}{v}\le\frac{51,7}{60}.$$

Замечание. Отклонение от расписания при прохождении, например, пункта D, выражается через разность $\dfrac{20}{v}-\dfrac{2}{3}$, а не $\dfrac{5}{v}-\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{8}\right)$, так как отклонение от расписания в пунктах B и C не влияет на время прохождения пункта D.

Обозначим: $\mathrm{t}=\dfrac{5}{v}>0$ и запишем:

$$f(t)=\left|2t-\frac{1}{5}\right|+\left|3t-\frac{3}{8}\right|+\left|4t-\frac{2}{3}\right|+5,2t\le\frac{51,7}{60},$$

точками смены знака подмодульного выражения являются числа $\dfrac{1}{10};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{6}$.



В результате раскрытия модулей на соответствующих участках функция $f(t)$ приводится к линейному виду и в зависимости от знака старшего коэффициента либо возрастает, либо убывает. Наименьшее значение функции достигается в точке $t=\dfrac{1}{10}$ и равно:

$$f\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{517}{600}.$$

Учитывая неравенство задачи, находим, что $t=\dfrac{1}{10}$ – искомое решение, значит v = 50 км/ч.

Ответ. 50 км/ч.

4.3. Оптимальный выбор, наибольшие и наименьшие значения

Задача 1. (Экон.К-68.3)

На 100 рублей решено купить ёлочных игрушек. Ёлочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 рубля; набор, состоящий из 35 игрушек, стоит 6 рублей, и набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 9 рублей Сколько каких наборов нужно купить, истратив все 100 рублей, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?

Идея. Составив модель задачи, найти зависимость между ограничением на суммарную стоимость всех наборов и количеством игрушек. Затем оценить максимально возможное количество игрушек на основе найденной зависимости.
Указание. Если n наборов за 4 рубля, m наборов за 6 рублей и k наборов за 9 рублей, то модель задачи описывается системой:

$$\begin{cases} S = 20n + 35m + 50k \to \ max, \\ 4n + 6m + 9k = 100, \text{ где } n, m, k \in N_0, \end{cases}$$

где S – количество игрушек.
Указание. Количество игрушек можно представить в виде $S = 5(4n + 7m + 10k) = 5S'$, тогда максимальное значение S достигается при максимальном значении S'.
Указание. $S' = 4n + 7m + 10k = (4n + 6m + 9k) + m + k = 100 + m + k$, следовательно, нужно найти максимальное значение $m+k$, при ограничении $4n+6m+9k = 100$.
Указание. Определить из соображений делимости возможные значения n и оценить значение $m + k$ с учетом того, что согласно "удельному числу" игрушек по каждому из наборов в пересчёте на рубль цены, наиболее выгодным является приобретение наборов второго типа.

Замечание. Числа в задаче подобраны так, что прямая подстановка переменной из уравнения в выражение для S не позволяет эффективно организовать перебор вариантов.

Решение. Обозначим соответственно:
I: n наборов за 4 рубля по 20 игрушек, $n \in N_0$;
II: m наборов за 6 рублей по 35 игрушек, $m \in N_0$;
III: k наборов за 9 рублей по 50 игрушек, $k \in N_0$;
$S = 20n + 35m + 50k \to max$ – количество игрушек;
$4n + 6m + 9k = 100$ – уравнение стоимости (условие связи между n, m и k). Представим S в виде $S = 5(4n+7m+10k) = 5S'$, тогда максимальное значение S достигается одновременно с S'. Преобразуем S':

$$S' = 4n + 7m + 10k = (4n + 6m + 9k) + m + k = 100 + m + k.$$

Теперь задача сводится к определению максимального значения выражения $m+k$ при условии связи $4n + 6m + 9k = 100$.

Вычислим цену одной игрушки для каждого из наборов.
I: $1/5$ рубля за одну игрушку;
II: $6/35$ рубля за одну игрушку;
III: $9/50$ рубля за одну игрушку.

Так как $6/35 < 9/50 < 1/5$, то делаем вывод, что выгоднее покупать наборы второго типа, то есть максимизировать m.

Анализируя равенство $4n + 6m + 9k = 100$, рассмотрим возможные значения n. Очевидно, что n не кратно 3, иначе 100 делилось бы на 3. Следовательно, n представимо формулой $n = 3t + 1$ или $n = 3t + 2$, где $t \in N_0$. Рассмотрим случай $n = 3t + 2$. Подставим его в условие связи. Получим:

$$4(3t + 2) + 6m + 9k = 12t + 6m + 9k + 8 = 100 \quad \Longrightarrow \quad 3(4t + 2m + 3k) = 92.$$

Из последнего равенства следует, что 92 кратно 3, что неверно. Следовательно, $n = 3t + 1$, причём $n \le 25$ (из условия связи), то есть $n = 1, 4, ..., 25$. Оценим максимальное значение $m + k$ при разных значениях n. Пусть $n = 1$. Тогда

$$6m + 9k = 96 \quad \Longleftrightarrow \quad m + \frac{3}{2}k = 16 \quad \Longrightarrow \quad m + k \le 16.$$

При $n = 4$ аналогично получаем, что $m + k \le 14$, и так далее. При $n = 25$ $m + k = 0$. По мере увеличения значения n максимальное значение суммы $m + k$ будет уменьшаться. Поэтому при $n = 1$ из условия $m + \frac{3}{2}k = 16$ и с учётом того, что выгоднее покупать наборы второго типа, получаем, что $m = 16$, $k = 0$.

Ответ. 1 набор за 4 рубля и 16 наборов по 6 рублей.

Задача 2. (Экон.М-96.3)

В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс.руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс.руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес комплектующих равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

Идея. Обозначив за неизвестные величины число деталей каждого из типов, составить модель задачи и исследовать выражение для общей стоимости через цену одного килограмма, организовав на этой основе целочисленный перебор.

Указание. Если n и m деталей каждого из типов соответственно, то получаем $12n + 15m = 321$, где $m, n \in N_0$, $S = 400n + 600m$ – общая стоимость.

Указание. Несложно вычислить, что наименьшую цену имеют изделия первого типа.

Указание. Для минимизации общей стоимости изделий следует максимизировать в контейнере число изделий первого типа, тогда как для максимизации общей стоимости, соответственно, взять наибольшее число деталей второго типа. Данное утверждение является условием организации перебора.

Решение. Обозначим за неизвестные величины:
I: n изделий (12 кг, 400 тыс.руб.); цена: $\dfrac{400}{12} = 33\dfrac{1}{3}$ тыс.руб./кг;

II: m изделий (15 кг, 600 тыс.руб.); цена: $\dfrac{600}{15} = 40$ тыс.руб./кг;
всего: 321 кг, $m, n \in N_0$. По условию $12n + 15m = 321$, то есть $4n + 5m = 107$, общая стоимость $S = 400n + 600m = 200(2n + 3m)$ тыс.руб.

Для минимизации стоимости логично выбрать в контейнере максимально возможное число деталей первого типа, так как их цена ниже. Так как $4n + 5m = 107$, то $n \le \dfrac{107}{4}$, то есть $n \le 26$.

Рассмотрим решение этого уравнения в целых числах:
$n = 26:\quad 5m = 3$ - нет решений;
$n = 25:\quad 5m = 7$ - нет решений;
$n = 24:\quad 5m = 11$ - нет решений;
$n = 23:\quad 5m = 15, m = 3$; тогда $S = 200(2n+3m) = 200(46+9) = 11000$ тыс.руб.

Для максимизации общей стоимости логичнее выбрать как можно больше "самых дорогих деталей" с точки зрения цены, то есть второго типа. Так как $4n + 5m = 107$, то $m \le \dfrac{107}{5}$, то есть $m \le 21$.

Рассмотрим решение этого уравнения в целых числах:
$m = 21:\quad 4n = 2$ – нет решений;
$m = 20:\quad 4n = 7$– нет решений;
$m = 19:\quad 4n = 12, n = 3$; тогда $S = 200(2n + 3m) = 200(6 + 57) = 12600$ тыс.руб.

Ответ. 11000 тыс.руб. и 12600 тыс.руб.

Задача 3. (Экон-96.4)

В контейнер упакованы комплектующие изделия трёх типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс.руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс.руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс.руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Идея. Обозначив за неизвестные величины число деталей каждого из типов, составить модель задачи и исследовать выражение для общей стоимости через цену одного килограмма изделия, организовав целочисленный перебор.
Указание. Если n, m, и k – число деталей каждого из типов соответственно, то:

$$\begin{cases} 12n + 16m + 15k = 326, \text{ где } n, m, k \in N_0, \\ S = 400n + 500m + 600k; \end{cases}$$

где S – общая стоимость.
Указание. Наименьшую "удельную стоимость" имеют изделия второго типа, а наибольшую – третьего типа.
Указание. Для увеличения общей стоимости нужно брать больше деталей третьего типа, а для уменьшения – второго типа. На этом следует основывать перебор.

Решение. Обозначим за неизвестные величины:
I: n изделий (12 кг; 400 тыс.руб.); цена: $\dfrac{400}{12} = 33\dfrac{1}{3}$ тыс.руб./кг.;
II: m изделий (16 кг; 500 тыс.р.); цена: $\dfrac{500}{16} = 31\dfrac{1}{4}$ тыс.руб./кг.;

III: k изделий (15 кг; 600 тыс.руб.); цена: $\dfrac{600}{15} = 40$ тыс.руб./кг.

По условию задачи общий вес изделий: $12n+16m+15k = 326$, где $n, m, k \in N_0$; суммарная стоимость: $S = 400n + 500m + 600k$.

Из отношения $31\frac{1}{4} < 33\frac{1}{3} < 40$ следует, что дешевле всего изделия второго типа, а дороже всего – изделия третьего типа.

Для минимизации суммарной стоимости логично выбрать как можно больше самых недорогих изделий, то есть второго типа. Из условия $12n+16m+15k = 326$ находим, что $m \leq 20$. Рассмотрим решение этого уравнения в целых числах:

$$\begin{array}{ll} m = 20: & 12n + 15k = 6, \text{ нет решений;} \\ m = 19: & 12n + 15k = 22, \text{ нет решений;} \\ m = 18: & 12n + 15k = 38, \text{ нет решений;} \\ m = 17: & 12n + 15k = 54, \ n = 2, \ k = 2. \end{array}$$

Тогда $S = 100(4n + 5m + 6k) = 100(8 + 85 + 12) = 100 \cdot 105 = 10500$ тыс.руб.

Для максимизации суммарной стоимости логично выбрать как можно больше самых дорогих изделий, то есть третьего типа. Из условия $12n + 16m + 15k = 326$ находим, что $k \leq 21$. Рассмотрим решение этого уравнения в целых числах:

$$\begin{array}{ll} k = 21: & 12n + 16m = 11, \text{ нет решений;} \\ k = 20: & 12n + 16m = 26, \text{ нет решений;} \\ k = 19: & 12n + 16m = 41, \text{ нет решений;} \\ k = 18: & 12n + 16m = 56, \ m = 2, \ n = 2. \end{array}$$

Тогда $S = 100(4n + 5m + 6k) = 100(8 + 10 + 108) = 100 \cdot 126 = 12600$ тыс.руб.

Ответ. 10500 тыс.руб. и 12600 тыс.руб.

Задача 4. (Псих-87.3)

Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причём площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, еще работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

Идея. Введя в рассмотрение "естественные" переменные и параметры, составить неравенство о времени работы соответствующих частей бригады и решить его по числу людей в бригаде.

Указание. Обозначив за S площадь потолка в классе, а за p кв.м./чел. – производительность работы одного человека, тогда время побелки потолка в классе равно $t = \dfrac{S}{pn}$, где $n \in \mathbb{N}$ – количество маляров в данной части бригады.

Указание. Основное неравенство в задаче имеет вид: $\dfrac{3S}{p(n+6)} < \dfrac{S}{pn}$, которое требуется решить для $n \in \mathbb{N}$ и найти наибольшее значение выражения $2n + 6$.

Решение. Пусть S(кв.м.) – площадь потолка в классе, n человек занято на его побелке, p (кв.м./чел.) – производительность каждого из них. Требуется найти наибольшее значение выражения $K = 2n+6$, $n \in \mathbb{N}$, при выполнении неравенства (одна часть бригады завершила работу раньше другой):

$$\frac{3S}{p(n+6)} < \frac{S}{pn} \iff 3n < n+6 \iff n < 3.$$

Значит, наибольшее возможное значение $n = 2$, при этом $K = 10$.

Ответ. 10 человек.

Задача 5. (Экон-90.4)

Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a, b и c, если известно, что при указанных условиях сумма $a + b + c$ максимальна.

Идея. Расписав числа через первый член и знаменатель геометрической прогрессии и разложив заданные в условии числа на простые множители, исследовать все возможные варианты значений знаменателя.

Указание. Если $2 \le q \in \mathbb{N}$ – знаменатель прогрессии, то $b = aq$, $c = aq^2$, $a \in \mathbb{N}$; $2240 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7$, $4312 = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Указание. По условию задачи получаем $2240 = bn$, $4312 = cm$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

Указание. Анализ системы уравнений

$$\begin{cases} aqn = 2^6 \cdot 5 \cdot 7, \\ aq^2m = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11; \end{cases} \quad \text{где } a, q, m, n \in \mathbb{N},$$

показывает, что для знаменателя q возможные значения находятся в множестве $\{2;\ 7;\ 2 \cdot 7\}$.

Указание. Окончательный отбор решений системы при выборе всех возможных вариантов значений a и q производится по факту максимизации $S = a+b+c = a(1+q+q^2)$.

Решение. Если $q \in \mathbb{N}$ – знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, то получаем $q \ge 2$, $b = aq$, $c = aq^2$, $a \in \mathbb{N}$. Раскладывая данные в условии числа на простые множители, получаем:

$$2240 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7, \quad 4312 = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

Сумма $S = a + b + c = a(1 + q + q^2)$ по условию должна быть максимальна. Это условие выбора решений. Так как числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно, то получаем систему в натуральных числах:

$$\begin{cases} aqn = 2^6 \cdot 5 \cdot 7, \\ aq^2m = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11; \end{cases} \quad \text{где } a, q, m, n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $2^6 \cdot 5 \cdot 7$ делится без остатка на q, а $2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ делится без остатка на q^2, то приходим к выводу, что $q \in \{2,\ 7,\ 2 \cdot 7\}$. Организуем перебор всех вариантов. При этом учтём, что требуется найти такие a, b и c, что сумма $S = a(1+q+q^2)$ принимает максимальное значение. Так как S линейно зависит от a, то её максимальное значение достигается при максимально возможном a для каждого рассматриваемого значения q.

$$1)\ q=2 \implies \begin{cases} an = 2^5\cdot 5\cdot 7, \\ am = 2\cdot 7^2\cdot 11; \end{cases} \implies a = 2\cdot 7 \implies S = 98;$$

$$2)\ q=7 \implies \begin{cases} an = 2^6\cdot 5, \\ am = 2^3\cdot 11; \end{cases} \implies a = 2^3 \implies S = 456;$$

$$3)\ q=2\cdot 7 \implies \begin{cases} an = 2^5\cdot 5, \\ am = 2\cdot 11; \end{cases} \implies a = 2 \implies S = 422.$$

Максимальное значение $S = 456$, откуда $a = 8$, $q = 7$ и $b = 56$, $c = 392$.

Ответ. 8; 56; 392.

Задача 6. (Псих-94.5)

Абитуриенты сдавали экзамены в течение трёх дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причём каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так что число рядов, а также число людей в ряду было бы равно числу используемых аудиторий. Определить минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях.

Идея. Обозначив за неизвестное число аудиторий в каждом из корпусов соответственно, составить уравнение в натуральных числах и решить его через исследование делимости обеих частей.

Указание. Если m и n – число аудиторий в первом и втором корпусах соответственно, то получаем: $3n^2 = 2m^3$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

Указание. Из первого уравнения в силу целочисленности переменных следует, что $n \vdots 2, m \vdots 3$, то есть $n = 2p$, $m = 3q$, где p и q – натуральные числа.

Указание. Процесс исследования делимости обеих частей приведёт к уравнению $t^2 = n^3$, где $t, n \in \mathbb{N}$. Его решением является $t = n = 1$.

Решение. Пусть n аудиторий задействовано в первом корпусе и m аудиторий – во втором, тогда $3n^2 = 2m^3$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Ищем $\mathrm{M} = 3n^2$; заметим, что $n \vdots 2$, $m \vdots 3$, то есть $n = 2p$, $m = 3q$, где p и q натуральные числа. Подставляем эти значения: $12p^2 = 54q^3$, то есть $2p^2 = 9q^3$; значит, $q \vdots 2$, $p \vdots 3$, то есть $q = 2s$, $p = 3r$, где r и s натуральные числа. Подставляем: $18r^2 = 72s^3$, то есть $r^2 = 4s^3$; значит, $r \vdots 2$, то есть $r = 2k$, $k \in \mathbb{N}$; подставляем $4k^2 = 4s^3$, то есть $k^2 = s^3$. Наименьшим натуральным решением этого уравнения являются $k = s = 1$. Возвращаемся к числу абитуриентов:

$$M = 3n^2 = 12p^2 = 12\cdot 9r^2 = 12\cdot 9\cdot 4k^2 = 12\cdot 36 = 432.$$

Ответ. 432 человека.

Задача 7. (ВМК-87.5)

С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъёмность 10 тонн. Вес маленького блока - 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

Идея. Рассмотрев все возможные варианты загрузки автомашин, получить нижнюю оценку для необходимого числа рейсов и доказать её достижимость.
Указание. Возможны три варианта загрузки автомашин:
два больших блока и 14 малых,
один большой блок и 30 малых,
44 малых блока.
Указание. Если по трём типам загрузки автомашин принять их количество рейсов соответственно за m, n, k, то можно составить систему:

$$\begin{cases} 2n + m \geq 24; \quad n, m, k \in N_0; \\ 14n + 30m + 44k \geq 510. \end{cases}$$

Указание. Учитывая, что требуется найти наименьшее возможное значение $S = m + n + k$, получить следствия из рассматриваемой системы для оценки величины S.
Указание. Для достаточно объективной оценки суммы $S = m + n + k$ удобно умножить первое неравенство на 14 и сложить со вторым неравенством.

Решение. Рассмотрим типы загрузки автомашин. С учётом вместимости и грузоподъёмности автомашин получаем:
m рейсов: два больших блока и 14 малых,
n рейсов: один большой блок и 30 малых,
k рейсов: 44 малых блока, где $n, m, k, \in N_0$.
Так как надо перевезти все блоки, то получаем:

$$\begin{cases} 2n + m \geq 24; \quad n, m, k \in N_0; \\ 14n + 30m + 44k \geq 510. \end{cases}$$

Требуется найти наименьшее возможное при этих условиях значение суммы $S = m + n + k$. Умножив первое неравенство на 14 и сложив со вторым, получим следствие:

$$42n + 44m + 44k \geq 14 \cdot 24 + 510 = 846.$$

Запишем оценку:

$$44S = 44n + 44m + 44k \geq 42n + 44m + 44k \geq 846 \quad \Longrightarrow \quad S \geq \frac{846}{44} = 19\frac{5}{22}.$$

Значит, в силу целочисленности S, можно говорить, что $S \geq 20$. Следовательно, рейсов не может быть меньше 20. Поскольку при получении оценки снизу для S мы использовали не эквивалентный переход, а следствие, то необходимо предъявить набор значений m, n и k, при которых выполняется условие задачи и $S = 20$. Выбрав, например, $n = 12$, $m = 0$, $k = 8$, получаем $S = 20$ и выполнение условия задачи.

З а м е ч а н и е. При обосновании достижимости значения $S = 20$ набор соответствующих чисел m, n, k может отличаться от предложенного.

О т в е т. 20 рейсов.

Задача 8. (Геол-99.6)

Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в которой $a_3 = -13$ и $a_7 = 3$. Определить, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найти значение этой суммы.

И д е я. Найдя первый член и разность прогрессии, выразить искомую сумму как функцию от количества членов прогрессии.
У к а з а н и е. Если a_1 – первый член прогрессии, d – её разность, то получаем:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = -13, \\ a_7 = a_1 + 6d = 3; \end{cases}$$

У к а з а н и е. Найдя $a_1 = -21$ и $d = 4$, выразить искомую сумму $S_n = n(2n-23)$.
У к а з а н и е. Исследовав функцию $f(n) = 2n^2 - 23n$ на минимум как параболу, получаем, что для ответа на вопрос задачи нужно сравнить $f(5)$ и $f(6)$.

Р е ш е н и е. Если a_1 – первый член прогрессии, d – её разность, то получаем:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = -13, \\ a_7 = a_1 + 6d = 3; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = -21, \\ d = 4. \end{cases}$$

Сумма n первых членов:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{n} \cdot n = (2n - 23)n = 2n^2 - 23n.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t^2 - 23t$, $t \in \mathbb{R}$; её наименьшее значение достигается в вершине параболы (так как $f(t)$ задана квадратным трёхчленом, ветви соответствующей параболы направлены вверх): $t_0 = 23/4 \in (5; 6)$. Устанавливая соответствие $f(t)$ с S_n в связи с тем, что $t \in \mathbb{R}$, тогда как $n \in \mathbb{N}$, получаем, что для ответа на вопрос задачи достаточно вычислить и сравнить $f(5)$ и $f(6)$:

$$f(5) = 50 - 115 = -65 > -66 = 72 - 138 = f(6).$$

Значит, наименьшее значение суммы равно -66, и достигается оно при $n = 6$.

О т в е т. При шести членах; -66.

Задача 9. (Экон-94.5)

Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\dfrac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \dfrac{40500}{n}\right|$ тыс.руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 - \frac{3n}{10}$ тыс.руб. Определить ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

Идея. Составив выражение для "функции прибыли" как зависимости от числа проданных телевизоров, исследовать её на наибольшие значения с учётом вариантов раскрытия модуля.

Указание. В силу прибыльности предприятия (из условия задачи) его месячный доход ориентирован на разность стоимости продажи телевизора и затрат на его изготовление.

Указание. Выражение для "функции прибыли" по n телевизорам в месяц можно рассматривать в виде:

$$P(n) = n\left(540 - \frac{3}{10}n\right) - n\left(\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|\right).$$

Указание. Исследуя случай равенства в выражении для "функции прибыли" и раскрывая модуль в нём по определению, получаем выражение функции в виде квадратного трёхчлена с отрицательным старшим коэффициентом:

$$P(n) = \begin{cases} -\frac{3}{10}n^2 + 360n - 81000, \text{ если } n \geq 450, \\ -\frac{3}{10}n^2 + 180n, \text{ если } n < 450, \end{cases}$$

Указание. Наибольшее значение квадратного трёхчлена с отрицательным старшим коэффициентом достигается в его вершине.

Решение. Расходы предприятия по выпуску одного телевизора:

$$r(n) \geq \frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right| \text{ тыс.руб.}$$

Цена реализации одного телевизора: $c(n) \leq 540 - \frac{3}{10}n$ тыс.руб.

Так как предприятие по условию задачи прибыльно, то доход от продажи n телевизоров в месяц не превысит разности цены и расходов на выпуск:

$$P(n) \leq n(c(n) - r(n)) \leq n\left(540 - \frac{3}{10}n - \frac{40500}{n} - 270 + \left|90 - \frac{40500}{n}\right|\right) =$$

$$= -\frac{3}{10}n^2 + 270n + |90n - 40500| - 40500.$$

Рассмотрим "функцию прибыли" от числа реализованных телевизоров по случаю равенства:

$$P(n) = -\frac{3}{10}n^2 + 270n + |90n - 40500| - 40500$$

Раскрывая модуль через точку смены знака, находим:

$$P(n) = \begin{cases} -\dfrac{3}{10}n^2 + 360n - 81000, \text{ если } n \geq 450, \\ -\dfrac{3}{10}n^2 + 180n, \text{ если } n < 450, \end{cases}$$

В каждом из случаев это квадратный трёхчлен с отрицательным старшим коэффициентом, то есть его наибольшее значение достигается в вершине.

1)$n \geq 450,\ n_0 = \dfrac{-360 \cdot 5}{-3} = 600,$

$P(600) = -\dfrac{3}{10}600^2 + 360 \cdot 600 - 81000 = 27000$ тыс.руб.

2)$n < 450,\ n_0 = \dfrac{-180 \cdot 5}{-3} = 300,$

$P(300) = -\dfrac{3}{10}300^2 + 180 \cdot 300 = 27000$ тыс.руб.

Так как эти значения равны, то в ответ нужно внести оба варианта.

Ответ. 300 или 600 шт.

Задача 10. (ВМК-95.5)

Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью ровно 2500 кв.м. Стоимость одного дома площадью a кв.м складывается из стоимости материалов $p_1 a^{3/2}$ тыс.руб., стоимости строительных работ $p_2 a$ тыс.руб. и стоимости отделочных работ $p_3 a^{1/2}$ тыс.руб. Числа $p_1,\ p_2,\ p_3$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, а их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут меньше, чем затраты на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными?

Идея. Вычислив p_1, p_2, p_3 на основе условия задачи, составить "функцию затрат"на строительство произвольного числа домов и исследовать её на наименьшее значение при целочисленности аргумента.

Указание. Условие принадлежности коэффициентов p_1, p_2, p_3 к одной геометрической прогрессии приводит к соответствующей системе уравнений, решениями которой являются наборы:

$p_1 = 1,\ p_2 = 4,\ p_3 = 16$ и $p_1 = 16,\ p_2 = 4,\ p_3 = 1$.

Указание. Подставив оба набора (p_1; p_2; p_3) в условие строительства 63-х домов получим, что подходит лишь первый вариант:

$$p_1 = 1,\ p_2 = 4,\ p_3 = 16.$$

Указание. Учитывая, что по смыслу задачи $a = \dfrac{2500}{n}$ м^2, искомая "функция затрат" на строительство n домов принимает вид:

$P(n) = n(p_1 a\sqrt{a} + p_2 a + p_3\sqrt{a}) = 2500 \cdot \dfrac{50}{\sqrt{n}} + 10000 + 16 \cdot 50\sqrt{n};\ n \in \mathbb{N}.$

Указание. Полученную "функцию затрат" удобно исследовать на наименьшее значение с помощью неравенства, связывающего среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел.
Указание. Наименьшее значение $P(n)$ достигается при выполнении равенства $(n \in \mathbb{R}, n > 0)$:

$$16 \cdot 50\sqrt{n} = 2500 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}},$$

то есть при n=156,25. Значит, возвращаясь к $n \in \mathbb{N}$, следует сравнить значения функций $f(156) \vee f(157)$.

Решение. Пусть требуется построить ровно $n \in \mathbb{N}$ домов общей площадью $S = 2500$ м^2. Если один дом площадью a м^2, то по условию его стоимость составляется из:
$p_1 a\sqrt{a}$ тыс.руб. за материалы;
$p_2 a$ тыс.руб. за строительные работы;
$p_2\sqrt{a}$ тыс.руб. за отделочные работы.
Несложно видеть, что $a = \dfrac{S}{n} = \dfrac{2500}{n}$м^2;
из условия принадлежности коэффициентов p_1, p_2, p_3 к одной геометрической прогрессии получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 21, \\ p_1 p_2 p_3 = 64, \\ p_2^2 = p_1 p_3. \end{cases}$$

Из последних двух: $p_2 = 4$, тогда:

$$\begin{cases} p_1 + p_3 = 17, \\ p_1 p_3 = 16. \end{cases}$$

Значит, возможны два набора коэффициентов:
$p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 16$ и $p_1 = 16$, $p_2 = 4$, $p_3 = 1$.

Проведём отбор значений на основе заданного в условии частного случая (63 дома). При $n = 63$ должно выполняться неравенство:

$$p_1 a\sqrt{a} \leq p_2 a + p_3\sqrt{a} \quad \Longleftrightarrow \quad p_1 a < p_2\sqrt{a} + p_3.$$

Так как в этом случае $a = \dfrac{2500}{63}$, то

$$\frac{2500p_1}{63} < \frac{50p_2}{3\sqrt{7}} + p_3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2500p_1 < 150\sqrt{7}p_2 + 63p_3.$$

Подставим наборы коэффициентов:
1) $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 16$. Проверим выполнение неравенства:

$$\begin{array}{rcl} 2500 & < & 600\sqrt{7} + 63 \cdot 16 \\ 625 & < & 150\sqrt{7} + 63 \cdot 4 \\ 373 & < & 150\sqrt{7} \\ 139129 & < & 157500 - \text{верно} \end{array}$$

2) $p_1 = 16,\ p_2 = 4,\ p_3 = 1$. Проверим выполнение неравенства:

$$\begin{array}{rcl} 16 \cdot 2500 & < & 600\sqrt{7} + 63 \\ 40000 - 63 & < & 600\sqrt{7} \end{array}$$

но $600\sqrt{7} < 600 \cdot 3 = 1800$, поэтому неравенство неверно.
Окончательно получаем:

$$p_1 = 1,\ p_2 = 4,\ p_3 = 16, a = \frac{2500}{n}\text{м}^2.$$

Тогда общая "функция затрат" на строительство n домов принимает вид:

$$P(n) = n(p_1 a\sqrt{a} + p_2 a + p_3\sqrt{a}) = \frac{2500 \cdot 50}{\sqrt{n}} + 4 \cdot 2500 + 16 \cdot 50\sqrt{n} =$$

$$= 200\left(4\sqrt{n} + \frac{625}{\sqrt{n}}\right) + 10000; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наименьшего значения $P(n)$ достигает там же, где и

$$f(n) = 4\sqrt{n} + \frac{625}{\sqrt{n}}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим $f(t) = 4t + \dfrac{625}{t}$; $t > 0,\ t \in \mathbb{R}$; её наименьшее значение по теореме о среднем геометрическом и среднем арифметическом достигается тогда и только тогда, когда $4t = \dfrac{625}{t}$, то есть $t = \dfrac{25}{2}$.
Возвращаясь к натуральному числу n в качестве аргумента в функции $f(n)$, получаем:

$$t = \sqrt{n},\ n = \frac{625}{4} = 156,25 \in (156; 157);$$

значит, требуется сравнить между собой значения функций $f(156)$ и $f(157)$.

$$f(156) = 4\sqrt{156} + \frac{625}{\sqrt{156}} = \frac{4 \cdot 156 + 625}{\sqrt{156}} = \frac{1249}{2\sqrt{39}};$$

$$f(157) = 4\sqrt{157} + \frac{625}{\sqrt{157}} = \frac{4 \cdot 157 + 625}{\sqrt{157}} = \frac{1253}{\sqrt{157}}.$$

Сравним

$$\begin{array}{rcl} f(156) & \vee & f(157) \\ \dfrac{1249}{2\sqrt{39}} & \vee & \dfrac{1253}{\sqrt{157}} \\ 1249\sqrt{157} & \vee & 2506\sqrt{39} \\ (1250 - 1)^2 \cdot 157 & \vee & (2500 + 6)^2 \cdot 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
1250^2 \cdot 157 - 2500 \cdot 157 + 157 & \vee & 39 \cdot 2500^2 + 2 \cdot 6 \cdot 2500 \cdot 39 + 36 \cdot 39 \\
157 \cdot 1250^2 - 157 \cdot 2500 & \vee & 39 \cdot 4 \cdot 1250^2 + 39 \cdot 12 \cdot 2500 + 1247 \\
1250^2 & \vee & 2500(468 + 157) + 1247 \\
1250^2 & \vee & 625 \cdot 2500 + 1247 \\
0 & < & 1247
\end{array}$$

значит, $f(156) < f(157)$; следовательно, условие задачи реализуется при $n = 156$.

Ответ. 156 домов.

5. Использование свойств квадратного трехчлена в задачах с параметрами

5.1. Исследование свойств квадратичной функции в зависимости от значений параметра. Теорема Виета

Задача 1. (ЕГЭ.С)

При каких значениях a функция $y = x^2 + (a-2)x + 0,25$ не принимает отрицательных значений?

Идея. При всех значениях x должно выполняться неравенство:

$$x^2 + (a-2)x + 0,25 \geq 0.$$

Указание. Исследовать знак дискриминанта.
Указание. Должно выполняться условие $D \leq 0$.

Решение. Неравенство $x^2 + (a-2)x + 0,25 \geq 0$ справедливо при все значениях x только, если дискриминант неположителен:

$$D = (a-2)^2 - 1 = (a-2+1)(a-2-1) = (a-1)(a-3) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \in [1;3].$$

Ответ. $[1;3]$.

Задача 2. (Биол-75.2)

Найти все значения параметра p, при которых квадратное уравнение $(3x)^2 + (3^{3+\frac{1}{p}} - 15)x + 4 = 0$ имеет ровно одно решение.

Идея. Квадратное уравнение имеет ровно одно решение, если его дискриминант равен нулю.

Указание. Найти p, при которых $D = (27 \cdot 3^{\frac{1}{p}} - 15)^2 - 36 \cdot 4 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$9x^2+(27\cdot 3^{\frac{1}{p}}-15)x+4=0;$$

оно имеет ровно одно решение при нулевом дискриминанте:

$$D=(27\cdot 3^{\frac{1}{p}}-15)^2-36\cdot 4=0 \iff 27\cdot 3^{\frac{1}{p}}-15=\pm 12 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3^{\frac{1}{p}}=1; \\ 3^{\frac{1}{p}}=\dfrac{1}{9}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{p}=0; \\ \dfrac{1}{p}=-2; \end{array}\right. \iff p=-\frac{1}{2}.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{2}$.

Задача 3. (У)

Пусть $4a+2b+c>0$ и уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Каков знак c?

Идея. Исследовать функцию $f(x)=ax^2+bx+c$ на предмет знакопостоянства.
Указание. Определить x_0, для которого $f(x_0)=4a+2b+c$.
Указание. Поскольку $f(2)=4a+2b+c>0$, то $f(x)>0$ для всех $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Так как уравнение не имеет действительных корней, то функция $f(x)=ax^2+bx+c$ не обращается в ноль и, следовательно, при всех x сохраняет знак. Поскольку $f(2)=4a+2b+c>0$, то $f(x)>0$ для всех $x\in\mathbb{R}$. И так как $c=f(0)$, то $c>0$.

Ответ. $c>0$.

Задача 4. (У)

При каких значениях q уравнение $x^2-px+q=0$ имеет решение при любом p?

Идея. Записать условие существование решения с помощью неравенства для дискриминанта.
Указание. Неравенство $D=p^2-4q\geq 0$ должно выполняться при любом p.

Решение. Уравнение будет иметь решение, если

$$D=p^2-4q\geq 0 \iff q\leq\frac{p^2}{4}.$$

А так как неравенство $q\leq\dfrac{p^2}{4}$ должно выполняться при любом p, то $q\leq 0$.

Ответ. $q\leq 0$.

Задача 5. (У)

Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.

Идея. Воспользоваться теоремой Виета.
Указание. Выразить сумму четвёртых степеней через сумму и произведение корней с помощью выделения полного квадрата.

Решение. По теореме Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = -q. \end{cases}$ Выразим $x_1^4 + x_2^4$ через p и q:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (p^2 + 2q)^2 - 2q^2.$$

Ответ. $(p^2 + 2q)^2 - 2q^2$.

Задача 6. (У)

Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются сумма квадратов и сумма кубов корней данного уравнения.

Идея. Воспользоваться теоремой Виета.
Указание. С помощью теоремы Виета найти сумму квадратов и сумму кубов корней исходного уравнения.
Указание. $\begin{cases} y_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q, \\ y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -p^3 + 3pq. \end{cases}$
Указание. С помощью теоремы Виета составить новое уравнение с такими корнями.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения, y_1 и y_2 – корни уравнения, которое надо составить. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Выразим y_1 и y_2 через p и q:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2, \\ y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2), \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y_1 = p^2 - 2q, \\ y_2 = -p\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = -p(p^2 - 3q) = -p^3 + 3pq. \end{cases}$$

Теперь составим уравнение с корнями y_1 и y_2:

$$(y - y_1)(y - y_2) = 0 \iff y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0 \iff$$

$$\iff y^2 + \left(p^3 - p^2 - 3pq + 2q\right)y - \left(p^2 - 2q\right)\left(p^3 - 3pq\right) = 0.$$

Ответ. $y^2 + \left(p^3 - p^2 - 3pq + 2q\right)y - \left(p^2 - 2q\right)\left(p^3 - 3pq\right) = 0.$

Задача 7. (Псих-78.5)

Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2+bx+c$ выполнены неравенства: $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определить знак коэффициента a.

Идея. Выписать соответствующие неравенства и сложить их с такими коэффициентами, чтобы из получившегося неравенства можно было определить знак a.
Указание. Из условия задачи получаем:

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c < 1, \\ f(1) = a + b + c > -1, \\ f(3) = 9a + 3b + c < -4. \end{cases}$$

Указание. Сложить неравенства с коэффициентами 1, -2 и 1 соответственно.

Решение. Для наглядности можно привлечь график $f(x)$ в координатной плоскости: лучи из т. $A(-1;1)$, т. $B(1;-1)$, т. $C(3;-4)$ содержат точки графика $f(x)$; на визуальном уровне ясно, что $a \neq 0$ и парабола может иметь лишь отрицательный старший коэффициент (ветви вниз); строгое доказательство этого факта неизбежно выведет на геометрическое исследование ΔABC и расположения его вершин, а также на вопрос о направлении выпуклости параболы (любая точка графика $f(x)$ будет лежать выше произвольно выбранной хорды этого графика $\Rightarrow$ выпуклость вверх, то есть ветви вниз $a < 0$), что, вообще говоря, составляет отдельную теорию и задаёт свой класс задач.

Поэтому запишем данные в условии неравенства и получим из них неравенство, позволяющее определить знак коэффициента a:

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c < 1, \\ f(1) = a + b + c > -1, \\ f(3) = 9a + 3b + c < -4; \end{cases}$$

складываем первое неравенство с третьим: $10a + 2b + 2c < -3$; прибавив к этому неравенству второе неравенство системы, домноженное на -2, получим:

$$4a < -\frac{1}{2} \iff a < -\frac{1}{8} \implies a < 0.$$

Ответ. Минус.

Задача 8. (Физ-94(2).7)

Найти все значения a, для каждого из которых система $\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2; \end{cases}$

выполняется хотя бы для одного x.

Идея. Отрезок (в вырожденном случае точка), являющийся решением первого неравенства, должен пересекаться с лучом, являющимся решением второго неравенства.

Указание. Меньший корень квадратного трёхчлена должен не превосходить 2.
Указание. Найти искомое значение параметра из неравенства:

$$6 - \sqrt{36-a} \le 2.$$

Решение. Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} x^2 - 12x + a \le 0, \\ x \le 2; \end{cases}$$

квадратное неравенство выполнимо при $D \ge 0 \iff a \le 36$. Решением квадратного неравенства будет отрезок $[x_1; x_2]$ (в случае совпадающих корней – точка); для выполнения условия задачи достаточно потребовать:

$$x_1 \le 2 \quad \iff \quad 6 - \sqrt{36-a} \le 2 \quad \iff \quad \sqrt{36-a} \ge 4 \quad \iff \quad a \le 20.$$

Ответ. $(-\infty; 20]$.

Задача 9. (М/м-71.4)

Найти все α, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2 + 2x + \alpha \le 0, \\ x^2 - 4x - 6\alpha \le 0; \end{cases}$ имеет единственное решение.

Идея. Рассмотреть три возможных случая взаимного расположения отрезков, являющихся решениями данных неравенств.

Указание. Либо левая граница одного отрезка является правой границей другого; либо один из отрезков вырождается в точку, которая принадлежит другому отрезку.

Указание. Для $f(x) = x^2 + 2x + \alpha$ и $g(x) = x^2 - 4x - 6\alpha$ возможны следующие варианты:

1) $\begin{cases} f(x) = g(x) = 0, \\ -1 < x < 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} D(f) = 0, \\ g(x) \le 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} D(g) = 0, \\ f(x) \le 0; \end{cases}$

где $D(f)$ и $D(g)$ – дискриминанты трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

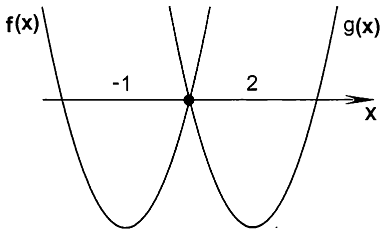
Решение. Обозначим для удобства:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x + \alpha \le 0, \quad x_{\text{в}} = -1, \quad D_1 = 1 - \alpha \ge 0, \\ g(x) = x^2 - 4x - 6\alpha \le 0, \quad x_{\text{в}} = 2, \quad D_1 = 4 + 6\alpha \ge 0; \end{cases}$$

чтобы система имела решения, необходима неотрицательность обоих дискриминантов, то есть $-\frac{2}{3} \le \alpha \le 1$; графиками функций являются две параболы; условию задачи отвечают три случая:

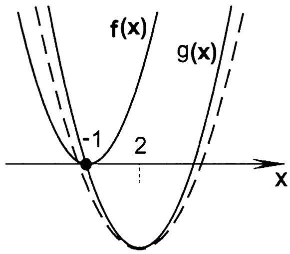
1) $\begin{cases} f(x) = g(x) = 0, \\ -1 < x < 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 2x + \alpha = x^2 - 4x - 6\alpha, \\ x^2 + 2x + \alpha = 0, \\ -1 < x < 2; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} 6x + 7\alpha = 0, \\ x^2 + 2x + \alpha = 0, \\ -1 < x < 2; \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\dfrac{6}{7}x, \\ x^2 + \dfrac{8}{7}x = 0, \\ -1 < x < 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ \alpha = 0. \end{cases}$$

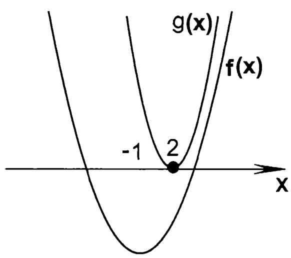


Условие $f(x) = g(x) = 0$ без уточнения $x \in (-1; 2)$ является только необходимым, так как не учитывает возможной „вложенности“ парабол.

2) Уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень, одновременно удовлетворяющий неравенству $g(x) \leq 0$. Единственное решение уравнения $f(x) = 0$ достигается при $D_1 = 0$, то есть $\alpha = 1$, $x = -1$. Проверим условие $g(x) \leq 0$: $g(-1) = 1 + 4 - 6 = -1 < 0$ – верно $\implies$ $\alpha = 1$ – подходит.



3) Уравнение $g(x) = 0$ имеет единственный корень, одновременно удовлетворяющий неравенству $f(x) \leq 0$. Единственное решение уравнения $g(x) = 0$ достигается при $D_1 = 0$, то есть $\alpha = -\dfrac{2}{3}$, $x = 2$. Проверим условие $f(x) \leq 0$: $f(2) = 4 + 4 - \dfrac{2}{3} > 0$ – не подходит.



Ответ. 0; 1.

Задача 10. (Экон-98.5)

Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции $f(x)=\dfrac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}$ принадлежат интервалу $(-1;2)$.

Идея. Надо найти c такие, что $-1<\dfrac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}<2$ для всех значений x.
Указание. Домножить двойное неравенство

$$-1<\frac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}<2$$

на знаменатель, так как он положителен при всех x.
Указание. Найти c такие, что система $\begin{cases} 3x^2+(c-3)x+1>0, \\ 3x^2-(c+6)x+5>0; \end{cases}$ справедлива при всех x.
Указание. Необходимо и достаточно, чтобы соответствующие дискриминанты были отрицательными.

Решение. Нужно найти такие $c\in\mathbb{R}$, что для любого x из области определения выполняются неравенства:

$$-1<\frac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}<2.$$

Дискриминант квадратного трёхчлена $2x^2-3x+2$ отрицателен, следовательно, $2x^2-3x+2>0$ при любом x, и исходные неравенства равносильны следующим:

$$\begin{cases} -(2x^2-3x+2)<x^2+cx-1, \\ x^2+cx-1<2(2x^2-3x+2); \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2+(c-3)x+1>0, \\ 3x^2-(c+6)x+5>0. \end{cases}$$

Для того, чтобы эти неравенства выполнялись при любом x, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие дискриминанты были отрицательными. Запишем это условие в виде системы и решим её.

$$\begin{cases} (c-3)^2-12<0, \\ (c+6)^2-60<0; \end{cases} \iff \begin{cases} -2\sqrt{3}<c-3<2\sqrt{3}, \\ -2\sqrt{15}<c+6<2\sqrt{15}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3-2\sqrt{3}<c<3+2\sqrt{3}, \\ -6-2\sqrt{15}<c<2\sqrt{15}-6; \end{cases} \iff c\in(3-2\sqrt{3};2\sqrt{15}-6).$$

Ответ. $(3-2\sqrt{3};2\sqrt{15}-6)$.

Задача 11. (Физ-93.7)

Уравнение $ax^2+bx+2=0$, где $a<0$, имеет одним из своих корней число $x=3$. Решить уравнение $ax^4+bx^2+2=0$.

Идея. Определить знак второго корня квадратного уравнения с помощью теоремы Виета.
Указание. Уравнение $at^2 + bt + 2 = 0$, где $t = x^2 \geq 0$, имеет корни $t_1 = 3$ и $t_2 < 0$.

Решение. Согласно условию задачи уравнение $at^2+bt+2=0$, где $a<0$, одним из решений имеет $t_1 = 3$. По теореме Виета $t_1t_2 = \dfrac{2}{a} < 0$, следовательно, $t_2 < 0$. Положим $t = x^2 \geq 0$ (то есть перейдем к уравнению $ax^4 + bx^2 + 2 = 0$). Получим: $x^2 = t_1 = 3$ или $x^2 = t_2 < 0$, откуда $x = \pm\sqrt{3}$.

Ответ. $\pm\sqrt{3}$.

Задача 12. (Физ-89.5)

Найти все значения параметра m, при каждом из которых уравнение

$$(2x)^2 - 4x \cdot (m \cdot 3^m)^{\frac{1}{2}} + 3^{m+1} + m - 3 = 0$$

имеет корни. Выяснить знаки корней при различных значениях m.

Идея. Квадратное уравнение имеет корни при $D \geq 0$. Знаки корней можно определить с помощью теоремы Виета.
Указание. $D_1 = 4m \cdot 3^m - 4\,(3 \cdot 3^m + m - 3) =$

$$= 4m \cdot 3^m - 12 \cdot 3^m - 4(m-3) = 4(m-3)(3^m - 1) \geq 0.$$

Указание. Из условия существования величины $(m \cdot 3^m)^{\frac{1}{2}}$ следует, что $m \geq 0$.
Указание. Знаки корней можно определить с помощью теоремы Виета.

Решение. Перепишем уравнение при $m \geq 0$:

$$4x^2 - 4\sqrt{m \cdot 3^m} \cdot x + 3 \cdot 3^m + m - 3 = 0;$$

оно имеет корни при $D_1 \geq 0$:

$$D_1 = 4m \cdot 3^m - 4\,(3 \cdot 3^m + m - 3) =$$
$$= 4m \cdot 3^m - 12 \cdot 3^m - 4(m-3) = 4(m-3)(3^m - 1) \geq 0.$$

С учётом $m \geq 0$ получаем, что решения есть при $m = 0$ и $m \geq 3$. Выясним теперь какие знаки у корней:
1) при $m = 0$ получаем $4x^2 = 0 \iff x = 0$;
2) при $m = 3$ $D_1 = 0$ и, значит, единственный корень:

$$4x^2 - 36x + 81 = 0 \iff (2x-9)^2 = 0 \iff x = \frac{9}{2} > 0;$$

3) при $m > 3$ $D_1 > 0$ и, следовательно, два корня. По теореме Виета:
$x_1 + x_2 = \sqrt{m \cdot 3^m} > 0$;
$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{4}(3^{m+1} + m - 3) > 0$;
значит, оба корня положительны.

Ответ. $\{0\} \cup [3;+\infty)$; если $m = 0$, то $x = 0$; если $m = 3$, то $x = \dfrac{9}{2} > 0$; если $m > 3$, то два положительных корня; если $0 \neq m < 3$, то нет решений.

Задача 13. (Физ-91.5)

При каких значениях a все корни уравнения
$3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$ удовлетворяют условию $|x| < 1$?

Идея. Выразить корни уравнения через параметр и решить относительно параметра соответствующее неравенство с модулем.
Указание. Рассмотреть отдельно случай, когда неравенство не является квадратным, то есть при $a = 0$.

Указание. При $a \neq 0$ получаем $D = \left(a(a-4) + \dfrac{1}{3a}\right)^2 \geq 0$.

Указание. Квадратное уравнение имеет корни:

$$x_1 = -a(a-4),\ x_2 = \frac{1}{3a}.$$

Решение. Если $a = 0$, то $x = 0$, то есть $x = 0$ – единственное решение.
При $a \neq 0$ поделим на $3a$ обе части уравнения:

$$x^2 + \left(a(a-4) - \frac{1}{3a}\right)x - \frac{1}{3}(a-4) = 0;$$

дискриминант: $D = \left(a(a-4) - \dfrac{1}{3a}\right)^2 + \dfrac{4}{3}(a-4) =$

$= a^2(a-4)^2 - 2a(a-4)\cdot\dfrac{1}{3a} + \dfrac{1}{9a^2} + 4a\dfrac{a-4}{3a} = \left(a(a-4) + \dfrac{1}{3a}\right)^2 \geq 0;$

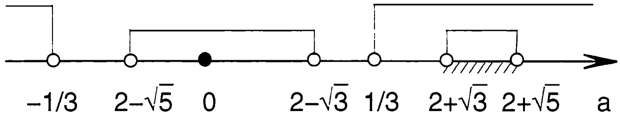
корни: $x_1 = -a(a-4),\ x_2 = \dfrac{1}{3a}$.
Условие задачи будет выполнено, если

$$\begin{cases} |-a(a-4)| < 1, \\ \left|\dfrac{1}{3a}\right| < 1; \end{cases}$$

возводим оба неравенства в квадрат и раскладываем на множители:

$$\begin{cases} \left(4a - a^2\right)^2 < 1, \\ 1 < 9a^2,\ a \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(a^2 - 4a + 1\right)\left(a^2 - 4a - 1\right) < 0, \\ (3a+1)(3a-1) > 0; \end{cases}$$

точки смены знака в первом неравенстве: $a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, $a_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$; значит, решением системы являются $a \in (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5})$.



Ответ. $\{0\} \cup (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5})$.

Задача 14. (Псих-81.5)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трёхчлена $4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ на отрезке $0 \le x \le 2$ равно 3.

Идея. Наименьшее значение достигается либо в вершине параболы, либо на одной из границ отрезка.

Указание. Рассмотреть различные варианты расположения вершины параболы относительно отрезка.

Указание. Первый случай: если $x_в \in [0;2]$, то наименьшее значение $f(x)$ достигается в вершине.

Указание. Второй случай: если $x_в < 0$, то наименьшее значение $f(x)$ на $[0;2]$ достигается в т. $x = 0$.

Указание. Третий случай: если $x_в > 2$, то наименьшее значение $f(x)$ достигается при $x = 2$.

Решение. Обозначим $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$. Графиком является парабола, ветви вверх, $x_в = \dfrac{a}{2}$. Наименьшее значение $f(x)$ достигается либо в вершине, либо на одной из границ исследуемого отрезка $[0;2]$. Все зависит от расположения вершины.

1) Если $x_в \in [0;2]$, то наименьшее значение $f(x)$ достигается в вершине, то есть выполнена система:

$$\begin{cases} 0 \le \dfrac{a}{2} \le 2, \\ f(x_в) = 3; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le a \le 4, \\ a^2 - 2a^2 + a^2 - 2a + 2 = 3; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le a \le 4, \\ a = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

у системы нет решений. Значит, этот случай невозможен.

2) Если $x_в < 0$, то наименьшее значение $f(x)$ на $[0;2]$ достигается в левой границе отрезка, так как $f(x)$ на этом отрезке возрастает. Значит, должна выполняться система:

$$\begin{cases} x_в < 0, \\ f(0) = 3; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a}{2} < 0, \\ a^2 - 2a + 2 = 3; \end{cases} \iff \begin{cases} a < 0, \\ a^2 - 2a - 1 = 0; \end{cases} \iff a = 1 - \sqrt{2}.$$

3) Если $x_в > 2$, то наименьшее значение $f(x)$ на $[0;2]$ достигается в правой границе отрезка, так как $f(x)$ на $[0;2]$ убывает. Значит, должна выполняться система:

$$\begin{cases} x_в > 2, \\ f(2) = 3; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a}{2} > 2, \\ a^2 - 10a + 18 = 3; \end{cases} \iff \begin{cases} a > 4, \\ a^2 - 10a + 15 = 0; \end{cases} \iff a = 5 + \sqrt{10}.$$

Ответ. $1 - \sqrt{2}$; $5 + \sqrt{10}$.

5.2. Теоремы о расположении корней квадратного трехчлена на числовой оси

Задача 1. (У)

При каких значениях a оба корня уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше $\frac{1}{2}$?

Идея. Использовать необходимое и достаточное условие того, что оба корня больше заданного числа.

Указание. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда

$$\begin{cases} x_1>M, \\ x_2>M; \end{cases} \iff \begin{cases} D>0, \\ a\cdot f(M)>0, \\ x_{\text{в}}>M. \end{cases}$$

Решение. Для того, чтобы оба корня уравнения были больше $\frac{1}{2}$ для $f(x)=(2-a)x^2-3ax+2a$ должны выполняться следующие условия

$$\begin{cases} D=9a^2-8a(2-a)>0, \\ (2-a)f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0, \\ x_{\text{в}}=\dfrac{3a}{2(2-a)}>\dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} 17a^2-16a>0, \\ (a-2)(a+2)<0, \\ \dfrac{2a-1}{a-2}<0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{16}{17};+\infty\right), \\ a\in(-2;2), \\ a\in\left(\dfrac{1}{2};2\right); \end{cases} \iff \frac{16}{17}<a<2.$$

Ответ. $\left(\dfrac{16}{17};2\right)$.

Задача 2. (У)

При каких значениях a один из корней уравнения
$(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+(a-5)=0$ больше 1, а другой меньше 1?

Идея. Использовать необходимое и достаточное условие того, что заданное число лежит между корнями квадратного трёхчлена.

Указание. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$. Тогда

$$x_1<M<x_2 \iff a\cdot f(M)<0.$$

Решение. Так как $x_1 < 1 < x_2$, то для

$$f(x) = (a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 5)$$

должно выполняться неравенство:

$$(a^2 + a + 1)f(1) < 0.$$

Поскольку $a^2 + a + 1 > 0$, получаем:

$$f(1) < 0 \iff a^2 + 4a - 7 < 0 \iff a \in (-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11}).$$

Ответ. $(-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$.

Задача 3. (У)

Найти все значения a, при которых оба корня уравнения $(a+1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1.

Идея. Использовать необходимое и достаточное условие того, что оба корня больше заданного числа.

Указание. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 > M, \\ x_2 > M; \end{cases} \iff \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_в > M. \end{cases}$$

Решение. Для того, чтобы оба корня уравнения были больше 1, для $f(x) = (a+1)x^2 - 3ax + 4a$ должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} D = 9a^2 - 16a(a+1) > 0, \\ (a+1)f(1) > 0, \\ x_в = \dfrac{3a}{2(a+1)} > 1; \end{cases} \iff \begin{cases} -7a^2 - 16a > 0, \\ (a+1)(2a+1) > 0, \\ \dfrac{a-2}{a+1} > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \in \left(-\dfrac{16}{7}; 0\right), \\ a \in (-\infty; -1) \cup (-1/2; +\infty), \\ a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty); \end{cases} \iff -\frac{16}{7} < a < -1.$$

Ответ. $\left(-\dfrac{16}{7}; -1\right)$.

Задача 4. (У)

Известно, что корни x_1 и x_2 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют неравенству $x_1 < -1 < x_2$. Доказать, что $a^2 + ac < ab$.

Идея. Использовать необходимое и достаточное условие того, что заданное число лежит между корнями квадратного трёхчлена.

Указание. $x_1 < -1 < x_2 \iff af(-1) < 0$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Решение. Так как $x_1 < -1 < x_2$, то должно выполняться неравенство $af(-1) < 0$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$. Получаем:

$$af(-1) < 0 \iff a(a-b+c) < 0 \iff a^2 + ac < ab,$$

что и требовалось доказать.

Задача 5. (Физ-94(2).7)

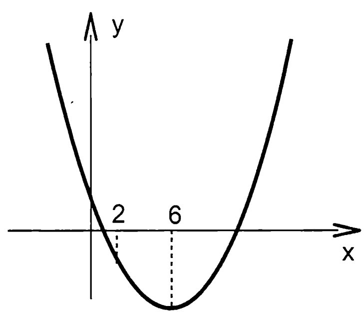
Найти все значения a, для каждого из которых система
$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases}$ выполняется хотя бы для одного x.

Идея. Исследовать варианты расположения т. $x = 2$ относительно корней квадратного трёхчлена.

Указание. У параболы $f(x) = x^2 - 12x + a$ ветви вверх, $x_в = 6$, решением неравенства будет отрезок между корнями.

Указание. Для существования решения квадратного неравенства, не превосходящего 2, необходимым и достаточным условием является $f(2) \leq 0$.

Решение. Переписав систему в виде: $\begin{cases} x^2 - 12x + a \leq 0, \\ x \leq 2; \end{cases}$ исследуем варианты расположения т. $x = 2$ относительно решения квадратного неравенства (парабола, $x_в = 6$, ветви вверх, значит, решением будет отрезок между корнями). Для наличия хотя бы одного решения на $x \leq 2$ достаточно выполнения условия:



$$f(2) \leq 0 \iff 4 - 24 + a \leq 0 \iff a \leq 20.$$

Заметим, что в этом случае не надо дополнительно исследовать знак дискриминанта, поскольку условие неположительности $f(x)$ хотя бы в одной точке гарантирует наличие корней.

Ответ. $(-\infty; 20]$.

Задача 6. (ЕГЭ.С)

При каком значении a область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 4x + a} + \sqrt{x-3}$ состоит из одной точки?

Идея. Записать область определения в виде системы неравенств и исследовать варианты расположения корней квадратного трёхчлена относительно точки $x = 3$.
Указание. У параболы $f(x) = -x^2 + 4x + a$ ветви вниз, $x_{\text{в}} = 2$. Тогда решением первого неравенства будет отрезок между корнями; решением второго неравенства является луч $[3; +\infty)$.
Указание. Множества решений неравенств будут пересекаться в одной точке, только если $x = 3$ будет корнем квадратного уравнения.

Решение. Запишем область определения в виде системы:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + a \geq 0, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

У параболы $f(x) = -x^2 + 4x + a$ ветви вниз, $x_{\text{в}} = 2$. Тогда решением первого неравенства будет отрезок между корнями; решением второго неравенства является луч $[3; +\infty)$. Множества решений неравенств будут пересекаться в одной точке только, если $x = 3$ будет корнем квадратного уравнения.

Подставим $x = 3$ в квадратное уравнение $-x^2 + 4x + a = 0$ и найдём a:

$$-9 + 12 + a = 0 \iff a = -3.$$

Ответ. -3.

Задача 7. (ЕГЭ.С)

При каком значении a область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 6x + a} + \sqrt{x-4}$ состоит из одной точки?

Идея. Записать область определения в виде системы неравенств и исследовать варианты расположения корней квадратного трёхчлена относительно точки $x = 4$.
Указание. У параболы $f(x) = -x^2 + 6x + a$ ветви вниз, $x_{\text{в}} = 3$. Тогда решением первого неравенства будет отрезок между корнями; решением второго неравенства является луч $[4; +\infty)$.
Указание. Множества решений неравенств будут пересекаться в одной точке, только если $x = 4$ будет корнем квадратного уравнения.

Решение. Запишем область определения в виде системы:

$$\begin{cases} -x^2 + 6x + a \geq 0, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

У параболы $f(x) = -x^2 + 6x + a$ ветви вниз, $x_{\text{в}} = 3$. Тогда решением первого неравенства будет отрезок между корнями; решением второго неравенства является луч $[4;+\infty)$. Множества решений неравенств будут пересекаться в одной точке, только если $x=4$ будет корнем квадратного уравнения.

Подставим $x=4$ в квадратное уравнение $-x^2+6x+a=0$ и найдём a:

$$-16+24+a=0 \iff a=-8.$$

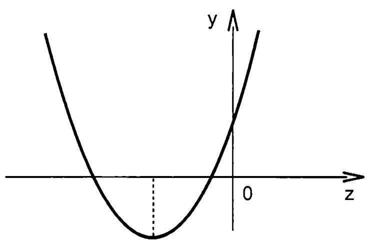
Ответ. -8.

Задача 8. (М/м-93(2).2)

Найти все значения a, при которых уравнение $4^x+(a^2+5)\cdot 2^x+9-a^2=0$ не имеет решений.

Идея. Сделать замену $z=2^x>0$ и исследовать варианты расположения точки $z=0$ относительно корней квадратного трёхчлена.
Указание. Сделать замену $z=2^x>0$. Тогда квадратный трёхчлен $f(z)=z^2+(a^2+5)z+9-a^2$ не должен иметь положительных корней.
Указание. Так как $z_в<0$, то должно выполняться условие $f(0)\geq 0$.

Решение. Обозначим: $f(z)=z^2+(a^2+5)z+9-a^2$, где $z=2^x>0$. Условие задачи выполнено, если уравнение $f(z)=0$ не имеет положительных решений.



Так как $z_в=\dfrac{-a^2-5}{2}<0$, то должно выполняться неравенство:

$$f(0)\geq 0 \iff 9-a^2\geq 0 \iff -3\leq a\leq 3.$$

Ответ. $[-3;3]$.

Задача 9. (ИСАА-91.6)

При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ y-|x|=a; \end{cases}$ имеет ровно два решения?

Идея. С помощью подстановки свести систему к одному уравнению с одной неизвестной.
Указание. Подстановкой система сводится к уравнению:

$$2x^2+2a|x|+a^2-1=0.$$

Указание. Полученное квадратное уравнение относительно $|x|$ должно иметь одно положительное решение.

Указание. $\left[\begin{array}{l} D_1 = 0, \quad x_в > 0; \\ f(0) < 0. \end{array}\right.$

Решение. Выразим из второго уравнения $y = |x| + a$ и подставим в первое уравнение:

$$x^2 + x^2 + 2a|x| + a^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 + 2a|x| + a^2 - 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно $|x| \geq 0$. Так как $y = |x| + a$ (линейно зависит от $|x|$), то любое решение квадратного уравнения автоматически даст решение системы.

Оба уравнения исходной системы четны по переменной x, то есть если x_0 удовлетворяет уравнению, то и $-x_0$ тоже ему удовлетворяет. Система имеет ровно два решения тогда и только тогда, когда уравнение $2x^2 + 2a|x| + a^2 - 1 = 0$ имеет ровно одно решение $|x| > 0$; это возможно в двух случаях:

$$\begin{cases} D_1 = 0, \\ x_в > 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad f(0) < 0.$$

Так как $D_1 = a^2 - 2\left(a^2 - 1\right) = 2 - a^2$ и $x_в = -\dfrac{a}{2}$, то в первом случае получаем:

$$\begin{cases} 2 - a^2 = 0, \\ -\dfrac{a}{2} > 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\sqrt{2}.$$

Во втором случае получаем:

$$a^2 - 1 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < a < 1.$$

Ответ. $\left\{-\sqrt{2}\right\} \cup (-1;1)$.

Задача 10. (Геол-97(1).8)

При каких α система $\begin{cases} \alpha(x-4) = 3(y+2), \\ y + \sqrt{x} = 0; \end{cases}$ имеет два различных решения?

Идея. С помощью подстановки свести систему к одному уравнению с одной неизвестной.

Указание. Выразив y из второго и подставив в первое уравнение, получить квадратное уравнение относительно $\sqrt{x}$.

Указание. Полученное квадратное уравнение

$$\alpha x + 3\sqrt{x} - (4\alpha + 6) = 0$$

относительно $\sqrt{x}$ должно иметь два различных неотрицательных решения.

Указание. Должны выполняться условия:

$$\begin{cases} D > 0, \\ \alpha \neq 0, \\ \alpha f(0) \geq 0, \\ x_{\text{в}} \geq 0; \end{cases}$$

где $f(x) = \alpha x + 3\sqrt{x} - (4\alpha + 6)$.

Решение. Выразим из второго уравнения $y = -\sqrt{x}$ и подставим в первое:

$$\alpha x - 4\alpha = -3\sqrt{x} + 6 \iff \alpha x + 3\sqrt{x} - (4\alpha + 6) = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно $\sqrt{x} \geq 0$.

Обозначим $t = \sqrt{x} \geq 0, f(t) = \alpha t^2 + 3t - (4\alpha + 6)$. Для того, чтобы исходная система имела два различных корня, необходимо и достаточно, чтобы полученное квадратное уравнение имело ровно два различных неотрицательных решения, то есть:

$$\begin{cases} D > 0, \\ \alpha \neq 0, \\ \alpha f(0) \geq 0, \\ t_{\text{в}} \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 9 + 4\alpha(4\alpha + 6) > 0, \\ \alpha \neq 0, \\ \alpha(-4\alpha - 6) \geq 0, \\ \dfrac{-3}{2\alpha} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} (4\alpha + 3)^2 > 0, \\ \alpha \neq 0, \\ \alpha(2\alpha + 3) \leq 0, \\ \alpha < 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \leq \alpha < 0, \\ \alpha \neq -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Замечание. Аналогичные условия для наличия двух неотрицательных решений можно записать и по теореме Виета.

Ответ. $\left[-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{4}; 0\right)$.

Задача 11. (Экон.К-77.4)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два решения.

Идея. С помощью определения логарифма получить квадратное уравнение относительно показательной функции.

Указание. $\log_3(9^x + 9a^3) = x \iff 9^x + 9a^3 = 3^x$.

Указание. Полученное показательное уравнение является квадратным относительно 3^x. Оно имеет два решения, если соответствующее квадратное уравнение имеет два положительных корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $9^x + 9a^3 = 3^x$. Обозначим $z = 3^x > 0$, тогда уравнение имеет два решения в тех и только тех случаях, когда уравнение $f(z) = z^2 - z + 9a^3 = 0$ имеет два положительных корня, т.е когда выполняются условия:

$$\begin{cases} D > 0, \\ z_{\text{в}} > 0, \\ f(0) > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 36a^3 > 0, \\ \dfrac{1}{2} > 0, \\ 9a^3 > 0; \end{cases} \iff 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}.$$

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$.

Задача 12. (Физ-94(1).7)

При каких значениях a уравнение $2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$ имеет четыре различных решения?

Идея. Для того, чтобы исходное уравнение имело четыре различных решения надо, чтобы квадратное относительно $|x+1|$ уравнение имело два различных положительных корня.

Указание. Уравнение $2az^2 - z + 1 = 0$, где $z = |x+1| \geq 0$, должно иметь два различных положительных решения.

Указание. Должны выполняться условия, заданные следующей системой:

$$\begin{cases} D > 0, \\ z_{\text{в}} > 0, \\ 2af(0) > 0. \end{cases}$$

Решение. Обозначим: $z = |x+1| \geq 0$; уравнение $2az^2 - z + 1 = 0$ должно иметь два различных положительных решения (тогда исходное уравнение будет иметь четыре решения). Это требование реализуется системой условий:

$$\begin{cases} D > 0, \\ z_{\text{в}} > 0, \\ 2af(0) > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 8a > 0, \\ \dfrac{1}{4a} > 0, \\ 2a > 0; \end{cases} \iff 0 < a < \frac{1}{8},$$

где $f(z) = 2az^2 - z + 1$.

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{8}\right)$.

Задача 13. (Геол-89.6)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)(1 + \sin x) + a + 3 = 0$$

не имеет решений.

Идея. Свести исходное уравнение к квадратному уравнению относительно $t = \sin x + 1,\ t \in [0;2]$.

Указание. Привести исходное уравнение к виду: $b^2t^2 - 2b^2t + b + 6 = 0$, где $b = a - 3$.

Указание. При $b \neq 0$ (уравнение является квадратным) корней на отрезке $[0;2]$ не будет, если либо уравнение вообще не имеет корней ($f(1) > 0$), либо корни расположены вне $[0;2]$ ($f(0) < 0$).

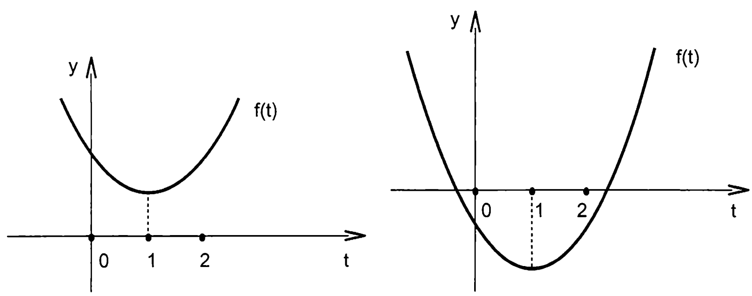
Решение. Выделяя полные квадраты и группируя, получаем:

$$(a-3)^2 \cdot (\sin x + 1)^2 - 2(a-3)^2 \cdot (\sin x + 1) + (a-3) + 6 = 0.$$

Обозначим $b = a - 3$ и сделаем замену $t = \sin x + 1,\ t \in [0;2]$. Тогда задача переформулируется следующим образом: найти все b, при которых для $t \in [0;2]$ уравнение $b^2t^2 - 2b^2t + b + 6 = 0$ не имеет решений.

1) Пусть $b = 0$, тогда уравнение принимает вид $6 = 0$ и решений не имеет.

2) Пусть $b \neq 0$, тогда уравнение является квадратным. Графиком функции $f(t) = b^2t^2 - 2b^2t + b + 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины $t_в = 1$, прямая $t = 1$ – ось симметрии параболы. Корней на отрезке $[0;2]$ такая парабола не будет иметь в двух случаях: либо уравнение вообще не имеет корней ($f(1) > 0$), либо корни расположены вне $[0;2]$ ($f(0) < 0$).



$$\left[\begin{array}{l} f(1) > 0; \\ f(0) < 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} b^2 - b - 6 < 0; \\ b + 6 < 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -2 < b < 3; \\ b < -6; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 1 < a < 6; \\ a < -3. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty; -3) \cup (1; 6)$.

Задача 14. (Экон.М-95.6)

Найти все значения p, при которых уравнение $x - 2 = \sqrt{-2(p+2)x + 2}$ имеет единственное решение.

Идея. Возвести обе части равенства в квадрат с учётом неотрицательности левой части, то есть решать как стандартное уравнение с радикалом.

Указание. Исходное уравнение имеет единственное решение в одном из двух случаев: либо полученное квадратное уравнение имеет один корень x, причём этот $x \geq 2$; либо квадратное уравнение имеет два корня, но только один из них удовлетворяет условию $x \geq 2$.

Указание. Найти значение p, при котором дискриминант равен нулю, вычислить корень и проверить выполнение условия $x \geq 2$.

Указание. В случае $D > 0$ квадратное уравнение имеет два корня, для которых должно выполняться:

$$\begin{cases} -p - \sqrt{p^2 - 2} < 2, \\ -p + \sqrt{p^2 - 2} \geq 2. \end{cases}$$

Решение. Решая уравнение как стандартное уравнение с радикалом, получаем, что система

$$\begin{cases} -2(p+2)x + 2 = (x-2)^2, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

должна иметь единственное решение. Переформулируем задачу: уравнение

$$-2(p+2)x + 2 = (x-2)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 2px + 2 = 0$$

должно иметь единственное решение на полупрямой $[2; +\infty)$. Так как $f(x) = x^2 + 2px + 2$ – парабола, то это возможно только в трёх случаях:

1) Уравнение имеет единственное решение $x \geq 2$, т.е.

$$\begin{cases} D_1 = 0, \\ x_{\text{в}} \geq 2; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p^2 - 2 = 0, \\ -p \geq 2; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p = \pm\sqrt{2}, \\ p \leq -2; \end{cases} \Longleftrightarrow \emptyset.$$

2) Уравнение имеет два решения, при этом $x_1 < 2$, а $x_2 = 2$, т.е.

$$\begin{cases} f(2) = 0, \\ x_{\text{в}} < 2; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4p + 6 = 0, \\ -p < 2; \end{cases} \Longleftrightarrow p = -\frac{3}{2}.$$

3) Уравнение имеет два решения, при этом $x_1 < 2$, а $x_2 > 2$, т.е.

$$f(2) < 0 \Longleftrightarrow 4p + 6 < 0 \Longleftrightarrow p < -\frac{3}{2}.$$

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$.

Задача 15. (Псих-93.5)

Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного трёхчлена

$$(a-1)x^2 - (2a+1)x + 2 + 5a.$$

1) Найти все a, при которых $x_1 > 1$, $x_2 > 1$.

2) Найти все b, при которых величина $(x_1 - b)(x_2 - b)$ принимает постоянное значение при всех a, при которых определена.

Идея. В пункте 1 применить теорему 1 теоретического материала, в пункте 2 использовать теорему Виета.

Указание. Пункт 1: согласно теореме 1 теоретического материала оба корня больше 1, только если $\begin{cases} D > 0, \ x_{\text{в}} > 1, \\ (a-1)f(1) > 0. \end{cases}$

Указание. Пункт 2: с использованием теоремы Виета получаем, что $(x_1 - b)(x_2 - b) = b^2 - 2b + 5 + \dfrac{7-3b}{a-1}$.

Решение. Обозначим $f(x) = (a-1)x^2 - (2a+1)x + 2 + 5a$, $a \neq 1$.

1) Для того чтобы оба корня были больше $M = 1$, необходимо и достаточно выполнения условий:

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_{\text{в}} > 1, \\ (a-1)f(1) > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} (2a+1)^2 - 4(a-1)(5a+2) > 0, \\ \dfrac{2a+1}{2a-2} > 1, \\ (a-1)(a-1-2a-1+5a+2) > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 16a^2 - 16a - 9 < 0, \\ \dfrac{1}{a-1} > 0, \\ (a-1)a > 0; \end{cases} \iff 1 < a < \frac{2+\sqrt{13}}{4}.$$

Замечание. Случай $D = 0$ (случай совпадающих корней) не рассматриваем, так как в условии явно проиндексированы два решения.

2) Выразим искомую величину через параметр:
$M = (x_1 - b)(x_2 - b) = x_1x_2 - b(x_1 + x_2) + b^2$; по теореме Виета при $D > 0$ получаем:

$$M = \frac{5a+2}{a-1} - b \cdot \frac{2a+1}{a-1} + b^2 = b^2 - b \cdot \frac{2(a-1)+3}{a-1} + \frac{5(a-1)+7}{a-1} =$$

$$= b^2 - b\left(2 + \frac{3}{a-1}\right) + \left(5 + \frac{7}{a-1}\right) = b^2 - 2b + 5 + \frac{7-3b}{a-1}.$$

Так как M не должно (по условию) зависеть от a, то $7 - 3b = 0 \iff b = \dfrac{7}{3}$.

Ответ. 1) $\left(1; \dfrac{2+\sqrt{13}}{4}\right)$; 2) $\dfrac{7}{3}$.

Задача 16. (Биол-77.5)

Найти все те значения параметра s, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \dfrac{3x}{s} + 2s = 0$ и $x^2 + \dfrac{12x}{s} - s = 0$ не перемежаются, то есть оба уравнения имеют по два корня и между корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

Идея. Проанализировать знаки значений каждой из квадратичных функций в точках, являющихся корнями для другой квадратичной функции.

Указание. Выписать условия на соответствующие дискриминанты.

Указание. Пусть x_1 и x_2 – корни $f(x) = x^2 + \dfrac{3x}{s} + 2s$; x_3 и x_4 – корни $g(x) = x^2 + \dfrac{12x}{s} - s$. Определить знаки $f(x_3)$ и $f(x_4)$ в случае, когда корни перемежаются, то есть $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$ или $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$.

Указание. Корни перемежаются, если

$$\begin{cases} f(x_3) < 0, \\ f(x_4) > 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x_3) > 0, \\ f(x_4) < 0; \end{cases}$$

что можно записать одним неравенством: $f(x_3)f(x_4) < 0$.

Указание. Корни не перемежаются, если $f(x_3)f(x_4) \geq 0$.

Решение. Обозначим: $f(x) = x^2 + \dfrac{3x}{s} + 2s$, $g(x) = x^2 + \dfrac{12x}{s} - s$. Так как по условию должно быть по два корня у каждого трёхчлена, то оба дискриминанта обязательно положительны:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{s^2} - 8s > 0, \\ \dfrac{36}{s^2} + s > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 8s^3 < 9, \\ s^3 > -36, \\ s \neq 0; \end{cases}$$

значит, обязательно $s \in \left(-\sqrt[3]{36}; \dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}\right) \setminus \{0\}$;

пусть x_1 и x_2 – корни $f(x)$; x_3 и x_4 – корни $g(x)$; условие задачи будет нарушено (корни перемежаются) в двух случаях:

$$x_1 < x_3 < x_2 < x_4 \quad \text{или} \quad x_3 < x_1 < x_4 < x_2.$$

Рассматривая ситуацию для функции $f(x)$ в плане расположения её корней относительно интервала $(x_3; x_4)$, получаем:

$$\begin{cases} f(x_3) < 0, \\ f(x_4) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x_3) > 0, \\ f(x_4) < 0; \end{cases}$$

эту совокупность можно записать одним неравенством:

$$f(x_3)f(x_4) < 0.$$

Замечание. Аналогичные условия можно было получить и для $g(x)$ относительно интервала $(x_1; x_2)$.

Значит, условию задачи удовлетворяют решения неравенства: $f(x_3)f(x_4) \geq 0$; подставляем:

$$f(x_3) = x_3^2 + \frac{3x_3}{s} + 2s = s - \frac{12x_3}{s} + \frac{3x_3}{s} + 2s = 3s - \frac{9x_3}{s};$$

$$f(x_4) = x_4^2 + \frac{3x_4}{s} + 2s = s - \frac{12x_4}{s} + \frac{3x_4}{s} + 2s = 3s - \frac{9x_4}{s};$$

так как из условий $g(x_3) = 0$ и $g(x_4) = 0$ можно получить:

$$x_3^2 + \frac{12x_3}{s} - s = 0, \ x_4^2 + \frac{12x_4}{s} - s = 0.$$

Замечание. Можно использовать и явные выражения $f(x_3)$ и $f(x_4)$ без привлечения $g(x)$, однако расчёты, равно как и при непосредственной подстановке формул корней в $f(x)$, будут довольно громоздкими.

$$f(x_3)f(x_4) = \left(3s - \frac{9x_3}{s}\right)\left(3s - \frac{9x_4}{s}\right) =$$

$$= 9\left(s^2 - 3x_3 - 3x_4 + \frac{9}{s^2}x_3x_4\right) = 9\left(s^2 - 3\left(x_3 + x_4\right) + \frac{9}{s^2}x_3x_4\right) \geq 0;$$

по теореме Виета: $x_3 + x_4 = -\dfrac{12}{s}$, $x_3x_4 = -s$; подставляем:

$$s^2 - 3\left(-\frac{12}{s}\right) - \frac{9}{s} \geq 0 \iff \frac{s^3+27}{s} \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} s \leq -3; \\ s > 0; \end{array}\right.$$

вспоминая ранее выведенные условия, получаем окончательно:

$$-\sqrt[3]{36} < s \leq -3 \quad \text{или} \quad 0 < s < \frac{\sqrt[3]{9}}{2}.$$

Ответ. $\left(-\sqrt[3]{36}; -3\right] \cup \left(0; \dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)$.

Задача 17. (ВМК-88.5)

Найти все a, при которых уравнение

$$\left((2x+a)\sqrt{22a - 4a^2 - 24} - 2(x^2+x)\lg a\right) \cdot \lg\frac{36a - 9a^2}{35} = 0$$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

Идея. Решать уравнение расщеплением: первый множитель является квадратным трёхчленом относительно x, второй множитель вообще не зависит от x.

Указание. Рассмотреть первый случай: второй множитель равен нулю, а первый имеет смысл.

Указание. Рассмотреть второй случай: первый множитель равен нулю, а второй имеет смысл. Исследовать знаки значений квадратного трёхчлена на концах отрезка $[-1; 0]$.

Указание. Отрезок $[-1; 0]$ должен лежать между корнями квадратного трёхчлена.

Решение. 1) Рассмотрим случай, когда второй множитель равен нулю, а первый имеет смысл, то есть

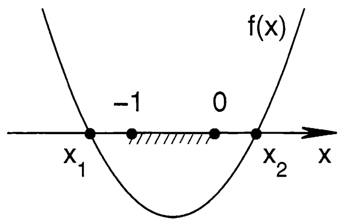
$$\begin{cases} \lg\dfrac{36a - 9a^2}{35} = 0, \\ 22a - 4a^2 - 24 \geq 0, \\ a > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 9a^2 - 36a + 35 = 0, \\ 2a^2 - 11a + 12 \leq 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

откуда $a = \dfrac{5}{3}$ или $a = \dfrac{7}{3}$. Эти значения подходят, так как в этом случае $x \in \mathbb{R}$.

2) Теперь пусть первый множитель равен нулю, а второй имеет смысл:

$$\begin{cases} (2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24} - 2(x^2+x)\lg a = 0, \\ 36a - 9a^2 > 0. \end{cases}$$

Положим $f(x) = 2\lg a \cdot x^2 + 2x(\lg a - \sqrt{22a-4a^2-24}) - a\sqrt{22a-4a^2-24}$. Из условия неотрицательности подкоренных выражений и неотрицательности выражений, стоящих под знаком логарифма, следует, что $\dfrac{3}{2} \le a < 4$, то есть $\lg a > 0$ и ветви параболы $f(x)$ идут вверх. Для того чтобы уравнение имело два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1 необходимо и достаточно, чтобы отрезок $[-1; 0]$ лежал между корнями, т.е. $f(-1) \le 0$, $f(0) \le 0$;



$$\begin{cases} (2-a)\sqrt{22a-4a^2-24} \le 0, \\ a\sqrt{22a-4a^2-24} \ge 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} 2a^2 - 11a + 12 = 0; \\ \begin{cases} a \ge 2, \\ 2a^2 - 11a + 12 \le 0; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{3}{2}; \\ 2 \le a \le 4; \end{array} \right.$$

с учётом $\dfrac{3}{2} \le a < 4$, получаем: $2 \le a < 4$ или $a = \dfrac{3}{2}$.

Объединяя оба случая, получаем ответ.

Ответ. $[2; 4) \cup \left\{\dfrac{3}{2}\right\} \cup \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

Задача 18. (М/м-91.5)

Найдите все пары чисел p и q, при которых неравенство $|x^2 + px + q| > 2$ не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

Идея. При $x \in [1; 5]$ все точки параболы должны лежать в горизонтальной полосе $y \in [-2; 2]$.

Указание. Рассмотреть возможные варианты расположения параболы. Выписать условия на координату вершины и значения в концах отрезка $[1; 5]$.

Указание. Первый случай (вершина левее отрезка): $\begin{cases} x_{\text{в}} < 1, \\ f(1) \ge -2, \\ f(5) \le 2. \end{cases}$

Указание. Второй случай (вершина – на отрезке): $\begin{cases} 1 \le x_{\text{в}} \le 5, \\ f(1) \le 2, \\ f(5) \le 2, \\ f(x_{\text{в}}) \ge -2. \end{cases}$

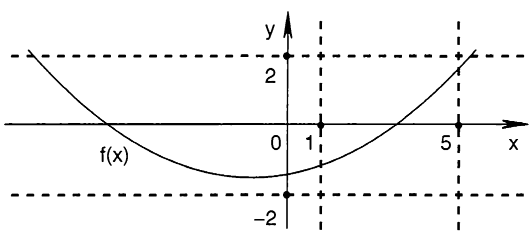
Указание. Третий случай (вершина правее отрезка): $\begin{cases} x_{\text{в}} > 5, \\ f(1) \le 2, \\ f(5) \ge -2. \end{cases}$

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 + px + q$; система $\begin{cases} |f(x)| > 2, \\ 1 \le x \le 5; \end{cases}$ должна быть несовместна; значит (от противного), для любых $x \in [1;5]$ должно выполняться неравенство: $|f(x)| \le 2$, то есть $-2 \le x^2 + px + q \le 2$. На координатной плоскости это означает, что парабола $\forall x \in [1;5]$ целиком лежит в горизонтальной полосе $y \in [-2;2]$.

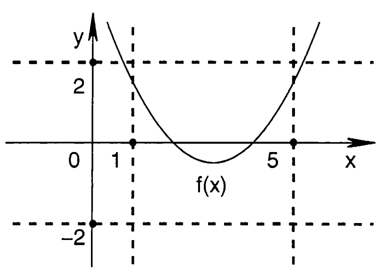
Применяя метод парабол (проверяя различные возможные варианты расположения параболы), получаем, что условие реализуемо в одном из трёх случаев:

1) $\begin{cases} x_{\text{в}} < 1, \\ f(1) \ge -2, \\ f(5) \le 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x_{\text{в}} = -\dfrac{p}{2} < 1, \\ f(1) = p + q + 1 \ge -2, \\ f(5) = 5p + q + 25 \le 2; \end{cases} \iff \begin{cases} p > -2, \\ p + q \ge -3, \\ 5p + q \le -23; \end{cases}$

вычитая второе неравенство из третьего, получаем: $4p \le -20 \iff p \le -5 \implies$ нет решений.



2) $\begin{cases} 1 \le x_{\text{в}} \le 5, \\ f(1) \le 2, \\ f(5) \le 2, \\ f(x_{\text{в}}) \ge -2; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \le -\dfrac{p}{2} \le 5 \\ p + q + 1 \le 2, \\ 5p + q + 25 \le 2, \\ \dfrac{p^2}{4} - \dfrac{p^2}{2} + q \ge -2; \end{cases} \iff \begin{cases} -10 \le p \le -2, \\ p + q \le 1, \\ 5p + q \le -23, \\ -\dfrac{p^2}{4} + q \ge -2; \end{cases}$



складывая второе и третье, имеем: $6p + 2q \le -22$, то есть $3p + q \le -11$; вычитая из него последнее неравенство исходной системы, получаем:

$$\frac{p^2}{4} + 3p \le -9 \iff p^2 + 12p + 36 \le 0 \iff (p+6)^2 \le 0 \iff p = -6.$$

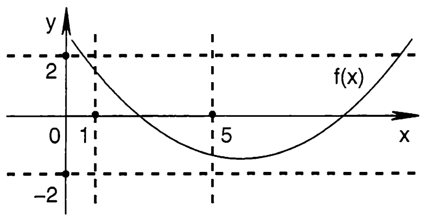
Подставляем найденное p в систему:

$$\begin{cases} -6 + q \le 1, \\ -30 + q \le -23, \\ -\dfrac{6^2}{4} + q \ge -2; \end{cases} \iff \begin{cases} q \le 7, \\ q \le 7, \\ q \ge 7; \end{cases} \iff q = 7;$$

значит, пара $p = -6$, $q = 7$ удовлетворяет условию задачи.

3) $\begin{cases} x_в = -\dfrac{p}{2} > 5, \\ f(1) = p + q + 1 \le 2, \\ f(5) = 5p + q + 25 \ge -2; \end{cases}$ $\begin{cases} p < -10, \\ p + q \le 1, \\ 5p + q \ge -27; \end{cases}$

вычитаем из второго неравенства третье: $-4p \le 28 \iff p \ge -7 \implies$ нет решений.



Ответ. $(-6; 7)$.

5.3. Смешанные задачи

Задача 1. (ЕГЭ.В)

Найти все значения a, при которых функция $y = \sqrt[9]{5x^2 - (2-a)x + 2 - 4a}$ имеет минимум в точке $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Идея. Минимум самой функции достигается в той же точке, что и минимум подкоренного выражения.

Указание. Минимум подкоренного выражения достигается в вершине соответствующей параболы.

Указание. Вычислить значение a, используя условие $x_в = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Поскольку минимум самой функции достигается в той же точке, что и минимум подкоренного выражения, задача сводится к нахождению значения a, при котором $x_в = \dfrac{2-a}{10} = \dfrac{1}{2}$. Из этого равенства находим $a = -3$.

Ответ. -3.

Задача 2. (ЕГЭ.В)

Найти все значения a, при которых функция $y = \sqrt[5]{ax^2 + 15x - 1}$ имеет максимум в точке $x_0 = 1,5$.

Идея. Максимум самой функции достигается в той же точке, что и максимум подкоренного выражения.
Указание. Подкоренное выражение имеет максимум, только если ветви соответствующей параболы направлены вниз.
Указание. Максимум подкоренного выражения достигается в вершине соответствующей параболы.
Указание. Вычислить значение a, используя условие $x_в = 1,5$.

Решение. Поскольку максимум самой функции достигается в той же точке, что и максимум подкоренного выражения, задача сводится к нахождению значения a, при котором функция $y = ax^2 + 15x - 1$ имеет максимум в точке $x_0 = 1,5$. Парабола имеет максимум, только если её ветви направлены вниз; следовательно, $a < 0$. Так как максимум достигается в вершине параболы, то значение a можно найти из условия $x_в = -\dfrac{15}{2a} = 1,5$, откуда $a = -5 < 0$.

Ответ. -5.

Задача 3. (У)

Найти наименьшее значение, принимаемое z, если $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4$.

Идея. Рассмотреть равенство как квадратное уравнение относительно x.
Указание. Оценку для z получить из условия неотрицательности дискриминанта.
Указание. Для того, чтобы равенство

$$x^2 + 2x(y+1) + 3y^2 + 6y + 4 - z = 0$$

выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы

$$D_x/4 = -2y^2 - 4y - 3 + z \geq 0.$$

Указание. Исследовать знак дискриминанта этого квадратного (относительно y) неравенства.

Решение. Запишем исходное равенство в виде:

$$x^2 + 2x(y+1) + 3y^2 + 6y + 4 - z = 0.$$

Для того, чтобы равенство выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого квадратного (относительно x) уравнения был неотрицательным, то есть

$$(y+1)^2 - 3y^2 - 6y - 4 + z \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 + 4y + 3 - z \leq 0.$$

Неравенство является квадратным относительно y. Для того, чтобы оно имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицательным:

$$\frac{D_y}{4} = 4 - 2(3 - z) \ge 0 \iff z \ge 1.$$

Значит z не может быть меньше 1. Найдём значения x и y при $z = 1$. Имеем: $D_x = -2y^2 - 4y - 2 = -2(y+1)^2$, то есть $D_x \ge 0$ только при $y = -1$. Подставляя z и y в исходное уравнение, получаем, что $x = 0$.

Ответ. 1.

Задача 4. (У)

При каком целом p уравнения $3x^2 - 4x + p - 2 = 0$ и $x^2 - 2px + 5 = 0$ имеют общий корень?

Идея. Решить систему из этих двух уравнений с двумя неизвестными.
Указание. Вычесть из первого уравнения системы

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + p - 2 = 0, \\ x^2 - 2px + 5 = 0; \end{cases}$$

утроенное второе.
Указание. Из полученного линейного уравнение выразить x и подставить в любое из исходных уравнений, после чего найти p.

Решение. Так как нас интересует общий корень, то оба равенства должны выполняться одновременно, а, следовательно, их можно объединить в систему:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + p - 2 = 0, \\ x^2 - 2px + 5 = 0; \end{cases}$$

из которой и найти p. Вычтем из первого уравнения утроенное второе:

$$\begin{cases} (6p-4)x = 17 - p, \\ x^2 - 2px + 5 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{17-p}{6p-4}, \\ x^2 - 2px + 5 = 0. \end{cases}$$

Подставим найденное значение x во второе уравнение и найдём p:

$$\frac{(17-p)^2}{(6p-4)^2} - 2p\frac{17-p}{6p-4} + 5 = 0 \iff$$

$$\iff (17-p)^2 - 2p(17-p)(6p-4) + 5(6p-4)^2 = 0 \iff$$

$$12p^3 - 31p^2 - 138p + 369 = 0 \iff (p-3)(12p^2 + 5p - 123) = 0 \iff$$

$$\iff (p-3)^2(12p+41) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} p = 3, \\ p = -\dfrac{41}{12}. \end{array} \right.$$

Так как нас интересует только целое значение p, то $p = 3$.

Ответ. $p = 3$.

Задача 5. (У)

Докажите, что если значение квадратного трехчлена $ax^2 - bx + c$ является целым числом при $x_1 = 0, x_2 = 1$ и $x_3 = 2$, то при любом целом x значение данного трехчлена является целым числом.

Идея. Получить условия на коэффициенты a, b, c, используя значения в точках $0; 1; 2$.

Указание. Рассмотрев значения квадратного трёхчлена в точках $0; 1; 2$, получим систему: $\begin{cases} c \in \mathbb{Z}, \\ a - b + c \in \mathbb{Z}, \\ 4a - 2b + c \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Указание. Показать, что коэффициенты a, b либо оба являются целыми, либо оба отличаются от целого числа на $1/2$.

Решение. Из условий задачи следует, что

$$\begin{cases} c \in \mathbb{Z}, \\ a - b + c \in \mathbb{Z}, \\ 4a - 2b + c \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff \begin{cases} c \in \mathbb{Z}, \\ a - b \in \mathbb{Z}, \\ 2a \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1) Если $2a = 2n,\ n \in Z,$ то $a \in Z$ и $b \in \mathbb{Z}$; следовательно, $ax^2 - bx + c \in \mathbb{Z}$ при любом целом x.

2) Если $2a = 2n + 1$, то $a = n + \frac{1}{2},\ b = n - k + \frac{1}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ и $ax^2 - bx + c = nx^2 - (n-k)x + c + \frac{x(x-1)}{2}$. Так как $x \in \mathbb{Z}$, то $nx^2 - (n-k)x + c \in \mathbb{Z}$. А величина $x(x-1)/2 \in \mathbb{Z}$, поскольку произведение двух последовательных чисел всегда делится на 2. Что и требовалось доказать.

Задача 6. (У)

Доказать, что при любых допустимых значениях a, p, q уравнение $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a}$ имеет вещественные корни.

Идея. Свести уравнение к квадратному.

Указание. Привести всё к общему знаменателю и выписать соответствующие ограничения.

Указание. Дискриминант полученного квадратного уравнения

$$x^2 - x(p + q + 2a) + pq + ap + aq = 0$$

должен быть неотрицателен, при этом должно выполняться: $a \neq 0, x \neq p, x \neq q$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 - x(p + q + 2a) + pq + ap + aq = 0.$$

При этом должно выполняться: $a \neq 0, x \neq p, x \neq q$.

Так как

$$D = (p+q+2a)^2 - 4(pq+ap+aq) = p^2 + q^2 - 2pq + 4a^2 =$$

$$= (p-q)^2 + 4a^2 > 0,$$

то квадратное уравнение имеет два вещественных корня. Осталось проверить, что хотя бы один из них отличен от p и q.

1) В случае, когда $p = q$, квадратное уравнение

$$x^2 - 2x(p+a) + p^2 + 2ap = 0$$

имеет корни $x_1 = p, \quad x_2 = p + 2a$. Поскольку $a \neq 0$, второй корень $x_2 \neq p$.

2) Теперь рассмотрим $p \neq q$. Пусть $x = p$ корень квадратного уравнения, тогда

$$p^2 - p(p+q+2a) + pq + ap + aq = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(p-q) = 0.$$

Мы получили противоречие, так как $a \neq 0, p \neq q$. Следовательно, $x = p$ не является корнем. Аналогично доказывается, что $x = q$ не может быть корнем квадратного уравнения. Значит, в этом случае исходное уравнение имеет два вещественных корня.

Задача 7. (У)

На плоскости (p, q) изобразить множество точек таких, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет одним из корней фиксированное число a.

Идея. Применить теорему Виета.

Указание. Составить систему из двух уравнений с величинами p, q, a и вторым корнем x_2.

Указание. Из системы $\begin{cases} a + x_2 = -p, \\ a \cdot x_2 = q; \end{cases}$ получить одно уравнение, не содержащее x_2.

Решение. По теореме Виета:

$$\begin{cases} a + x_2 = -p, \\ a \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Выразив x_2 из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение: $q = -ap - a^2$, которое является уравнением прямой на плоскости (p, q).

Ответ. Прямая $q = -ap - a^2$.

Задача 8. (У)

Коэффициенты p и q квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$ нечётны. Доказать, что он не может иметь целых корней.

Идея. Применить теорему Виета.

Указание. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Указание. Исследовать вопрос чётности-нечётности корней.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – целые корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Запишем теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Так как p – нечётное число, то x_1 и x_2 имеют разную чётность. Тогда $q = x_1 \cdot x_2$ должно быть четным числом, что противоречит условию задачи. Следовательно, x_1 и x_2 не являются целыми числами.

Задача 9. (Псих-70.2)

Найти все a, при которых уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно четыре корня, образующих арифметическую прогрессию.

Идея. Сделав соответствующую замену, свести исходное уравнение к квадратному, выписать корни и условия, которым они должны удовлетворять, чтобы образовывать арифметическую прогрессию.

Указание. Уравнение имеет корни

$$x_1 = -\sqrt[4]{z_2}, \quad x_2 = -\sqrt[4]{z_1}, \quad x_3 = \sqrt[4]{z_1}, \quad x_4 = \sqrt[4]{z_2}, \quad \text{где}$$

$$z_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 0, \quad z_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 0.$$

Указание. Четыре числа образуют арифметическую прогрессию, если $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

Решение. Положим $z = x^4 \geq 0$, тогда для того, чтобы исходное уравнение имело 4 различных корня, уравнение $z^2 + az + 1 = 0$ должно иметь два положительных решения:

$$\begin{cases} D > 0, \\ z_1 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 0, \\ z_2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 0; \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - 4 > 0, \\ a < 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad a < -2.$$

При этих значениях a исходное уравнение имеет корни (по возрастанию):

$$x_1 = -\sqrt[4]{z_2}, \quad x_2 = -\sqrt[4]{z_1}, \quad x_3 = \sqrt[4]{z_1}, \quad x_4 = \sqrt[4]{z_2}.$$

Эти четыре числа образуют арифметическую прогрессию, если

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1.$$

Найдём a такие, что $x_4 - x_3 = x_3 - x_2$ (равенство $x_4 - x_3 = x_2 - x_1$ выполняется автоматически):

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 \iff x_4 - x_3 = x_3 + x_3 \iff x_4 = 3x_3 \iff$$

$$\iff -a + \sqrt{a^2-4} = 81(-a - \sqrt{a^2-4}) \iff \sqrt{a^2-4} = -\frac{40a}{41};$$

так как $a < -2$, получаем:

$$a^2 \cdot \left(1 - \frac{40^2}{41^2}\right) = 4 \iff a^2 \cdot \frac{41^2 - 40^2}{41^2} = 2^2 \iff a = \pm\frac{82}{9} \implies a = -\frac{82}{9}.$$

Ответ. $-\dfrac{82}{9}$.

Задача 10. (ВМК-74.2)

Найти все действительные значения a, при которых каждое решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ является решением неравенства $49x^2 - 4a^4 \leq 0$.

Идея. Решить каждое из неравенств и подобрать значения параметра a таким образом, чтобы множество решений первого неравенства содержалось в множестве решений второго.

Указание. Решением первого неравенства являются $x \in (-1;0) \cup (0;2)$. Решением второго являются $x \in \left[-\frac{2}{7}a^2; \frac{2}{7}a^2\right]$.

Указание. Каждое решение первого неравенства является решением второго в случае, когда $\begin{cases} -\frac{2}{7}a^2 \leq -1, \\ \frac{2}{7}a^2 \geq 2. \end{cases}$

Решение. Решим каждое неравенство отдельно:

$$1)\ \log_2 x^2 \leq \log_2(x+2) \iff \begin{cases} x^2 \leq x+2, \\ x^2 > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$2)\ 49x^2 - 4a^4 \leq 0 \iff |7x| \leq 2a^2 \iff -\frac{2}{7}a^2 \leq x \leq \frac{2}{7}a^2;$$

каждое решение первого неравенства является решением второго в случае, когда отрезок $[-1;2]$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{2}{7}a^2; \frac{2}{7}a^2\right]$, то есть достаточно потребовать:

$$\begin{cases} -\frac{2}{7}a^2 \leq -1, \\ \frac{2}{7}a^2 \geq 2; \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 \geq \frac{7}{2}, \\ a^2 \geq 7; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} a \leq -\sqrt{7}; \\ a \geq \sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.

Задача 11. (Геол-99.2)

Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2-(\sqrt{3}+5)x-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=0$. Найти значение $A=x_1+x_1x_2+x_2$ и выяснить, какое из чисел больше: A или $1,999$?

Идея. Найти искомое значение с помощью теоремы Виета.
Указание. $x_1+x_2=\dfrac{\sqrt{3}+5}{2}$, $\quad x_1x_2=-\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$.

Решение. Учитывая заявленное наличие корней у квадратного уравнения, применим теорему Виета:

$$A=x_1+x_1x_2+x_2=x_1+x_2+x_1x_2=\frac{\sqrt{3}+5}{2}-\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{3}-|\sqrt{3}+1|\right)=\frac{1}{2}(5-1)=2;$$

очевидно, что $A=2>1,999$.

Ответ. 2; A.

Задача 12. (Экон.К-78.5)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a^2+2a-\sin^2 x-2a\cos x>2$ выполняется для любого числа x.

Идея. Рассмотреть неравенство как квадратное относительно $t=\cos x$ и отобрать те значения параметра a, при которых полученное неравенство справедливо при всех $t\in[-1;1]$.
Указание. Привести неравенство к виду $\cos^2 x-2a\cos x+a^2+2a-3>0$. Далее применить метод парабол.
Указание. Неравенство должно выполняться для любого числа x, т.е. для любого $\cos x\in[-1;1]$, что возможно в одном из двух случаев:
1) дискриминант меньше нуля;
2) вершина параболы находится вне отрезка $[-1;1]$, а значение квадратичной функции $f(t)=t^2-2at+a^2+2a-3$ в точках -1 и 1 больше нуля.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

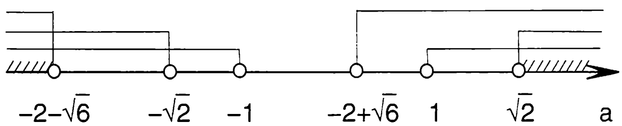
$$a^2+2a-(1-\cos^2 x)-2a\cos x-2>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \cos^2 x-2a\cos x+a^2+2a-3>0.$$

Левая часть неравенства представляет собой квадратичную функцию относительно $\cos x$. Неравенство должно выполняться для любого числа x, т.е. для любого $\cos x\in[-1;1]$, что возможно в одном из двух случаев:
1) дискриминант меньше нуля, т.е

$$a^2-(a^2+2a-3)<0 \quad\Longleftrightarrow\quad a>\frac{3}{2};$$

2) вершина параболы находится вне отрезка $[-1;1]$, а значение квадратичной функции $f(t) = t^2 - 2at + a^2 + 2a - 3$ в точках -1 и 1 больше нуля:

$$\begin{cases} a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty), \\ a^2 - 2 > 0, \\ a^2 + 4a - 2 > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty), \\ a \in (-\infty;-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};+\infty), \\ a \in (-\infty;-2-\sqrt{6}) \cup (-2+\sqrt{6};+\infty). \end{cases}$$



В результате получаем $a \in \left(-\infty;-2-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$. Найденные в первом случае a входят в это множество.

Ответ. $\left(-\infty;-2-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Задача 13. (Биол-73.5)

Найти все значения действительного параметра α, для которых неравенство $4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \le 0$ имеет хотя бы одно решение.

Идея. Рассмотреть неравенство как квадратное относительно $z = 2^x$ и, используя метод парабол, отобрать те значения параметра a, при которых полученное неравенство имеет хотя бы одно положительное решение.

Указание. Исходное неравенство приводится к виду $z^2 - \alpha z - \alpha + 3 \le 0$. Полученное неравенство должно иметь хотя бы одно положительное решение.

Указание. Это возможно в одном из двух случаев:

1) $f(0) < 0$, где $f(z) = z^2 - \alpha z - \alpha + 3$;

2) вершина параболы находится правее нуля, а дискриминант неотрицателен.

Решение. Обозначим: $z = 2^x > 0$; неравенство $z^2 - \alpha z - \alpha + 3 \le 0$ должно иметь хотя бы одно положительное решение. Это возможно в одном из двух случаев:

1) $f(0) < 0$, где $f(z) = z^2 - \alpha z - \alpha + 3$:

$$f(0) < 0 \iff \alpha > 3;$$

2) вершина параболы находится правее нуля, а дискриминант неотрицателен:

$$\begin{cases} z_{\text{в}} > 0, \\ D \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} > 0, \\ \alpha^2 + 4(\alpha - 3) \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha > 0, \\ (\alpha + 6)(\alpha - 2) \ge 0; \end{cases} \iff \alpha \ge 2.$$

Ответ. $[2;+\infty)$.

Задача 14. (Экон-77.5)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3 - |x-a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Идея. Раскрыть модуль через геометрический смысл и проанализировать взаимное расположение корней двух получившихся квадратных неравенств.
Указание. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 + x - a - 3 < 0, \\ x^2 - x + a - 3 < 0. \end{cases}$$

Пресечение интервалов, являющихся решениями этих неравенств, должно содержать хотя бы одну точку с абсциссой $x < 0$.

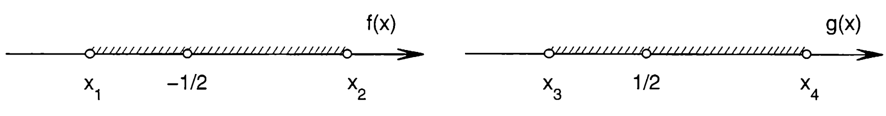
Указание. Показать, что система $\begin{cases} x_1 < x < x_2, \\ x_3 < x < x_4; \end{cases}$ где x_1 и x_2, x_3 и x_4 – корни соответствующих квадратных трёхчленов, всегда имеет решение.
Указание. Для наличия отрицательных решений системы достаточно потребовать $x_3 < 0$.

Решение. Перепишем неравенство в виде: $|x-a| < 3 - x^2$ и раскроем модуль через геометрический смысл:

$$x^2 - 3 < x - a < 3 - x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + x - a - 3 < 0, \\ g(x) = x^2 - x + a - 3 < 0; \end{cases}$$

эта система должна иметь хотя бы одно отрицательное решение. Для этого, как минимум, необходимо, чтобы оба дискриминанта были положительны:

$$\begin{cases} D_1 = 1 + 4(a+3) = 4a + 13 > 0, \\ D_2 = 1 - 4(a-3) = 13 - 4a > 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{13}{4} < a < \frac{13}{4}.$$



Пусть x_1 и x_2, x_3 и x_4 – корни $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Тогда решение каждого из неравенств приводит систему к виду:

$$\begin{cases} x_1 < x < x_2, \\ x_3 < x < x_4; \end{cases}$$

решений у системы не будет совсем при $x_3 \geq x_2$, то есть

$$\frac{1 - \sqrt{13 - 4a}}{2} \geq \frac{-1 + \sqrt{13 + 4a}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{13 - 4a} + \sqrt{13 + 4a} \leq 2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 26 + 2\sqrt{169 - 16a^2} \leq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{169 - 16a^2} \leq -11$$

Последнее неравенство не имеет решений, то есть $\forall a \in \left(-\frac{13}{4}; \frac{13}{4}\right)$ $x_3 < x_2$.

Значит, для наличия отрицательных решений системы достаточно потребовать $x_3 < 0$, то есть

$$1 - \sqrt{13 - 4a} < 0 \iff \sqrt{13-4a} > 1 \iff a < 3.$$

В результате получаем, что $a \in \left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

Ответ. $\left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

Задача 15. (Экон-80.5)

Найти все целые значения параметра k, при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3k$ имеет решения. Найти все эти решения.

Идея. Свести уравнение к квадратному относительно $\cos x$; используя ограниченность косинуса, получить ограничения на значения параметра k и решить полученное квадратное уравнение при этих значениях.

Указание. С помощью основного тригонометрического тождества и формулы понижения степени исходное уравнение приводится к виду $(2\cos x - 1)^2 = 3k + 4$.

Указание. Используя ограниченность косинуса, получить ограничения на значения параметра k.

Указание. Решить полученное квадратное уравнение при этих значениях ($k = -1;\ 0;\ 1$).

Решение. Преобразуем уравнение по тригонометрическим формулам:

$$5 - 4(1 - \cos^2 x) - 4(1 + \cos x) = 3k \iff (2\cos x - 1)^2 = 3k + 4;$$

Так как $\cos x \in [-1; 1]$, то $(2\cos x - 1)^2 \in [0; 9]$. Значит,

$$0 \le 3k + 4 \le 9 \iff -\frac{4}{3} \le k \le \frac{5}{3}.$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то $k = -1; 0; 1$. Для всех этих k $2\cos x - 1 = \pm\sqrt{3k+4}$, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1 - \sqrt{3k+4}}{2}; \\ \cos x = \dfrac{1 + \sqrt{3k+4}}{2}; \end{array}\right.$$

Рассмотрим найденные k:

1) $k = -1$:

2) $k = 0$:

$$\cos x = \frac{1 \pm 2}{2} \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$$

3) $k = 1$:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \iff \cos x = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \iff x = \pm\arccos\frac{1 - \sqrt{7}}{2} + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. Если $k = -1$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ или $2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; если $k = 0$, то $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; если $k = 1$, то $x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{7} - 1}{2} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Задача 16. (Псих-71.5)

При каких значениях a уравнение $\sin^2 3x - \left(a + \dfrac{1}{2}\right)\sin 3x + \dfrac{a}{2} = 0$ имеет ровно три корня, расположенных на отрезке $\left[\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right]$?

Идея. Решить уравнение как квадратное относительно $\sin 3x$, вопрос о количестве корней на данном отрезке исследовать с помощью тригонометрической окружности.

Указание. Найти $\sin 3x$, рассмотрев исходное уравнение как квадратное.

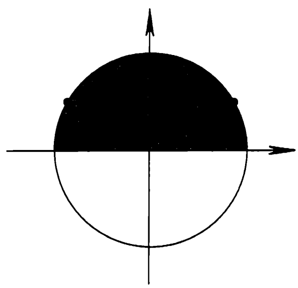
Указание. Определить количество корней первого уравнения совокупности $\left[\begin{array}{l} \sin 3x = \dfrac{1}{2}; \\ \sin 3x = a; \end{array}\right.$ и исследовать количество корней второго уравнения в зависимости от значения параметра.

Указание. Уравнение $\sin 3x = const$ при $3x \in [2\pi; 3\pi]$ (в силу симметрии полуокружности) может иметь один корень, только если $const = 1$.

Решение. Если $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right]$, то $3x \in [2\pi; 3\pi]$. Исходное уравнение является квадратным относительно $\sin 3x$, его решения легко находятся:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 3x = \dfrac{1}{2}; \\ \sin 3x = a; \end{array}\right.$$

первое уравнение для $3x \in [2\pi; 3\pi]$ дает два корня. Поэтому решение второго уравнения на этом же отрезке должно быть единственным $\Longrightarrow$ $\sin 3x = 1$, так как в остальных случаях для $3x \in [2\pi; 3\pi]$ есть симметрия расположения корней относительно оси Oy. Значит, $a = 1$ подходит.



Ответ. 1.

Задача 17. (Геол-77.5)

Найти все значения параметра k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств $x^2 + 4kx + 3k^2 > 1 + 2k$ и $x^2 + 2kx \le 3k^2 - 8k + 4$.

Идея. Исследовать наличие и отсутствие решений у системы в зависимости от взаимного расположения корней квадратных трёхчленов.

Указание. Требуется найти значения k, при которых имеется хотя бы одно решение у системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1 > 0, \\ x^2 + 2kx - 3k^2 + 8k - 4 \le 0. \end{cases}$$

Указание. Поскольку дискриминант левой части второго неравенства $D/4 = k^2 - (-3k^2 + 8k - 4) = (2(k-1))^2 \ge 0$, то второе неравенство всегда имеет решение.

Указание. Если множество решений первого неравенства $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$ не будет пересекаться с множеством решений второго неравенства $[x_3; x_4]$, то система не будет иметь решений. Это возможно только в случае следующего расположения корней: $x_1 \le x_3 \le x_4 \le x_2$.

Указание. Такое расположение корней гарантируется следующей системой:

$$\begin{cases} f(x_3) \le 0, \\ f(x_4) \le 0; \end{cases}$$

где $f(x) = x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1$, а $x_{3,4} = \left[\begin{array}{l} -3k + 2; \\ k - 2. \end{array} \right.$

Решение. Требуется найти значения k, при которых имеется хотя бы одно решение у системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1 > 0, \\ x^2 + 2kx - 3k^2 + 8k - 4 \le 0. \end{cases}$$

Обозначим через $x_1 \le x_2$ корни левой части первого неравенства;
через D, $x_3 \le x_4$ дискриминант и корни левой части второго неравенства.

Множество решений первого неравенства: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.

Множество решений второго неравенства: $[x_3; x_4]$.

Поскольку $D/4 = k^2 - (-3k^2 + 8k - 4) = (2(k-1))^2 \geq 0$, то второе неравенство всегда имеет решение, причем

$$x_{3,4} = -k \pm 2(k-1) = \left[\begin{array}{l} -3k+2; \\ k-2. \end{array} \right.$$

Значит, легче найти те значения параметра, при которых не будет решения у системы, что возможно только в случае следующего расположения корней: $x_1 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_2$. Обозначим $f(x) = x^2 + 4kx + 3k^2 - 2k - 1$. Тогда такое расположение корней гарантируется следующей системой:

$$\begin{cases} f(x_3) \leq 0, \\ f(x_4) \leq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} (2-3k)^2 + 4k(2-3k) + 3k^2 - 2k - 1 \leq 0, \\ (k-2)^2 + 4k(k-2) + 3k^2 - 2k - 1 \leq 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -6k + 3 \leq 0, \\ 8k^2 - 14k + 3 \leq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} k \geq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4} \leq k \leq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \iff \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}.$$

При этих k не будет решений у системы. При остальных $k \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$ у системы будут решения.

Замечание. В задачах довольно часто бывает так, что проще найти те значения параметра, которые нас не устраивают, чем те, которые устраивают.

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Задача 18. (Геол-88.6)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $y = \dfrac{\sin x + 2(1-a)}{a - \cos^2 x}$ содержит отрезок $[1; 2]$.

Идея. Переформулировать задачу следующим образом: найти все значения параметра c, при которых $\forall p \in [1; 2] \;\; \exists z \in [-1; 1]$: $f(z) = p$, где $f(z) = \dfrac{z + 2c}{z^2 - c}$, $c = 1 - a$, $z = \sin x$.

Указание. Уравнение $\dfrac{z + 2c}{z^2 - c} = p$ сводится к квадратному относительно z домножением на знаменатель.

Указание. Полученное уравнение

$$g(z) = pz^2 - z - (p+2)c = 0$$

имеет хотя бы одно решение $z \in [-1; 1]$, если

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ g(-1) \geq 0; \end{cases}$$

условие задачи будет выполнено, если эта система окажется справедливой при $\forall p \in [1; 2]$.

Решение. Обозначим: $c = 1 - a$, $z = \sin x \in [-1;1]$; $f(z) = \dfrac{z+2c}{z^2-c}$.

Переформулируем задачу: найти все значения параметра c, при которых для $\forall p \in [1;2]$ $\exists z \in [-1;1]$: $f(z) = p$.

Рассмотрим уравнение $f(z) = p$:

$$\frac{z+2c}{z^2-c} = p \iff \begin{cases} p(z^2-c) = z+2c, \\ z^2 - c \neq 0; \end{cases}$$

Найдём сначала те значения c, при которых неравенство системы не выполняется, т.е. найдем c, удовлетворяющие системе:

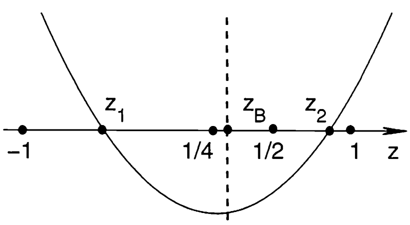
$$\begin{cases} p(z^2-c) = z+2c, \\ z^2 - c = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} z+2c = 0, \\ z^2 - c = 0; \end{cases} \implies 4c^2 - c = 0 \iff \left[\begin{array}{l} c = 0; \\ c = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Проверим найденные значения c. Для этого подставляем их в исходное условие задачи:

1) если $c = 0$, то $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$. При $z \in [-1;1]$ функция $f(z)$ принимает все значения из множества $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$, а, следовательно, принимает все значения из отрезка $[1;2]$. Поэтому значение $c = 0$ подходит;

2) если $c = \dfrac{1}{4}$, то $f(z) = \dfrac{1}{z-\frac{1}{2}}$. При $z \in [-1;1]$ функция $f(z)$ принимает значения из множества $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right] \cup [2;+\infty)$, а, следовательно, принимает не все значения из отрезка $[1;2]$. Поэтому значение $c = \dfrac{1}{4}$ не подходит.

Рассмотрим теперь случай $c \neq 0, c \neq \dfrac{1}{4}$. Тогда уравнение системы принимает вид: $g(z) = pz^2 - z - (p+2)c = 0$. Так как при $p \in [1;2]$ абсцисса вершины параболы $z_в = \dfrac{1}{2p} \in \left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right] \subset [-1;1]$, то она находится ближе к 1, чем к -1. Требуется, чтобы $\forall p \in [1;2]$ уравнение $g(z) = 0$ имело хотя бы один корень на $[-1;1]$.



Для этого достаточно, чтобы для $\forall p \in [1;2]$ выполнялась система:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ g(-1) \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 4pc(p+2) \geq 0, \\ p + 1 - c(p+2) \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} c \geq -\dfrac{1}{4p(p+2)}, \\ c \leq 1 - \dfrac{1}{p+2}. \end{cases}$$

Так как при $\forall p \in [1;2]$ выполняется:

$$-\frac{1}{4p(p+2)} \in \left[-\frac{1}{12}; -\frac{1}{32}\right] \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{p+2} \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right],$$

то система выполняется при $\forall p \in [1;2]$, если $c \in \left[-\frac{1}{32}; \frac{2}{3}\right]$.

Значения $c = 0$ и $c = \frac{1}{4}$ проверены выше. Окончательно получаем:

$$-\frac{1}{32} \le c \le \frac{2}{3}, c \ne \frac{1}{4}.$$

Возвращаемся к исходному параметру:

$$\begin{cases} -\frac{1}{32} \le 1 - a \le \frac{2}{3}, \\ 1 - a \ne \frac{1}{4}; \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{3} \le a \le \frac{33}{32}, \\ a \ne \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Ответ. $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{33}{32}\right]$.

Задача 19. (М/м-99.5)

Найти все значения a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства $\dfrac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0$, не меньше 1.

Идея. Рассмотреть трёхчлены, находящиеся в числителе и знаменателе, исследовать вопрос о наличии у них корней и выяснить их расположение друг относительно друга.

Указание. Доказать наличие двух корней у каждого из квадратных трёхчленов (рассмотреть значение каждого из них в точке $x = 0$).

Указание. Выяснить расположение корней трёхчленов относительно друг друга. Рассмотреть их разность

$$h(x) = f(x) - g(x) = (a^2 - 7a + 13)x$$

и исследовать случаи, когда она положительна, когда равна нулю и когда отрицательна.

Указание. Искомую сумму длин интервалов выразить через корни трёхчленов. Полученное выражение выразить через коэффициенты трёхчленов с помощью теоремы Виета.

Решение. Обозначим:

$$f(x) = x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3,$$

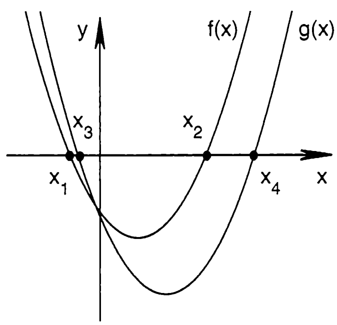
$$g(x) = x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3.$$

Заметим, что свободный член у обоих квадратных трёхчленов одинаков и отрицателен: $-a^2+2a-3=-(a^2-2a+3)=-(a-1)^2-2<0$. Значит, $f(0)=g(0)<0$, следовательно, трёхчлены имеют по два корня, причём $x_1<0<x_2$, $x_3<0<x_4$ соответственно.

Для определения взаимного расположения парабол $y=f(x)$ и $y=g(x)$ рассмотрим разность

$$h(x)=f(x)-g(x)=(a^2-7a+13)x.$$

Для скобки имеем: $D=49-52<0$, то есть этот сомножитель всегда положителен;
– если $x>0$, то $h(x)>0 \implies f(x)>g(x)$;
– если $x<0$, то $h(x)<0 \implies f(x)<g(x)$;



значит, корни $f(x)$ и $g(x)$ чередуются, причём расположены в следующем порядке: $x_1<x_3<x_2<x_4$.

Решением исходного неравенства будет совокупность двух интервалов: $(x_1;x_3)\cup(x_2;x_4)$. Сумма их длин равна:

$$S=x_3-x_1+x_4-x_2=x_3+x_4-(x_1+x_2)=-a^2-7a+7+2a^2+6=a^2-7a+13.$$

Условие задачи требует $S\ge 1 \iff a^2-7a+12\ge 0$, откуда $a\le 3$ или $a\ge 4$.

Ответ. $(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$.

6. Использование различных свойств функций и графических иллюстраций

6.1. Область определения функции, монотонность, периодичность, чётность и нечётность

Задача 1. (У)

Найти область определения функции $y=\sqrt{\log_7(\cos 2x)}$.

Идея. Получить ограничения на x из условия неотрицательности подкоренного выражения.

Указание. Решить неравенство $\log_7(\cos 2x)\ge 0$.

Решение. Областью определения функции $y = \sqrt{\log_7(\cos 2x)}$ являются те значения x, при которых

$$\log_7(\cos 2x) \geq 0 \iff \cos 2x \geq 1 \iff \cos 2x = 1 \iff x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. (У)

Найти область определения функции $y = \sqrt{\lg \cos \pi x} + \sqrt{9 - x^2}$.

Идея. Получить ограничения на x из условия неотрицательности подкоренных выражений.

Указание. Решить систему неравенств $\begin{cases} \lg \cos \pi x \geq 0, \\ 9 - x^2 \geq 0. \end{cases}$

Решение. Радикалы определены при

$$\begin{cases} \lg \cos \pi x \geq 0, \\ 9 - x^2 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \pi x \geq 1, \\ -3 \leq x \leq 3; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ -3 \leq x \leq 3; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x = 0; \\ x = 2. \end{array} \right.$$

Следовательно, областью определения являются три точки $x = \pm 2$ и $x = 0$.

Ответ. ± 2; 0.

Задача 3. (У)

Решить уравнение $2^x = 3 - x$.

Идея. Подбором найти один корень и доказать, что других нет.
Указание. Использовать свойства монотонных функций.

Решение. Поскольку показательная функция в левой части уравнения монотонно возрастает, а линейная функция в правой части монотонно убывает, уравнение имеет не более одного корня. Значение $x = 1$ легко находится подбором.

Ответ. 1.

Задача 4. (У)

Решить уравнение $\sqrt[5]{x - 1} + \sqrt{x + 2} = 3$.

Идея. Решение найти подбором и показать, что других решений нет.
Указание. Использовать монотонность левой части уравнения.

Решение. Поскольку функция в левой части уравнения монотонно возрастает, она может принять значение, равное 3, не более одного раза. Значение $x = 2$ удовлетворяет уравнению. Других решений быть не может.

Ответ. 2.

Задача 5. (У)

Решить уравнение $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x}+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}=\left(2\sqrt{2}\right)^{x}$.

Идея. Решение найти подбором и показать, что других решений нет.
Указание. Поделить обе части равенства на правую часть уравнения и показать, что слева получилась монотонная функция.

Решение. Так как $\sqrt{4-\sqrt{15}}<2\sqrt{2}$ и $\sqrt{4+\sqrt{15}}<2\sqrt{2}$, то, поделив обе части уравнения на $\left(2\sqrt{2}\right)^{x}$, мы получим слева монотонно убывающую функцию, а справа — константу:

$$\left(\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^{x}+\left(\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{2\sqrt{2}}\right)^{x}=1.$$

Значение $x=2$ является решением уравнения. Поскольку монотонная функции принимает все свои значения только один раз, других решений нет.

Ответ. 2.

Задача 6. (У)

Решить уравнение $2\pi\cos x=|x|-|x-\pi|$.

Идея. Раскрыть модули по определению.
Указание. В случае, когда уравнение будет содержать как тригонометрическую функцию, так и линейную, решение найти подбором и показать, что других корней нет.

Решение. 1) Если $x\geq\pi$, то

$$2\pi\cos x=\pi\quad\Longleftrightarrow\quad\cos x=\frac{1}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

В ответ войдёт часть серии, удовлетворяющая условию $x\geq\pi$, то есть

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{N}.$$

2) При $x\in(0;\pi)$ получим

$$2\pi\cos x=2x-\pi.$$

Значение $x=\dfrac{\pi}{2}$ является решением этого уравнения. Поскольку на промежутке $(0;\pi)$ косинус убывает, а функция $y(x)=2x-\pi$ возрастает, других решений быть не может.

3) Если $x\leq 0$, то

$$2\pi\cos x=-\pi\quad\Longleftrightarrow\quad\cos x=-\frac{1}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

В этом случае в ответ войдут только отрицательные значения x.

Ответ. $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$; $\pm\frac{2\pi}{3} - 2\pi k,\ k \in \mathbb{N}$.

Задача 7. (У)

Является ли функция $f(x) = (2+\sqrt{3})^{1/x} - (2-\sqrt{3})^{1/x}$ чётной, нечётной или ни той, ни другой?

Идея. Воспользоваться определениями чётной и нечётной функции.
Указание. Проверить область определения на симметричность относительно нуля и выразить $f(-x)$ через $f(x)$.

Решение. Областью определения функции $f(x)$ является множество

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

то есть для любого $x \in D(f)$ точка $-x \in D(f)$. Вычислим значение $f(-x)$, воспользовавшись равенством $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$:

$$f(-x) = (2+\sqrt{3})^{-1/x} - (2-\sqrt{3})^{-1/x} = (2-\sqrt{3})^{1/x} - (2+\sqrt{3})^{1/x} = -f(x).$$

Следовательно, функция $f(x)$ является нечётной.

Ответ. Нечётная.

Задача 8. (У)

Доказать непериодичность функции $y = \cos\sqrt{x}$.

Идея. Использовать непериодичность области определения $D(y)$.
Указание. Предположить существование периода T и найти точку x_0 такую, что $x_0 \in D(y)$, а $(x_0 - T) \notin D(y)$.

Решение. Пусть $T > 0$ – наименьший положительный период функции. Областью определения данной функции является множество $D(y) = [0; +\infty)$.

Рассмотрим точку $x_0 = 0$. По определению периодической функции точка $x_0 - T = -T < 0$ также должна принадлежать $D(y)$, но это не так. Следовательно, функция не периодична. Утверждение доказано.

Задача 9. (У)

Доказать непериодичность функции $y = \sin\log_2|x|$.

Идея. Использовать непериодичность области определения $D(y)$.
Указание. Предположить существование периода T и найти точку x_0 такую, что $x_0 \in D(y)$, а $(x_0 - T) \notin D(y)$.

Решение. Пусть $T > 0$ – наименьший положительный период функции. Точка $x_0 = T \in D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; следовательно, по определению периодической функции точка $x_0 - T = 0$ также должна принадлежать $D(y)$, но это не так. Значит, функция не периодична. Утверждение доказано.

Задача 10. (У)

Найти наименьший положительный период функции $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Идея. Выразить y через одну тригонометрическую функцию.
Указание. Воспользоваться формулой суммы кубов.

Решение. Преобразуем данную функцию, воспользовавшись формулой для суммы кубов:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x.$$

Так как функция $y = \cos 4x$ имеет наименьший положительный период $\pi/2$, то исходная функция также будет иметь наименьший положительный период $\pi/2$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 11. (У)

Найти наименьший положительный период функции $y = \sin x + \cos x + \sin x \cos x$.

Идея. Определить, с какой периодичностью достигается максимальное значение.
Указание. Воспользоваться методом вспомогательного аргумента и формулой синуса двойного угла.

Решение. Преобразуем тригонометрическое выражение по методу вспомогательного аргумента:

$$y = \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Максимальное значение достигается в случае, когда оба синуса равны 1, то есть при $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Значит, наименьший положительный период функции не может быть меньше $2\pi = T^*$. Проведём проверку:

$$y(x + T^*) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) + \frac{1}{2}\sin 2(x + 2\pi) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\sin 2x = y(x),$$

то есть $T^* = 2\pi$ является наименьшим положительным периодом функции $y = \sin x + \cos x + \sin x \cos x$.

Ответ. 2π.

Задача 12. (У)

Доказать, что функция $y = \sin 2^x$ не является периодической.

Идея. Воспользоваться методом доказательства от противного.
Указание. При отрицательных значениях переменной x функция не обращается в ноль.

Решение. Найдём нули функции:

$$\sin 2^x = 0 \iff 2^x = \pi k,\ k \in \mathbb{N} \iff x = \log_2 \pi k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через x_0 минимальное значение x, при котором $y(x) = 0$. Его можно вычислить: $x_0 = \log_2 \pi$.

Предположим, что функция $y = \sin 2^x$ является периодической с периодом $T > 0$. Тогда согласно определению периодической функции должно выполняться равенство $y(x_0 - T) = y(x_0) = 0$. Это соотношение противоречит определению точки x_0 – минимального значения переменной, при котором функция $y(x)$ принимает нулевое значение.

Значит, функция $y = \sin 2^x$ не является периодической. Утверждение доказано.

Задача 13. (У)

Доказать непериодичность функции $y = \sin x^3$.

Идея. Действовать от противного.
Указание. Показать, что если период у функции существует, то он должен удовлетворять соотношению $T^3 = \pi k,\ k \in \mathbb{N}$.

Решение. Будем рассуждать от противного. Пусть $T > 0$ – период функции, тогда по определению периодической функции $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + T)^3 = \sin x^3.$$

При $x = 0$ получаем уравнение для определения периода:

$$\sin T^3 = 0 \iff T^3 = \pi k,\ k \in \mathbb{N} \iff T = \sqrt[3]{\pi k},\ k \in \mathbb{N}.$$

Проверим, будет ли найденное значение T периодом и для других значений переменной из области определения. Рассмотрим, например, $x = \sqrt[3]{2} \cdot T$. Согласно определению периодический функции

$$\sin T^3(1 + \sqrt[3]{2})^3 = \sin 2T^3 \iff \sin \pi k(1 + \sqrt[3]{2})^3 = \sin 2\pi k,\ k \in \mathbb{N} \iff$$

$$\iff \sin \pi k(1 + \sqrt[3]{2})^3 = 0,\ k \in \mathbb{N} \iff \pi k(1 + \sqrt[3]{2})^3 = \pi n,\ k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff (1 + \sqrt[3]{2})^3 = \frac{n}{k},\ k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Полученное равенство невозможно ни при каких допустимых значениях целочисленных констант k и n, так как в его правой части стоит рациональное число, а слева – иррациональное.

Следовательно, наше предположение о существовании положительного периода T неверно, и функция $y = \sin x^3$ не является периодической. Утверждение доказано.

Задача 14. (У)

Доказать, что функция $y = \cos x + \cos \pi x$ не является периодической.

Идея. Использовать метод доказательства от противного.
Указание. Из равенства $\cos x + \cos \pi x = \cos(x+T) + \cos \pi(x+T)$ попытаться найти значение периода T, положив $x = 0$.

Решение. Предположим, что функция является периодической с периодом $T > 0$. Тогда по определению $\forall x \in \mathbb{R}$ должно выполняться равенство

$$\cos x + \cos \pi x = \cos(x+T) + \cos \pi(x+T).$$

При $x = 0$ получим равенство $\cos T + \cos(\pi T) = 2$, откуда

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos(\pi T) = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} T = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ T = 2k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \implies \pi n = k\,; \ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Последнее равенство верно только при $n = k = 0$; следовательно, $T = 0$, а это противоречит определению периодической функции.

Значит, наше предположение неверно и функция $y = \cos x + \cos \pi x$ периодической не является. Утверждение доказано.

Задача 15. (У)

Доказать, что функция $y = \sin x \sin \sqrt{2}x$ не является периодической.

Идея. Действовать от противного.
Указание. Рассмотреть расстояние между двумя соседними нулями функции $y(x)$.

Решение. Функция $y = \sin x \sin \sqrt{2}x$ обращается в ноль в точках $x = \pi k$ и $x = \dfrac{\pi l}{\sqrt{2}}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}; \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ имеется только один корень $x_0 = 0$.

Пусть $T > 0$ – период функции $y(x)$. Тогда согласно определению периодической функции $y(x_0 + T) = y(x_0) = 0$, и на интервале $\left(T - \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}; T + \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ других корней быть не должно.

Поскольку интервал имеет длину $\sqrt{2}\pi$, на нём должен находиться как минимум один корень вида $x = \pi k$ и как минимум один корень вида $x = \dfrac{\pi l}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\pi k = \frac{\pi l}{\sqrt{2}}; \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Из последнего равенства получаем, что $\sqrt{2} = \dfrac{l}{k} \in \mathbb{Q}$, а это не так.

Значит, наше предположение неверно, и функция $y = \sin x \sin \sqrt{2}x$ периодической не является. Утверждение доказано.

6.2. Множество значений функции, промежутки знакопостоянства и монотонности

Задача 1. (ЕГЭ.С)

Найдите множество значений функции $y = \log_{0,25}\left(\dfrac{\log_4(4+x^4)+47}{3}\right)$.

Идея. Использовать неотрицательность функции $f(x) = x^4$ и монотонность логарифмической функции.

Указание. Используя неотрицательность функции $f(x) = x^4$, возрастание логарифмической функции при основании, большем 1, и её убывание при основании, меньшем 1, оценить значение подлогарифменной функции внешнего логарифма.

Решение. Воспользуемся неотрицательностью функции $f(x) = x^4$, возрастанием логарифмической функции при основании, большем 1, и её убыванием при основании, меньшем 1, и запишем цепочку очевидных равносильных переходов:

$$x^4 \geq 0 \iff 4 + x^4 \geq 4 \iff \log_4(4+x^4) \geq \log_4 4 = 1 \iff$$

$$\iff \log_4(4+x^4) + 47 \geq 48 \iff \frac{\log_4(4+x^4)+47}{3} \geq \frac{48}{3} = 16 \iff$$

$$\iff \log_{0,25}\left(\frac{\log_4(4+x^4)+47}{3}\right) \leq \log_{0,25} 16 = -2.$$

Последнее неравенство даёт ответ.

Ответ. $(-\infty; -2]$.

Задача 2. (ЕГЭ.С)

Найдите множество значений функции $y = \log_{0,2}\left(\dfrac{80}{\log_5(125+x^4)+13}\right)$.

Идея. Использовать неотрицательность функции $f(x) = x^4$, монотонность логарифмической функции и функции $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Указание. Используя неотрицательность функции $f(x) = x^4$, убывание функции $g(x) = \dfrac{1}{x}$, возрастание логарифмической функции при основании, большем 1, и её убывание при основании, меньшем 1, оценить выражение, стоящее под знаком первого логарифма.

Решение. Используем убывание функции $g(x) = \dfrac{1}{x}$, возрастание логарифмической функции при основании, большем 1, и её убывание при основании, меньшем 1, и запишем цепочку очевидных равносильных переходов:

$$x^4 \geq 0 \iff 125 + x^4 \geq 125 \iff \log_5(125+x^4) \geq \log_5(125) = 3 \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_5(125+x^4)+13 \ge 16 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{80}{\log_5(125+x^4)+13} \le \frac{80}{16} = 5 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log_{0,2}\left(\frac{80}{\log_5(125+x^4)+13}\right) \ge \log_{0,2} 5 = -1.$$

Последнее неравенство даёт ответ.

Ответ. $[-1; +\infty)$.

Задача 3. (ЕГЭ.С)

Найдите множество значений функции $y = \dfrac{9}{\pi}\arccos\left(\dfrac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right)$.

Идея. Использовать ограниченность функции $f(x) = \sin x$ и монотонность функции $g(x) = \arccos x$.

Указание. Применить формулу $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Указание. Использовать ограниченность функции $f(x) = \sin x$ и убывание функции $g(x) = \arccos x$.

Решение. Так как $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, а $g(x) = \arccos x$ – убывающая функция, то справедлива следующая цепочка:

$$(\sin x - \cos x) \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right) \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad y \in [0; 3].$$

Ответ. $[0; 3]$.

Задача 4. (ЕГЭ.С)

При каких значениях a выражение $3 + \cos x(a\cos x + 4\sin x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

Идея. Использовать формулы понижения степени, метод вспомогательного аргумента и ограниченность тригонометрической функции $g(t) = \sin t$.

Указание. Использовать формулу понижения степени $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ и метод вспомогательного аргумента.

Указание. Привести выражение к виду $3 + \dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{16+a^2}}{2}\cdot\sin(2x+\varphi)$, где $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{16+a^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{16+a^2}}$.

Указание. Используя ограниченность тригонометрической функции $g(t) = \sin t$, оценить значение полученного выражения.

Решение. Найдём множество значений функции

$$f(x) = 3 + \cos x(a\cos x + 4\sin x).$$

Для этого преобразуем её, используя формулы понижения степени и метод вспомогательного аргумента:

$$f(x) = 3 + a\cos^2 x + 2\sin 2x = 3 + a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + 2\sin 2x =$$

$$= 3 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos 2x + 2\sin 2x = 3 + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{16+a^2}}{2}\cdot\sin(2x+\varphi),$$

где $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{16+a^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{16+a^2}}$. В силу ограниченности тригонометрической функции $g(t) = \sin t$ $(-1 \le \sin t \le 1)$ множеством значений функции $f(x)$ будет отрезок

$$\left[\frac{6+a-\sqrt{16+a^2}}{2};\frac{6+a+\sqrt{16+a^2}}{2}\right].$$

Этот отрезок не содержит нулевое значение только в двух случаях: когда его правая граница меньше нуля или когда его левая граница больше нуля. Значит,

$$\left[\begin{array}{l} 6+a+\sqrt{16+a^2} < 0, \\ 6+a-\sqrt{16+a^2} > 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{16+a^2} < -(a+6), \\ \sqrt{16+a^2} < (a+6); \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \sqrt{16+a^2} < |a+6| \iff 16+a^2 < |a+6|^2 \iff a > -\frac{5}{3}.$$

Ответ. $\left(-\dfrac{5}{3};+\infty\right)$.

Задача 5. (ЕГЭ.С)

При каких значениях параметра a сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ будет больше единицы при всех x?

Идея. Использовать неотрицательность функции $f(x) = x^2$, монотонность логарифмической функции и функции $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Указание. Заметить, что оба выражения определены при всех $x \in \mathbb{R}$. Привести их сумму к виду $\log_a\left(\left(2+\dfrac{1}{1+x^2}\right)\left(4+\dfrac{1}{1+x^2}\right)\right)$.

Указание. Ввести обозначение $t = \dfrac{1}{1+x^2}$, $t \in (0;1]$ при $x \in \mathbb{R}$. Найти множество значений квадратичной функции $y(t) = (2+t)(4+t)$ на промежутке $(0;1]$

Указание. Поскольку $t_в = -3 < 0$, то функция $y(t)$ при всех $t \in (0;1]$ возрастает и принимает значения из промежутка $(8;15]$. Переформулировать условие следующим образом: найти все значения параметра a, при которых $\log_a y > 1$ при всех $y \in (8;15]$.

Решение. Оба выражения определены при любом $x \in \mathbb{R}$. Их сумма равна

$$\log_a\left(\frac{3+2x^2}{1+x^2}\right)+\log_a\left(\frac{5+4x^2}{1+x^2}\right)=\log_a\left(\frac{3+2x^2}{1+x^2}\cdot\frac{5+4x^2}{1+x^2}\right)=$$

$$=\log_a\left(\left(2+\frac{1}{1+x^2}\right)\left(4+\frac{1}{1+x^2}\right)\right).$$

Пусть $t=\dfrac{1}{1+x^2}$, $t\in(0;1]$. Рассмотрим функцию $y(t)=(2+t)(4+t)$. Поскольку $t_в=-3<0$, то функция $y(t)$ возрастает при всех $t\in(0;1]$ и принимает значения из промежутка $(8;15]$.

Значит, условие задачи можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при которых $\log_a y>1$ при всех $y\in(8;15]$.

При $a\in(0;1)$ функция $h(y)=\log_a y$ убывает и при всех $y>1$ принимает только отрицательные значения. Следовательно, эти значения параметра не подходят.

При $a>1$ функция $h(y)=\log_a y$ возрастает и, следовательно,

$$\log_a y>1 \quad\Longleftrightarrow\quad y>a.$$

Последнее неравенство должно выполняться при всех $y\in(8;15]$. Значит, $a\in(1;8]$.

Ответ. $(1;8]$.

Задача 6. (Экон-94.2)

Найти область значений функции $y=-\sqrt{-3x^2+12x-3}$.

Идея. Рассмотреть функцию, стоящую под корнем.

Указание. График подкоренной функции – парабола с ветвями, направленными вниз.

Указание. Наибольшее значение этой функции достигается в вершине параболы $x_в=2$. Учесть ОДЗ.

Решение. Рассмотрим функцию, стоящую под корнем:

$$g(x)=-3x^2+12x-3.$$

Это квадратичная функция, её график – парабола с ветвями, направленными вниз. Значит, наибольшее значение достигается в вершине параболы $x_в=2$, то есть

$$g_{max}=g(2)=9.$$

С учётом ОДЗ получаем, что $0\le g(x)\le 9$. Значит, $-3\le y\le 0$.

Ответ. $[-3;0]$.

Задача 7. (Экон.К-71.2)

Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

Идея. Использовать формулу приведения и ограниченностью функций $\sin x$ и $\cos x$.

Указание. Формула приведения: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$.

Указание. Избавляясь от тангенсов, надо учитывать ОДЗ. Функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены по модулю единицей.

Решение. Воспользуемся в правой части уравнения формулой приведения:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin x\right).$$

Полученное уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin x + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2}\cos x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \ m \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ \cos x \neq 1 + 2m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Учтём ограниченность функций $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x \neq \pm 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 8. (ВМК-82.2)

Найти все значения x, для каждого из которых функция $f(x) = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$ принимает наибольшее значение.

Идея. Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, свести функцию к квадратичной относительно $\sin x$.

Указание. Воспользоваться основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Указание. Получившаяся функция $f(x) = -6\sin^2 x + 6\sin x + 4$ является квадратичной относительно $\sin x$; её график – парабола с ветвями, направленными вниз; максимальное значение достигается в вершине, то есть при $\sin x = 0,5$.

Решение. Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, приведём функцию к квадратичной относительно $\sin x$:

$$f(x) = 6(1 - \sin^2 x) + 6\sin x - 2 = -6\sin^2 x + 6\sin x + 4.$$

График полученной функции – парабола с ветвями, направленными вниз. Максимум достигается в вершине, то есть при $\sin x = 0,5$. Значит, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается при $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 9. (Почв-90.4)

Найти наименьшее значение функции $y = 1 + 4\sin x - 2x$ на отрезке $[0;\pi]$.

Идея. Использовать убывание линейной функции $f(x) = 1 - 2x$ и ограниченность тригонометрической функции $g(x) = 4\sin x$.

Указание. Представить функцию y в виде суммы двух функций:

$$y = f(x) + g(x),$$

где $f(x) = 1 - 2x,\ g(x) = 4\sin x$.

Указание. Функция $f(x) = 1-2x$ убывает на всей прямой. Следовательно, на отрезке $[0;\pi]$ минимальное значение она принимает на правом конце:

$$f_{min} = f(\pi) = 1 - 2\pi.$$

Функция $g(x) = 4\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$ принимает минимальное значение при $x = 0$ и $x = \pi$:

$$g_{min} = g(0) = g(\pi) = 0.$$

Решение. Представим функцию y в виде суммы двух функций – линейной и тригонометрической:

$$y = (1 - 2x) + 4\sin x = f(x) + g(x),$$

где $f(x) = 1 - 2x,\ g(x) = 4\sin x$.

Функция $f(x) = 1 - 2x$ убывает на всей прямой. Значит, на отрезке $[0;\pi]$ минимальное значение она принимает на правом конце:

$$f_{min} = f(\pi) = 1 - 2\pi.$$

Функция $g(x) = 4\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$ минимальное значение принимает при $x = 0$ и $x = \pi$:

$$g_{min} = g(0) = g(\pi) = 0.$$

Таким образом, $y_{min} = y(\pi) = 1 - 2\pi$.

Ответ. $1 - 2\pi$.

Задача 10. (Геол.ОГ-81.6)

Показать, что функция $y(x) = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 2\sqrt[3]{66}$ может принимать неотрицательные значения.

Идея. Использовать формулы синуса двойного аргумента, понижения степени и метод вспомогательного аргумента. Сравнить максимум получившейся функции с нулём.

Указание. Рассмотреть функцию $g(x) = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x$ и воспользоваться формулами

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Указание. Для получившейся функции $g(x) = 2 + \cos 2x - 6\sin 2x$ применить метод вспомогательного аргумента.

Указание. Максимальное значение функции

$$\max_{x\in R} y(x) = \max_{x\in R}(2 + \sqrt{37}\cos(2x+\varphi) - 2\sqrt[3]{66}) = 2 + \sqrt{37} - 2\sqrt[3]{66}$$

сравнить с нулём.

Решение. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \sin^2 x - 12\sin x\cos x + 3\cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} - 6\sin 2x + \frac{3}{2}(\cos 2x + 1) =$$

$$= 2 + \cos 2x - 6\sin 2x = 2 + \sqrt{37}\cos(2x+\varphi).$$

Значит, максимальное значение функции $y(x)$ равно

$$\max_{x\in R} y(x) = \max_{x\in R}(2 + \sqrt{37}\cos(2x+\varphi) - 2\sqrt[3]{66}) = 2 + \sqrt{37} - 2\sqrt[3]{66}.$$

Покажем, что $2 + \sqrt{37} - 2\sqrt[3]{66} > 0$. Сравним числа $2 + \sqrt{37}$ и $2\sqrt[3]{66}$, что равносильно сравнению их кубов:

$$\begin{aligned} 8 + 12\sqrt{37} + 6\cdot 37 + 37\sqrt{37} &\ \vee\ 8\cdot 66 \\ 49\sqrt{37} &\ \vee\ 298 \\ 88837 &\ >\ 88804. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $y(x)$ может принимать неотрицательные значения.

Задача 11. (Псих-80.5)

Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство $2(2p-1)^4 + 1 + (1 - 2(2p-1)^4)\sin 2t \ge 0$, и найти все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

Идея. Преобразовать неравенство и использовать неотрицательность чётной степени и ограниченность тригонометрической функции $f(t) = \sin 2t$.
Указание. Привести неравенство к виду

$$2(2p-1)^4(1-\sin 2t) + (1+\sin 2t) \geq 0.$$

Указание. Использовать неотрицательность чётной степени и ограниченность тригонометрической функции $f(t) = \sin 2t$:

$$2(2p-1)^4 \geq 0, \quad (1-\sin 2t) \geq 0, \quad (1+\sin 2t) \geq 0.$$

Указание. Равенство достигается только в случае

$$\begin{cases} 2p-1=0, \\ 1+\sin 2t = 0. \end{cases}$$

Решение. Перегруппируем слагаемые в левой части неравенства:

$$2(2p-1)^4(1-\sin 2t) + (1+\sin 2t) \geq 0.$$

В силу неотрицательности чётной степени и ограниченности функции $f(t) = \sin 2t$ справедливы оценки:

$$2(2p-1)^4 \geq 0, \quad (1-\sin 2t) \geq 0, \quad (1+\sin 2t) \geq 0.$$

Следовательно, исходное неравенство справедливо всегда, а равенство достигается только в случае

$$\begin{cases} 2p-1=0, \\ 1+\sin 2t = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} p = 0,5, \\ t = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. (Почв-90.6)

Решить неравенство $\log_2(2-3x) > 4x+1$.

Идея. Использовать монотонность входящих в неравенство функций.
Указание. Функция $f(x) = \log_2(2-3x)$, стоящая в левой части неравенства, убывает на всей области определения $x \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right)$, а функция $g(x) = 4x+1$, стоящая в правой части неравенства, возрастает на всей числовой прямой.
Указание. $f(x) = g(x)$ при $x = 0$.

Решение. Функция $f(x) = \log_2(2-3x)$, стоящая в левой части неравенства, убывает на всей области определения $x \in \left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right)$, а функция $g(x) = 4x+1$, стоящая в правой части неравенства, возрастает на всей числовой прямой.

Заметим, что $f(x) = g(x)$ при $x = 0$, поэтому исходное неравенство верно при всех $x < 0$.

Ответ. $(-\infty; 0)$.

Задача 13. (Хим-80.5)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения $3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$ не превосходит числа решений уравнения $x + (3a - 2)^2 \cdot 3^x = (8^a - 4)\log_3\left(3^a - \frac{1}{2}\right) - 3x^3$.

Идея. Использовать два факта: сумма возрастающих функций является также возрастающей; монотонная функция принимает каждое значение ровно один раз.
Указание. Переписать второе уравнение в виде

$$x + (3a - 2)^2 \cdot 3^x + 3x^3 = (8^a - 4)\log_3\left(3^a - \frac{1}{2}\right)$$

и найти количество его решений.
Указание. Слева стоит возрастающая функция, изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$, а справа число. Значит, это уравнение имеет ровно одно решение для любого значения параметра a, при котором определена правая часть этого уравнения.
Указание. Первое уравнение является квадратным относительно переменной x :

$$3x^2 + (9a^2 - 2)x + 3a^2) - 1 = 0.$$

Следовательно, надо найти такие значения параметра a, при которых квадратное уравнение имеет не более одного решения ($D \le 0$), при условии, что логарифм, входящий во второе уравнение, определён.

Решение. На первый взгляд задача кажется очень сложной. Это не так. Чтобы решить задачу, надо определить число решений второго уравнения, а это легко сделать. Перепишем его в виде

$$x + (3a - 2)^2 \cdot 3^x + 3x^3 = (8^a - 4)\log_3\left(3^a - \frac{1}{2}\right).$$

Слева стоит возрастающая функция, изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$, а справа число. Поэтому это уравнение имеет ровно одно решение для любого допустимого значения параметра a. Первое же уравнение является квадратным относительно переменной x :

$$3x^2 + (9a^2 - 2)x + 3a^2) - 1 = 0.$$

Значит, надо найти такие значения параметра a, при которых квадратное уравнение имеет не более одного решения ($D \le 0$), при условии, что логарифм, входящий во второе уравнение, определён, то есть

$$\begin{cases} (9a^2 - 2)^2 - 12(3a^2 - 1) \le 0, \\ 3^a - \dfrac{1}{2} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} (9a^2 - 4)^2 \le 0, \\ a > -\log_3 2; \end{cases} \iff a = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задача 14. (Геол.ОГ-85.5)

Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)\cdot(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)\cdot(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

Идея. Найти ОДЗ, перенести все радикалы в левую часть уравнения и разложить на множители на ОДЗ. Использовать монотонность входящих в уравнение функций.

Указание. ОДЗ: $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. На ОДЗ справедливы следующие соотношения:

$$\sqrt{(x+2)\cdot(2x-1)} = \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x-1}, \quad \sqrt{(x+6)\cdot(2x-1)} = \sqrt{x+6}\cdot\sqrt{2x-1}.$$

Указание. Перенести радикалы в левую часть уравнения и разложить выражение на множители:

$$\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right) = 4.$$

Указание. При $\frac{1}{2} \le x \le 5$ левая часть последнего уравнения неположительна; следовательно, решений нет. При $x > 5$ левая часть возрастает как произведение возрастающих положительных функций; следовательно, у уравнения не может быть более одного решения.

Указание. Корень $x = 7$ легко угадать, рассматривая левую часть как разность квадратов:

$$3 = \sqrt{x+2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 7;$$

далее необходимо проверить найденное значение переменной.

Решение. ОДЗ: $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. На ОДЗ справедливы следующие соотношения:

$$\sqrt{(x+2)\cdot(2x-1)} = \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x-1}, \quad \sqrt{(x+6)\cdot(2x-1)} = \sqrt{x+6}\cdot\sqrt{2x-1}.$$

Перенесём все радикалы в левую часть и разложим выражение на множители:

$$\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{x+6}\cdot\sqrt{2x-1} + 3\sqrt{x+2} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{2x-1}\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right) - 3\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right) = 4 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right) = 4.$$

При $\frac{1}{2} \le x \le 5$ левая часть последнего уравнения неположительна; следовательно, решений нет.

При $x > 5$ левая часть возрастает как произведение возрастающих положительных функций; следовательно, у уравнения не может быть более одного решения.

Угадаем решение, рассматривая левую часть как разность квадратов. Пусть

$$3=\sqrt{x+2} \quad \Longleftrightarrow \quad x=7;$$

проверим:

$$\left(\sqrt{13}-3\right)\left(\sqrt{13}+3\right)=4 \text{ -- верно.}$$

Ответ. 7.

Задача 15. (ИСАА-94.5)

Решить неравенство $|x-4^{1+\sqrt{3-x}}| \le \frac{5}{3}x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}$.

Идея. Раскрыть модуль, используя его геометрический смысл. Использовать монотонность входящих в получившееся неравенство функций.

Указание. Пользуясь геометрическим смыслом модуля, записать двойное неравенство:

$$-\frac{5}{3}x+4\cdot 4^{\sqrt{3-x}} \le x-4^{1+\sqrt{3-x}} \le \frac{5}{3}x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}}$$

Указание. Из этой системы, с учётом ОДЗ, получить ограничения на переменную x : $0\le x\le 3$. При найденных значениях переменной функция $f(x)=4^{\sqrt{3-x}}$ убывает и ограничена снизу единицей, а функция $g(x)=\dfrac{x}{3}$ возрастает и ограничена единицей сверху.

Решение. Раскроем модуль, используя его геометрический смысл и учитывая ОДЗ:

$$-\frac{5}{3}x+4\cdot 4^{\sqrt{3-x}} \le x-4^{1+\sqrt{3-x}} \le \frac{5}{3}x-4\cdot 4^{\sqrt{3-x}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0\le x\le 3, \\ 4^{\sqrt{3-x}}\le \dfrac{x}{3}. \end{array}\right.$$

Заметим, что при $0\le x\le 3$ функция $f(x)=4^{\sqrt{3-x}}\ge 1$ и убывает, а функция $g(x)=\dfrac{x}{3}\le 1$ и возрастает. Значит, во втором неравенстве системы может быть только равенство при $x=3$.

Ответ. 3.

Задача 16. (М/м-96(2).1)

Найти все целочисленные решения неравенства $\sqrt{x^3-5x-3}\le 6-x$.

Идея. Стандартным образом избавиться от радикала и исследовать каждое неравенство, входящее в получившуюся систему.

Указание. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ x^3 - 5x - 3 \geq 0, \\ x^3 - 5x - 3 \leq 36 - 12x + x^2; \end{cases} \iff \begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ x^3 - 5x - 3 \geq 0, \\ x^3 - x^2 + 7x - 39 \leq 0. \end{cases}$$

Указание. Многочлен $f(x) = x^3 - x^2 + 7x - 39$ имеет рациональный корень $x = 3$. Поэтому он раскладывается на множители: $f(x) = (x-3)(x^2 + 2x + 13)$.
Указание. Многочлен $g(x) = x^3 - 5x - 3$ не имеет рациональных корней. Необходимо исследовать поведение функции $g(x)$. Найти с помощью производной $g'(x) = 3x^2 - 5$ участки возрастания и убывания этой функции.
Указание. Рассмотреть целочисленные значения x, начиная с наибольшего. Учесть, что при $x \leq -2$ функция $g(x)$ возрастает.

Решение. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ x^3 - 5x - 3 \geq 0, \\ x^3 - 5x - 3 \leq 36 - 12x + x^2; \end{cases} \iff \begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ x^3 - 5x - 3 \geq 0, \\ x^3 - x^2 + 7x - 39 \leq 0. \end{cases}$$

Многочлен $f(x) = x^3 - x^2 + 7x - 39$, стоящий в левой части третьего неравенства последней системы, имеет рациональный корень $x = 3$. Поэтому он раскладывается на множители:

$$f(x) = (x-3)(x^2 + 2x + 13).$$

Так как $x^2 + 2x + 13 > 0$ для всех x $(D = 4 - 4 \cdot 13 < 0)$, то третье неравенство системы эквивалентно простому неравенству $x \leq 3$. Значит, система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ x^3 - 5x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

Многочлен $g(x) = x^3 - 5x - 3$ не имеет рациональных корней. Поэтому исследуем поведение функции $g(x)$. Найдём с помощью производной $g'(x) = 3x^2 - 5$ промежутки возрастания и убывания.

$$g'(x) = 0 \iff 3x^2 - 5 = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Значит, при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}}\right] \bigcup \left[\sqrt{\frac{5}{3}}; +\infty\right)$ функция возрастает, а при $x \in \left[-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}}\right]$ функция убывает. Рассмотрим целочисленные значения x, начиная с наибольшего:

$$g(3) = 9 > 0, \quad g(2) = -4 < 0, \quad g(1) = -7 < 0,$$

$$g(0) = -3 < 0, \quad g(-1) = 1 > 0, \quad g(-2) = -1 < 0.$$

Так как функция $g(x)$ при $x \leq -2$ возрастает и $g(-2) < 0$, то $g(x) < 0$ при всех $x < -2$. Таким образом, получаем ответ: $x = -1$ и $x = 3$.

Ответ. $-1; 3$.

Задача 17. (Фил-87.5)

Решить неравенство $\dfrac{9}{3x+2} > \dfrac{1+\log_3(x+6)}{x}$.

Идея. Найти ОДЗ и рассмотреть неравенство на каждом участке ОДЗ отдельно. Использовать монотонность входящих в неравенство функций.

Указание. ОДЗ: $x \in \left(-6; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. Рассмотреть неравенство на каждом участке ОДЗ отдельно.

Указание. При $x \in \left(-6; -\dfrac{2}{3}\right)$ получаем неравенство $2 - \dfrac{6}{3x+2} < \log_3(x+6)$. Поскольку при рассматриваемых значениях переменной $\log_3(x+6) < \log_3 6 < 2$ и $2 - \dfrac{6}{3x+2} > 2$; исходное неравенство решений не имеет.

Указание. При $x \in \left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$ справедливы оценки $\dfrac{1+\log_3(x+6)}{x} < 0$ и $\dfrac{9}{3x+2} > 0$; следовательно, исходное неравенство верно для любого $x \in \left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$.

Указание. При $x > 0$ получаем неравенство $2 - \dfrac{6}{3x+2} > \log_3(x+6)$. В рассматриваемом случае $\log_3(x+6) > \dfrac{3}{2}$ и $2 - \dfrac{6}{3x+2} < 2$. Необходимо найти x, при которых исходное неравенство не имеет решений.

Решение. ОДЗ: $x \in \left(-6; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. Рассмотрим задачу на каждом из промежутков отдельно.

1) Пусть $x \in \left(-6; -\dfrac{2}{3}\right)$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{9x}{3x+2} - 1 < \log_3(x+6) \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{6}{3x+2} < \log_3(x+6).$$

При рассматриваемых x справедливы оценки:

$$\log_3(x+6) < \log_3 6 < 2 \qquad \text{и} \qquad 2 - \frac{6}{3x+2} > 2;$$

следовательно, исходное неравенство решений не имеет.

2) Пусть $x \in \left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$, тогда справедливы неравенства

$$\frac{9}{3x+2} > 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{1+\log_3(x+6)}{x} < 0;$$

следовательно, исходное неравенство верно для любого $x \in \left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$.

3) Пусть $x > 0$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$2 - \frac{6}{3x+2} > \log_3(x+6).$$

Поскольку при этих значениях переменной

$$\log_3(x+6) > \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad 2 - \frac{6}{3x+2} < 2,$$

исходное неравенство не имеет решений там, где при соблюдении условий $x > -6$, $x \neq -\frac{2}{3}$ выполнена совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(x+6) \geq 2; \\ 2 - \dfrac{6}{3x+2} \leq \dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x+6 \geq 9; \\ 3x+2 \leq 12; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \geq 3; \\ x \leq \dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$$

Значит, при $x > 0$ решений нет.

Ответ. $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.

Задача 18. (Псих-82.6)

Решить уравнение $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$.

Идея. Сделать замену $y = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$ и преобразовать уравнение так, чтобы получились монотонные функции.

Указание. Обозначить $y = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$, тогда $x^2 - 2x - 3 = (2+\sqrt{3})^y$; далее привести исходное уравнение к виду $(2+\sqrt{3})^y + 1 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^y$.

Указание. Поделить уравнение на $\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^y > 0$ и воспользоваться равенством $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1$.

Указание. Получить уравнение $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y = 1$; заметить, что в левой части стоит сумма убывающих функций.

Решение. Обозначим $y = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$, тогда $x^2 - 2x - 3 = (2+\sqrt{3})^y$. Перепишем исходное уравнение:

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}((2+\sqrt{3})^y + 1) = y \iff (2+\sqrt{3})^y + 1 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^y \iff$$

$$\iff \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^y + \left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^y = 1 \iff$$

$$\iff \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y = 1.$$

Последний переход равносилен, так как справедливо равенство

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1.$$

Далее, так как $\dfrac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2} < 1$, то $f(y) = \left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y$ и $g(y) = \left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y$ – убывающие функции. Значит, в левой части уравнения стоит монотонно убывающая функция. Поэтому уравнение имеет единственное решение, причём его легко угадать – это $y = 2$. Вернёмся к переменной x :

$$\log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3) = 2 \iff x^2 - 2x - 3 = (2+\sqrt{3})^2 \iff$$

$$\iff x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}.$$

Ответ. $1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.

Задача 19. (ВМК-92.6)

Найти все значения a, при каждом из которых неравенство
$\dfrac{4}{3}(x^2 - ax) - \dfrac{\pi}{3} < \sin(x^2 - ax) + \cos\left(2x^2 - 2ax + \dfrac{\pi}{4}\right)$ выполняется для всех x из отрезка $[\pi; 2\pi]$.

Идея. Сделать замену $t = x^2 - ax$ и привести неравенство к такому виду, чтобы в левой и правой частях стояла одна и та же монотонная функция от разных значений аргумента.

Указание. Сделать замену $t = x^2 - ax$ и привести исходное неравенство к виду

$$\frac{4}{3}\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{4}{3}t + \sin t.$$

Указание. Доказать, что функция $f(t) = \dfrac{4}{3}t + \sin t$ возрастающая. Для этого рассмотреть при $t_1 > t_2$ разность

$$f(t_1) - f(t_2) = \frac{4}{3}(t_1 - t_2) + \sin t_1 - \sin t_2 = \frac{4}{3}(t_1 - t_2) + 2\sin\frac{t_1 - t_2}{2}\cdot\cos\frac{t_1 + t_2}{2}$$

и доказать, что она положительна.

Указание. Исходное неравенство, в силу возрастания $f(t)$, эквивалентно неравенству

$$2t - \frac{\pi}{4} < t \iff t < \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, требуется найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - ax < \dfrac{\pi}{4}$ будет выполнено для любого $x \in [\pi; 2\pi]$. Обозначив $y(x) = x^2 - ax - \dfrac{\pi}{4}$, получить систему неравенств $\begin{cases} y(\pi) < 0 \\ y(2\pi) < 0 \end{cases}$ и решить её.

Решение. Сделаем замену $t = x^2 - ax$ и преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{4}{3}t - \frac{\pi}{3} < \sin t + \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \iff \frac{4}{3}\left(2t - \frac{\pi}{4} - t\right) < \sin t - \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \iff$$

$$\iff \quad \frac{4}{3}\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{4}{3}t+\sin t. \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию $f(t)=\frac{4}{3}t+\sin t$. Докажем, что она возрастающая. Рассмотрим при $t_1>t_2$ разность:

$$f(t_1)-f(t_2)=\frac{4}{3}(t_1-t_2)+\sin t_1-\sin t_2==\frac{4}{3}(t_1-t_2)+2\sin\frac{t_1-t_2}{2}\cdot\cos\frac{t_1+t_2}{2}.$$

Так как $\cos\frac{t_1+t_2}{2}\geq-1$, то $f(t_1)-f(t_2)\geq\frac{4}{3}(t_1-t_2)-2\sin\frac{t_1-t_2}{2}$.
Так как $\sin\frac{t_1-t_2}{2}\leq\frac{t_1-t_2}{2}$, то $f(t_1)-f(t_2)\geq\frac{4}{3}(t_1-t_2)-2\frac{t_1-t_2}{2}=\frac{1}{3}(t_1-t_2)>0$.
Следовательно, $f(t)$ возрастает. Тогда неравенство $(*)$ можно переписать в виде

$$f(2t-\frac{\pi}{4})<f(t).$$

В силу возрастания $f(t)$ последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$2t-\frac{\pi}{4}<t \quad\iff\quad t<\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, надо найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$x^2-ax<\frac{\pi}{4}$$

будет выполнено для любого $x\in[\pi;2\pi]$. Обозначив $y(x)=x^2-ax-\frac{\pi}{4}$, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} y(\pi)<0, \\ y(2\pi)<0; \end{cases} \iff \begin{cases} \pi^2-a\pi-\frac{\pi}{4}<0, \\ 4\pi^2-2a\pi-\frac{\pi}{4}<0; \end{cases} \iff \begin{cases} a>\pi-\frac{1}{4}, \\ a>2\pi-\frac{1}{8}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad a>2\pi-\frac{1}{8}.$$

Ответ. $\left(2\pi-\frac{1}{8};+\infty\right)$.

6.3. Функциональные уравнения и неравенства

Задача 1. (У)

Существует ли линейная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая для всех действительных x соотношению $f(x+3)-f(2-x)=3x+1$?

Идея. Использовать общий вид линейной функции.
Указание. Линейная функция имеет вид $f(x)=ax+b$.

Указание. Исходя из общего вида линейной функции, выписать выражения для $f(x+3) = a(x+3)+b$ и $f(2-x) = a(2-x)+b$ и подставить их в данное соотношение.

Указание. Полученное равенство $(2a-3)x + a - 1 = 0$ должно выполняться для всех действительных x, поэтому коэффициент при переменной и свободный член должны быть равны нулю.

Решение. Запишем общий вид линейной функции:

$$f(x) = ax + b,$$

тогда

$$f(x+3) = a(x+3)+b, \quad f(2-x) = a(2-x)+b.$$

Подставим полученные выражения в соотношение из условия:

$$a(x+3)+b-(a(2-x)+b) = 3x+1 \quad \Longleftrightarrow \quad (2a-3)x+a-1=0.$$

Так как последнее соотношение должно выполняться для всех действительных x, коэффициент при переменной и свободный член должны быть равны нулю, то есть

$$\begin{cases} 2a-3=0, \\ a-1=0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \emptyset.$$

Поскольку система не имеет решений, не существует такая линейная функция, которая удовлетворяла бы условию задачи.

Ответ. Нет.

Задача 2. (У)

Найти квадратичную функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных x соотношению $f(1-x) - f(2-x) = -2x + 7$.

Идея. Использовать общий вид квадратичной функции.

Указание. Квадратичная функция имеет вид $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Указание. Используя общий вид квадратичной функции, выписать выражения для $f(1-x) = a(1-x)^2 + b(1-x) + c$ и $f(2-x) = a(2-x)^2 + b(2-x) + c$ и подставить их в данное соотношение.

Указание. Полученное соотношение $(2a+2)x - 3a - b - 7 = 0$ должно выполняться для всех действительных x, поэтому коэффициент при переменной и свободный член должны быть равны нулю.

Решение. Запишем общий вид квадратичной функции:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

тогда

$$f(1-x) = a(1-x)^2 + b(1-x) + c,$$

$$f(2-x) = a(2-x)^2 + b(2-x) + c.$$

Подставим полученные выражения в соотношение из условия:

$$a(1-x)^2 + b(1-x) + c - a(2-x)^2 - b(2-x) - c = -2x + 7 \iff$$

$$\iff \quad (2a+2)x - 3a - b - 7 = 0.$$

Поскольку полученное соотношение должно выполняться для всех действительных x, коэффициент при переменной и свободный член должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} 2a + 2 = 0, \\ 3a + b + 7 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1, \\ b = -4, \\ c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Следовательно, $f(x) = -x^2 - 4x + c$, где $c \in \mathbb{R}$.

Ответ. $f(x) = -x^2 - 4x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Задача 3. (У)

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных $x \neq 0$ условию $f(x) + 3x \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x^2$.

Идея. Подставить вместо x в данное условие $\dfrac{1}{x}$ и рассмотреть систему уравнений.

Указание. Подставив вместо x в данное условие $\dfrac{1}{x}$, получить второе соотношение: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{3}{x} \cdot f(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

Указание. Исключив из полученной системы $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, найти $f(x)$.

Решение. Так как областью определения функции является вся действительная ось без нуля, то данное условие должно выполняться, если вместо x подставить $\dfrac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{x} \cdot f(x) = \frac{2}{x^2}.$$

Выразим из последнего равенства $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ и подставим в исходное условие:

$$f(x) + 3x \cdot \left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} \cdot f(x)\right) = 2x^2 \quad \iff \quad f(x) = \frac{3}{4x} - \frac{x^2}{4}.$$

Подставляя найденную функцию в исходное соотношение, легко проверить, что она удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $f(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{x^2}{4}$.

Задача 4. (У)

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую для всех действительных $x \neq 0$ условию $f(x) + 5x \cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x^3$.

Идея. Подставить вместо x в данное условие $\dfrac{1}{x}$ и рассмотреть систему.

Указание. Подставив вместо x в данное условие $\dfrac{1}{x}$, получить второе соотношение: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{5}{x} \cdot f(x) = \dfrac{3}{x^3}$.

Указание. Исключив из полученной системы $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, найти $f(x)$.

Решение. Так как областью определения функции является вся действительная ось без нуля, то данное условие должно выполняться, если вместо x подставить $\dfrac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{5}{x} \cdot f(x) = \frac{3}{x^3}.$$

Выразим из полученного соотношения $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ и подставим в исходное условие:

$$f(x) + 5x \cdot \left(\frac{3}{x^3} - \frac{5}{x} \cdot f(x)\right) = 3x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{5}{8x^2} - \frac{x^3}{8}.$$

Проверкой убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $f(x) = \dfrac{5}{8x^2} - \dfrac{x^3}{8}$.

Задача 5. (У)

Сколько решений имеет уравнение $x + [100x] = 100x$, где квадратные скобки означают целую часть числа?

Идея. Использовать определение целой части числа.

Указание. Сделать замену $y = 99x$ и использовать определение целой части числа.

Указание. После замены $y = 99x$ уравнение примет вид

$$\left[\frac{100y}{99}\right] = y.$$

Отсюда, с учётом определения целой части числа, получаем

$$\begin{cases} y \in \mathbb{Z}, \\ 0 \leq \dfrac{100y}{99} - y < 1. \end{cases}$$

Решение. Исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$[100x] = 99x.$$

Величина $[a]$ есть целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Сделаем замену $y = 99x$, тогда уравнение примет вид

$$\left[\frac{100y}{99}\right] = y.$$

Отсюда, с учётом определения целой части числа, получаем систему

$$\begin{cases} y \in \mathbb{Z}, \\ 0 \le \dfrac{100y}{99} - y < 1; \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{Z}, \\ 0 \le y < 99; \end{cases} \iff y = 0; 1; 2; ...; 98.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем 99 решений:

$$x = \frac{y}{99}, \quad \text{где} \quad y = 0; 1; 2; ...; 98.$$

Ответ. 99 решений; $x_n = \dfrac{n}{99}$, $n = 0, 1, 2, \ldots 98$.

Задача 6. (У)

Решить неравенство $[x] \cdot \{x\} < x - 1$, где квадратные скобки означают целую часть числа, а фигурные – дробную часть числа.

Идея. Использовать определение целой и дробной части числа.
Указание. $x = [x] + \{x\}$.
Указание. Привести неравенство к виду $([x] - 1)(\{x\} - 1) < 0$. Далее учесть, что $0 \le \{x\} < 1$.

Решение. Воспользуемся соотношением $x = [x] + \{x\}$ в правой части неравенства:

$$[x] \cdot \{x\} < [x] + \{x\} - 1 \iff ([x] - 1)(\{x\} - 1) < 0.$$

По определению дробной части

$$0 \le \{x\} < 1 \implies \{x\} - 1 < 0.$$

Следовательно, получаем неравенство

$$[x] - 1 > 0 \iff [x] > 1 \iff x \ge 2.$$

Ответ. $[2; +\infty)$.

Задача 7. (У)

Решить уравнение $\{2\{2x\}\} = x$, где фигурные скобки означают дробную часть числа.

Идея. Использовать определение дробной части числа.

Указание. Пользуясь определением дробной части числа, получить из уравнения, что $0 \le x < 1$.

Указание. Далее, исходя из вида левой части уравнения, необходимо рассмотреть 4 случая.

Указание. Если $0 \le x < \frac{1}{4}$, то $0 \le 2x < \frac{1}{2} \implies \{2x\} = 2x$. Следовательно, исходное уравнение принимает вид $\{4x\} = x$. Так как $0 \le 4x < 1$, то $\{4x\} = 4x$. Подставляя в уравнение, получаем $4x = x$, то есть $x = 0$.

Указание. Остальные три случая $\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} \le x < 1$ рассмотреть аналогично.

Решение. Согласно определению дробной части числа

$$\{x\} = x - [x], \quad 0 \le \{x\} < 1.$$

Поэтому из уравнения следует, что $0 \le x < 1$. Исходя из вида левой части уравнения, необходимо рассмотреть 4 случая.

1) Если $0 \le x < \frac{1}{4}$, то $0 \le 2x < \frac{1}{2} \implies \{2x\} = 2x$. Следовательно, исходное уравнение принимает вид $\{4x\} = x$. Так как $0 \le 4x < 1$, то $\{4x\} = 4x$. Подставляем в уравнение: $4x = x \iff x = 0$.

2) Если $\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{2} \le 2x < 1 \implies \{2x\} = 2x$. Следовательно, исходное уравнение принимает вид $\{4x\} = x$. Так как $1 \le 4x < 2$, то $\{4x\} = 4x - 1$. Подставляем в уравнение: $4x - 1 = x \iff x = \frac{1}{3}$.

3) Если $\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}$, то $1 \le 2x < \frac{3}{2} \implies \{2x\} = 2x - 1$. Значит, исходное уравнение принимает вид $\{4x - 2\} = x$. Так как $0 \le 4x - 2 < 1$, то $\{4x - 2\} = 4x - 2$. Подставляем: $4x - 2 = x \iff x = \frac{2}{3}$.

4) Наконец, если $\frac{3}{4} \le x < 1$, то $\frac{3}{2} \le 2x < 2 \implies \{2x\} = 2x - 1$. Значит, исходное уравнение принимает вид $\{4x - 2\} = x$. Так как $1 \le 4x - 2 < 2$, то $\{4x - 2\} = 4x - 3$. Подставляем в уравнение: $4x - 3 = x \iff x = 1 \notin \left[\frac{3}{4}; 1\right)$.

Ответ. 0; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

Задача 8. (У)

Решить уравнение $\max(2x; 3 - x) = \min(5 + 2x; 6x)$.

Идея. Использовать формулы для $\max(a,b)$ и $\min(a,b)$.
Указание. Использовать формулы:

$$\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2};\quad \min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

Указание. Получить уравнение $|3x-3|+|4x-5|=7x+2$; решить стандартным раскрытием модулей.

Решение. Воспользуемся равенствами

$$\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2};\quad \min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

Получим уравнение

$$|3x-3|+|4x-5|=7x+2.$$

Раскрываем модули на трёх промежутках.

1) При $x<1$ уравнение принимает вид $14x=6 \iff x=\frac{3}{7}$.

2) При $1\le x<\frac{5}{4}$ получаем уравнение $8x=0 \implies \emptyset$.

3) При $x\ge\frac{5}{4}$ уравнение принимает вид $-8=2=6 \implies \emptyset$.

Ответ. $\frac{3}{7}$.

Задача 9. (ЕГЭ.В)

Периодическая функция $y=f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 2 и $f(-1)=-2$. Найдите значение выражения $3f(5)-2f(-3)$.

Идея. Использовать периодичность функции.
Указание. Так как период функции равен 2 и $f(-1)=-2$, то функция равна -2 для всех нечётных целых значений аргумента.

Решение. Так как период функции равен 2 и $f(-1)=-2$, то

$$f(-1)=f(-3)=f(5)=-2,$$

поэтому

$$3f(5)-2f(-3)=3\cdot(-2)-2\cdot(-2)=-2.$$

Ответ. -2.

Задача 10. (ЕГЭ.В)

Периодическая функция $y=f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 3 и $f(-1)=5$. Найдите значение выражения $3f(2)+2f(5)$.

Идея. Использовать периодичность функции.
Указание. Так как период функции равен 3 и $f(-1)=5$, то
$f(5)=f(2)=f(-1)=5$.

Решение. Так как период функции равен 3 и $f(-1) = 5$, то

$$f(5) = f(2) = f(-1) = 5.$$

Поэтому

$$3f(2) + 2f(5) = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 25.$$

Ответ. 25.

Задача 11. (ЕГЭ.В)

Нечётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 2,3 + f(x-9)$ вычислите сумму $g(6) + g(8) + g(10) + g(12)$.

Идея. Использовать нечётность $f(x)$.
Указание. Подставить $g(x)$ в сумму:

$$g(6) + g(8) + g(10) + g(12) = 9,2 + f(-3) + f(-1) + f(1) + f(3).$$

Указание. Воспользоваться нечётностью функции $f(x)$.

Решение. Подставим $g(x)$ в сумму и воспользуемся нечётностью функции $f(x)$:

$$g(6) + g(8) + g(10) + g(12) = 4 \cdot 2,3 + f(-3) + f(-1) + f(1) + f(3) = 9,2.$$

Ответ. 9,2.

Задача 12. (ЕГЭ.В)

Чётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = x + (x-7) \cdot f(x-7) + 7$ вычислите сумму $g(5) + g(7) + g(9)$.

Идея. Использовать чётность $f(x)$.
Указание. Подставить $g(x)$ в сумму:

$$g(5) + g(7) + g(9) = 42 - 2 \cdot f(-2) + 2 \cdot f(2).$$

Указание. Воспользоваться чётностью функции $f(x)$.

Решение. Подставим $g(x)$ в сумму и воспользуемся чётностью функции $f(x)$:

$$g(5) + g(7) + g(9) = 42 - 2 \cdot f(-2) + 0 \cdot f(0) + 2 \cdot f(2) = 42.$$

Ответ. 42.

Задача 13. (ЕГЭ.В)

Нечётная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = x(3+x)(x^2-4)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$.

Идея. Использовать нечётность функции $g(x)$.

Указание. Найти корни уравнения $f(x) = 0$ при неотрицательных значениях переменной x.

Указание. Используя нечётность функции $g(x)$, найти корни уравнения $g(x) = 0$ при $x < 0$.

Решение. Найдём корни уравнения $f(x) = 0$ при неотрицательных значениях переменной x (они же будут корнями уравнения $g(x) = 0$ при $x \geq 0$):

$$\begin{cases} x(3+x)(x^2-4) = 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 2. \end{array} \right.$$

Так как функция $g(x)$ является нечётной, то при $x < 0$ уравнение $g(x) = 0$ будет иметь корень $x = -2$. Следовательно, уравнение $g(x) = 0$ имеет три корня.

Ответ. Три корня.

Задача 14. (ЕГЭ.В)

Чётная функция $g(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $f(x) = (x^2+4x)(x^3+8)$. Укажите число корней уравнения $g(x) = 0$.

Идея. Использовать чётность функции $g(x)$.

Указание. Найти корни уравнения $f(x) = 0$ при неположительных значениях переменной x.

Указание. Используя чётность функции $g(x)$, найти корни уравнения $g(x) = 0$ при $x > 0$.

Решение. Найдём корни уравнения $f(x) = 0$ при неположительных значениях переменной x (они же будут корнями уравнения $g(x) = 0$ при $x \leq 0$):

$$\begin{cases} (x^2+4x)(x^3+8) = 0, \\ x \leq 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = -2; \\ x = -4. \end{array} \right.$$

Так как функция $g(x)$ является чётной, то при $x > 0$ уравнение $g(x) = 0$ будет иметь корни $x = 2$, $x = 4$. Следовательно, уравнение $g(x) = 0$ имеет пять корней.

Ответ. Пять корней.

Задача 15. (ЕГЭ.В)

Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке $[-3; 5]$.

Идея. Использовать чётность и периодичность функции.
Указание. Найти нули функции на отрезке $[0; 3]$: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$.
Указание. Используя чётность, найти нули функции на отрезке $[-3; 0]$: $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.
Указание. Используя периодичность, показать, что на отрезке $[3; 5]$ у функции нулей нет.

Решение. Найдём нули функции $y = h(x)$ на отрезке $[0; 3]$:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0, \\ 0 \le x \le 3; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{3}, \\ 0 \le x \le 3; \end{cases} \iff x_1 = 2 - \sqrt{3}.$$

Так как функция является чётной, то на отрезке $[-3; 0]$ у неё будет один нуль:

$$x_2 = -x_1 = -2 + \sqrt{3}.$$

Заметим, что $x_2 > -1$.

Так как функция является периодической с периодом, равным 6, то на отрезке $[3; 5]$ она будет принимать те же значения, что и на отрезке $[-3; -1]$, а на нём функция не имеет нулей.

Следовательно, функция $y = h(x)$ имеет два нуля на отрезке $[-3; 5]$.

Ответ. Два нуля.

Задача 16. (ЕГЭ.В)

Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является чётной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0; 3]$ функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1; 5]$.

Идея. Использовать чётность и периодичность функции.
Указание. Найти нули функции на отрезке $[0; 3]$: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$.
Указание. Используя чётность, найти нуль функции на отрезке $[-3; 0]$: $x = -1 - \sqrt{2}$, но он не попадает на отрезок $[-1; 5]$.
Указание. Используя периодичность, показать, что на отрезке $[3; 5]$ у функции есть один нуль.

Решение. Найдём нули функции $y = f(x)$ на отрезке $[0; 3]$:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0, \\ 0 \le x \le 3; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2}, \\ 0 \le x \le 3; \end{cases} \iff x_1 = 1 + \sqrt{2}.$$

Так как функция является чётной, то на отрезке $[-3;0]$ у неё будет один нуль $x = -1-\sqrt{2} \in (-3;-2)$, но он не попадает на отрезок $[-1;5]$.

Так как функция является периодической с периодом, равным 6, то на отрезке $[3;5]$ она будет принимать те же значения, что и на отрезке $[-3;-1]$, а на нём функция один раз обращается в нуль.

Следовательно, функция $y = f(x)$ имеет два нуля на отрезке $[-1;5]$.

Ответ. Два нуля.

Задача 17. (Физ-92.7)

Известно, что некоторая нечётная функция при $x > 0$ определяется формулой $f(x) = \log_3\left(\frac{x}{3}\right)$. Найти, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = 3$.

Идея. Использовать определение нечётной функции.

Указание. Согласно определению нечётной функции

$$f(x) = \begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x}{3}\right) & \text{при} \quad x > 0, \\ -\log_3\left(\dfrac{-x}{3}\right) & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Указание. Решая уравнение $f(x) = 3$, получаем следующую совокупность двух систем: $\begin{cases} \log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 3, \\ x > 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} -\log_3\left(\frac{-x}{3}\right) = 3, \\ x < 0. \end{cases}$

Решение. Исходя из определения нечётной функции, при $x < 0$ функция будет вычисляться по правилу

$$f(x) = -f(-x) = -\log_3\left(\frac{-x}{3}\right).$$

Следовательно, $f(x) = \begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x}{3}\right) & \text{при} \quad x > 0, \\ -\log_3\left(\dfrac{-x}{3}\right) & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$

Решая уравнение $f(x) = 3$, получаем совокупность двух систем.

1) $\begin{cases} \log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 3, \\ x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x}{3} = 27, \\ x > 0; \end{cases} \iff x = 81.$

2) $\begin{cases} -\log_3\left(\dfrac{-x}{3}\right) = 3, \\ x < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-x}{3} = \dfrac{1}{27}, \\ x < 0; \end{cases} \iff x = -\dfrac{1}{9}.$

Ответ. $f(x) = -\log_3\left(\dfrac{-x}{3}\right)$ при $x < 0$. Корни уравнения $-\dfrac{1}{9}$; 81.

Задача 18. (Почв-00(1).6)

Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение $f(2x + 16) + 23 = 5f(x)$.

Идея. Использовать периодичность функции $f(x)$.
Указание. Используя периодичность функции $f(x)$, привести уравнение к виду

$$f(2x) + 23 = 5f(x).$$

Указание. Так как функция $f(x)$ входит в уравнение как с аргументом x, так и с аргументом $2x$, необходимо рассмотреть два случая:

$$0 \le x \le 4 \quad \text{и} \quad 4 < x \le 8.$$

Решение. В силу периодичности $f(2x+16) = f(2x)$, поэтому уравнение принимает вид

$$f(2x) + 23 = 5f(x).$$

Так как функция $f(x)$ входит в уравнение как с аргументом x, так и с аргументом $2x$, рассмотрим два случая.

1-й случай.

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 8 \cdot 2x - (2x)^2 + 23 = 5(8x - x^2); \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ x^2 - 24x + 23 = 0; \end{cases} \iff x = 1.$$

2-й случай.

$$\begin{cases} 4 < x \le 8, \\ f(2x - 8) + 23 = 5f(x); \end{cases} \iff \begin{cases} 4 < x \le 8, \\ x^2 + 8x - 105 = 0; \end{cases} \iff x = 7.$$

Объединяя результаты и учитывая периодичность функции, окончательно получаем:

$$x = 1 + 8n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x = 7 + 8k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $1 + 8n,\ 7 + 8k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 19. (Экон-97.5)

Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $-2 \le x \le 0$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x+2)$. Решить уравнение $\dfrac{2 \cdot f(-3 - x) - 3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)} - \sqrt{2}} = 0.$

Идея. Использовать нечётность и периодичность функции $f(x)$.
Указание. Используя нечётность функции $f(x)$, продолжить её на отрезок $[0; 2]$: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & \text{при} \quad x \in [-2; 0], \\ -2x^2 + 4x & \text{при} \quad x \in [0; 2]. \end{cases}$

Указание. С учётом периодичности функции $f(x)$ свести заданное уравнение к системе

$$\begin{cases} f(1-x) = \dfrac{3}{2}, \\ f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}\right) \geq 0, \\ f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}\right) \neq 2. \end{cases}$$

Указание. Для решения первого уравнения полученной системы рассмотреть два случая:

$$\begin{cases} -2 \leq 1-x \leq 0, \\ 2(1-x)^2 + 4(1-x) = 1,5; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 \leq 1-x \leq 2, \\ -2(1-x)^2 + 4(1-x) = 1,5. \end{cases}$$

Указание. Для проверки полученных решений $x = -\dfrac{1}{2} + 4n,\ n \in \mathbb{Z}$ и $x = \dfrac{1}{2} + 4m,\ m \in \mathbb{Z}$ рассмотреть отдельно случаи чётных и нечётных m и n.

Решение. Используя нечётность функции $f(x)$, продолжим её на отрезок $[0;2]$:

$$f(x) = -f(-x) = -2(-x)(-x+2) = -2x^2 + 4x.$$

Выпишем общее правило для вычисления $f(x)$ на отрезке $[-2;2]$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & \text{при} \quad x \in [-2;0], \\ -2x^2 + 4x & \text{при} \quad x \in [0;2]. \end{cases}$$

В силу периодичности $f(-3-x) = f(1-x)$, поэтому заданное в условии уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} f(1-x) = \dfrac{3}{2}, \\ f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}\right) \geq 0, \\ f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}\right) \neq 2. \end{cases}$$

С учётом периодичности функции $f(x)$ первое уравнение системы достаточно решить на отрезке $[-2;2]$. Для этого рассмотрим два случая.

1-й случай.

$$\begin{cases} -2 \leq 1-x \leq 0, \\ 2(1-x)^2 + 4(1-x) = 1,5; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ 4x^2 - 8x + 9 = 0; \end{cases} \iff \emptyset.$$

2-й случай.

$$\begin{cases} 0 \leq 1-x \leq 2, \\ -2(1-x)^2 + 4(1-x) = 1,5; \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ 4x^2 = 1; \end{cases} \iff x = \pm\dfrac{1}{2}.$$

Таким образом, решением исходного уравнения являются все числа

$$x = -\frac{1}{2} + 4n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{2} + 4m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Проведём исследование каждой серии отдельно.

- Пусть $x = -\frac{1}{2} + 4n$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + 2n$. Поскольку период функции $f(x)$ равен 4, рассмотрим чётные и нечётные значения n.
  - При $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$
  $$f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2} + 4k\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$
  что удовлетворяет системе; следовательно, $x = -\frac{1}{2} + 8k$, $k \in \mathbb{Z}$ – решение.
  - При $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$
  $$f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) = f\left(-\frac{3}{2} + 4k\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0,$$
  что противоречит условиям системы.
- Рассмотрим семейство решений $x = \frac{1}{2} + 4m$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} = 1 + 2m$. Рассмотрим m чётные и нечётные.
  - При $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$
  $$f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) = f(1 + 4k) = f(1) = 2,$$
  что противоречит условиям системы.
  - При $m = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$
  $$f\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) = f(-1 + 4k) = f(-1) = -2 < 0,$$
  что также противоречит условиям системы.

Ответ. $-\frac{1}{2} + 8k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 20. **(Экон-00.7)**

Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x}, \\ 0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решить неравенство $f(x) \le \frac{\pi}{8}$.

Идея. Воспользоваться симметрией области определения в смысле замены x на $\frac{1}{x}$.

Указание. Обозначая $g(x)=\cos(2f(x))$, привести уравнение к виду

$$\frac{1}{g(x)}-6g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{x}.$$

Указание. Воспользовавшись симметрией области определения, выполнить замену x на $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}-6g\left(x\right)=5x.$$

Указание. Исключая из этих уравнений $g\left(\frac{1}{x}\right)$, получить уравнение относительно $g(x)$:

$$6g^2(x)+5xg(x)-x^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} g(x)=-x\,; \\ g(x)=\frac{x}{6}\,. \end{array}\right.$$

Указание. При решении получившихся уравнений учесть ограниченность косинуса и условие $0\le f(x)\le\frac{\pi}{4}$.

Решение. Обозначая $g(x)=\cos(2f(x))$ и применяя формулу косинуса двойного угла, приходим к уравнению

$$\frac{1}{g(x)}-6g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{x}.$$

Поскольку $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{6}\,;6\right]$, то в это уравнение вместо x можно подставить $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}-6g\left(x\right)=5x.$$

Исключая из этих уравнений $g\left(\frac{1}{x}\right)$, получаем уравнение относительно $g(x)$:

$$6g^2(x)+5xg(x)-x^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} g(x)=-x\,; \\ g(x)=\frac{x}{6}\,. \end{array}\right.$$

- Функция $g(x)=-x$ не подходит, так как уравнение $\cos(2f(x))=-x$ не может выполняться для всех $x\in\left[\frac{1}{6}\,;\,6\right]$ вследствие ограниченности косинуса.

- В силу ограничений $0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4}$ уравнение $\cos(2f(x)) = \dfrac{x}{6}$ даёт единственное решение $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{x}{6}\right)$. Задача свелась к решению системы

$$\begin{cases} f(x) \le \dfrac{\pi}{8}, \\ x \in \left[\dfrac{1}{6}; 6\right]; \end{cases} \iff \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{x}{6}\right) \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1}{6} \le x \le 6; \end{cases} \iff x \in \left[3\sqrt{2}; 6\right].$$

Ответ. $[3\sqrt{2}; 6]$.

Задача 21. (ЕГЭ.С)

Решить уравнение $f(g(x))+g(1+f(x)) = 33$, если известно, что $f(x) = x^2-6x+15$ и $g(x) = \begin{cases} 18 & \text{при} \quad x \ge 4, \\ 3^x + \dfrac{12}{5-x} & \text{при} \quad x < 4. \end{cases}$

Идея. Показать, что $f(x) \ge 6$ для всех x. Исходя из этого, упростить уравнение.
Указание. Так как $f(x)$ является квадратичной функцией, то

$$f(x) \ge f(x_в) = f(3) = 6.$$

Указание. Если $f(x) \ge 6$, то $1 + f(x) \ge 7$, поэтому $g(1 + f(x)) = 18$. Следовательно, исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$f(g(x)) = 15 \iff (g(x))^2 - 6g(x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} g(x) = 0; \\ g(x) = 6. \end{array}\right.$$

Указание. Так как $g(x) > 0$ для всех x, то первое уравнение совокупности решений не имеет.
Указание. Второе уравнение совокупности:

$$g(x) = 6 \iff \begin{cases} x < 4, \\ 3^x + \dfrac{12}{5-x} = 6. \end{cases}$$

Решение. Так как $f(x)$ является квадратичной функцией с положительным коэффициентом при x^2, то

$$f(x) \ge f(x_в) = f(3) = 6.$$

Тогда $1 + f(x) = 7 > 4$, поэтому $g(1 + f(x)) = 18$. Следовательно, исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$f(g(x)) = 15 \iff (g(x))^2 - 6g(x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} g(x) = 0; \\ g(x) = 6. \end{array}\right.$$

Так как $g(x) > 0$ для всех x, то первое уравнение совокупности не имеет решений. Рассмотрим второе уравнение:

$$g(x) = 6 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x < 4, \\ 3^x + \dfrac{12}{5-x} = 6. \end{cases}$$

В левой части уравнения стоит возрастающая функция (сумма двух возрастающих функций), а справа – константа. Значит, уравнение имеет не более одного решения. Единственное решение легко найти подбором; это $x = 1$.

О т в е т. 1.

Задача 22. (ЕГЭ.С)

Решить уравнение $f(g(x))+g(3+f(x)) = 30$, если известно, что $f(x) = 0,5x^4 - 4x + 5$ и $g(x) = \begin{cases} 25 \quad \text{при} \quad x \geq 4, \\ 2^x + \dfrac{9}{5-x} \quad \text{при} \quad x < 4. \end{cases}$

И д е я. С помощью производной найти минимум функции $f(x)$. Показать, что $f(x) > 1$ для всех x. Исходя из этого, упростить уравнение.

У к а з а н и е. Показать, что $f(x) > 1$ для всех x.

У к а з а н и е. С помощью производной найти минимум функции $f(x)$:

$$f'(x) = 2x^3 - 4 \quad \Longrightarrow \quad f_{min} = f(\sqrt[3]{2}) = 5 - 3\sqrt[3]{2} > 1.$$

У к а з а н и е. Тогда $3 + f(x) > 4$, поэтому $g(3 + f(x)) = 25$. Следовательно, исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$f(g(x)) = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,5(g(x))^4 - 4g(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} g(x) = 0; \\ g(x) = 2. \end{array} \right.$$

У к а з а н и е. Так как $g(x) > 0$ для всех x, то первое уравнение последней совокупности решений не имеет.

У к а з а н и е. Второе уравнение совокупности:

$$g(x) = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x < 4, \\ 2^x + \dfrac{9}{5-x} = 2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Покажем, что $f(x) > 1$ для всех x. Для этого с помощью производной найдём минимум функции $f(x)$:

$$f'(x) = 2x^3 - 4 \quad \Longrightarrow \quad f_{min} = f(\sqrt[3]{2}) = 5 - 3\sqrt[3]{2} > 1.$$

Тогда $3 + f(x) > 4$, поэтому $g(3 + f(x)) = 25$. Следовательно, исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$f(g(x)) = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,5(g(x))^4 - 4g(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} g(x) = 0; \\ g(x) = 2. \end{array} \right.$$

Так как $g(x) > 0$ для всех x, то первое уравнение последней совокупности не имеет решений. Рассмотрим второе уравнение:

$$g(x) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x < 4, \\ 2^x + \dfrac{9}{5-x} = 2. \end{cases}$$

В левой части последнего уравнения стоит возрастающая функция (сумма двух возрастающих функций), справа – константа, поэтому уравнение может иметь не более одного решения. Единственное решение $x = -1$ легко находится подбором.

Ответ. -1.

6.4. Использование графических иллюстраций

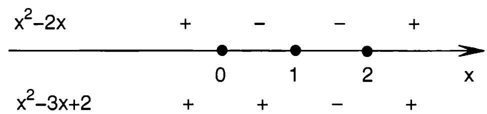
Задача 1. (Геогр-92.5)

Найти все значения параметра c, при которых уравнение
$|x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| = x^2 - 4x + c$ имеет ровно три различных решения.

Идея. Использовать графическую иллюстрацию. Раскрыть модули через точки смены знака и на каждом из полученных промежутков построить соответствующую параболу.
Указание. График $f(x) = |x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| - x^2 + 4x$ будет объединением парабол. Надо найти c, при которых прямая $f(x) = c$ будет пересекать его ровно в трёх точках.
Указание. 1) $x < 0$ или $x \geq 2$; $f(x) = x^2 - x + 2$; $x_{\text{в}} = \dfrac{1}{2}$; $y_{\text{в}} = \dfrac{7}{4}$.
Указание. 2) $0 \leq x < 1$; $f(x) = -x^2 + 3x + 2$; $x_{\text{в}} = \dfrac{3}{2}$; $y_{\text{в}} = \dfrac{17}{4}$.
Указание. 3) $1 \leq x < 2$; $f(x) = -3x^2 + 9x - 2$; $x_{\text{в}} = \dfrac{3}{2}$; $y_{\text{в}} = \dfrac{19}{4}$.

Решение. Обозначим: $f(x) = |x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| - x^2 + 4x$; ищем такие c, при которых уравнение $f(x) = c$ имеет ровно три различных корня.
Раскрывает модули через точки смены знака:

$$f(x) = \underbrace{|x^2 - 2x|}_{x_0 = 0;2} + \underbrace{|x^2 - 3x + 2|}_{x_0 = 1;2} - x^2 + 4x.$$

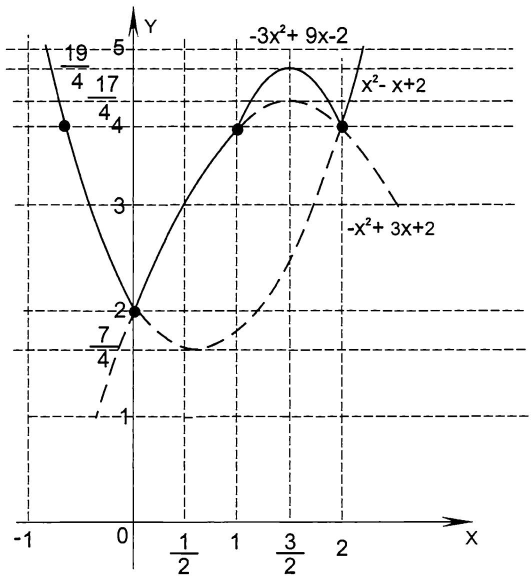


- $x < 0$ или $x \geq 2$; $f(x) = x^2 - x + 2$; $x_{\text{в}} = \dfrac{1}{2}$; $y_{\text{в}} = \dfrac{7}{4}$;
- $0 \leq x < 1$; $f(x) = -x^2 + 3x + 2$; $x_{\text{в}} = \dfrac{3}{2}$; $y_{\text{в}} = \dfrac{17}{4}$;

- $1 \le x < 2$; $f(x) = -3x^2 + 9x - 2$; $x_в = \dfrac{3}{2}$; $y_в = \dfrac{19}{4}$;

построим график $f(x)$ как объединение парабол по соответствующим интервалам; $f(0) = 2$; $f(1) = 4$; $f(2) = 4$; график $f(x)$ пересекается семейством горизонталей $y = c$.

З а м е ч а н и е. Графическая иллюстрация не является методом решения, однако, в нашем случае найденные значения были получены в процессе аналитического исследования, поэтому в дополнительном обосновании они не нуждаются.



Так как требуется ровно три различных решения, то из всех прямых $y = c$ выбираем только те, которые в трёх различных абсциссах пересекают график $f(x)$; в силу способа построения (раскрытие модулей по определению) и свойств парабол получаем, что это прямые $y = 4$ и $y = \dfrac{19}{4}$.

О т в е т. 4; $\dfrac{19}{4}$.

Задача 2. (Почв-96.6)

Определите, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \ge x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

И д е я. Построить графики функций, стоящих в левой и правой частях неравенства.

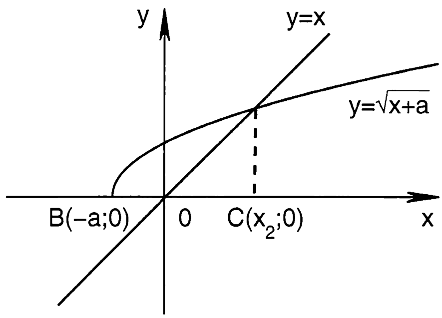
У к а з а н и е. Рассмотреть два случая: $a \ge 0$ и $a < 0$. Построить графики функций, стоящих в левой и правой частях неравенства.

У к а з а н и е. В каждом случае найти точки пересечения графиков и длину отрезка решений.

Решение. Рассмотрим два случая (в обоих случаях решением является отрезок BC).

1) $a \geq 0$. Найдём абсциссу точки пересечения графиков:

$$\begin{cases} x + a = x^2, \\ x \geq 0; \end{cases} \iff x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

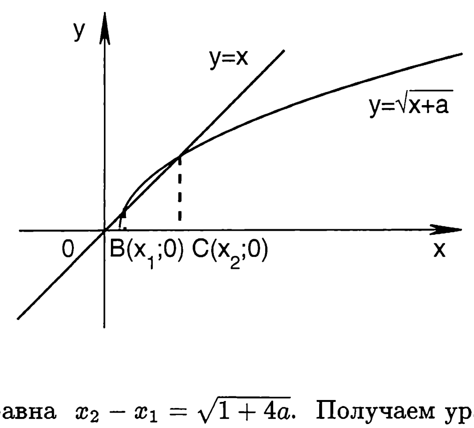


Таким образом, $|BC| = a + \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$. Получаем уравнение:

$$a + \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} = 2a \iff a = 2.$$

2) $a < 0$. В данном случае возможно пересечение графиков в двух точках. Найдём их абсциссы:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$



Длина отрезка BC равна $x_2 - x_1 = \sqrt{1 + 4a}$. Получаем уравнение:

$$\sqrt{1 + 4a} = -2a \iff a = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $2; \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$.

Задача 3. (Экон-83.6)

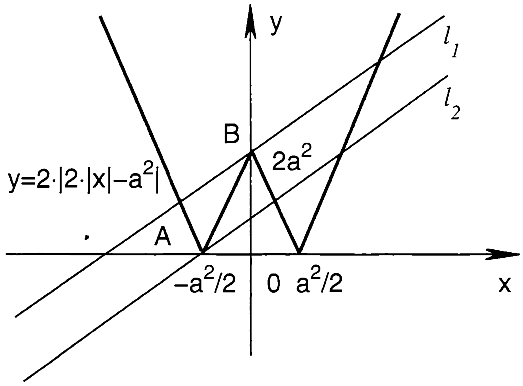
Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x - a = 2 \cdot |\, 2 \cdot |x| - a^2 \,|$$

имеет три различных корня. Найти эти корни.

Идея. Построить график функции из правой части уравнения и посмотреть, в каких случаях прямая $y = x - a$ пересекает этот график ровно в трёх точках.
Указание. Построить график функции из правой части уравнения.
Указание. Три корня могут быть только в случае, если прямая $y = x - a$ проходит либо через точку $A\left(-\dfrac{a^2}{2}; 0\right)$, либо через точку $B\left(0; 2a^2\right)$.
Указание. В обоих случаях найти две другие точки пересечения графиков.

Решение. Построим график функции $y = 2 \cdot |\, 2 \cdot |x| - a^2 \,|$.



Исходное уравнение может иметь три корня, если прямая $y = x - a$ проходит либо через точку $A\left(-\dfrac{a^2}{2}; 0\right)$, либо через точку $B\left(0; 2a^2\right)$.

В первом случае из уравнения $-\dfrac{a^2}{2} - a = 0$ следует, что $a = -2$ ($a = 0$ не является решением задачи). Итак, один корень найден, это $x = -\dfrac{a^2}{2} = -2$. Для поиска двух других корней исходного уравнения (оба корня положительные) подставим найденное значение параметра $a = -2$ в исходное уравнение и решим его:

$$x + 2 = 2|2x - 4| \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2, \\ x + 2 = 4x - 8; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x + 2 = -4x + 8; \end{cases} \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}; \\ x = \dfrac{6}{5}. \end{array}\right.$$

Аналогично, для второго случая (прямая $y = x - a$ проходит через точку B) определяем своё значение параметра: $a = -\frac{1}{2}$ ($a = 0$ также не является решением). Найдём, помимо $x = 0$, ещё два корня:

$$x + \frac{1}{2} = 2\left|2|x| - \frac{1}{4}\right| \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{a^2}{2}, \\ x + \frac{1}{2} = 4x - \frac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\frac{a^2}{2}, \\ x + \frac{1}{2} = -4x - \frac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}; \\ x = -\frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ. При $a = -2$ $x \in \left\{2;\ \frac{6}{5};\ \frac{10}{3}\right\}$; при $a = -\frac{1}{2}$ $x \in \left\{-\frac{1}{5};\ 0;\ \frac{1}{3}\right\}$.

Задача 4. (Геогр-94(1).6)

Найти все значения a, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = a$$

существуют и принадлежат отрезку $[2; 17]$.

Идея. Выделить под внешними радикалами полные квадраты. Сделав замену, переформулировать задачу в новых переменных. Построить график левой части уравнения.

Указание. Выделить под внешними радикалами полные квадраты относительно $\sqrt{x - 1}$.

Указание. Сделав замену $y = \sqrt{x - 1}$, переформулировать задачу в новых переменных.

Указание. Построить график левой части уравнения.

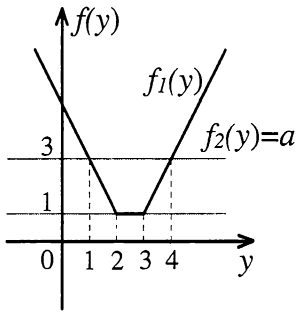
Решение. Выделим под внешними радикалами полные квадраты:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x - 1} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x - 1} - 3\right)^2} = a \iff \left|\sqrt{x - 1} - 2\right| + \left|\sqrt{x - 1} - 3\right| = a.$$

Сделаем замену $y = \sqrt{x - 1}$. Заметим, что если $x \in [2; 17]$, то $y \in [1; 4]$. Получим уравнение

$$|y - 2| + |y + 3| = a.$$

Требуется найти все значения a, при каждом из которых корни данного уравнения существуют и принадлежат отрезку $[1; 4]$. Для этого построим графики функций $f_1(y) = |y - 2| + |y + 3|$ и $f_2(y) = a$.



При $a \in [1;3]$ решения существуют и принадлежат отрезку $[1;4]$.

Ответ. $[1;3]$.

Задача 5. (Георг-94.5)

Найти все значения a, при которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

Идея. Выделить полные квадраты под знаками радикалов. Построить графики.
Указание. Выделить полные квадраты под радикалами.
Указание. Привести уравнение к виду

$$a - \sqrt{1 - (x - a)^2} = 3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2}.$$

Указание. График правой части уравнения, то есть функции

$$y = 3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2},$$

есть нижняя часть единичной окружности $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$ с центром в точке $(3;3)$, а график левой части – такая же полуокружность, но с центром в точке $(a;a)$.

Решение. Выделив полные квадраты под радикалами, приведём уравнение к виду

$$a - \sqrt{1 - (x - a)^2} = 3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2}.$$

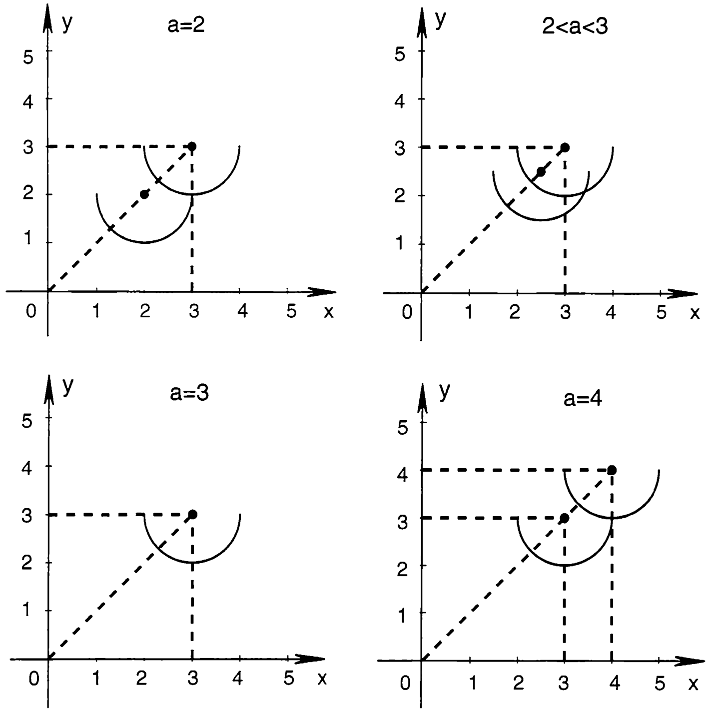
График правой части уравнения, то есть функции $y = 3 - \sqrt{1 - (x - 3)^2}$, есть нижняя часть единичной окружности

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

с центром в точке $(3;3)$, а график левой части – нижняя часть единичной окружности

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 1$$

с центром в точке $(a;a)$.



Следовательно, уравнение имеет ровно одно решение при $a \in [2;3) \cup (3;4]$.

Ответ. $[2;3) \cup (3;4]$.

Задача 6. (ВМК-96.5)

Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Идея. Выделить полные квадраты. Провести графическую интерпретацию задачи.

Указание. Выделив полные квадраты, переписать систему в виде

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ \sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} = \sqrt{10^2 + 4^2}. \end{cases}$$

Указание. Заметить, что искомая точка (x, y) лежит на окружности радиуса 4 с центром в точке $(7; 5)$.

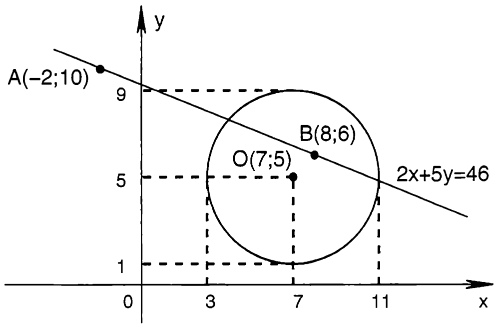
Указание. Заметить, что искомая точка (x, y) также лежит и на отрезке, соединяющем точки $(8; 6)$ и $(-2; 10)$, так как в левой части второго уравнения системы стоит сумма расстояний от точки (x, y) до точек с координатами $(8; 6)$ и $(-2; 10)$, а $\sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{(8+2)^2 + (6-10)^2}$ как раз и есть расстояние между этими точками.

Указание. Уравнение прямой, проходящей через точки $(8; 6)$ и $(-2; 10)$, имеет вид $2x + 5y = 46$. Найти общие точки окружности и прямой.

Решение. Выделив полные квадраты, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ \sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} = \sqrt{10^2 + 4^2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что искомая точка (x, y), во-первых, лежит на окружности радиуса 4 с центром в точке $(7; 5)$, и, во-вторых, лежит на отрезке, соединяющем точки $(8; 6)$ и $(-2; 10)$, так как в левой части второго уравнения системы стоит сумма расстояний от точки (x, y) до точек с координатами $(8; 6)$ и $(-2; 10)$, а $\sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{(8+2)^2 + (6-10)^2}$ как раз и есть расстояние между этими точками.



Уравнение прямой, проходящей через точки $(8; 6)$ и $(-2; 10)$, имеет вид

$$2x + 5y = 46.$$

Для отыскания общих точек окружности и прямой решим систему:

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y-5)^2 = 16, \\ 2x + 5y = 46; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 23 - \dfrac{5y}{2}, \\ 29y^2 - 360y + 1060 = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{217 + 5\sqrt{415}}{29}, \\ y_1 = \dfrac{180 - 2\sqrt{415}}{29}; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}, \\ y_2 = \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}. \end{cases}$$

Осталось проверить, удовлетворяют ли найденные пары (x, y) второму уравнению исходной системы.

Проверка показывает, что пара (x_1, y_1) не удовлетворяет второму уравнению, а пара (x_2, y_2) удовлетворяет.

Ответ. $\left(\dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}; \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}\right)$.

Задача 7. (Псих-97.6)

Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=b^2+2x-4y, \\ x^2+(12-2a)x+y^2=2ay+12a-2a^2-27 \end{cases}$$

имеет два решения (x_1,y_1) и (x_2,y_2), удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}.$$

Идея. Выделить полные квадраты в уравнениях системы. Преобразовать дополнительные условия. Сделать графическую иллюстрацию задачи.

Указание. Выделить полные квадраты в данных уравнениях:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=b^2, \\ (x+6-a)^2+(y-a)^2=3^2. \end{cases}$$

Указание. Привести дополнительное условие к виду

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2.$$

Указание. Сделать графическую иллюстрацию задачи.

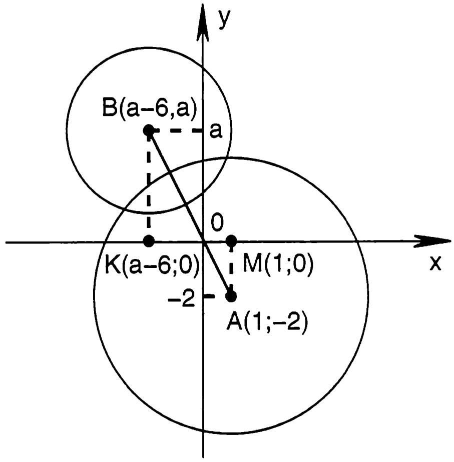
Указание. Требуется найти все значения параметров a и b, при которых две окружности с центрами в точках $A(1;-2)$, $B(a-6;a)$ и радиусами, соответственно, $R_1=|b|$, $R_2=3$, пересекаются в двух точках $C_1(x_1,y_1)$ и $C_2(x_2,y_2)$, равноудалённых от начала координат.

Решение. Выделим полные квадраты в уравнениях системы:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=b^2, \\ (x+6-a)^2+(y-a)^2=3^2. \end{cases}$$

Получили уравнения окружностей. Преобразуем и дополнительное условие:

$$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} \iff x_1^2-x_2^2=y_2^2-y_1^2 \iff x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2.$$



Итак, требуется найти все значения параметров a и b, при которых две окружности с центрами в точках $A(1;-2)$, $B(a-6;a)$ и радиусами, соответственно, $R_1 = |b|$, $R_2 = 3$, пересекаются в двух точках $C_1(x_1,y_1)$ и $C_2(x_2,y_2)$, равноудалённых от начала координат. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ось симметрии AB точек C_1 и C_2 проходила через начало координат и выполнялись ограничения:

$$|AB| - R_2 < R_1 < |AB| + R_2.$$

Из подобия треугольников BOK и AOM получаем, что $a = 4$, тогда $B = (-2;4)$, $|AB| = \sqrt{45}$ и

$$\sqrt{45} - 3 < |b| < \sqrt{45} + 3.$$

Осталось выписать ответ.

О т в е т. $a = 4; b \in \left(-3-\sqrt{45}; 3-\sqrt{45}\right) \cup \left(\sqrt{45}-3; \sqrt{45}+3\right)$.

Задача 8. (Хим-87.5)

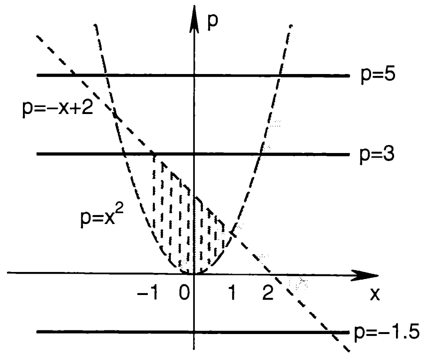
Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество всех решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

И д е я. Сделать графическую иллюстрацию к задаче.

У к а з а н и е. Изобразить на декартовой плоскости с координатами (x,p) множество точек, которые удовлетворяют условию $(p-x^2)(p+x-2) < 0$.

У к а з а н и е. Найти значения p, при которых прямая $p = const$ пересечёт область $(p-x^2)(p-(-x+2)) < 0$ и не пересечёт области $x^2 - 1 \leq 0$.

Р е ш е н и е. Отметим цветом на декартовой плоскости с координатами (x,p) множество точек, которые удовлетворяют условию $(p-x^2)(p+x-2) < 0$.



В закрашенной области исключим из рассмотрения решения неравенства $x^2 \le 1$ (они отмечены на рисунке штриховкой).

Прямая $p = const$ пересечёт область, соответствующую решению неравенства $(p - x^2)(p - (-x + 2)) < 0$ и не содержащую решений неравенства $x^2 - 1 \le 0$, при $p \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Задача 9. (Экон.М-97.6)

Найти все значения параметра a, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием $\log_{\left(\frac{2-|ay|}{3}\right)} \left(\frac{a^2 + x^2}{2a^2}\right) > 0$, будет наименьшим.

Идея. Упростить неравенство и изобразить множество его решений на плоскости.

Указание. Так как основание логарифма меньше единицы, то исходное неравенство эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{2 - |ay|}{3} > 0, \\ \dfrac{a^2 + x^2}{2a^2} < 1; \end{cases} \iff \begin{cases} |y| < \dfrac{2}{|a|}, \\ |x| < |a|. \end{cases}$$

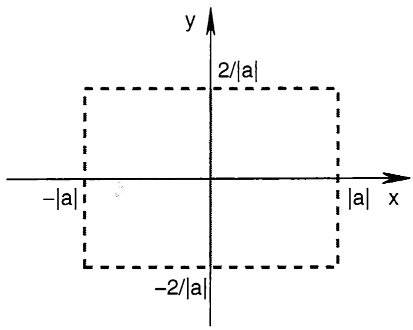
Указание. Изобразить на декартовой плоскости с координатами (x, y) множество точек, которые удовлетворяют этой системе.

Указание. Множество решений – прямоугольник. Определить его периметр. При оценке воспользоваться свойством суммы взаимно обратных положительных чисел.

Решение. Так как основание логарифма меньше единицы, то исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{2 - |ay|}{3} > 0, \\ \dfrac{a^2 + x^2}{2a^2} < 1; \end{cases} \iff \begin{cases} |y| < \dfrac{2}{|a|}, \\ |x| < |a|. \end{cases}$$

Изобразим на декартовой плоскости с координатами (x, y) множество точек, которые удовлетворяют этой системе.



Множество решений – прямоугольник. Его периметр равен

$$P = 2 \cdot \left(2|a| + 2 \cdot \frac{2}{|a|}\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{|a|}\right) \geq 4\sqrt{2} \cdot 2 = 8\sqrt{2},$$

причём равенство в силу свойства суммы двух взаимно обратных положительных чисел достигается при

$$\frac{|a|}{\sqrt{2}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{2}.$$

Ответ. $\pm\sqrt{2}$.

Задача 10. (М/м-94(1).6)

Найти все значения $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для каждого из которых уравнение

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x - \alpha) = \sin\alpha + \sin(x + \alpha)$$

имеет ровно пять различных корней на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

Идея. Разложить уравнение на множители. Использовать тригонометрический круг.

Указание. Разложить уравнение на множители:

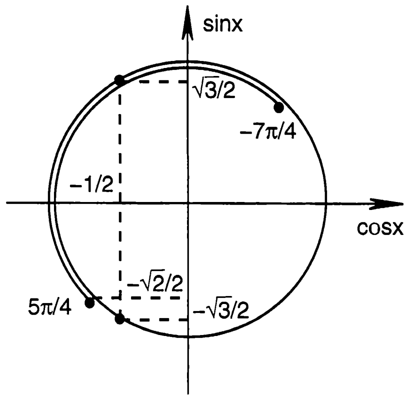
$$(2\cos x + 1) \cdot (\sin x - \sin\alpha) = 0.$$

Указание. Решить методом расщепления: $\cos x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = \sin\alpha$. Используя тригонометрический круг, определить число корней первого уравнения при $x \in \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ (три корня).

Указание. Осталось подобрать такие значения параметра α, чтобы уравнение $\sin x = \sin\alpha$ добавило ровно два новых корня на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

Р е ш е н и е. Раскладываем уравнение на множители:

$$(2\cos x + 1)\cdot(\sin x - \sin\alpha) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2}; \\ \sin x = \sin\alpha. \end{array}\right.$$



Изобразим решения первого уравнения на тригонометрическом круге. На отрезке $\left[-\dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$ первое уравнение имеет три корня $-\dfrac{4\pi}{3}$, $-\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$.

Следовательно, осталось подобрать такие значения параметра $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, чтобы уравнение $\sin x = \sin\alpha$ добавило на рассматриваемом отрезке ровно два новых корня. Это возможно, если

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -1 < \sin\alpha < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin\alpha < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \\ \sin\alpha = 1; \end{array}\right. \\ \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right); \\ \alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{4}\right); \\ \alpha = \dfrac{\pi}{3}; \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right) \bigcup \left(-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{4}\right) \bigcup \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Задача 11. (М/м-99.3)

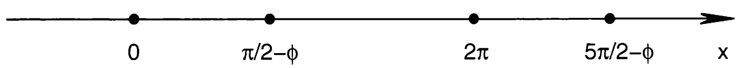
При каких значениях φ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{3x}{2} + \varphi\right) = \sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

Идея. Решить уравнение, применив формулу для разности косинусов. Расположить положительные решения на числовой прямой.
Указание. Применив формулу для разности косинусов, привести уравнение к виду
$$\sin\frac{x}{2}\cdot(\sin(x+\varphi)-1)=0.$$
Указание. Решить методом расщепления:
$$x=2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\quad \text{и}\quad x=\frac{\pi}{2}-\varphi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$
Расположить положительные решения на числовой прямой.
Указание. Выписать условия, при которых три подряд идущих решения образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Применим в левой части уравнения формулу для разности косинусов:
$$-\sin(x+\varphi)\cdot\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=\sin\frac{x}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad\sin\frac{x}{2}\cdot(\sin(x+\varphi)-1)=0\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\\ x=\dfrac{\pi}{2}-\varphi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$
Отметим положительные решения на числовой прямой.



Решения уравнения образуют арифметическую прогрессию, если
$$2\cdot2\pi=\frac{\pi}{2}-\varphi+\frac{\pi}{2}-\varphi+2\pi\quad\Longleftrightarrow\quad\varphi=-\frac{\pi}{2}.$$
В силу периодичности решений окончательно получаем:
$$\varphi=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$
Ответ. $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Задача 12. (М/м-00.5)

Найти все a, при которых уравнение
$$(|a|-1)\cos2x+(1-|a-2|)\sin2x+(1-|2-a|)\cos x+(1-|a|)\sin x=0$$
имеет нечётное число решений на интервале $(-\pi;\pi)$.

Идея. Использовать метод вспомогательного аргумента. Рассмотреть решения на тригонометрическом круге.

Указание. Обозначая $A = |a|-1,\ B = 1-|a-2|$, переписать уравнение в виде

$$A\cos 2x + B\sin 2x = -B\cos x + A\sin x\,.$$

Указание. Если $a=1$, то $A=B=0$ и все $x\in(-\pi;\pi)$ являются решениями. Если $a\neq 1$, то $A^2+B^2>0$ и можно, воспользовавшись методом вспомогательного аргумента, записать уравнение так:

$$\cos(2x-\varphi)=\cos\left(x-\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \iff \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ x=\dfrac{2\varphi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z};\end{array}\right.$$

где $\cos\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{a^2+B^2}},\ \sin\varphi=\dfrac{B}{\sqrt{a^2+B^2}}$.

Указание. Первая строка совокупности даёт одну фиксированную точку на тригонометрическом круге, а вторая строка – три зависящие от φ точки, дуги между которыми все равны по 120^o. Число всех решений на дуге $(-\pi;\pi)$ будет нечётным только в тех случаях, когда одна из этих трёх точек совпадает либо с π (или с $-\pi$), либо с $-\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Обозначив $A=|a|-1, B=1-|a-2|$, перепишем уравнение в виде

$$A\cos 2x + B\sin 2x = -B\cos x + A\sin x\,.$$

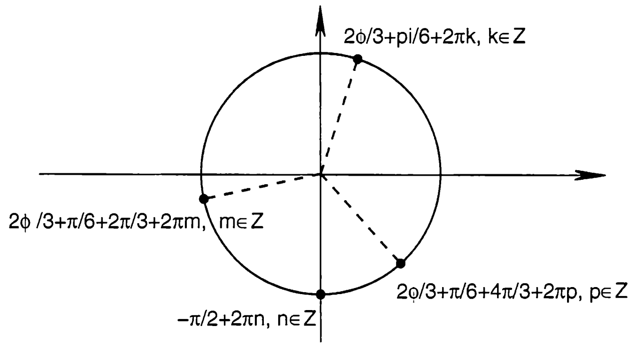
Если $a=1$, то $A=B=0$ и все $x\in(-\pi;\pi)$ являются решениями. Если $a\neq 1$, то $A^2+B^2>0$. Воспользуемся методом вспомогательного аргумента:

$$\cos(2x-\varphi)=\cos\left(x-\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right) \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x-\varphi=x-\varphi-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ 2x-\varphi=-x+\varphi+\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ x=\dfrac{2\varphi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z};\end{array}\right.$$

где $\cos\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{a^2+B^2}},\ \sin\varphi=\dfrac{B}{\sqrt{a^2+B^2}}$. Первая строка совокупности даёт одну фиксированную точку на тригонометрическом круге, а вторая строка – три зависящие от φ точки, дуги между которыми равны 120^o.



Число всех решений на дуге $(-\pi;\pi)$ будет нечётным только в тех случаях, когда одна из найденных трёх точек совпадает либо с π (или, что то же, с $-\pi$), либо с $-\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2\varphi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3}=\pi; \\ \dfrac{2\varphi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3}=-\dfrac{\pi}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \varphi=\dfrac{\pi}{4}+\pi n; \\ \varphi=\pi n; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi=1; \\ \operatorname{tg}\varphi=0. \end{array}\right.$$

Так как $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{B}{A}$, то получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} A=B\neq 0; \\ B=0,\ A\neq 0; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} |a|-1=1-|a-2|; \\ 1-|a-2|=0; \end{array}\right. \\ a\neq 1; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} |a|+|a-2|=2; \\ |a-2|=1; \end{array}\right. \\ a\neq 1; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0\le a\le 2; \\ a=1; \\ a=3; \end{array}\right. \\ a\neq 1. \end{array}\right.$$

О т в е т. $[0;1)\cup(1;2]\cup\{3\}$.

Задача 13. (ВКНМ-00(1).6)

Решить уравнение $x^2=\arcsin(\sin x)+10x$.

И д е я. Построить графики функций $f(x)=\arcsin(\sin x)$ и $g(x)=x^2-10x$.
У к а з а н и е. Переписать уравнение в виде

$$\arcsin(\sin x)=x^2-10x.$$

Построить график периодической (с периодом 2π) функции, стоящей в левой части уравнения:

$$f(x)=\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\le x\le \dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \\ \pi-x & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}+2\pi m\le x\le \dfrac{3\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

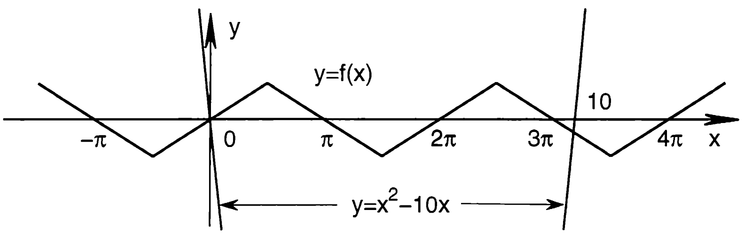
У к а з а н и е. Найти точки его пересечения с параболой $g(x) = x^2 - 10x$ на участках $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{5\pi}{2} \le x \le \dfrac{7\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде

$$\arcsin(\sin x) = x^2 - 10x.$$

Функция в левой части уравнения является периодической с периодом 2π, её значения определяются по правилу

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x \quad \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ \pi - x \quad \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m \le x \le \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Точки пересечения графика функции $f(x)$ с параболой $g(x) = x^2 - 10x$ на участках $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{5\pi}{2} \le x \le \dfrac{7\pi}{2}$ находятся, соответственно, из уравнений (см. рисунок):

$$\left[\begin{array}{l} x = x^2 - 10x; \\ 3\pi - x = x^2 - 10x; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \dfrac{9 + \sqrt{81 + 12\pi}}{2}. \end{array}\right.$$

Других точек пересечения этих графиков нет, поскольку при $x > \dfrac{7\pi}{2}$ и $x < -\dfrac{\pi}{2}$ справедлива оценка

$$g(x) \ge g(10,5) > 5 > f(x),$$

а при $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5\pi}{2}$ справедлива оценка

$$g(x) \le g(1) \le -9 < f(x).$$

О т в е т. $0; \ \dfrac{9 + \sqrt{81 + 12\pi}}{2}$.

Задача 14. (Геогр-99.4)

Найти все значения параметра a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $\dfrac{3\pi}{2}$.

Идея. Решить уравнение, разложив на множители его левую часть. Использовать тригонометрический круг.

Указание. Решить уравнение, разложив на множители его левую часть:

$$(2\cos x - 1)(\sin x + 3a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2}\,; \\ \sin x = -3a\,. \end{array}\right.$$

Указание. Используя тригонометрический круг, выяснить, в каких случаях у этой совокупности будут два корня, разница между которыми равна $\dfrac{3\pi}{2}$.

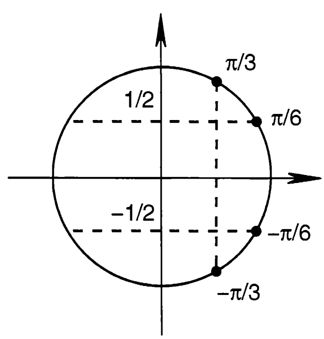
Решение. Преобразуем уравнение:

$$\sin x(2\cos x - 1) + 3a(2\cos x - 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (2\cos x - 1)(\sin x + 3a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2}\,; \\ \sin x = -3a\,. \end{array}\right.$$

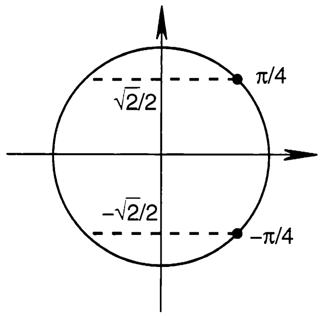
Совокупность будет иметь два корня, разница между которыми равна $\dfrac{3\pi}{2}$, только в двух случаях.

1) Расстояние между одним из корней первого уравнения и одним из корней второго уравнения равно $\dfrac{3\pi}{2}$.



Это возможно, если $\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}; \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad -3a = \pm\dfrac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm\dfrac{1}{6}\,.$

2) Расстояние между двумя корнями второго уравнения равно $\dfrac{3\pi}{2}$.



Это возможно, если $\left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right. \implies -3a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}.$

Ответ. $\pm\dfrac{1}{6}$; $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Задача 15. (ЕГЭ.В)

При каком натуральном значении a уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$ имеет ровно два корня?

Идея. Построить эскиз графика функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$.

Указание. Рассмотреть функцию $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. С помощью производной

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

исследовать её поведение и построить эскиз графика.

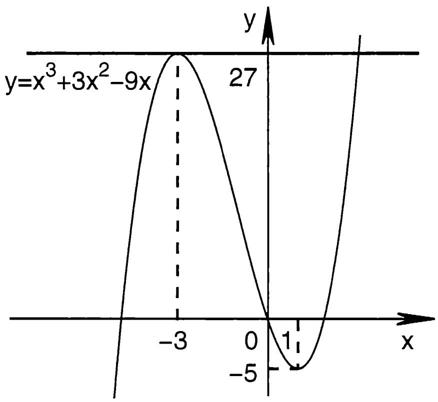
Указание. Выяснить, при каких значениях a уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x = a$ имеет ровно два решения.

Указание. Отобрать натуральные значения параметра a.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. С помощью производной

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

строим эскиз графика функции. Точка $x = -3$ есть точка максимума, а точка $x = 1-$ точка минимума.



Теперь мы можем ответить на вопрос: "При каких a уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x = a$ имеет ровно одно, два или три решения?"

1) Ровно одно решение:

$$\left[\begin{array}{l} a > f(-3); \\ a < f(1); \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} a > 27; \\ a < -5. \end{array}\right.$$

2) Ровно два решения:

$$\left[\begin{array}{l} a = f(-3); \\ a = f(1); \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} a = 27; \\ a = -5. \end{array}\right.$$

3) Ровно три решения:

$$\left\{\begin{array}{l} a < f(-3); \\ a > f(1); \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a < 27; \\ a > -5. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к вопросу, стоящему в условии данной задачи, получаем, что уравнение имеет ровно два корня при единственном натуральном значении параметра $a = 27$.

Ответ. 27.

Задача 16. (ЕГЭ.В)

При каком значении b уравнение $x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x + b = 0$ имеет ровно три корня?

Идея. Построить эскиз графика функции $f(x) = x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x$.
Указание. Рассмотреть функцию $f(x) = x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x$. С помощью производной

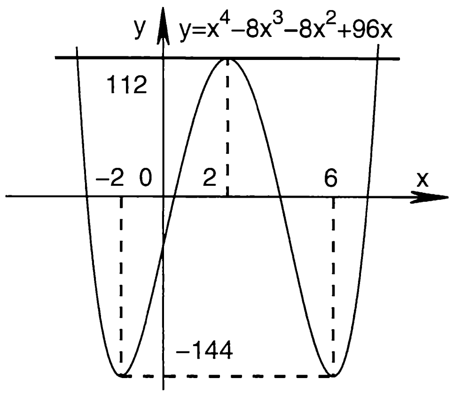
$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 - 16x + 96 = 4(x+2)(x-2)(x-6)$$

исследовать её поведение и построить эскиз графика.
Указание. Выяснить, при каких b уравнение $x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x = -b$ имеет ровно три решения.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x$. С помощью производной

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 - 16x + 96 = 4(x+2)(x-2)(x-6)$$

строим эскиз её графика.



Точка $x = 2$ есть точка максимума, а точки $x = -2$ и $x = 6$ – точки минимума. Следовательно, уравнение

$$x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x = -b$$

имеет ровно три корня при

$$-b = f(2) = 16 - 64 - 32 + 192 = 112 \quad \Longleftrightarrow \quad b = -112.$$

Ответ. -112.

Задача 17. (ЕГЭ.С)

Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства

$$x(x - 2a - 4) < \frac{4a^2}{x} - a^2 - 8a$$

нельзя расположить два отрезка длиной $1,5$ каждый, которые не имеют общих точек.

Идея. Выделяя полные квадраты, решить неравенство. Отметив на числовой прямой множество решений неравенства, выяснить, при каких ограничениях на a выполняется условие задачи.

Указание. Выделить полные квадраты:

$$(x-a)^2 < \frac{4(x-a)^2}{x}.$$

Указание. Решить неравенство методом интервалов: $\begin{cases} 0 < x < 4, \\ x \neq a; \end{cases}$

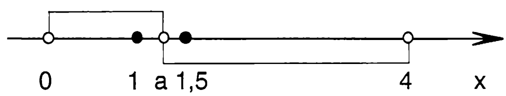
Указание. Провести исследование множества решений на числовой прямой.
Указание. Поскольку длина интервала $(0;4)$ больше 3, то он содержит два непересекающихся отрезка длиной $1,5$. Значит, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо чтобы, во-первых, $a \in (0;4)$, и, во-вторых, один из отрезков $[0;a]$ и $[a;4]$ был не больше 3, а другой не больше $1,5$.

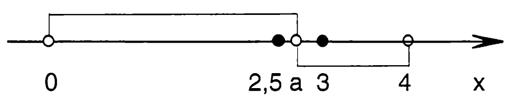
Решение. Решим неравенство. Для этого выделим полные квадраты, приведём выражения к общему знаменателю и воспользуемся методом интервалов:

$$x^2 - 2ax + a^2 < \frac{4a^2}{x} - 8a + 4x \iff (x-a)^2 < \frac{4(x-a)^2}{x} \iff$$

$$\iff \frac{(x-4)(x-a)^2}{x} < 0 \iff \begin{cases} 0 < x < 4, \\ x \neq a. \end{cases}$$

Поскольку длина интервала $(0;4)$ больше 3, то он содержит два непересекающихся отрезка длиной $1,5$. Значит, для того чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы, во-первых, $a \in (0;4)$, и, во-вторых, один из отрезков $[0;a]$ и $[a;4]$ был не больше 3, а другой не больше $1,5$.





Получаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le 1,5; \\ 4 - a \le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} a \le 3; \\ 4 - a \le 1,5; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} 1 \le a \le 1,5; \\ 2,5 \le a \le 3. \end{array} \right.$$

Ответ. $[1;\ 1,5] \cup [2,5;\ 3]$.

7. Метод оценок

7.1. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства

Задача 1. (У)

Решить уравнение $\sqrt{x^7+1} + \sqrt{1-x^5} = 8$.

Идея. Показать, что функция в левой части уравнения принимает значения, строго меньшие 8.
Указание. Оценить левую часть уравнения на области определения радикалов.

Решение. Из условия неотрицательности подкоренных выражений получаем, что $-1 \le x \le 1$. На области определения

$$0 \le \sqrt{x^7+1} \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \sqrt{1-x^5} \le \sqrt{2}.$$

Следовательно, левая часть уравнения не превосходит $2\sqrt{2}$, и исходное уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Задача 2. (У)

Решить уравнение $|x|^3 + |x-1|^3 = 9$.

Идея. Разбить числовую прямую на несколько промежутков, на каждом их которых левая часть уравнения либо монотонна, либо заведомо меньше правой.
Указание. Рассмотреть промежутки $(-\infty; 0]$, $(0; 1)$, $[1; +\infty)$. На первом и последнем промежутках решение найти подбором, а на втором – показать, что решений нет.

Решение. 1) Пусть $x \in [1; +\infty)$, тогда уравнение примет вид

$$x^3 + (x-1)^3 = 9.$$

Корень $x = 2$ находим подбором. Других решений нет, поскольку левая часть является монотонно возрастающей функцией и значение 9 может принимать не более одного раза.

2) При $x \in (-\infty; 0]$ уравнение принимает вид

$$-x^3 - (x-1)^3 = 9.$$

Корень $x = -1$ легко угадывается. Других решений быть не может, так как левая часть полученного уравнения является монотонно убывающей функцией.

3) Если же $x \in (0; 1)$, то каждое из слагаемых левой части не превосходит 1, следовательно, сумма их будет не больше 2, то есть в этом случае решений нет.

Ответ. $-1; 2$.

Задача 3. (У)

Решить уравнение $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x^2 - 6x + 11$.

Идея. Оценить левую и правую части равенства.
Указание. Наибольшее значение левой части уравнения равно наименьшему значению его правой части.

Решение. Оценим правую часть равенства, выделив полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 11 = (x-3)^3 + 2 \geq 2.$$

Покажем, что левая часть не превосходит 2 при всех допустимых значениях переменной x:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} & \vee & 2 \\ (\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2})^2 & \vee & 4 \\ \sqrt{(4-x)(x-2)} & \vee & 1 \\ 0 & \leq & (x-3)^2. \end{array}$$

Следовательно, равенство возможно только в случае, когда обе части одновременно равны 2. Эта ситуация реализуется при $x = 3$.

Ответ. 3.

Задача 4. (У)

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \dfrac{2x^2}{x^4+1}$.

Идея. Использовать свойство суммы двух взаимно обратных величин.
Указание. При $x \neq 0$ поделить числитель и знаменатель на x^2.

Решение. Заметим, что $y = \dfrac{2x^2}{x^4+1} \geq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$. Рассмотрим $x \neq 0$ и поделим числитель и знаменатель на x^2:

$$y = \frac{2}{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}.$$

Так как по свойству суммы двух взаимно обратных положительных чисел $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$, то $y \leq 1$, причём равенство достигается при $x = \pm 1$.

Ответ. $y_{min} = 0$, $y_{max} = 1$.

Задача 5. (У)

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

Идея. Преобразовав исходную функцию, оценить множество её значений.
Указание. Выделить целую часть.

Решение. Если $x = 0$, то $y = 1$. При $x \neq 0$ проведём следующие преобразования:

$$y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{1}{x+\dfrac{1}{x}+1}.$$

Если $x > 0$, то $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ и $0 < \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+1} \leq \dfrac{1}{3}$; следовательно, $\dfrac{2}{3} \leq y < 1$.

Если $x < 0$, то $x + \dfrac{1}{x} \leq -2$ и $x + \dfrac{1}{x} + 1 \leq -1$; следовательно, $1 < y \leq 2$.

В итоге $\dfrac{2}{3} \leq y \leq 2$.

Ответ. $y_{min} = \dfrac{2}{3}$, $y_{max} = 2$.

Замечание. Можно было решить эту задачу и другим способом. Принять y за параметр и найти значения параметра y, при которых уравнение $(y-1)x^2 + yx + y - 1 = 0$ имеет решения. В ответ пойдут наименьшее и наибольшее значения параметра y.

Задача 6. (У)

Найти область значений функции $y = \sqrt{x^2-1} - x$.

Идея. Оценить множество значений функции на каждом из промежутков области определения.

Указание. При отрицательных значениях x домножить и поделить на сопряжённое выражение.

Решение. Область определения $x \leq -1$ и $x \geq 1$.

Если $x \leq -1$, то

$$y = \sqrt{x^2-1} - x \geq 1.$$

Если $x \geq 1$, то

$$y = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} \in [-1;0).$$

Таким образом, $E(y) = [-1;0) \cup [1;+\infty)$.

Ответ. $[-1;0) \cup [1;+\infty)$.

Задача 7. (У)

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

Идея. Свести задачу к исследованию множества значений квадратичной функции.

Указание. Избавиться от радикалов возведением в квадрат.

Решение. Оценим множество значений функции

$$y^2 = 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 1,$$

предварительно оценив значения функции $z = \sqrt{x}\sqrt{1-x}$. Её область определения $x \in [0; 1]$. Заметим, что функция $z^2 = x - x^2$ является квадратичной с максимумом в точке $1/2$. Следовательно,

$$0 \le z^2 \le 1/4 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le z \le 1/2.$$

Поскольку $y^2 = 2z + 1$ и $y > 0$, справедливы оценки

$$1 \le y^2 \le 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le y \le \sqrt{2}.$$

Ответ. $y_{min} = 1$, $y_{max} = \sqrt{2}$.

Задача 8. (У)

Найти все решения системы $\begin{cases} x^5 + y^5 = 1, \\ x^6 + y^6 = 1. \end{cases}$

Идея. Показать, что переменные могут принимать значения из отрезка $[0; 1]$, и с помощью оценочных неравенств найти решение.

Указание. При $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$ справедливо неравенство $x^5 + y^5 > x^6 + y^6$.

Решение. Из второго уравнения системы следует, что

$$|x| \le 1, \quad |y| \le 1.$$

Значение x не может быть отрицательным, так как иначе из первого уравнения получаем, что $y > 1$. Аналогично доказывается, что переменная y тоже принимает только неотрицательные значения.

Если $x = 0$, то $y = 1$; если $y = 0$, то $x = 1$.

Если $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$, то $x^5 + y^5 > x^6 + y^6$, то есть в этом случае решений у системы нет.

Ответ. (0; 1), (1; 0).

Задача 9. (У)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

Идея. Оценить левые части уравнений.

Указание. Получить оценки на области определения.

Решение. Подкоренные выражения должны быть неотрицательными, что имеет место при $x \ge 0$, $y \ge 0$. На области определения $\sqrt{x+1} \ge 1$, $\sqrt{y+1} \ge 1$. Следовательно, левые части исходных уравнений больше либо равны 1, и равенства возможны только при $x = 0$, $y = 0$.

Ответ. (0; 0).

Задача 10. (У)

Решить неравенство $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+x^2-5x+6<0$.

Идея. Показать, что левая часть уравнения всегда неотрицательна.
Указание. Рассмотреть отдельно интервалы, где рациональная и квадратичная функции сохраняют знаки.

Решение. Введём в рассмотрение две функции – рациональную $f(x)$ и квадратичную $g(x)$:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1};$$
$$g(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Разобьем множество действительных чисел на промежутки, на которых обе функции сохраняют знаки.

1) При $x\in(-\infty;-1]\cup[1;2]\cup[3;+\infty)$ $\quad f(x)\geq 0,\quad g(x)\geq 0$. Следовательно, решений нет.

2) При $x\in(-1;1)$ $\quad -1<f(x)<0,\ \ g(x)>2$. Следовательно, $f(x)+g(x)>1\Longrightarrow$ решений нет.

3) При $x\in(2;3)$ $\quad f(x)>1-\dfrac{2}{2^2+1}=\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{1}{4}\leq g(x)<0$. Следовательно, $f(x)+g(x)>\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{20}\Longrightarrow$ решений также нет.

Ответ. Решений нет.

Задача 11. (У)

Найти максимальное значение выражения $|x|\sqrt{16-y^2}+|y|\sqrt{4-x^2}$.

Идея. Сделать тригонометрическую замену.
Указание. Ввести новые переменные $x=2\sin a,\ y=4\sin b$.

Решение. Из условия задачи следует, что $|x|\leq 2,\ |y|\leq 4$. Сделаем тригонометрическую замену переменных:

$$|x|=2\sin a,\quad |y|=4\sin b,\quad 0\leq a\leq\pi/2,\quad 0\leq b\leq\pi/2,$$

тогда

$$|x|\sqrt{16-y^2}+|y|\sqrt{4-x^2}=2\sin a\cdot\sqrt{16-16\sin^2 b}+4\sin b\cdot\sqrt{4-4\sin^2 a}=$$
$$=8\sin a\cos b+8\sin b\cos a=8\sin(a+b).$$

Максимальное значение функции $y=8\sin(a+b)$ равно 8 и достигается, например, при $a=b=\dfrac{\pi}{4}$, то есть при $x=\sqrt{2},\ y=2\sqrt{2}$.

Ответ. 8.

Задача 12. (Геол-98.8)

При каких значениях a уравнение $\left|\dfrac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x-1=0$ имеет хотя бы одно решение?

Идея. Выделить полные квадраты. Использовать свойство суммы двух взаимно обратных положительных чисел и неотрицательность квадрата числа.
Указание. Выделив полные квадраты, привести уравнение к виду

$$|x-2a|+\frac{1}{|x-2a|}=2-(x-1)^2.$$

Указание. Используя свойство суммы двух взаимно обратных чисел и неотрицательность квадрата числа, свести уравнение к эквивалентной системе

$$\begin{cases} |x-2a|=1, \\ x-1=0. \end{cases}$$

Решение. Выделим полные квадраты:

$$\frac{(x-2a)^2+1}{|x-2a|}=2-(x-1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-2a|+\frac{1}{|x-2a|}=2-(x-1)^2.$$

В силу свойства суммы двух взаимно обратных положительных чисел левая часть последнего уравнения не меньше 2, тогда как правая часть в силу неотрицательности квадрата числа не превосходит 2. Следовательно, равенство возможно только в том случае, когда выражения в левой и правой частях равны 2, то есть

$$\begin{cases} |x-2a|=1, \\ x-1=0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |1-2a|=1, \\ x=1. \end{cases}$$

Значит, $a=1$ или $a=0$.

Ответ. 0; 1.

Задача 13. (Биол-93.6)

Найти все решения системы $\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)\cdot(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x; \end{cases}$ удовлетворяющие условию $z\geq 0$.

Идея. Выразить переменную z из второго уравнения системы и оценить её значения, воспользовавшись свойством суммы двух взаимно обратных чисел. Выделить в третьем уравнении полный квадрат и получить второе ограничение на z.
Указание. Поделив левую и правую части второго уравнения на $y+2\neq 0$, получим

$$z=\frac{1}{2}\left(y+2+\frac{1}{y+2}+2\right). \qquad (*)$$

Указание. Так как по условию $z \geq 0$, то

$$y+2+\frac{1}{y+2} \geq -2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y+2=-1; \\ y+2>0. \end{array} \right.$$

Указание. Если $y+2>0$, то из уравнения (*) следует, что $z \geq 2$. С другой стороны, выделяя в третьем уравнении полный квадрат по переменной x, получаем $z \leq 2$. Значит, $z=2$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Проверкой убеждаемся, что значение $y=-2$ не является решением. Поделив левую и правую части уравнения на $y+2 \neq 0$, получим

$$2z-y=4+\frac{1}{y+2} \quad \Longleftrightarrow \quad z=\frac{1}{2}\left(y+2+\frac{1}{y+2}+2\right). \qquad (*)$$

По условию $z \geq 0$; значит,

$$y+2+\frac{1}{y+2} \geq -2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y+2=-1; \\ y+2>0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим два случая.
1) $y+2=-1$. Подставляя $y=-3$ в исходную систему, находим $x=4$, $z=0$.
2) $y+2>0$. По свойству суммы двух взаимно обратных чисел $y+2+\dfrac{1}{y+2} \geq 2$, и из (*) следует, что $z \geq 2$. Преобразуем третье уравнение исходной системы:

$$x^2+z^2=4x \quad \Longleftrightarrow \quad (x-2)^2+z^2=4 \quad \Longrightarrow \quad z \leq 2.$$

Значит, $z=2$. Подставляя это значение в исходную систему, находим $x=2$, $y=-1$.

Ответ. $(4;-3;0)$, $(2;-1;2)$.

Задача 14. (ЕГЭ.С)

Решить уравнение $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4$.

Идея. В первом подкоренном выражении выделить полный квадрат. Оценить левую часть уравнения.
Указание. Привести исходное уравнение к виду

$$|4-x|+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4\,.$$

Указание. Так как в левой части последнего уравнения стоит сумма неотрицательных величин, то правая часть тоже должна быть неотрицательной, то есть $x \geq 4$.
Указание. Значит, модуль в левой части уравнения раскрывается однозначно:

$$x-4+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4\,.$$

Решение. Преобразуем исходное уравнение, выделив полный квадрат в первом подкоренном выражении:

$$\sqrt{(4-x)^2}+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4 \quad\Longleftrightarrow\quad |4-x|+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4.$$

Так как в левой части последнего уравнения стоит сумма неотрицательных величин, то правая часть тоже должна быть неотрицательной, то есть $x \geq 4$. Значит, модуль в левой части уравнения раскрывается однозначно:

$$x-4+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{4x^2-13x-17}=0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 4x^2-13x-17=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ x=4{,}25. \end{array}\right.$$

Поскольку $x \geq 4$, то остаётся только один корень $x = 4{,}25$.

Ответ. 4,25.

Задача 15. (Геогр-81.5)

Решить систему уравнений $\left\{\begin{array}{l} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{array}\right.$

Идея. Рассмотреть оба уравнения системы как квадратные относительно переменной x.

Указание. Квадратное уравнение имеет решение, если его дискриминант неотрицателен. Необходимо проверить это условие для обоих уравнений системы.

Указание. Выписывая условия на дискриминанты, получаем:

$$\left\{\begin{array}{l} 1-y^4 \geq 0, \\ 1+y^3 \leq 0; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad y=-1.$$

Решение. Относительно переменной x оба уравнения являются квадратными. Для того чтобы квадратное уравнение имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицательным. Проверим это условие.

Дискриминант первого уравнения равен $4(1-y^4)$, дискриминант второго уравнения равен $-8(1+y^3)$. Следовательно, для переменной y получаем систему неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} 1-y^4 \geq 0, \\ 1+y^3 \leq 0; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} -1 \leq y \leq 1, \\ y \leq -1; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad y=-1.$$

Значит, только при $y = -1$ исходные квадратные уравнения имеют решения. Подставив $y = -1$ в систему уравнений, получаем для переменной x одно квадратное уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$, решением которого является $x = 1$.

Ответ. $(1;-1)$.

7.2. Тригонометрические уравнения и неравенства

Задача 1. (У)

Решить уравнение $2\sin x = y + \dfrac{1}{y}$.

Идея. Оценить значения левой и правой частей равенства.
Указание. Использовать ограниченность синуса и свойство суммы двух взаимно обратных величин.

Решение. Поскольку левая часть неравенства по модулю не превосходит 2, а правая по модулю не меньше 2, обе части должны быть равны либо 2, либо -2.

В первом случае $y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Во втором случае $y = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 1\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m; -1\right)$; $n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. (У)

Найти наибольшее значение функции $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$.

Идея. Выразить функцию либо через $\sin x$, либо через $\cos x$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3\sin^2 x + 2 - 2\sin^2 x = \sin^2 x + 2.$$

Так как $0 \le \sin^2 x \le 1$, то $2 \le y \le 3$. Следовательно, наибольшее значение функции $y_{max} = 3$, оно достигается при $|\sin x| = 1$.

Ответ. 3.

Задача 3. (У)

Решить уравнение $\sin^2(\pi x) + \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 0$.

Идея. Показать, что оба слагаемых должны быть равны нулю.
Указание. Каждое из слагаемых неотрицательно.

Решение. Сумма неотрицательных величин равна нулю только при условии, что каждое из них равно нулю. Значит, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = 0, \\ x^2 + 3x + 2 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x = -2; \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ. -1; -2.

Задача 4. (У)

Решить уравнение $x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0$.

Идея. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно переменной x.
Указание. Использовать условие неотрицательности дискриминанта квадратного уравнения.

Решение. Уравнение является квадратным относительно переменной x. Необходимым условием существования корней квадратного уравнения является неотрицательность дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = 4\cos^2(xy) - 4 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\cos(xy)| = 1.$$

Если $\cos(xy) = 1$, то уравнение принимает вид

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2.$$

В этом случае $y = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Если $\cos(xy) = -1$, то $x = 2$, $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $(-2; \pi k)$, $\left(2; \dfrac{\pi}{2} + \pi l\right)$; $k, l \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (У)

Решить неравенство $|\operatorname{tg}^3 x| + |\operatorname{ctg}^3 x| \leq 2 - \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2$.

Идея. Использовать оценки левой и правой частей уравнения.
Указание. Левую часть оценить как сумму двух взаимно обратных положительных величин.

Решение. Поскольку по теореме о сумме двух взаимно обратных величин

$$|\operatorname{tg}^3 x| + |\operatorname{ctg}^3 x| \geq 2,$$

а в силу неотрицательности квадрата числа

$$2 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \leq 2,$$

обе части неравенства должны быть равны 2. Равенство левой и правой частей реализуется при $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}$.

Задача 6. (У)

Решить уравнение $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Идея. Показать, что максимум левой части уравнения равен числу, стоящему в правой части.
Указание. Возвести обе части уравнения в квадрат.

Решение. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$2+\sin x+\cos x+2\sqrt{(1+\sin x)(1+\cos x)}=4+2\sqrt{2} \iff$$

$$\iff \sin x+\cos x+2\sqrt{1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x}=2+2\sqrt{2} \iff$$

$$\iff \sin x+\cos x+\sqrt{4+4(\sin x+\cos x)+2\sin 2x}=2+2\sqrt{2}.$$

Если функции $\sin x+\cos x$ и $\sin 2x$ принимают свои максимальные значения, равные соответственно $\sqrt{2}$ и 1, то равенство выполняется. В противном случае левая часть уравнения меньше правой. Следовательно,

$$\begin{cases} \sin x+\cos x=\sqrt{2}, \\ \sin 2x=1; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1, \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}; \end{cases} \iff x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 7. (У)

Решить неравенство $y-\dfrac{1}{|\cos x|}-\sqrt{1-y-x^2}\geq 0$.

Идея. Уединить радикал и оценить обе части полученного неравенства.
Указание. Использовать ограниченность косинуса и неотрицательность подкоренного выражения.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{1-y-x^2}\leq y-\frac{1}{|\cos x|}.$$

Из условия неотрицательности подкоренного выражения следует, что

$$y\leq 1-x^2\leq 1,$$

а из условия неотрицательности правой части неравенства следует, что

$$y\geq\frac{1}{|\cos x|}\geq 1.$$

Значит, $y=1$, при этом из последних двух неравенств следует, что $x=0$.

Ответ. $(0;1)$.

Задача 8. (У)

Решить уравнение $\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 2 = \dfrac{2}{\pi}\arcsin y$.

Идея. Показать, что минимум левой части равенства равен максимуму правой.
Указание. Выделить в левой части уравнения полный квадрат и использовать ограниченность арксинуса.

Решение. Выделим в левой части уравнения полный квадрат:

$$\left(\operatorname{tg}^2 x - 1\right)^2 + 1 = \frac{2}{\pi}\arcsin y.$$

Так как по определению $\arcsin y \le \dfrac{\pi}{2}$, правая часть уравнения не превосходит 1. Поскольку левая часть в силу неотрицательности квадрата числа не меньше 1, уравнение имеет решение только при одновременном выполнении двух условий:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0, \\ \arcsin y = \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ 1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 9. (У)

Определить множество значений функции $y = \arccos\dfrac{1}{x}$.

Идея. Сначала определить возможные значения для переменной x, потом – для функции y.
Указание. Областью определения арккосинуса является отрезок $[-1; 1]$.

Решение. Найдём область определения данной функции:

$$-1 \le \frac{1}{x} \le 1 \iff x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

Если $x \le -1$, то $-1 \le \dfrac{1}{x} < 0 \implies \dfrac{\pi}{2} < y \le \pi$.
Если $x \ge 1$, то $0 < \dfrac{1}{x} \le 1 \implies 0 \le y < \dfrac{\pi}{2}$.
В результате получаем, что $E(y) = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ. $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Задача 10. (У)

Решить уравнение $\sin 7x \cdot \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3}$.

Идея. Показать, что левая часть уравнения всегда меньше правой.
Указание. Использовать метод вспомогательного аргумента.

Решение. Преобразуем левую часть равенства с помощью метода вспомогательного аргумента:

$$\sqrt{\sin^2 7x + 1} \cdot \sin(2x + \phi) = \sqrt{3},$$

где $\phi = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 7x + 1}}\right)$. Следовательно, левая часть равенства не превосходит $\sqrt{2}$, и уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Задача 11. (У)

Решить уравнение $\sin 9x \cdot \sin x + \cos x = \dfrac{3}{2}$.

Идея. Показать, что левая часть уравнения всегда меньше правой.
Указание. Использовать метод вспомогательного аргумента.

Решение. Преобразуем левую часть равенства с помощью метода вспомогательного аргумента:

$$\sqrt{\sin^2 9x + 1} \cdot \sin(x + \phi) = \frac{3}{2},$$

где $\phi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 9x + 1}}$. Следовательно, левая часть равенства не превосходит $\sqrt{2}$, поэтому уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Задача 12. (ВМК-92.2)

Решить уравнение $\sqrt{1 + \cos 4x} \cdot \sin x = 2\sin\dfrac{\pi}{4}$.

Идея. Использовать ограниченность тригонометрических функций $y = \sin t$ и $y = \cos t$.
Указание. Так как $|\cos 4x| \le 1$ и $|\sin x| \le 1$, то левая часть уравнения всегда не превосходит правую, причём равенство возможно только в случае

$$\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \sin x = 1. \end{cases}$$

Решение. Подставив в правую часть табличное значение $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получаем уравнение

$$\sqrt{1+\cos 4x}\cdot\sin x = \sqrt{2}.$$

Так как в силу ограниченности тригонометрических функций $y = \sin t$ и $y = \cos t$

$$|\cos 4x| \le 1 \quad \text{и} \quad |\sin x| \le 1,$$

то левая часть уравнения всегда не превосходит правую, причём равенство возможно только в случае

$$\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \sin x = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}; \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Задача 13. (Геогр-96(1).3)

Решить уравнение $\cos\left(\frac{3\pi+1}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi-1}{2}x\right) = 1$.

Идея. Использовать ограниченность тригонометрической функции $y = \cos t$.
Указание. Так как $|\cos t| \le 1$, то возможны только два случая:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi+1}{2}x\right) = 1, \\ \cos\left(\frac{3\pi-1}{2}x\right) = 1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi+1}{2}x\right) = -1, \\ \cos\left(\frac{3\pi-1}{2}x\right) = -1. \end{cases}$$

Указание. Решив каждое из уравнений первой системы, определить, когда найденные серии совпадают:

$$\frac{4\pi n}{3\pi+1} = \frac{4\pi k}{3\pi-1};\quad n,k\in\mathbb{Z}.$$

Используя иррациональность числа π, найти подходящие значения n и k.
Указание. Равенство $(3\pi-1)\cdot n = (3\pi+1)\cdot k$ возможно только в случае $n = k = 0$, поскольку $(3\pi-1)$ и $(3\pi+1)$ – иррациональные числа, а n и k – целые числа.
Указание. Второй случай разбирается аналогично.

Решение. Так как $|\cos t| \le 1$, то равенство возможно только в двух случаях.

1-й случай. $$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi+1}{2}x\right) = 1, \\ \cos\left(\frac{3\pi-1}{2}x\right) = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4\pi n}{3\pi+1},\ n\in\mathbb{Z}, \\ x = \frac{4\pi k}{3\pi-1},\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Последняя система будет иметь решения, если

$$\frac{4\pi n}{3\pi+1}=\frac{4\pi k}{3\pi-1} \quad \Longleftrightarrow \quad (3\pi-1)\cdot n=(3\pi+1)\cdot k.$$

Так как $(3\pi-1)$ и $(3\pi+1)$ – иррациональные числа, а n и k – целые числа, то равенство возможно только при $n=k=0$. Следовательно, решением является только $x=0$.

2-й случай. $$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{3\pi+1}{2}x\right)=-1, \\ \cos\left(\dfrac{3\pi-1}{2}x\right)=-1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{2\pi+4\pi n}{3\pi+1},\ n\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{2\pi+4\pi k}{3\pi-1},\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Последняя система будет иметь решения только при условии

$$\frac{2\pi+4\pi n}{3\pi+1}=\frac{2\pi+4\pi k}{3\pi-1} \quad \Longleftrightarrow \quad 3\pi(n-k)=n+k+1.$$

Так как π – иррациональное число, а n и k – целые числа, то равенство невозможно ни при каких n и k. Значит, в этом случае решений нет.

Ответ. 0.

Задача 14. (Экон.М-97.2)

Решить систему неравенств $$\begin{cases} \left|\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2}\right|+(x-y-2)^2\le 0, \\ |2x+3|\le 2. \end{cases}$$

Идея. Сумма неотрицательных чисел неотрицательна.

Указание. В левой части первого неравенства системы стоит сумма неотрицательных величин, поэтому оно равносильно двум равенствам, и система принимает вид

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\pi(x+y)}{2}=0, \\ x-y-2=0, \\ -2\le 2x+3\le 2. \end{cases}$$

Указание. Полученную систему легко решить, если учесть, что переменная x принимает целочисленные значения.

Решение. В левой части первого неравенства системы стоит сумма неотрицательных величин, поэтому оно может иметь решения только при равенстве нулю каждого слагаемого. Система принимает вид:

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\pi(x+y)}{2}=0, \\ x-y-2=0, \\ -2\le 2x+3\le 2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=2n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ x-y=2, \\ -\dfrac{5}{2}\le x\le -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Из равенств следует, что переменная x может принимать только целочисленные значения. Действительно, сложив первое равенство со вторым, получим $x = n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Из двойного неравенства определяем возможные значения переменной x, а из равенств находим соответствующие значения переменной y:

$$x = -2,\ \ y = -4 \quad \text{или} \quad x = -1,\ \ y = -3.$$

Ответ. $(-2; -4)$, $(-1; -3)$.

Задача 15. (М/м-93(1).4)

При каких значениях $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ уравнение $\sqrt{2\cos(x+a)-1} = \sin 6x - 1$ имеет решения?

Идея. Использовать ограниченность тригонометрической функции $y = \sin t$ и неотрицательность арифметического квадратного корня.

Указание. Левая часть уравнения неотрицательна, а правая часть неположительна, поэтому уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2\cos(x+a) - 1 = 0, \\ \sin 6x - 1 = 0. \end{cases}$$

Указание. Из системы найти a, учитывая ограничение $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Решение. В силу неотрицательности арифметического квадратного корня левая часть уравнения неотрицательна, тогда как правая часть неположительна в силу ограниченности тригонометрической функции $y = \sin t$. Следовательно, уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} 2\cos(x+a) - 1 = 0, \\ \sin 6x - 1 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = -a \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Рассмотрим каждый случай отдельно.

1-й случай. $$\begin{cases} \dfrac{\pi}{3} - a + 2\pi n = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{3},\ n,k \in \mathbb{Z}, \\ a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right); \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{6\pi n - \pi k}{3},\ n,k \in \mathbb{Z}, \\ a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right); \end{cases} \iff \left[\begin{aligned} a &= -\frac{\pi}{12}, \\ a &= -\frac{5\pi}{12}. \end{aligned} \right.$$

2-й случай. $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{3} - a + 2\pi n = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{3};\ n, k \in \mathbb{Z}, \\ a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right) \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} a = -\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{6\pi n - \pi k}{3};\ n, k \in \mathbb{Z}, \\ a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right); \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{\pi}{12}, \\ a = -\dfrac{5\pi}{12}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\dfrac{5\pi}{12}; -\dfrac{\pi}{12}.$

Задача 16. (Псих-92.1)

Решить неравенство $\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} \le \dfrac{\sin x - 3}{\sqrt{2}}.$

Идея. Применить метод дополнительного аргумента и использовать ограниченность тригонометрической функции $y = \sin t$.

Указание. Используя метод дополнительного аргумента, привести неравенство к виду

$$\sin x - 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \ge 3.$$

Указание. Так как $|\sin t| \le 1$, то исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем неравенство, используя метод дополнительного аргумента:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sin x - 3}{\sqrt{2}} \iff \sin x - 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \ge 3.$$

Так как $|\sin t| \le 1$, то исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\cdot(2k-1),\ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot(2k-1),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\cdot(2k-1),\ k \in \mathbb{Z}.$

Задача 17. (У)

Найти все значения целочисленного параметра a, при которых разрешимо уравнение $\sin x - \sin ax = -2$.

Идея. Использовать то, что минимум левой части равен -2.
Указание. Равенство может выполняться только тогда, когда первый синус равен -1, а второй равен 1.

Решение. Так как $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \sin ax \le 1$, то исходное равенство будет выполняться только при следующих условиях

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin ax = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ ax = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Если $a = 0$, то решений нет, следовательно, $a \neq 0$ и

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2a} + \dfrac{2\pi k}{a}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Откуда

$$-\frac{1}{2} + 2n = \frac{1}{2a} + \frac{2k}{a}, \ k, n \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff -a + 4an = 1 + 4k, \ n, k \in \mathbb{Z} \iff 4an - (a+1) = 4k, \ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Так как по условию $a \in \mathbb{Z}$, то для того, чтобы последнее равенство было возможно, необходимо потребовать, чтобы сумма $(a+1)$ делилась на 4 без остатка, то есть $a = 4l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$. Осталось показать, что это ограничение на a является не только необходимым, но и достаточным. То есть для любого a указанного вида существуют целые n и k такие, что

$$4an - (a+1) = 4k.$$

Пусть $a = 4l - 1$, тогда

$$4n(4l-1) - 4l = 4k.$$

Пара $n = 0$ и $k = -l$ будет решением для любого $l \in \mathbb{Z}$. Следовательно, при $a = 4l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$ исходное уравнение разрешимо.

Ответ. $a = 4l - 1$, $l \in \mathbb{Z}$.

Задача 18. (У)

Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что

$$|\sin 81^\circ - a| < 0{,}01.$$

Идея. Применить оценку $\sin x < x$ при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Указание. Выразить $\sin 81^\circ$ через $\sin 9^\circ = \sin\dfrac{\pi}{20}$ с помощью основного тригонометрического тождества и формулы приведения.

Решение. Преобразуем

$$\sin 81^\circ = \sqrt{1-\cos^2 81^\circ} = \sqrt{1-\sin^2 9^\circ} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{20}}.$$

Так как $\sin\dfrac{\pi}{20} < \dfrac{\pi}{20}$, то $\sin 81^o > \sqrt{1-\left(\dfrac{\pi}{20}\right)^2}$. Учитывая, что $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ получим $\dfrac{\pi}{20} < 0{,}16$, $\quad \left(\dfrac{\pi}{20}\right)^2 < 0{,}0256$ и

$$\sin 81^\circ > \sqrt{1-0{,}0256} = \sqrt{0{,}9744} > \sqrt{0{,}9604} = 0{,}98.$$

Отсюда следует, что $0{,}98 < \sin 81^\circ < 1$. В частности, в качестве числа a можно выбрать число $a = 0{,}99$.

Ответ. $0{,}99$.

Задача 19. (Псих-93.3)

Найти все решения уравнения $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right) + \sin 3x = \cos 3x - \sqrt{2}$ на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

Идея. Применить метод дополнительного аргумента; использовать ограниченность тригонометрической функции $y = \sin t$ и неотрицательность квадрата действительной величины.

Указание. Используя метод дополнительного аргумента, привести уравнение к виду

$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = -2\left(1+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Указание. Так как $|\sin t| \le 1$, а квадрат действительной величины всегда неотрицателен, то исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right) = 0, \\ \sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Указание. Последняя система имеет решения, если

$$\pi n = \frac{2\pi k}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 3n = 2k \quad \Longrightarrow \quad n = 2m \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Указание. Выполнить отбор по условию $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

Решение. Воспользуемся методом дополнительного аргумента:

$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = -2\left(1+\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Так как $|\sin t| \le 1$, а квадрат действительной величины всегда неотрицателен, то исходное уравнение имеет решения только при равенстве левой и правой частей нулю, то есть

$$\begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right) = 0, \\ \sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ищем пересечение двух серий:

$$\pi n = \frac{2\pi k}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 3n = 2k \quad \Longrightarrow \quad n = 2m \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Отбирая значения переменной x, попадающие на отрезок $[-2\pi; 2\pi]$, получаем ответ.

Ответ. $-\dfrac{\pi}{12}$; $\dfrac{23\pi}{12}$.

Задача 20. (ЕГЭ.С)

Решить уравнение $7\operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3\sin 2x = 1$.

Идея. Разложить на множители и использовать ограниченность тригонометрических функций $y = \sin t$ и $y = \cos t$.

Указание. Применив основное тригонометрическое тождество и разложение на множители, привести уравнение к виду

$$\operatorname{tg} x(7 - \sin x\cos x + 6\cos^2 x) = 0.$$

Указание. Используя ограниченность тригонометрических функций $y = \sin t$ и $y = \cos t$, показать что уравнение

$$7 + 6\cos^2 x - \sin x\cos x = 0$$

не имеет решений.

Решение. Применим основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного угла:

$$7\operatorname{tg} x + (\cos^2 x - 1) + 3\sin 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 7\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - \sin^2 x + 6\sin x\cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x}(7 - \sin x\cos x + 6\cos^2 x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ 7 + 6\cos^2 x - \sin x\cos x = 0. \end{array}\right.$$

Так как $6\cos^2 x \ge 0$ и $\sin x\cos x < 1$, то второе уравнение решений не имеет. Значит, решением является только серия $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 21. (Хим-94.5)

Решить систему $\left\{\begin{array}{l} x^2 + 2x\sin y + 1 = 0, \\ 8|x|y(x^2 + y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{array}\right.$

Идея. Рассмотреть первое уравнение системы как квадратное относительно переменной x. Использовать оценки при решении второго уравнения.

Указание. Дискриминант первого уравнения (квадратного относительно x) должен быть неотрицательным:

$$\frac{D}{4} = \sin^2 y - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin y = \pm 1.$$

Указание. При $\sin y = 1$ система принимает вид:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ (1 + 4n)\left(4 + \pi^2(1 + 4n)^2\right) + \pi^2 + 4 = 0. \end{array}\right.$$

Далее необходимо рассмотреть отдельно последнее уравнение и оценить левую часть при различных целочисленных значениях n.

Указание. При неотрицательных значениях n выражение в левой части последнего уравнения положительно. Следовательно, если $n \geq 0$, то решений нет. При отрицательных n решений также нет, так как при $n \leq -1$

$$(1 + 4n)\left(4 + \pi^2(1 + 4n)^2\right) \leq -3(4 + 9\pi^2) < -3 \cdot 85 = -255,$$

а $\pi^2 + 4 < 14$. Значит, система уравнений решений не имеет.

Указание. Второй случай $\sin y = -1$ рассматривается аналогично ($n = 0$ рассмотреть отдельно).

Решение. Первое уравнение системы является квадратным относительно переменной x. Для существования корней необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицательным:

$$\frac{D}{4} = \sin^2 y - 1 \geq 0.$$

Так как $0 \leq \sin^2 y \leq 1$, то $\sin y = 1$ или $\sin y = -1$. Рассмотрим эти два случая отдельно.

1-й случай.

$$\left\{\begin{array}{l} \sin y = 1, \\ x^2 + 2x + 1 = 0, \\ 8|x|y(x^2 + y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = -1, \\ 8y(1 + y^2) + \pi^3 + 4\pi = 0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 8\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\left(1 + \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2\right) + \pi^3 + 4\pi = 0. \end{array}\right.$$

Рассмотрим последнее уравнение.

$$8\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\left(1+\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2\right)+\pi^3+4\pi=0 \iff$$

$$\iff (1+4n)\left(4+\pi^2(1+4n)^2\right)+\pi^2+4=0.$$

При неотрицательных значениях n выражение в левой части положительно. Следовательно, если $n \geq 0$, то решений нет. При отрицательных n решений также нет, так как при $n \leq -1$

$$(1+4n)\left(4+\pi^2(1+4n)^2\right) \leq -3(4+9\pi^2) < -3\cdot 85 = -255,$$

а $\pi^2+4<14$. Значит, в первом случае система уравнений решений не имеет.

2-й случай.

$$\begin{cases} \sin y=-1, \\ x^2-2x+1=0, \\ 8|x|y(x^2+y^2)+\pi^3+4\pi=0; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=1, \\ 8y(1+y^2)+\pi^3+4\pi=0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=1, \\ y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \\ 8\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\left(1+\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2\right)+\pi^3+4\pi=0. \end{cases}$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$8\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\left(1+\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2\right)+\pi^3+4\pi=0 \iff$$

$$\iff (-1+4n)\left(4+\pi^2(4n-1)^2\right)+\pi^2+4=0.$$

При $n \geq 1$ справедливы оценки:

$$(1-4n)\left(4+\pi^2(4n-1)^2\right)+\pi^2+4 \leq -3(4+9\pi^2)+\pi^2+4<0.$$

При $n \leq -1$ справедливы оценки:

$$(1-4n)\left(4+\pi^2(4n-1)^2\right)+\pi^2+4 \geq 5(4+25\pi^2)+\pi^2+4>0.$$

Осталось проверить $n=0$. Легко убедиться в том, что это значение n обращает последнее уравнение системы в тождество. Итак, при $n=0$ решением системы являются значения $y=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=1$.

Ответ. $\left(1;-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Задача 22. (Экон-78.5)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $a(4-\sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$ выполняется для всех значений x.

Идея. Преобразовать неравенство и использовать ограниченность тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Указание. Записать неравенство для параметра

$$a > \frac{3-\cos^2 x}{1+(4-\sin x)^4}$$

и найти максимум правой части.

Указание. Числитель и знаменатель дроби положительны, причём числитель принимает наибольшее значение, а знаменатель – наименьшее значение при одних и тех же значениях переменной $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Указание. Максимум правой части равен $\frac{3}{82}$.

Решение. Преобразуем исходное неравенство:

$$a(1+(4-\sin x)^4) > 3-\cos^2 x \quad \Longleftrightarrow \quad a > \frac{3-\cos^2 x}{1+(4-\sin x)^4}.$$

Для того чтобы решить задачу, надо найти максимум правой части. Заметим, что числитель и знаменатель правой части положительны, причём числитель принимает наибольшее значение, а знаменатель – наименьшее значение при одних и тех же значениях переменной

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, максимум правой части равен $\frac{3-0}{1+3^4} = \frac{3}{82}$. Значит, при $a > \frac{3}{82}$ исходное неравенство будет выполнено для всех значений x.

Ответ. $\left(\frac{3}{82}; +\infty\right)$.

Задача 23. (ВМК-83.6)

Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условию $\sqrt{2-|y|}\cdot(5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5}{4}\pi^2$.

Идея. Оценить левую и правую части уравнения.

Указание. Показать, что левая часть уравнения неотрицательна, а правая часть уравнения неположительна.

Указание. Для оценки правой части использовать ограниченность обратных тригонометрических функций:

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \arccos x \le \pi.$$

Указание. Используя формулы понижения степени и метод вспомогательного аргумента, привести второй сомножитель левой части к виду

$$3\sqrt[3]{33} - 2 - \sqrt{58}\sin(2x + \phi).$$

Решение. Воспользуемся методом оценок. Начнём с правой части. В силу ограниченности обратных тригонометрических функций $(\arcsin x)^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, $(\arccos x)^2 \leq \pi^2$. Следовательно,

$$(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 \leq \frac{5}{4}\pi^2;$$

то есть правая часть уравнения неположительна.

Рассмотрим теперь второй сомножитель левой части. Воспользуемся формулами синуса и косинуса двойного угла и методом дополнительного аргумента:

$$5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33} = -5\cos 2x - 3\sin 2x - 2(\cos 2x + 1) + 3\sqrt[3]{33} =$$

$$= 3\sqrt[3]{33} - 2 - 3\sin 2x - 7\cos 2x = 3\sqrt[3]{33} - 2 - \sqrt{58}\sin(2x+\phi) \geq 3\sqrt[3]{33} - 2 - \sqrt{58} > 0;$$

положительность выражения вытекает из цепочки сравнений:

$$\begin{array}{rcl} 3\sqrt[3]{33} - 2 - \sqrt{58} & \vee & 0 \\ 27 \cdot 33 & \vee & 8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{58} + 3 \cdot 2 \cdot 58 + 58\sqrt{58} \\ 107 & \vee & 14\sqrt{58} \\ 11449 & > & 11368. \end{array}$$

Следовательно, левая часть уравнения неотрицательна. Поэтому равенство достигается только при одновременном выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} |y| = 2, \\ (\arcsin x)^2 = \dfrac{\pi^2}{4}, \\ (\arccos x)^2 = \pi^2; \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 2, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ. $(-1; 2)$, $(-1; -2)$.

Задача 24. (Геол-92.6)

Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 1 - 2x\sin\pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz) \cdot (\cos 2\pi y + \cos\pi z)^2.$$

Идея. Используя ОДЗ, оценить правую часть уравнения. Выделив полный квадрат, оценить левую часть.

Указание. Из ОДЗ следует, что $yz \geq 64$. Значит, правая часть уравнения всегда неположительна.

Указание. Выделив полный квадрат, левую часть можно привести к виду

$$(x - \sin \pi y)^2 + \cos^2 \pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64}.$$

Значит, левая часть уравнения всегда неотрицательна.

Указание. Следовательно, уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда левая и правая части уравнения одновременно равны нулю. Поэтому исходное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \cos \pi y = 0, \\ \cos \pi z = 1, \\ yz - 2z^2 - 64 = 0, \\ x = \sin \pi y. \end{cases}$$

Поскольку $\cos \pi y = 0$, возможны два различных значения $x = \sin \pi y$: $x = 1$ или $x = -1$.

Указание. *1-й случай.* При $\sin \pi y = 1$ получаем систему $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} + 2n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ z = 2k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 1, \\ k(1 + 4n - 8k) = 64. \end{cases}$

Указание. Рассмотрев последнее уравнение полученной системы отдельно, замечаем, что $(1 + 4n - 8k)$ нечётно при всех целых n и k, а $64 = 2^6$. Поэтому равенство возможно только в двух случаях:

$$\begin{cases} 1 + 4n - 8k = 1, \\ k = 64; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 + 4n - 8k = -1, \\ k = -64. \end{cases}$$

Указание. Аналогично рассматривается *2-й случай:* $\sin \pi y = -1$.

Решение. Из ОДЗ получим оценку для произведения yz:

$$yz - 2z^2 - 64 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad yz \geq 2z^2 + 64 \quad \Longrightarrow \quad yz \geq 64.$$

Следовательно, правая часть уравнения всегда неположительна. Далее рассмотрим левую часть. Выделим полный квадрат и оценим значение левой части снизу:

$$x^2 + 1 - 2x \sin \pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} =$$

$$= x^2 - 2x \sin \pi y + \sin^2 \pi y - \sin^2 \pi y + 1 + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} =$$

$$= (x - \sin \pi y)^2 + \cos^2 \pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} \geq 0.$$

Следовательно, уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда левая и правая части уравнения одновременно равны нулю, то есть исходное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} x - \sin \pi y = 0, \\ \cos \pi y = 0, \\ yz - 2z^2 - 64 = 0, \\ \cos 2\pi y + \cos \pi z = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \cos \pi y = 0, \\ \cos \pi z = 1, \\ yz - 2z^2 - 64 = 0, \\ x = \sin \pi y. \end{cases}$$

Из того, что $\cos \pi y = 0$, следует, что $\sin \pi y = \pm 1$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1-й случай. При $\sin \pi y = 1$ получаем систему

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} + 2n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ z = 2k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 1, \\ \left(\dfrac{1}{2} + 2n\right) 2k - 2(2k)^2 - 64 = 0. \end{cases}$$

Изучим последнее уравнение этой системы.

$$\left(\frac{1}{2} + 2n\right) 2k - 2(2k)^2 - 64 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k(1 + 4n - 8k) = 64.$$

Так как $(1 + 4n - 8k)$ нечётно при всех целых n и k, а $64 = 2^6$, то равенство выполняется только в двух случаях.

Случай 1а. $\begin{cases} 1 + 4n - 8k = 1, \\ k = 64; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = 64, \\ n = 128; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 256,5; \\ z = 128. \end{cases}$

Случай 1б. $\begin{cases} 1 + 4n - 8k = -1, \\ k = -64; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = -64, \\ n = -128,5 \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$

Следовательно, в *случае 1б* решений нет.

2-й случай При $\sin \pi y = -1$ система принимает вид

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} + 2n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ z = 2k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = -1, \\ \left(-\dfrac{1}{2} + 2n\right) 2k - 2(2k)^2 - 64 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим последнее уравнение этой системы.

$$\left(-\frac{1}{2} + 2n\right) 2k - 2(2k)^2 - 64 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k(-1 + 4n - 8k) = 64.$$

Так как $(-1 + 4n - 8k)$ нечётно при всех целых n и k, а $64 = 2^6$, то равенство может быть выполнено только в двух случаях.

Случай 2а. $\begin{cases} -1 + 4n - 8k = -1, \\ k = -64; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = -64, \\ n = -128. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1; \\ y = -256,5; \\ z = -128; \end{cases}$

Случай 2б. $\begin{cases} -1 + 4n - 8k = 1, \\ k = 64; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = 64, \\ n = 128,5 \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$

Следовательно, в *случае 2б* решений нет.

О т в е т. $(1; 256,5; 128), (-1; -256,5; -128)$.

Задача 25. (Хим-91.4)

Решить уравнение $\cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x \cdot \cos 8x$.

Идея. Применить формулы понижения степени. Перегруппировать слагаемые так, чтобы воспользоваться ограниченностью тригонометрической функции $y = \cos t$.

Указание. Применить формулы понижения степени. Перегруппировав слагаемые, привести уравнение к виду

$$\cos^2 2x = (\cos 8x - 1)(\cos 2x + 1).$$

Указание. Заметить, что левая часть уравнения всегда неотрицательна, а правая – неположительна, поэтому уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos 8x = 1. \end{cases}$$

Решение. Применим формулы понижения степени:

$$4\left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right)^2 = \cos 2x + 2 \cdot \frac{\cos 2x + 1}{2} \cdot \cos 8x \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos^2 2x + 2\cos 2x + 1 = \cos 2x + (\cos 2x + 1)\cos 8x.$$

Перегруппировав слагаемые, приведём уравнение к виду

$$\cos^2 2x = \cos 8x(\cos 2x + 1) - (\cos 2x + 1) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos^2 2x = (\cos 8x - 1)(\cos 2x + 1).$$

Заметим, что левая часть уравнения всегда неотрицательна, а правая – неположительна, поэтому решение уравнения может существовать только при одновременном равенстве нулю левой и правой частей:

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos 8x = 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi(2n+1)}{4}, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi k}{4}, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi(2n+1)}{4}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 26. (ВМК-86.5)

Решить уравнение $\sin 3x - 2\sin 18x \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2\cos x$.

Идея. Преобразовать уравнение, применив метод вспомогательного аргумента. Оценить слагаемые, входящие в уравнение, используя ограниченность тригонометрических функций $y = \sin t$ и $y = \cos t$.

Указание. Используя метод вспомогательного аргумента, привести уравнение к виду

$$\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{\sin^2 18x+1}\cdot\sin(x+\varphi)=3\sqrt{2},$$

где $\varphi=\arccos\dfrac{\sin 18x}{\sqrt{\sin^2 18x+1}}$.

Указание. Так как $\sqrt{\sin^2 18x+1}\le\sqrt{2}$, то

$$\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{\sin^2 18x+1}\cdot\sin(x+\varphi)\le 3\sqrt{2}.$$

Указание. Следовательно, уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\\ \sin^2 18x=1,\\ \sin(x+\varphi)=-1,\\ \varphi=\arccos\dfrac{\sin 18x}{\sqrt{\sin^2 18x+1}}.\end{cases}$$

Указание. Разобрать отдельно два случая: $\sin 18x=1$ и $\sin 18x=-1$.

Решение. Перегруппировав слагаемые, применим метод вспомогательного аргумента:

$$(\sin 3x+\cos 3x)-2(\sin 18x\sin x+\cos x)=3\sqrt{2}\iff$$

$$\iff\quad\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{\sin^2 18x+1}\cdot\sin(x+\varphi)=3\sqrt{2},$$

где $\varphi=\arccos\dfrac{\sin 18x}{\sqrt{\sin^2 18x+1}}$. Так как $\sqrt{\sin^2 18x+1}\le\sqrt{2}$, то

$$\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{\sin^2 18x+1}\cdot\sin(x+\varphi)\le 3\sqrt{2},$$

причём равенство достигается при одновременном выполнении следующих условий:

$$\begin{cases}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\\ \sin^2 18x=1,\\ \sin(x+\varphi)=-1,\\ \varphi=\arccos\dfrac{\sin 18x}{\sqrt{\sin^2 18x+1}}.\end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1-й случай. При $\sin 18x=1$ система принимает следующий вид:

$$\begin{cases}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\\ \sin 18x=1,\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1;\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{\pi k}{9},\ k\in\mathbb{Z},\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Приравняем x из первой и третьей строчек последней системы:

$$\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}=-\frac{3\pi}{4}+2\pi l \quad\Longleftrightarrow\quad 5+4n=12l;\ n,l\in\mathbb{Z}.$$

Последнее равенство невозможно, так как слева стоит нечётное число, а справа – чётное.

2-й случай. При $\sin 18x=-1$ получаем систему

$$\begin{cases}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\\ \sin 18x=-1,\\ \sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)=-1;\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z},\\ x=-\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{\pi k}{9},\ k\in\mathbb{Z},\\ x=-\dfrac{5\pi}{4}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Приравнивая x, получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi n}{3}=-\dfrac{5\pi}{4}+2\pi l,\\ -\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{\pi k}{9}=-\dfrac{5\pi}{4}+2\pi l;\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}n=-2+3l,\ n,l\in\mathbb{Z},\\ k=-11+18l,\ k,l\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Отсюда следует, что решением являются

$$x=-\frac{5\pi}{4}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}\quad(\text{или в другой записи}\quad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}).$$

Ответ. $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

7.3. Уравнения и неравенства с логарифмическими и показательными функциями

Задача 1. (У)

Решить уравнение $\ln x+\dfrac{1}{\ln x}=2\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Идея. Оценить левую и правую части уравнения.
Указание. Использовать оценку суммы двух взаимно обратных величин и ограниченность синуса.

Решение. Поскольку $\left|\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right|\geq 2$, а $\left|2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leq 2$, равенство левой и правой частей возможно только тогда, когда обе они равны либо 2, либо -2. В первом случае

$$\begin{cases}\ln x+\dfrac{1}{\ln x}=2,\\ 2\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2;\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}\ln x=1,\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1;\end{cases}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = e, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \emptyset.$$

Во втором случае

$$\begin{cases} \ln x + \dfrac{1}{\ln x} = -2, \\ 2 \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \ln x = -1, \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = e^{-1}, \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \emptyset.$$

О т в е т. Решений нет.

Задача 2. (У)

Решить уравнение $2^{1-|x|} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

И д е я. Оценить левую и правую части уравнения.
У к а з а н и е. Использовать оценку суммы двух взаимно обратных величин.

Р е ш е н и е. Поскольку $|x| \geq 0$, левая часть уравнения не превосходит двух, а правая часть больше или равна двум как сумма двух взаимно обратных положительных величин. Следовательно, обе части равны 2, что реализуется при $x = 0$.

О т в е т. 0.

Задача 3. (ИСАА-97.4)

Решить неравенство $\log_{0,5} |1 - x| - \log_{x-1} 2 \leq 2$.

И д е я. Воспользоваться свойством суммы двух взаимно обратных чисел.
У к а з а н и е. Привести исходное неравенство к виду

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{\log_2(x-1)} \geq -2.$$

У к а з а н и е. Использовать свойство суммы двух взаимно обратных чисел.

Р е ш е н и е. Раскроем модуль, учитывая ограничения на основание второго логарифма левой части, и применим формулу перехода к новому основанию:

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{\log_2(x-1)} \geq -2.$$

В силу свойства суммы двух взаимно обратных чисел последнее неравенство эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1)>0; \\ \log_2(x-1)=-1; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x-1>1; \\ x-1=\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x>2; \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\cup(2;+\infty)$.

Задача 4. (У)

Решить неравенство $\log_2 x+\log_x 2+2\cos\alpha\le 0$.

Идея. Воспользоваться свойством суммы двух взаимно обратных чисел.
Указание. Привести оба логарифма к одному основанию.

Решение. Область определения $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Перепишем неравенство в виде

$$\log_2 x+\log_x 2\le -2\cos\alpha.$$

1) Если $x\in(0;1)$, то $\log_2 x+\log_x 2=\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}\le -2$. С другой стороны, для правой части справедлива оценка $-2\cos\alpha\ge -2$. Значит, исходное неравенство будет справедливо для всех $\alpha\in\mathbb{R}$, а интервал $(0;1)$ будет входить в ответ.

2) Если же $x\in(1;+\infty)$, то $\log_2 x+\log_x 2=\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}\ge 2$, а $-2\cos\alpha\le 2$. Значит, исходное неравенство справедливо только при одновременном выполнении равенств $\log_2 x+\log_x 2=2$ и $-2\cos\alpha=2$, что имеет место при $\cos\alpha=-1$ и $x=2$.

Ответ. $x\in(0;\ 1)\cup\{2\}$ при $\alpha=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $x\in(0;\ 1)$ при $\alpha\ne\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Задача 5. (У)

Доказать, что уравнение $2^{x^2}\cdot 3^{-x}=\dfrac{2}{5}$ не имеет решений.

Идея. Показать, что левая часть неравенства больше $1/2$.
Указание. Рассмотреть отдельно отрицательные и положительные значения x.

Решение. Если $x\le 0$, то $2^{x^2}\cdot 3^{-x}\ge 1$ и, следовательно, решений нет.
При $x>0$ получим

$$2^{x^2}\cdot 3^{-x}>2^{x^2}\cdot 2^{-2x}=\frac{1}{2}\cdot 2^{x^2-2x+1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{(x-1)^2}\ge\frac{1}{2}.$$

В этом случае также нет решений. Что и требовалось доказать.

Задача 6. (У)

Решить неравенство $\cos^2(x+1)\lg(9-2x-x^2) \geq 1$.

Идея. Оценить каждый из множителей левой части неравенства.
Указание. Получить ограничения на x, а из возможных значений с помощью проверки отобрать нужные.

Решение. Поскольку $0 \leq \cos^2(x+1) \leq 1$, должно выполняться

$$\lg(9-2x-x^2) \geq 1 \iff 9-2x-x^2 \geq 10 \iff (x+1)^2 \leq 0 \iff x=-1.$$

Следовательно, решением неравенства может являться только $x=-1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что так оно и есть.

Ответ. -1.

Задача 7. (У)

Решить неравенство $3^{2x/3}\cdot\sin x > \sqrt{2}$ при $x \in \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$.

Идея. Показать, что неравенство справедливо при всех указанных x.
Указание. Проверить справедливость неравенства при $x=1$.

Решение. В силу монотонного возрастания функции в левой части неравенства на указанном отрезке справедливы оценки:

$$3^{2x/3}\cdot\sin x \geq 3^{2/3}\cdot\sin 1 > 3^{2/3}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 3^{2/3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Покажем, что полученная оценка левой части больше, чем $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{rcl} 3^{2/3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \vee & \sqrt{2} \\ 3^{2/3} & \vee & 2 \\ 3^2 & \vee & 2^3 \\ 9 & > & 8. \end{array}$$

Следовательно, неравенство справедливо при всех указанных значениях переменной x.

Ответ. $\left[1; \frac{\pi}{3}\right]$.

Задача 8. (У)

Решить уравнение $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 1,5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$.

Идея. Показать, что равенство возможно только тогда, когда левая часть принимает своё максимальное значение, а правая — минимальное.
Указание. Использовать оценку суммы двух взаимно обратных величин.

Решение. Левая часть уравнения всегда положительна, значит, $\operatorname{tg} x > 0$. В этом случае по теореме о сумме двух взаимно обратных положительных чисел $1,5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \geq 3$. Пусть $a = 2^{\sin^2 x}$, тогда $1 \leq a \leq 2$. Найдём a, при которых левая часть уравнения не меньше, чем 3:

$$a + \frac{2}{a} \geq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 - 3a + 2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty).$$

Следовательно, либо $a = 1$, либо $a = 2$. В первом случае $\sin x = 0$ и $\operatorname{ctg} x$ не определен. Во втором случае $\sin^2 x = 1$ и не определен $\operatorname{tg} x$. Значит, решений нет.

Ответ. Решений нет.

Задача 9. (У)

Решить неравенство $2^{-|x-2|} \log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$.

Идея. Оценить левую часть неравенства.
Указание. В подлогарифменном выражении выделить полный квадрат.

Решение. Так как $0 < 2^{-|x-2|} \leq 1$ и $\log_2(4x - x^2 - 2) = \log_2\left(2 - (x-2)^2\right) \leq 1$, то решением неравенства может являться только $x = 2$.

Ответ. 2.

Задача 10. (У)

Решить неравенство $(3 - \cos^2 x - 2\sin x) \cdot (\lg^2 y + 2\lg y + 4) \leq 3$.

Идея. Показать, что левая часть неравенства не меньше 3.
Указание. В каждом сомножителе левой части выделить полный квадрат.

Решение. Поскольку

$$3 - \cos^2 x - 2\sin x = 2 + \sin^2 x - 2\sin x = (\sin x - 1)^2 + 1 \geq 1,$$

$$\lg^2 y + 2\lg y + 4 = (\lg y + 1)^2 + 3 \geq 3,$$

то левая часть неравенства больше или равна 3. Следовательно, неравенство имеет решение только при $\sin x = 1$, $\lg y = -1$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 0{,}1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 11. (Биол-81.4)

Решить неравенство $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1.$

Идея. Используя неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, показать, что $2^x + 3 \cdot 2^{-x} > 1$ для всех x. После этого задача легко сводится к стандартной.

Указание. Воспользоваться неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{при} \quad a \geq 0,\ b \geq 0.$$

Указание. В соответствии с неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел, основание степени больше единицы, поэтому исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$2\log_2 x - \log_2(x+6) > 0.$$

Последнее неравенство решается стандартно.

Решение. В силу неравенства, связывающего среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел, для основания степени справедлива оценка

$$2^x + 3 \cdot 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 3 \cdot 2^{-x}} = 2\sqrt{3} > 1.$$

Следовательно, исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$2\log_2 x - \log_2(x+6) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 > x + 6, \\ x > 0; \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -2; \\ x > 3; \end{array} \right. \\ x > 0, \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad x > 3.$$

Ответ. $(3; +\infty)$.

Задача 12. (Псих-79.2)

Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) = 6, \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1. \end{array} \right.$$

Идея. Преобразовать первое уравнение системы и использовать свойство суммы двух взаимно обратных чисел.

Указание. Привести первое уравнение системы к виду

$$\log_{1-x}(y+2) + \frac{1}{\log_{1-x}(y+2)} = 2.$$

Указание. Воспользоваться свойством суммы двух взаимно обратных чисел.

Р е ш е н и е. Преобразуем первое уравнение системы, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6 \iff$$

$$\iff 2\log_{1-x}(1-x)(y+2)+\log_{y+2}(x-1)^2=6 \iff$$

$$\iff 2+2\log_{1-x}(y+2)+2\log_{y+2}(1-x)=6 \iff$$

$$\iff \log_{1-x}(y+2)+\frac{1}{\log_{1-x}(y+2)}=2.$$

В левой части последнего уравнения стоит сумма двух взаимно обратных чисел, поэтому уравнение равносильно условию

$$\log_{1-x}(y+2)=1 \iff \begin{cases} 1-x=y+2, \\ 1-x>0, \\ 1-x\neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x-1, \\ x<1, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Возвращаемся к исходной системе:

$$\begin{cases} y=-x-1, \\ \log_{1-x}(-x-1+5)-\log_{1-x}(x+4)=1, \\ x<1, \\ x\neq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y=-x-1, \\ \log_{1-x}\dfrac{4-x}{x+4}=1, \\ -4<x<1, \\ x\neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x-1, \\ \dfrac{4-x}{x+4}=1-x, \\ -4<x<1, \\ x\neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2, \\ y=1. \end{cases}$$

О т в е т. $(-2;1)$.

Задача 13. (Физ-96(2).8)

Для каждого значения a решить уравнение $(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$.

И д е я. Использовать неотрицательность арифметического квадратного корня.
У к а з а н и е. Перейти к логарифмам по одному основанию:

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

У к а з а н и е. Используя монотонность показательной функции, перейти к равенству, связывающему показатели степеней:

$$\sqrt{x+a+2}=-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}.$$

У к а з а н и е. Левая часть последнего уравнения неотрицательна, а правая часть неположительна, поэтому уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x+a+2=0, \\ x^2+a^2-6a-5=0; \end{cases}$$

которая легко решается.

Решение. Перейдём в правой части равенства к логарифму по основанию 2 и, используя монотонность показательной функции, совершим равносильный переход к равенству, связывающему показатели степеней:

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}} \iff \sqrt{x+a+2} = -\sqrt{x^2+a^2-6a-5}.$$

Так как левая часть последнего уравнения неотрицательна, а правая часть неположительна, то уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} x+a+2=0, \\ x^2+a^2-6a-5=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=-a-2, \\ 2a^2-2a-1=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=-a-2, \\ a=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Из последней системы легко получается ответ.

Ответ. При $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ $x=\dfrac{\sqrt{3}-5}{2}$; при $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ $x=\dfrac{-\sqrt{3}-5}{2}$.

Задача 14. (Хим-93(1).5)

Решить уравнение $2\left(1+\sin^2(x-1)\right)=2^{2x-x^2}$.

Идея. Использовать неотрицательность квадрата числа и монотонность показательной функции.

Указание. Так как $\sin^2(x-1)\ge 0$, то $2\left(1+\sin^2(x-1)\right)\ge 2$.

Указание. Так как $2x-x^2=1-(x-1)^2\le 1$, то $2^{2x-x^2}\le 2$.

Указание. Следовательно, исходное равенство будет выполнено, если

$$\begin{cases} \sin^2(x-1)=0, \\ x-1=0. \end{cases}$$

Решение. Оценим значения функций в левой и правой частях равенства. В силу неотрицательности квадрата числа $\sin^2(x-1)\ge 0$, поэтому

$$2\left(1+\sin^2(x-1)\right)\ge 2.$$

С другой стороны, $2x-x^2=1-(x-1)^2\le 1$, поэтому в силу монотонности показательной функции

$$2^{2x-x^2}\le 2.$$

Следовательно, исходное равенство будет выполнено, если

$$\begin{cases} \sin^2(x-1)=0, \\ x-1=0; \end{cases} \iff x=1.$$

Ответ. 1.

Задача 15. (Геогр-94(1).4)

Решить уравнение $\log_{0,5}(\operatorname{tg}\pi x + \operatorname{ctg}\pi x) = 8(2x^2 + 3x + 1)$.

Идея. Использовать свойство суммы двух взаимно обратных величин и ограниченность (с одной стороны) квадратичной функции.
Указание. Найти наибольшее значение левой части и наименьшее значение правой части.
Указание. На ОДЗ $\operatorname{tg}\pi x + \operatorname{ctg}\pi x \geq 2$ как сумма двух взаимно обратных положительных чисел, поэтому левая часть уравнения не превосходит -1. Значение квадратичной функции $f(x) = 8(2x^2+3x+1)$, стоящей в правой части уравнения, не меньше -1.
Указание. Следовательно, уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\pi x = 1, \\ x = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение. На ОДЗ $\operatorname{tg}\pi x + \operatorname{ctg}\pi x \geq 2$ как сумма двух взаимно обратных положительных величин, поэтому левая часть уравнения не превосходит -1.

Значение квадратичной функции $f(x) = 8(2x^2 + 3x + 1)$, стоящей в правой части уравнения, не меньше значения этой функции в вершине:

$$f(x) \geq f(x_в) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = 8\left(2\cdot\frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 1\right) = -1.$$

Следовательно, уравнение имеет решения только при равенстве левой и правой частей единице, то есть

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\pi x = 1, \\ x = -\dfrac{3}{4}; \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -\frac{3}{4}.$$

Ответ. $-\dfrac{3}{4}$.

Задача 16. (У)

Решить неравенство $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Идея. Оценить левую часть неравенства.
Указание. Использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Решение. Оценим левую часть неравенства

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x}\cdot 2^{\cos x}} = 2^{1+\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)} = 2^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Поскольку минимальное значение синуса равно -1, исходное неравенство справедливо всегда.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

Задача 17. (Филол-98.5)

Решить неравенство $\sqrt[4]{13+3^{\left(3^{1-\cos x}\right)}} \le \sqrt{5\cdot 2^{-2x^2}-1}$.

Идея. Используя ограниченность тригонометрической функции $y=\cos x$ и монотонность функций $y=a^x$, $y=\sqrt[n]{x}$, оценить левую и правую части неравенства.

Указание. Воспользовавшись ограниченностью тригонометрической функции $y=\cos x$ и монотонностью функций $y=a^x, y=\sqrt[n]{x}$, показать, что левая часть неравенства не меньше 2, а правая часть – не больше 2.

Указание. Следовательно, возможно только равенство, которое достигается в единственном случае:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Решение. В силу ограниченности функции $y=\cos x$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\cos x \le 1 \iff 1-\cos x \ge 0 \iff 3^{1-\cos x} \ge 1 \iff$$

$$\iff 3^{\left(3^{1-\cos x}\right)} \ge 3 \iff \sqrt[4]{13+3^{\left(3^{1-\cos x}\right)}} \ge \sqrt[4]{16} = 2.$$

С другой стороны, для правой части исходного неравенства в силу монотонности показательной функции справедлива оценка

$$\sqrt{5\cdot 2^{-2x^2}-1} \le \sqrt{5\cdot 2^0-1} = 2.$$

Следовательно, левая часть неравенства всегда не меньше правой, а должна быть не больше. Значит, возможно только равенство, которое достигается в единственном случае:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ x = 0; \end{cases} \iff x = 0.$$

Ответ. 0.

Задача 18. (ВМК-81.4)

Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие равенству $(a+2)^2\log_3(2x-x^2)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right) = 0$.

Идея. Найти ОДЗ и оценить слагаемые в левой части уравнения.

Указание. ОДЗ: $x\in(0;\sqrt{2})$.

Указание. Заметим, что $\log_{11}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right) < 0$, $\log_3(2x-x^2) \le 0$.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x - x^2 > 0, \\ 2 - x^2 > 0; \end{cases} \iff x \in (0; \sqrt{2}).$$

Далее заметим, что на ОДЗ справедливы оценки:

$$1 - \frac{x^2}{2} < 1 \implies \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < 0,$$

$$2x - x^2 \le 1 \implies \log_3(2x - x^2) \le 0.$$

Значит, левая часть уравнения неположительна для всех значений x из ОДЗ, причём равенство нулю возможно только в случае одновременного обращения в ноль каждого слагаемого, то есть

$$\begin{cases} 3a - 1 = 0, \\ \log_3(2x - x^2) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{3}, \\ x = 1. \end{cases}$$

Ответ. При $a = \dfrac{1}{3}$ $x = 1$, при остальных значениях a решений нет.

Задача 19. (Геогр-83.4)

Найти все пары чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет условиям
$$\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3} = 3^{-y-4}, \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \le 8. \end{cases}$$

Идея. Рассмотрев сначала только уравнение системы, получить ограничение на y. С учётом этого ограничения решить неравенство.

Указание. Из уравнения следует, что $y \le -3$.

Указание. При $y \le -3$ оба модуля в неравенстве раскрываются со знаком минус.

Решение. Рассмотрим уравнение:

$$2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3} = 3^{-y-4} \iff 2^{|x^2-2x-3|} = 3^{-y-3}.$$

Так как $|x^2 - 2x - 3| \ge 0$, то справедливы оценки:

$$2^{|x^2-2x-3|} \ge 1 \implies 3^{-y-3} \ge 1 \implies y \le -3.$$

При $y \le -3$ оба модуля в неравенстве системы раскрываются со знаком минус:

$$\begin{cases} y \le -3, \\ -4y + (y-1) + (y+3)^2 \le 8; \end{cases} \iff \begin{cases} y \le -3, \\ y^2 + 3y \le 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y \le -3, \\ -3 \le y \le 0; \end{cases} \iff y = -3.$$

Возвращаясь к уравнению, окончательно получаем:

$$\begin{cases} y=-3, \\ 2^{|x^2-2x-3|}=3^{-y-3}; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-3, \\ x^2-2x-3=0; \end{cases} \iff \begin{cases} y=-3, \\ \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ x=3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ. $(-1;-3)$, $(3;-3)$.

Задача 20. (Почв-89.5)

Решить неравенство $(x^2-4x+3)\cdot\log_{1/\sqrt{2}}\left(\cos^2\pi x+\cos x+2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\ \geq\ 2.$

Идея. Использовать ограниченность тригонометрической функции $y=\cos t$, ограниченность снизу квадратичной функции $f(x)=x^2-4x+3$ и монотонность логарифмической функции. Найти наибольшее значение левой части неравенства.
Указание. Привести второй сомножитель левой части неравенства к виду

$$-2\log_2(\cos^2\pi x+1).$$

Указание. Используя ограниченность тригонометрической функции $g(t)=\cos t$, монотонность логарифмической функции и ограниченность снизу квадратичной функции $f(x)=x^2-4x+3$, найти наибольшее значение левой части неравенства.
Указание. Так как $1\le\cos^2\pi x+1\le 2$, то

$$-2\le -2\log_2(\cos^2\pi x+1)\le 0.$$

Учитывая, что значение квадратичной функции $f(x)=x^2-4x+3$ не меньше значения этой функции в вершине, то есть

$$f(x)\ge f(x_в)=f(2)=-1,$$

получаем, что левая часть неравенства не больше 2.

Решение. Преобразуем второй сомножитель левой части неравенства, перейдя к логарифму по основанию 2 и применив формулу косинуса двойного угла:

$$\log_{1/\sqrt{2}}\left(\cos^2\pi x+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right)=\log_{2^{-\frac{1}{2}}}\left(\cos^2\pi x+\cos x+1-\cos x\right)=$$

$$=-2\log_2(\cos^2\pi x+1).$$

В силу ограниченности функции $g(t)=\cos t$ справедливы оценки

$$1\le\cos^2\pi x+1\le 2,$$

поэтому в силу монотонности логарифмической функции

$$-2\le -2\log_2(\cos^2\pi x+1)\le 0.$$

Учитывая, что значение квадратичной функции $f(x)=x^2-4x+3$ не меньше значения этой функции в вершине, то есть

$$f(x)\ge f(x_в)=f(2)=-1,$$

получаем, что левая часть неравенства не больше 2. Следовательно, в исходном нестрогом неравенстве возможно только равенство, которое достигается при одновременном выполнении двух условий:

$$\begin{cases} x = 2, \\ \cos^2 \pi x = 1; \end{cases} \iff x = 2.$$

Ответ. 2.

Задача 21. (Геол-95(1).9)

Для каждого значения a решить систему $\begin{cases} \dfrac{\log_2(|a|x^2 - 3x + 4)}{\log_2(-3x + 4)} = 5^{-|x|\cdot(x+1)^2}, \\ x \leq 1. \end{cases}$

Идея. Используя монотонность функции $y = \log_2 t$, оценить левую и правую части уравнения.

Указание. Для всех действительных x справедливо неравенство

$$|a|x^2 - 3x + 4 \geq -3x + 4.$$

Поскольку по условию $x \leq 1$, то в силу монотонности линейной функции с учётом ОДЗ

$$-3x + 4 > 1.$$

Указание. В силу монотонности логарифмической функции

$$\log_2(|a|x^2 - 3x + 4) \geq \log_2(-3x + 4) > 0.$$

Указание. Значит, для всех действительных x левая часть уравнения не меньше 1. Правая же часть уравнения, наоборот, не превосходит 1.

Указание. Следовательно, уравнение имеет решения только при равенстве левой и правой частей единице.

Решение. Рассмотрим отдельно левую и правую части уравнения при $x < 1$ ($x = 1$ решением не является, так как не входит в ОДЗ). Поскольку на ОДЗ

$$|a|x^2 - 3x + 4 \geq -3x + 4 > 1,$$

то в силу монотонности функции $y = \log_2 t$

$$\log_2(|a|x^2 - 3x + 4) \geq \log_2(-3x + 4) > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\log_2(|a|x^2 - 3x + 4)}{\log_2(-3x + 4)} \geq 1.$$

Выражение в правой части равенства при любом значении x, наоборот, не превосходит 1. Следовательно, уравнение имеет решение только при равенстве левой и правой частей единице:

$$\begin{cases} |a|x^2 - 3x + 4 = -3x + 4, \\ 5^{-|x|\cdot(x+1)^2} = 1, \\ x < 1; \end{cases} \iff \begin{cases} |a|x^2 = 0, \\ -|x| \cdot (x + 1)^2 = 0, \\ x < 1. \end{cases}$$

Решением последней системы при любом значении a является $x = 0$; при $a = 0$ вторым корнем будет $x = -1$.

Ответ. При $a \neq 0$ $x = 0$; при $a = 0$ $x = 0$ и $x = -1$.

Задача 22. (М/м-97(1).5)

Решить систему $\begin{cases} |x+1| - 1 \le x, \\ (2^x + 2^{x-2} + 2^{2-x})\cos\dfrac{\pi x}{2} + \cos(\pi x) + 3 + 2^{2x-3} = 0. \end{cases}$

Идея. Разложить левую часть второго уравнения на множители. Использовать оценки и монотонность показательной функции.

Указание. Поделив на 2, разложить левую часть второго уравнения на множители:

$$\left(2^{x-3} + 2^{1-x} + \cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} + 2^{x-1}\right) = 0.$$

Указание. Решать полученное уравнение методом расщепления. Использовать свойство суммы взаимно обратных величин, монотонность показательной функции и учесть решение первого неравенства системы.

Указание. При решении уравнения $\cos\dfrac{\pi x}{2} = -2^{x-1}$ рассмотреть отдельно два случая по x: $x \in [-1; 1]$ и $x > 1$.

Решение. Решим неравенство системы:

$$|x+1| - 1 \le x \iff |x+1| \le x+1 \iff x+1 \ge 0 \iff x \ge -1.$$

Далее рассмотрим второе уравнение. Разделим его на 2, применим в левой части формулу косинуса двойного угла и разложим выражение на множители:

$$\left(2^{x-1} + 2^{x-3} + 2^{1-x}\right)\cos\frac{\pi x}{2} + \cos^2\frac{\pi x}{2} + 1 + 2^{2x-4} =$$

$$= \left(2^{x-3} + 2^{1-x}\right)\cos\frac{\pi x}{2} + \left(\cos\frac{\pi x}{2} + 2^{x-1}\right)\cos\frac{\pi x}{2} + 2^{x-1}\left(2^{1-x} + 2^{x-3}\right) =$$

$$= \left(2^{x-3} + 2^{1-x}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} + 2^{x-1}\right) + \left(\cos\frac{\pi x}{2} + 2^{x-1}\right)\cos\frac{\pi x}{2} =$$

$$= \left(2^{x-3} + 2^{1-x} + \cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} + 2^{x-1}\right).$$

Значит, второе уравнение системы эквивалентно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2^{x-3} + 2^{1-x} + \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0; \\ \cos\dfrac{\pi x}{2} + 2^{x-1} = 0. \end{array}\right.$$

Рассмотрим два случая.

1-й случай. $\cos\dfrac{\pi x}{2} = -\dfrac{2^{x-2} + 2^{2-x}}{2} \le -1$, так как сумма взаимно обратных положительных величин не меньше 2. Следовательно, это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} = -1, \\ 2^{x-2} = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\pi x}{2} = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \iff x = 2.$$

Проверкой убеждается, что найденное значение переменной x удовлетворяет и первому уравнению исходной системы.

2-й случай. $\cos\dfrac{\pi x}{2} = -2^{x-1}$. Заметим, что при $x \in [-1;1]$ левая часть уравнения неотрицательна, а правая часть отрицательна; значит, в этом случае решений нет. При $x > 1$ правая часть уравнения меньше -1, в то время как левая часть всегда не меньше -1. Поэтому и при этих значениях переменной x решений нет.

Ответ. 2.

Задача 23. (ЕГЭ.С)

Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $3\sin a + 5$ и $9\cos 2a - 36\sin a - 18$ являются решениями неравенства $\dfrac{(25x - 3x^2 + 18)\sqrt{x-1}}{\log_4|x-7| - 1} \ge 0$.

Идея. Использовать модифицированный метод интервалов для решения неравенства и ограниченность функции $y = \sin x$ при проверке условия попадания данных чисел в множество решений.

Указание. Решить неравенство, разложив числитель на множители и воспользовавшись модифицированным методом интервалов для знаменателя:

$$\begin{cases} \dfrac{(3x+2)(x-9)\sqrt{x-1}}{(x-3)(x-11)} \le 0, \\ x \ne 7; \end{cases} \iff x \in [1;3) \cup [9;11).$$

Указание. Найти такие значения параметра a, при которых оба числа из условия попадали бы в один из полуинтервалов.

Решение. Решим неравенство. Раскладывая числитель на множители и используя модифицированный метод интервалов, получаем:

$$\frac{(25x - 3x^2 + 18)\sqrt{x-1}}{\log_4|x-7| - 1} \ge 0 \iff \begin{cases} \dfrac{(3x^2 - 25x - 18)\sqrt{x-1}}{|x-7| - 4} \le 0, \\ x \ne 7; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(3x+2)(x-9)\sqrt{x-1}}{(|x-7|-4)(|x-7|+4)} \le 0, \\ x \ne 7; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(3x+2)(x-9)\sqrt{x-1}}{|x-7|^2 - 4^2} \le 0, \\ x \ne 7; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{(3x+2)(x-9)\sqrt{x-1}}{(x-3)(x-11)} \le 0, \\ x \ne 7; \end{cases} \iff x \in [1;3) \cup [9;11).$$

Таким образом, надо найти такие значения параметра a, при которых оба числа из условия попадали бы в один из полуинтервалов. Преобразуем второе число:

$$9\cos 2a - 36\sin a - 18 = 9(1 - 2\sin^2 a) - 36\sin a - 18 = -18(\sin a + 1)^2 + 9.$$

Выпишем условия:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 1 \le 3\sin a + 5 < 3; \\ 9 \le 3\sin a + 5 < 11; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 1 \le -18(\sin a + 1)^2 + 9 < 3; \\ 9 \le -18(\sin a + 1)^2 + 9 < 11; \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} \le \sin a < -\dfrac{2}{3}; \\ \dfrac{4}{3} \le \sin a < 2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1 < \sin a \le -\dfrac{1}{3}; \\ \sin a = -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1 > -\dfrac{2}{3}$, то решением последней системы будет только

$$\sin a = -1 \iff a = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 24. (ЕГЭ.С)

Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-4}$ и $a^2 \cdot 4^{a-4} + 104 - 5a \cdot 2^{a-2}$ являются решениями неравенства $\log_{10,5-x}\left(\log_2 \dfrac{x-2}{x-3}\right) \ge 0$.

И д е я. При решении неравенства использовать модифицированный метод интервалов. При проверке условия попадания данных чисел в множество решений использовать положительность и монотонность показательной функции.

У к а з а н и е. Используя модифицированный метод интервалов, получить решение неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} 3 < x \le 4; \\ 9,5 < x < 10,5. \end{array}\right.$$

У к а з а н и е. Обозначив $b = a \cdot 2^{a-4}$, привести второе число к виду

$$c = a^2 \cdot 4^{a-4} + 104 - 5a \cdot 2^{a-2} = (b - 10)^2 + 4.$$

У к а з а н и е. Найти такие значения b, при которых число c попадает на множество решений исходного неравенства. Этим условиям удовлетворяет $b = 10$.

У к а з а н и е. При решении уравнения $a \cdot 2^{a-4} = 10$ использовать монотонность стоящей слева функции.

Р е ш е н и е. Решим неравенство, используя модифицированный метод интервалов:

$$\log_{10,5-x}\left(\log_2 \frac{x-2}{x-3}\right) \ge 0 \iff \begin{cases} (10,5 - x - 1)\left(\log_2 \dfrac{x-2}{x-3} - 1\right) \ge 0, \\ \log_2 \dfrac{x-2}{x-3} > 0, \\ 10,5 - x > 0; \\ 10,5 - x \ne 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (9,5-x)\left(\dfrac{x-2}{x-3}-2\right) \ge 0, \\ \dfrac{x-2}{x-3} > 1, \\ x < 10,5; \\ x \ne 9,5; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} 3 < x \le 4, \\ 9,5 < x < 10,5. \end{array} \right.$$

Пусть $b = a \cdot 2^{a-4}$, тогда

$$c = a^2 \cdot 4^{a-4} + 104 - 5a \cdot 2^{a-2} = b^2 + 104 - 5 \cdot b \cdot 2^2 = (b-10)^2 + 4.$$

Найдём такие значения b, при которых число c попадает на множество решений исходного неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} 3 < (b-10)^2 + 4 \le 4\,; \\ 9,5 < (b-10)^2 + 4 < 10,5\,; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} b = 10\,; \\ 10 - \sqrt{6,5} < b < 10 - \sqrt{5,5}\,; \\ 10 + \sqrt{5,5} < b < 10 + \sqrt{6,5}\,. \end{array} \right.$$

Поскольку не только число c, но и число b должно быть решением неравенства, то возможно только единственное значение $b = 10$.

Итак, надо решить уравнение $a \cdot 2^{a-4} = 10$. Очевидно, что решением этого уравнения могут быть только $a > 0$. При таких a слева стоит произведение двух положительных возрастающих функций, то есть возрастающая функция. Значит, если решение существует, то оно единственное. Его легко угадать: $a = 5$.

Ответ. 5.

8. Задачи на доказательство

8.1. Тригонометрические задачи на доказательство

Задача 1.

Доказать, что $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = 2$.

Идея. Найти значение $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$.

Указание. Использовать формулу косинуса двойного угла.

Решение. Вычислим $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$. Поскольку

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos\dfrac{\pi}{6}}{1 + \cos\dfrac{\pi}{6}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$$

и $0 < \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}$, получаем, что $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$. Следовательно,

$$\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2.

Доказать, что $\dfrac{1}{4} \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1.$

Идея. Выразить сумму шестых степеней тригонометрических функций через $\sin 2x$.
Указание. Применить формулу суммы кубов.

Решение. Разложим выражение $\sin^6 x+\cos^6 x$ на множители по формуле суммы кубов:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Так как $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, то $\dfrac{1}{4} \leq 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x \leq 1$ и $\dfrac{1}{4} \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1$, что и требовалось доказать.

Задача 3.

Доказать, что $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0.$

Идея. С помощью алгебраических преобразований и основного тригонометрического тождества привести равенство к очевидному.
Указание. Преобразовать первое слагаемое по формуле суммы кубов.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$2\left((\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3\right) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 =$$

$$= 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 =$$

$$= 2(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 =$$

$$= -(\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = -(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Задача 4.

Доказать, что $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{1}{2}.$

Идея. Умножить обе части уравнения на положительное число $2\sin\dfrac{\pi}{5}$.
Указание. Использовать формулу суммы косинусов.
Указание. Домножить обе части на $2\sin\dfrac{\pi}{5}$ и дважды применить формулу синуса двойного угла.

Решение. Преобразуем левую часть равенства по формуле суммы косинусов:

$$2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

Умножим обе части уравнения на $2\sin\frac{\pi}{5}$ и дважды применим в левой части формулу синуса двойного угла:

$$2\left(2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\right)\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{5}\right)\iff$$

$$\iff\quad 2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}\quad\iff\quad\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}.$$

Последнее равенство справедливо, так как сумма углов равна π.

Задача 5.

Доказать равенство $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

Идея. Домножить и поделить левую часть на $8\sin\frac{\pi}{7}$ и трижды воспользоваться формулой синуса двойного угла.
Указание. $\cos\frac{5\pi}{7}=-\cos\frac{2\pi}{7}$.

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=-\frac{4\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Равенство доказано.

Задача 6.

Доказать, что $\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{\sin 3\alpha}{4}$.

Идея. Выразить функцию в левой части равенства через $\sin\alpha$.
Указание. Преобразовать второй и третий множители по формуле произведения синусов.
Указание. Использовать формулу синуса тройного угла.

Решение. Воспользуемся в левой части равенства формулой произведения синусов для второго и третьего сомножителей и применим формулу синуса тройного угла:

$$\sin(\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\sin(\pi+\alpha)\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\left(2\pi+2\alpha\right)\right)=$$

$$=-\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin\alpha\cdot\left(1+2(1-2\sin^2\alpha)\right)=\frac{\sin 3\alpha}{4},$$

что и требовалось доказать.

Задача 7.

При всех значениях $\alpha\neq\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ доказать неравенство

$$3(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)-8(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)+10\geq 0.$$

Идея. Сделав замену переменных, свести неравенство к квадратному.
Указание. Произвести замену $t=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Положим $t=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, где $|t|\geq 2$. Неравенство примет вид

$$3(t^2-2)-8t+10\geq 0\quad\Longleftrightarrow\quad 3t^2-8t+4\geq 0\quad\Longleftrightarrow\quad t\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty).$$

Следовательно, при $|t|\geq 2$ неравенство справедливо.

Задача 8.

При всех значениях $\beta\neq\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ доказать неравенство

$$\frac{3(1+\cos^2 2\beta)}{\sin^2 2\beta}-\frac{8}{\sin 2\beta}+5\geq 0.$$

Идея. Свести неравенство к квадратному.
Указание. Произвести замену $a=\sin 2\beta$.

Решение. Пусть $a=\sin 2\beta$, где $a\in[-1;0)\cup(0;1]$. Домножив неравенство на $a^2>0$, получим

$$2a^2-8a+6\geq 0\quad\Longleftrightarrow\quad a\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty).$$

Следовательно, неравенство справедливо при всех $a\in[-1;0)\cup(0;1]$, что и требовалось доказать.

Задача 9.

Доказать равенство $\dfrac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3.$

Идея. Вычислить отдельно числитель и знаменатель дроби.

Указание. При вычислении знаменателя дроби домножить и поделить его на $2\sin 20^\circ$, после чего дважды применить формулу синуса двойного угла. Предварительно с помощью формул приведения перейти от синусов к косинусам.

Решение. Вычислим числитель дроби, подставив известное табличное значение и воспользовавшись формулами произведения тригонометрических функций:

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 40^\circ (\cos 60^\circ - \cos 100^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 40^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 140^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 60^\circ = \frac{3}{16}.$$

Вычислим знаменатель дроби, умножив и разделив его на $2\sin 20^\circ$ и дважды применив формулу синуса двойного угла:

$$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16\sin 20^\circ} = \frac{1}{16}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = \frac{3 \cdot 16}{16} = 3.$$

Равенство доказано.

Задача 10.

Доказать, что $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{5}.$

Идея. Использовать метод промежуточной числовой границы, то есть указать число, которое лежит между двумя заданными.

Указание. В качестве промежуточного числа использовать $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Воспользуемся монотонным возрастанием функции $y = \operatorname{arctg} x$ и методом промежуточной числовой границы:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} < \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{5}.$$

Задача 11.

Доказать, что $\dfrac{\pi}{4} < \arcsin\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3}$.

Идея. Сравнить синусы углов.
Указание. Убедиться в том, что углы лежат в области монотонного возрастания функции $y = \sin x$.

Решение. Прежде всего убедимся в том, что выражения (углы) в левой и правой частях неравенства принимают значения из первой четверти, где функция $y = \sin x$ монотонно возрастает. Затем вычислим синусы углов и сравним их.

Поскольку, очевидно, $\dfrac{\pi}{4} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, сосредоточимся на выражении в правой части неравенства.

Первое слагаемое $\arcsin\dfrac{1}{3} \in \left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$, так как $0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$.

Второе слагаемое $\arccos\dfrac{2}{3} \in \left(0; \dfrac{\pi}{3}\right)$, так как $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$, а в первой четверти косинус убывает.

Следовательно, $\arcsin\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Используя формулу синуса суммы, вычислим $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3}\right)$ и сравним его со значением $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2+2\sqrt{10}}{9} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}.$$

Поскольку оба угла принадлежат первой четверти и синус второго угла больше синуса первого, то второй угол больше первого. Неравенство доказано.

Задача 12.

Доказать, что $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{7}{23} = \dfrac{\pi}{4}$.

Идея. Сравнить тангенсы соответствующих углов.
Указание. Проверить, что углы лежат в области, где функция $\operatorname{tg} x$ монотонна.

Решение. Перепишем равенство в виде

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{7}{23}.$$

Докажем его справедливость. Поскольку аргументы арктангенсов не превосходят единицы, арктангенсы принимают значения из промежутка от нуля до $\frac{\pi}{4}$. Следовательно, функции в левой и правой частях последнего равенства принимают значения из первой четверти, и нам достаточно убедиться в равенстве их тангенсов:

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{7}{23}\right) \iff \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4^2}}=\frac{1-\frac{7}{23}}{1+\frac{7}{23}} \iff \frac{8}{15}=\frac{8}{15}.$$

Равенство доказано.

Задача 13.

Доказать, что если $0\le x\le 1$, то $x\sin x+\cos x\ge 1$.

Идея. Рассмотреть разность $x\sin x+\cos x-1$ и перейти к аргументу $\frac{x}{2}$.
Указание. Рассмотрев разность $x\sin x+\cos x-1$, получить:

$$x\sin x+\cos x-1=2\sin\frac{x}{2}\left(x\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right).$$

Указание. Показать, что оба сомножителя неотрицательны при заданных x.

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства:

$$x\sin x+\cos x-1=2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+1-2\sin^2\frac{x}{2}-1=2\sin\frac{x}{2}\left(x\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right).$$

Так как $0\le x\le 1$, то $0\le\sin\frac{x}{2}\le\frac{x}{2}$, а $\cos\frac{x}{2}\ge\cos\frac{1}{2}>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}$. Поэтому $x\cos\frac{x}{2}\ge\frac{x}{2}\ge\sin\frac{x}{2}$. Значит, оба сомножителя неотрицательны, что доказывает исходное неравенство.

Задача 14.

Доказать справедливость неравенства $\arcsin x\cdot\arccos x\le\frac{\pi^2}{16}$ и указать, при каких значениях x выполняется равенство.

Идея. Сделать замену $t=\arcsin x$ и решить неравенство относительно новой переменной.
Указание. Использовать равенство $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Выполним замену $t = \arcsin x$, $-1 \le x \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то $\arccos x = \frac{\pi}{2} - t$. Поэтому исходное неравенство принимает вид

$$t\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \le \frac{\pi^2}{16} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(t - \frac{\pi}{4}\right)^2 \ge 0.$$

Следовательно, неравенство верно при любых $x \in [-1; 1]$. Равенство выполняется при $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$, то есть при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 15.

Зная, что $\sin\alpha > 0$ и $\sin 3\alpha > \frac{1}{4}$, доказать, что $\sin\alpha > \frac{109}{1296}$.

Идея. Использовать формулу синуса тройного угла.

Указание. Получить предварительную оценку $\sin\alpha > \frac{1}{12}$.

Решение. Так как $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, то $\sin\alpha = \frac{\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha}{3}$. Используя условие задачи, получаем уточнённую оценку для $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha}{3} > \frac{1}{12}.$$

Воспользуемся полученным ограничением и условием задачи:

$$\sin\alpha = \frac{\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha}{3} > \frac{\frac{1}{4} + 4\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^3}{3} = \frac{109}{1296}.$$

Неравенство доказано.

Задача 16.

Доказать, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Идея. Использовать известное свойство: $\sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Указание. Воспользоваться формулой косинуса двойного угла.

Решение. Воспользуемся формулой косинуса двойного угла и неравенством $0 < \sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (см. пример 3):

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\cdot\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Неравенство доказано.

Задача 17.

Имеет ли смысл выражение $\arcsin\left(\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{11}\right)$?

Идея. Проверить, что $\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{11} \in [-1;1]$.

Указание. Показать, что $\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{12} > 1$ и, следовательно, $\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{11} > 11$.

Решение. Покажем, что

$$\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{11} > \sqrt{32}\sin\frac{\pi}{12} > 1.$$

Первое неравенство справедливо в силу монотонного возрастания функции $y = \sin x$ в первой четверти. Для доказательства второго неравенства вычислим $\sin\frac{\pi}{12}$. Воспользуемся формулой косинуса двойного угла:

$$\cos\frac{\pi}{6} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12} \quad\Longrightarrow\quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Покажем, что $\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{12} > 1$:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{32}\cdot\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} & \vee & 1 \\
2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} & \vee & 1 \\
2\sqrt{4-2\sqrt{3}} & \vee & 1 \\
2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} & \vee & 1 \\
2(\sqrt{3}-1) & \vee & 1 \\
2\sqrt{3} & \vee & 3 \\
2 & \vee & \sqrt{3} \\
4 & > & 3.
\end{array}$$

Следовательно, $\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{11} > 1$, и выражение $\arcsin\left(\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{11}\right)$ не имеет смысла.

Ответ. Не имеет.

Задача 18.

Имеет ли решение уравнение $\cos(\sin 7x) = \frac{\pi}{5}$?

Идея. Свести задачу к сравнению чисел $\cos 1$ и $\frac{\pi}{5}$.

Указание. Оценить $\cos 1$ через косинус известного угла.

Решение. Покажем, что существует $y \in [-1;1]$ такой, что $\cos y = \frac{\pi}{5}$. Для этого достаточно доказать, что $\cos 1 \le \frac{\pi}{5}$. Справедлива цепочка неравенств:

$$\cos 1 < \cos 55^\circ = \cos(60^\circ - 5^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \cos 5^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 5^\circ <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{180} < \frac{1}{2} + \frac{5}{180} = \frac{19}{36} < \frac{3}{5} < \frac{\pi}{5}.$$

Мы воспользовались оценками $\cos x \le 1$, $\sin x \le x$.

Ответ. Да.

Задача 19.

Доказать справедливость неравенства $\cos(\cos x) > 0,5$.

Идея. Использовать оценки иррационального числа π.
Указание. $\pi > 3$.

Решение. Поскольку $-\frac{\pi}{3} < -1 \le \cos x \le 1 < \frac{\pi}{3}$, неравенство в условии задачи верно для любого $x \in \mathbb{R}$.

Задача 20.

Доказать справедливость неравенства $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Идея. Перенести все слагаемые в левую часть и разложить выражение на множители.
Указание. Использовать формулы приведения и разности синусов.

Решение. Воспользуемся формулой приведения $\cos(\sin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right)$, выражением для разности синусов и методом дополнительного аргумента:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - \sin(\cos x) > 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\cos x + \sin x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos x - \sin x}{2}\right) > 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2}\right) > 0.$$

Поскольку $\pi > 3 > 2\sqrt{2}$, то есть $\frac{\pi}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, аргументы синуса и косинуса принимают значения из первой четверти. Следовательно, синус и косинус положительны, и неравенство справедливо при всех $x \in \mathbb{R}$.

8.2. Метод математической индукции

Задача 1.

Доказать, что $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть равенства для $n=k+1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n=1$. Получим

$$1=\frac{1\cdot 2}{2} \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что равенство справедливо при $n=k$:

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

и докажем его истинность при $n=k+1$. То есть нам надо доказать, что

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Выпишем левую часть равенства и используем предположение индукции:

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Таким образом, утверждение при $n=k+1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Замечание. Это известная формула суммы арифметической прогрессии чисел от 1 до n.

Задача 2.

Доказать, что $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть равенства для $n=k+1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n=1$. Получим

$$1=2^1-1 \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что равенство справедливо при $n = k$:

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Выпишем левую часть равенства и используем предположение индукции:

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 3.

Доказать, что $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть равенства для $n = k + 1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$1 = 1^2 \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что равенство справедливо при $n = k$:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Выпишем левую часть равенства и используем предположение индукции:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 4.

Доказать для любого натурального n равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть равенства для $n = k + 1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что равенство справедливо при $n = k$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Выпишем левую часть равенства и используем предположение индукции:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Замечание. Это равенство можно доказать без применения метода математической индукции. Так как $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, то

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 5.

Доказать, что $\quad (n-1)! > 2^n \quad \forall n \geq 6$.

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть неравенства для $n = k + 1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 6$. Получим

$$5! > 2^6 \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что неравенство справедливо при $n = k \geq 6$:

$$(k-1)! > 2^k$$

и докажем его истинность при $n = k+1$. То есть нам надо доказать, что

$$k! > 2^{k+1}.$$

Выпишем левую часть неравенства и используем предположение индукции:

$$k! = (k-1)! \cdot k > 2^k \cdot k = 2^{k+1} \cdot \frac{k}{2} > 2^{k+1}.$$

Таким образом, утверждение при $n = k+1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 6.

Доказать, что $\quad 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad \forall n \geq 2.$

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть неравенства для $n = k+1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 2$. Получим

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что неравенство справедливо при $n = k$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

и докажем его истинность при $n = k+1$. То есть нам надо доказать, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}.$$

Выпишем левую часть неравенства и используем предположение индукции:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}} > \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}.$$

Таким образом, утверждение при $n = k+1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Замечание. Это неравенство можно доказать без применения метода математической индукции:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 7.

Доказать, что $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть неравенства для $n=k+1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n=1$. Получим

$$1<2\sqrt{1} \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что неравенство справедливо при $n=k$:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$$

и докажем его истинность при $n=k+1$. То есть нам надо доказать, что

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}.$$

Выпишем левую часть неравенства и используем предположение индукции:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{4k^2+4k}+1}{\sqrt{k+1}}<\frac{\sqrt{4k^2+4k+1}+1}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=\frac{2k+2}{\sqrt{k+1}}=2\sqrt{k+1}.$$

Таким образом, утверждение при $n=k+1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 8.

Доказать, что $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть неравенства для $n=k+1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n=1$. Получим

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}} \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что неравенство справедливо при $n = k$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Выпишем левую часть неравенства и используем предположение индукции:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \cdot \frac{\sqrt{(2k+3)(2k+1)}}{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \cdot \frac{\sqrt{4k^2+8k+3}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \cdot \frac{\sqrt{4k^2+8k+4}}{2k+2} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 9.

Доказать, что $\quad 2^n > n^2 \quad \forall n \geq 5$.

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть неравенства для $n = k + 1$ и использовать предположение индукции.
Указание. Воспользоваться тем, что $k^2 - 2k - 1 > 0 \ \ \forall k \geq 5$

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 5$. Получим

$$2^5 > 5^2 \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что неравенство справедливо при $n = k \geq 5$:

$$2^k > k^2$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$2^{k+1} > (k+1)^2.$$

Выпишем левую часть неравенства и используем предположение индукции:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = (k+1)^2 + k^2 - 2k - 1 > (k+1)^2.$$

В последнем переходе использован тот факт, что $k^2 - 2k - 1 > 0 \ \ \forall k \geq 5$. Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 10.

Доказать, что $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть равенства для $n = k + 1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$1^3 = 1^2 \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что равенство справедливо при $n = k$:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = (1 + 2 + ... + k)^2$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + ... + k + (k + 1))^2.$$

Выпишем левую часть равенства и используем предположение индукции:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + ... + k)^2 + (k + 1)^3 =$$

$$= (1+...+k)^2+2(1+\ldots+k)(k+1)+(k+1)^2+(k+1)^3-2(1+\ldots+k)(k+1)-(k+1)^2 =$$

$$= (1+...+k+(k+1))^2+(k+1)^3-2\cdot\frac{k(k+1)}{2}\cdot(k+1)-(k+1)^2 = (1+...+k+(k+1))^2.$$

В предпоследнем переходе была использована формула суммы арифметической прогрессии (или формула из задачи 1). Таким образом, утверждение при $n = k+1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 11.

Доказать,что при любом натуральном n выполняется неравенство

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть неравенства для $n = k + 1$ и использовать предположение индукции.
Указание. Выделить выражение, стоящее в правой части. Для оценки оставшегося сомножителя использовать неравенство Бернулли.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$1 \le \left(\frac{1+1}{2}\right)^1 \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что неравенство справедливо при $n = k$:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \le \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \le \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}.$$

Выпишем левую часть неравенства и используем предположение индукции:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \le \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot (k+1) = \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} \cdot 2.$$

Значит, чтобы доказать требуемое неравенство, осталось показать, что

$$\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} \cdot 2 \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} \ge 2.$$

Последнее неравенство легко доказывается с помощью неравенства Бернулли:

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \ge 1 + (k+1)\frac{1}{k+1} = 2.$$

Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 12.

Доказать, что $\quad 4^n + 15n - 1 \,\vdots\, 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть утверждения для $n = k + 1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$4 + 15 - 1 \,\vdots\, 9 \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что утверждение справедливо при $n = k$:

$$4^k + 15k - 1 \,\vdots\, 9$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 \vdots 9.$$

Выпишем левую часть утверждения и преобразуем её:

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4\left(4^k + 15k - 1\right) - 45k + 18 = 4\left(4^k + 15k - 1\right) + 9(2 - 5k).$$

Так как по предположению индукции $4^k + 15k - 1 \vdots 9$, то и вся сумма делится на 9. Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

Задача 13.

Доказать, что $\quad 7^n + 12n + 17 \vdots 18 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Идея. Воспользоваться методом математической индукции.
Указание. Выписать левую часть утверждения для $n = k + 1$ и использовать предположение индукции.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. Сначала проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Получим

$$7 + 12 + 17 \vdots 18 \quad - \quad \text{верно.}$$

Теперь предположим, что утверждение справедливо при $n = k$:

$$7^k + 12k + 17 \vdots 18$$

и докажем его истинность при $n = k + 1$. То есть нам надо доказать, что

$$7^{k+1} + 12(k + 1) + 17 \vdots 18$$

Выпишем левую часть утверждения и преобразуем её:

$$7^{k+1} + 12(k+1) + 17 = 7\left(7^k + 12k + 17\right) - 72k - 90 = 7\left(7^k + 12k + 17\right) - 18(4k + 5).$$

Так как по предположению индукции $7^k + 12k + 17 \vdots 18$, то и вся сумма делится на 18. Таким образом, утверждение при $n = k + 1$ доказано и, следовательно, оно справедливо при всех натуральных n.

8.3. Доказательство неравенств и тождеств

Задача 1.

Доказать, что для любых $a \neq 0,\ b \neq 0$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^2+1}{b}\right)^2 > 15.$$

Идея. Использовать оценку суммы двух взаимно обратных чисел.
Указание. Используя оценку суммы двух взаимно обратных чисел, оценить отдельно первый и второй сомножители левой части неравенства.

Решение. Модуль суммы двух взаимно обратных чисел не меньше двух, поэтому

$$\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 4, \quad \left(\frac{b^2+1}{b}\right)^2 = \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq 4.$$

Следовательно, $\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^2+1}{b}\right)^2 \geq 16 > 15.$

Задача 2.

Доказать, что $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$.

Идея. Использовать неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое.
Указание. Представить левую часть неравенства в виде суммы трёх выражений, каждое из которых является средним арифметическим двух чисел:

$$a^4+b^4+c^4 = \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{a^4+c^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2}.$$

Указание. Использовать неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое:

$$\frac{a^4+b^4}{2} + \frac{a^4+c^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} \geq \sqrt{a^4b^4} + \sqrt{a^4c^4} + \sqrt{b^4c^4} = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2.$$

Указание. Проделать всё ещё раз.

Решение. Оценим левую часть данного неравенства, используя неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел:

$$a^4+b^4+c^4 = \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{a^4+c^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} \geq \sqrt{a^4b^4} + \sqrt{a^4c^4} + \sqrt{b^4c^4}2 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 =$$

$$= \frac{a^2b^2+a^2c^2}{2} + \frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} + \frac{a^2c^2+b^2c^2}{2} \geq \sqrt{a^4b^2c^2} + \sqrt{b^4a^2c^2} + \sqrt{c^4a^2b^2} =$$

$$= a^2|bc| + b^2|ac| + c^2|ab| \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab = abc(a+b+c).$$

Неравенство доказано.

Задача 3.

Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство
$$x + y + \frac{1}{xy} \geq 3.$$

Идея. Воспользоваться неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел.

Указание. Воспользоваться неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел:
$$x + y + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{xy} + \frac{1}{xy}.$$

Указание. Сделать замену $t = \sqrt{xy}$ и решить неравенство относительно новой переменной.

Решение. Согласно неравенству, связывающему среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел, $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, поэтому
$$x + y + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{xy} + \frac{1}{xy}.$$

Сделаем замену переменных $t = \sqrt{xy}$, $t > 0$. Для того чтобы доказать исходное неравенство, достаточно показать, что неравенство $2t + \dfrac{1}{t^2} \geq 3$ справедливо при $t > 0$. Приведём все слагаемые к общему знаменателю, разложим выражение в числителе на множители и решим неравенство методом интервалов:
$$2t + \frac{1}{t^2} \geq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(t-1)^2(2t+1)}{t^2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

Итак, при $t > 0$ выполняется неравенство $2t + \dfrac{1}{t^2} \geq 3$ и, следовательно, выполняется исходное неравенство.

Задача 4.

Доказать, что если $a + b + c = 1$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

Идея. Использовать неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел.

Указание. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

Решение. Возведём равенство $a + b + c = 1$ в квадрат:
$$(a+b+c)^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 1.$$

Так как согласно неравенству, связывающему среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел,

$$a^2+b^2+c^2=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}\geq ab+ac+bc,$$

то

$$3(a^2+b^2+c^2)\geq(a^2+b^2+c^2)+2(ab+ac+bc)=1.$$

Следовательно, $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{1}{3}$. Неравенство доказано.

Задача 5.

Доказать неравенство $\lg 8\cdot\lg 12<1$.

Идея. Использовать неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое.

Указание. Использовать формулы преобразований логарифмических выражений.

Решение. Запишем для двух положительных чисел $\lg 8$ и $\lg 12$ неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\sqrt{\lg 8\cdot\lg 12}\leq\frac{\lg 8+\lg 12}{2}=\frac{\lg 96}{2}<1\quad\Longrightarrow\quad\lg 8\cdot\lg 12<1.$$

Неравенство доказано.

Задача 6.

Доказать, что если для неотрицательных чисел $xy+yz+zx=1$, то $x+y+z>1$.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.

Указание. Возвести выражение $x+y+z$ в квадрат и использовать равенство из условия.

Решение. Решим задачу методом от противного. Предположим, что $0\leq x+y+z\leq 1$, тогда

$$0\leq(x+y+z)^2\leq 1\quad\Longleftrightarrow$$

$$0\leq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\leq 1\quad\Longleftrightarrow\quad 0\leq x^2+y^2+z^2+2\leq 1.$$

Так как сумма квадратов не может быть отрицательной, наше предположение неверно и $x+y+z>1$. Неравенство доказано.

Задача 7.

Сравнить $2^{x-1}+2^{y-1}$ и $\sqrt{2^{x+y}}$.

Идея. Использовать неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел.

Указание. Привести выражение в левой части к общему знаменателю и воспользоваться неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое.

Решение. Так как среднее геометрическое двух положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, то

$$2^{x-1}+2^{y-1}=\frac{2^x+2^y}{2}\geq\sqrt{2^{x+y}}.$$

Ответ. $2^{x-1}+2^{y-1}\geq\sqrt{2^{x+y}}$.

Задача 8.

Доказать неравенство $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{100^2}<\dfrac{99}{100}$.

Идея. Оценить каждое из слагаемых разностью некоторых чисел таким образом, чтобы при сложении оценок члены с разными знаками взаимно уничтожились.

Указание. Использовать неравенство $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}$ и равенство $\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$.

Решение. Так как $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$, получаем:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot100}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100},$$

что и требовалось доказать.

Задача 9.

Доказать, что если $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$, то $|ac-bd|\leq1$.

Идея. Использовать тригонометрическую замену.

Указание. Заменив a,b,c,d на тригонометрические функции, преобразовать выражение $ac-bd$ с помощью тригонометрических формул.

Решение. Так как $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, то можем сделать замену

$$a=\cos\phi,\quad b=\sin\phi;\quad c=\cos\xi,\quad d=\sin\xi;$$

тогда $ac-bd=\cos\phi\cdot\cos\xi-\sin\phi\cdot\sin\xi=\cos(\phi+\xi)$. Следовательно, $|ac-bd|\leq1$.

Задача 10.

Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3} \le \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Идея. Использовать неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, предварительно возведя обе части неравенства в квадрат.
Указание. После возведения в квадрат исходного неравенства и приведения подобных членов, получить:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} \le a+b+c.$$

Указание. Для доказательства последнего неравенства достаточно сложить три неравенства, связывающих среднее арифметическое и среднее геометрическое.

Решение. После возведения в квадрат исходного неравенства получим:

$$\frac{a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}}{9} \le \frac{a+b+c}{3}.$$

Умножим неравенство на 9, приведём подобные члены и поделим пополам:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} \le a+b+c.$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно сложить три неравенства, связывающих среднее арифметическое и среднее геометрическое.

Задача 11.

Доказать, что $\dfrac{1}{\log_2 \pi}+\dfrac{1}{\log_5 \pi}+\dfrac{1}{\log_{10} \pi} > 4.$

Идея. Свести задачу к сравнению числа π с некоторым рациональным числом.
Указание. Привести все логарифмы к одному основанию и воспользоваться формулой суммы логарифмов.

Решение. $\dfrac{1}{\log_2 \pi}+\dfrac{1}{\log_5 \pi}+\dfrac{1}{\log_{10} \pi} > 4 \iff \log_\pi 2+\log_\pi 5+\log_\pi 10 > 4 \iff$

$$\iff \log_\pi 100 > 4 \iff 100 > \pi^4 \iff 10 > \pi^2.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку $10 > 3,15^2 > \pi^2$.

Задача 12.

Доказать неравенство $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ для произвольных чисел a, b, c, d.

Идея. Воспользоваться неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое, предварительно избавившись от радикалов.
Указание. Для того, чтобы избавиться от радикалов, надо возвести неравенство в квадрат, привести подобные члены и возвести в квадрат повторно.

Решение. После возведения в квадрат и приведения подобных членов неравенство примет вид

$$2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \geq 2ac+2bd.$$

Сократив на два, возведя в квадрат повторно и перемножив скобки, получим:

$$a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2 \geq a^2c^2+b^2d^2+2abcd \iff b^2c^2+a^2d^2 \geq 2abcd.$$

Последнее неравенство представляет собой соотношение, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел b^2c^2 и a^2d^2 при условии, что $abcd \geq 0$.

Если же $abcd < 0$, то неравенство $b^2c^2+a^2d^2 \geq 2abcd$ выполняется автоматически, так как в его левой части стоит положительное число, а в правой по предположению – отрицательное.

Задача 13.

Доказать,что для любого значения переменной x выполняется неравенство

$$x^{12}-x^9+x^6-x^3+1>0.$$

Идея. Объединить одночлены в группы, имеющие заведомо положительную сумму слагаемых.
Указание. Рассмотреть отдельно случаи $x<0$, $0 \leq x \leq 1$, $x>1$.

Решение. 1) При $x<0$ все слагаемые положительны и, следовательно, неравенство выполняется.

2) В случае $x>1$ сгруппируем слагаемые так:

$$(x^{12}-x^9)+(x^6-x^3)+1>0.$$

Все группы положительны и, следовательно, неравенство справедливо.

3) При $0 \leq x \leq 1$ разобьём на группы следующим образом:

$$x^{12}+(-x^9+x^6)+(-x^3+1)>0.$$

Неравенство выполняется, поскольку $x^6 \geq x^9$, $1 \geq x^3$.

Задача 14.

Доказать, что если $a+b \geq 1$, то $a^4+b^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

Идея. Использовать оценочное неравенство $x^2+y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2}$.
Указание. Применить это неравенство дважды: для оценки суммы четвёртых степеней и для оценки суммы квадратов.

Решение. Рассмотрим вспомогательное неравенство $x^2+y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2}$ (докажите его самостоятельно). Применим его сначала к сумме квадратов, а затем – к сумме четвёртых степеней.

Так как $a+b \geq 1$, то $a^2+b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2} \geq \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, $a^4+b^4 \geq \dfrac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq \dfrac{1}{8}$. Неравенство доказано.

Задача 15.

Доказать, что если $|x-a|+|y-b|<c$, то $|xy-ab|<(|a|+|b|+|c|)c$.

Идея. Использовать вспомогательные оценки: $|x-a|<c$, $|y-b|<c$.
Указание. Добавить и вычесть величину xb в подмодульном выражении левой части второго неравенства.

Решение. Преобразуем левую часть доказываемого неравенства:

$$|xy-ab| = |(xy-xb)+(xb-ab)| \leq |x|\cdot|y-b|+|b|\cdot|x-a|.$$

Из условия задачи следует, что

$$|x-a|<c, \quad |y-b|<c,$$

$$|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a|+|a| < |c|+|a|.$$

Подставив эти оценки, получим

$$|xy-ab| \leq |x|\cdot|y-b|+|b|\cdot|x-a| < (|a|+|b|+|c|)c,$$

что и требовалось доказать.

Задача 16.

Доказать, что для положительных значений переменных выполняется неравенство

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \leq \frac{a_1+a_2+a_3}{3}.$$

Идея. Получить данное неравенство с помощью аналогичного неравенства для четырёх чисел.
Указание. С помощью неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического доказать неравенство для четырёх чисел и, выбрав четвёртое число специальным образом, получить нужное неравенство для трёх чисел.
Указание. Выбрать $a_4 = \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$.

Решение. Оценим величину $\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$, дважды применив неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического:

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} \le \frac{\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_3a_4}}{2} \le$$

$$\le \frac{\dfrac{a_1+a_2}{2} + \dfrac{a_1+a_2}{2}}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

Мы доказали, что среднее геометрическое четырёх чисел не превосходит их среднего арифметического. Пусть $a_4 = \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$, тогда

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3\sqrt[3]{a_1a_2a_3}} \le \frac{a_1+a_2+a_3+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}{4} \iff$$

$$\iff \quad \sqrt[3]{a_1a_2a_3} \le \frac{a_1+a_2+a_3}{4} + \frac{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}{4} \iff$$

$$\iff \sqrt[3]{a_1a_2a_3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) \le \frac{a_1+a_2+a_3}{4}.$$

Домножив обе части последнего неравенства на $4/3$, получим

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \le \frac{a_1+a_2+a_3}{3}.$$

Задача 17.

Пусть $0 \le x, y, z \le \pi$. Доказать, что $\sin\dfrac{x+y+z}{3} \ge \dfrac{\sin x + \sin y + \sin z}{3}$.

Идея. Воспользоваться аналогичным неравенством для четырёх чисел.
Указание. Показать сначала, что

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$$

при $0 \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$.
Указание. Для доказательства использовать формулу

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Указание. С помощью доказанного неравенства для двух чисел доказать неравенство для четырёх чисел

$$\sin\frac{x+y+z+v}{4} \ge \frac{1}{4}(\sin x + \sin y + \sin z + \sin v)$$

и, выбрав четвёртое число специальным образом, получить нужное неравенство для трёх чисел.

Указание. Выбрать $v = \dfrac{x+y+z}{3}$.

Решение. Покажем сначала, что

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$$

при $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$. Преобразуем правую часть неравенства по формуле суммы синусов:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Это неравенство справедливо, поскольку $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \geq 0$, а $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \leq 1$.

Докажем аналогичное неравенство для четырёх слагаемых, дважды применив полученный результат:

$$\sin\frac{x+y+z+v}{4} = \sin\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+v}{2}}{2} \geq \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2} + \sin\frac{z+v}{2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}(\sin x + \sin y + \sin z + \sin v).$$

Обозначим $v = \dfrac{x+y+z}{3}$, тогда

$$\sin\frac{x+y+z+\frac{x+y+z}{3}}{4} \geq \frac{1}{4}\left(\sin x + \sin y + \sin z + \sin\frac{x+y+z}{3}\right) \iff$$

$$\iff \sin\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{1}{4}(\sin x + \sin y + \sin z) + \frac{1}{4}\sin\frac{x+y+z}{3} \iff$$

$$\iff \frac{3}{4}\sin\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{1}{4}(\sin x + \sin y + \sin z).$$

Домножив обе части последнего неравенства на $4/3$, получим нужное неравенство

$$\sin\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3}.$$

Задача 18.

Доказать, что для любого значения x выполняется неравенство $2^x > x$.

Идея. Использовать неравенство Бернулли.

Указание. Рассмотреть неравенство Бернулли $(1+y)^n \geq 1 + ny$ при $y = 1$.

Решение. Если $x \le 0$, то левая часть неравенства положительна, а правая – неположительна, то есть неравенство выполняется.

Рассмотрим положительные значения переменной. Положив в неравенстве Бернулли

$$(1+y)^n \ge 1+ny$$

$y=1$, получим

$$2^n \ge 1+n.$$

Эта оценка справедлива при $n \in \mathbb{N}_0$. Возьмём в качестве n целую часть x. Тогда

$$2^x \ge 2^{[x]} \ge 1+[x] > x,$$

что и требовалось доказать.

Задача 19.

Пусть a, b, c — попарно взаимно простые числа, причём $a \ne 1$. Доказать, что они не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. С помощью определения геометрической прогрессии выписать три уравнения с дополнительными неизвестными b_1 и q. Противоречие будет содержаться в уравнении, которое получится после исключения этих неизвестных.

Решение. Пусть положительные попарно взаимно простые числа a, b, c являются членами геометрической прогрессии $\{b_i\}$ со знаменателем q, то есть

$$\left\{\begin{array}{l} a=b_1q^{k-1}, \\ b=b_1q^{m-1}, \\ c=b_1q^{n-1}. \end{array}\right.$$

Будем последовательно уменьшать число неизвестных и число уравнений. Поделим первое и второе уравнение на третье:

$$\left\{\begin{array}{l} a/c=q^{k-n}, \\ b/c=q^{m-n}. \end{array}\right.$$

Теперь возведём первое уравнение в степень $(m-n)$, а второе – в степень $(k-n)$, и приравняем левые части:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{m-n} = \left(\frac{b}{c}\right)^{k-n} \quad \Longleftrightarrow \quad a^{m-n}c^{k-m} = b^{k-n}.$$

Из взаимной простоты чисел a, b, c следует, что левая и правая части последнего равенства не могут содержать общих простых множителей. Следовательно, обе части равны 1 и $a=b=c=1$, что противоречит условию задачи. Значит, наше предположение неверно. Утверждение доказано.

Задача 20.

Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

Идея. Воспользоваться необходимым и достаточным условием того, что три числа образуют арифметическую прогрессию.
Указание. Три числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $z - y = y - x$.

Решение. Проверим выполнение необходимого и достаточного условия того, что три числа $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию:

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c}.$$

Приведём левую и правую части к общим знаменателям:

$$\frac{c-b}{(a+b)(c+a)} = \frac{b-a}{(c+a)(b+c)}.$$

Последнее равенство равносильно равенству

$$c^2 - b^2 = b^2 - a^2,$$

которое справедливо в силу того, что числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Утверждение доказано.

Задача 21.

Могут ли различные числа a_k, a_m, a_n быть одноимёнными членами как арифметической, так и геометрической прогрессий?

Идея. Предположить такую возможность и получить противоречие.

Указание. Использовать монотонность последовательности $y_l = \dfrac{q^l - 1}{l}$.

Решение. Пусть a_k, a_m, a_n являются одноимёнными членами арифметической прогрессии $\{a_i\}$ с разностью $d \neq 0$ и геометрической прогрессии $\{b_i\}$ со знаменателем $q \neq 1$, то есть

$$\begin{cases} a_1 + (k-1)d = b_1 q^{k-1}, \\ a_1 + (m-1)d = b_1 q^{m-1}, \\ a_1 + (n-1)d = b_1 q^{n-1}, \end{cases}$$

причём k, m, n – различны. Будем последовательно уменьшать число неизвестных и число уравнений. Сначала вычтем третье уравнение из первого и второго:

$$\begin{cases} (k-1)d - (n-1)d = b_1(q^{k-1} - q^{n-1}), \\ (m-1)d - (n-1)d = b_1(q^{m-1} - q^{n-1}). \end{cases}$$

Затем поделим уравнения друг на друга:

$$\frac{k-n}{m-n}=\frac{q^{k-1}-q^{n-1}}{q^{m-1}-q^{n-1}} \iff \frac{k-n}{m-n}=\frac{q^{k-n}-1}{q^{m-n}-1}.$$

Обозначим $a=k-n$, $b=m-n$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{q^a-1}{a}=\frac{q^b-1}{b}.$$

По условию $a\neq b$, поэтому из монотонности последовательности

$$y_l=\frac{q^l-1}{l}$$

будет следовать, что $a=b$. Получаем противоречие.

Осталось доказать монотонность последовательности y_l. Покажем, что она монотонно возрастает, то есть

$$\frac{q^{l+1}-1}{l+1}>\frac{q^l-1}{l}.$$

Проведём следующую цепочку равносильных преобразований:

$$\frac{q^{l+1}-1}{l+1}>\frac{q^l-1}{l} \iff l(q^{l+1}-1)>(l+1)(q^l-1) \iff$$

$$\iff lqq^l>lq^l+q^l-1 \iff lq^l(q-1)>q^l-1.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $q>1$, тогда, поделив на $q-1$, получим

$$lq^l>q^{l-1}+q^{l-2}+\ldots+q+1.$$

Справедливость последнего неравенства следует из того, что каждое из l слагаемых правой части меньше, чем q^l.

2) При $0<q<1$ после деления на $q-1$ получим

$$lq^l<q^{l-1}+q^{l-2}+\ldots+q+1.$$

Здесь каждое из l слагаемых правой части больше, чем q^l, поэтому неравенство также справедливо.

3) Отметим, что $q<0$ нам заведомо не подходит, так как знакочередующаяся последовательность не может являться арифметической прогрессией.

Таким образом, мы доказали монотонность последовательности y_l и получили противоречие с нашим предположением.

Ответ. Нет.

Задача 22.

Положительные числа $a_1, a_2, ..., a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Идея. Избавиться от радикалов в знаменателях.

Указание. Домножить числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряжённое знаменателю.

Решение. Если разность прогрессии $d=0$, то равенство очевидно. Рассмотрим $d\neq 0$. Избавимся от иррациональностей в знаменателях левой части неравенства, домножив и разделив дроби на сопряжённые выражения:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+...+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+...+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

Ещё раз домножим числитель и знаменатель последней дроби на сопряжённое выражение:

$$\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{a_n-a_1}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{(n-1)d}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}},$$

что и требовалось доказать.

Задача 23.

Доказать, что если числа $a_1, a_2, ..., a_n$ отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Идея. Представить каждую дробь в виде разности двух дробей и воспользоваться определением арифметической прогрессии.

Указание. Выразить каждое слагаемое $\dfrac{1}{a_ka_{k+1}}$ через разность $\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}$.

Решение. Поскольку $\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}} = \dfrac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \dfrac{d}{a_k a_{k+1}}$, получим:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)\frac{1}{d} + \ldots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{d} =$$

$$= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{d} = \frac{a_n - a_1}{da_1a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n},$$

что и требовалось доказать.

Задача 24.

В арифметической прогрессии $S_m = S_n \quad (m \neq n)$. Доказать,что $S_{m+n} = 0$.

Идея. Использовать формулу суммы n членов арифметической прогрессии.
Указание. Из равенства сумм n и m членов арифметической прогрессии получить следствие, помогающее доказать утверждение.

Решение. Из свойств арифметической прогрессии следует, что

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2}m = \frac{2a_1 + (m-1)d}{2}m,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n,$$

$$S_{m+n} = \frac{a_1 + a_{m+n}}{2}(m+n) = \frac{2a_1 + (m+n-1)d}{2}(m+n).$$

Так как $S_m = S_n$, то

$$(2a_1 + (m-1)d)\,m = (2a_1 + (n-1)d)\,n \iff$$

$$\iff 2a_1(m-n) = n(n-1)d - m(m-1)d \iff$$

$$\iff 2a_1(m-n) = (m-n)(1-m-n)d.$$

Поскольку по условию $m \neq n$, то $2a_1 = (1-m-n)d$; следовательно, $S_{m+n} = 0$.

Задача 25.

Пусть a, b, c — различные простые числа, каждое из которых больше 3. Доказать, что, если они образуют арифметическую прогрессию, то её разность кратна 6.

Идея. Использовать определение арифметической прогрессии и свойства простых чисел.
Указание. На основе определения арифметической прогрессии показать, что её разность чётна.
Указание. Используя свойства простых чисел, доказать, что разность прогрессии кратна трём.

Решение. Пусть a, b, c образуют арифметическую прогрессию с разностью d. В силу свойств арифметической прогрессии $d = b - a = c - b \,\vdots\, 2$, так как a, b, c – нечётные числа. Эти числа можно представить в виде

$$a = 3k_1 + r_1, \quad b = 3k_2 + r_2, \quad c = 3k_3 + r_3, \quad \text{где} \quad r_1, r_2, r_3 \in \{1; 2\}.$$

Подставив данные числа в выражение для d, получим уравнение

$$3(k_2 - k_1) + r_2 - r_1 = 3(k_3 - k_2) + r_3 - r_2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3(2k_2 - k_1 - k_3) = r_3 + r_1 - 2r_2.$$

Значит, число $r_3 + r_1 - 2r_2$ должно делиться на 3. Перебирая все возможные варианты значений r_1, r_2, r_3, получаем, что это возможно только при $r_1 = r_2 = r_3$, но тогда $d = 3(k_2 - k_1)$, то есть $d \,\vdots\, 3$. Следовательно, $d \,\vdots\, 6$, что и требовалось доказать.

9. Использование особенностей условия задачи

9.1. Оптимизация процесса решения, введение функций, искусственное введение параметров, смена ролей параметра и переменной

Задача 1. (М/м-77.4)

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, & (1) \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, & (2) \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. & (3) \end{cases}$$

Идея. Получить следствия. Воспользоваться свойствами квадратного трёхчлена и формулами сокращённого умножения.

Указание. Выделив в каждом из уравнений функцию вида $f(t) = t^2 - 3t + 3$, сделать вывод о положительной определённости переменных.

Указание. Сложить все три исходных уравнения. Воспользоваться формулами сокращённого умножения.

Указание. Для получившегося уравнения

$$(x - 3)^3 + (y - 3)^3 + (z - 3)^3 = 0$$

рассмотреть два случая по x ($x \geq 3$ и $0 < x < 3$) и оценить значения переменных y и z.

Решение. Введём в рассмотрение функцию $f(t)=t^2-3t+3$. В новых обозначениях система принимает вид:

$$\begin{cases} y^3=9f(x), & (4)\\ z^3=9f(y), & (5)\\ x^3=9f(z). & (6)\end{cases}$$

Заметим, что $f(t)>0\ \forall t\in\mathbb{R}$, поскольку $D=9-12<0$. Значит, $y^3>0$, $z^3>0$, $x^3>0$, то есть $y>0$, $z>0$, $x>0$.
Сложим уравнения (1) – (3) и выделим полные кубы разностей:

$$(x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3=0. \qquad (7)$$

Рассмотрим два случая по x ($x\ge 3$ и $0<x<3$).
1) $x\ge 3$. Тогда, с учётом $z>0$, из уравнения (3) получаем:

$$\begin{cases} 9z^2-27z\ge 0,\\ z>0;\end{cases} \iff z\ge 3.$$

Тогда, с учётом $y>0$, из уравнения (2) получаем:

$$\begin{cases} 9y^2-27y\ge 0,\\ y>0;\end{cases} \iff y\ge 3.$$

Таким образом, получили, что если $x\ge 3$, то $y\ge 3$ и $z\ge 3$. Тогда из (7) следует, что $x=y=z=3$.
2) $0<x<3$. Рассуждая аналогично первому случаю, получаем, что $0<x<3$, $0<y<3$, $0<z<3$. Но это противоречит уравнению (7). Значит, в этом случае решений нет.

Ответ. $(3;3;3)$

Задача 2. (Псих-91.5)

При каждом значении параметра $a\ge\dfrac{1}{2\pi}$ найти все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{2x+a}{2x^2+2ax+5a^2/2}\right)=\cos\left(\frac{2x-a}{2x^2-2ax+5a^2/2}\right).$$

Идея. Преобразовав аргументы тригонометрических функций и определив область их изменения, перейти от тригонометрического уравнения к простейшим степенным уравнениям.
Указание. Аргументы тригонометрических функций могут быть представлены в виде $f(t)=\dfrac{t}{t^2+a^2}$ при $t=x+\dfrac{a}{2}$ и $t=x-\dfrac{a}{2}$.
Указание. Используя неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел и условия задачи, найти ограничения на область значений функции $f(t)$: $|f(t)|\le\pi$.
Указание. При решении тригонометрического уравнения вида $\cos\alpha=\cos\beta$, где $\alpha,\beta\in[-\pi;\pi]$, воспользоваться равносильным переходом к совокупности: $\alpha=\beta$ или $\alpha=-\beta$.

Решение. Преобразуем аргументы тригонометрических функций:

$$\frac{2x+a}{2x^2+2ax+5a^2/2} = \frac{x+a/2}{(x+a/2)^2+a^2}; \qquad \frac{2x-a}{2x^2-2ax+5a^2/2} = \frac{x-a/2}{(x-a/2)^2+a^2}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{t}{t^2+a^2}$. В новых обозначениях уравнение принимает вид:

$$\cos\left(f\left(x+\frac{a}{2}\right)\right) = \cos\left(f\left(x-\frac{a}{2}\right)\right).$$

Для функции $f(t)$ при $a \geq \dfrac{1}{2\pi}$ справедливы оценки:

$$|f(t)| = \left|\frac{t}{t^2+a^2}\right| = \frac{1}{a\left|\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\right|} \leq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2} \leq \pi;$$

другими словами, аргументы тригонометрических функций принимают значения из отрезка $[-\pi;\pi]$. В этом случае уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} f\left(x+\frac{a}{2}\right) = f\left(x-\frac{a}{2}\right); \\ f\left(x+\frac{a}{2}\right) = -f\left(x-\frac{a}{2}\right). \end{array}\right.$$

1) Первое уравнение совокупности:

$$\frac{x+\frac{a}{2}}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+a^2} = \frac{x-\frac{a}{2}}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a^2} \iff$$

$$\iff \left(x+\frac{a}{2}\right)\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right) = \left(x-\frac{a}{2}\right)\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right) \iff$$

$$\iff \left(x^2-\frac{a^2}{4}\right)\left(x-\frac{a}{2}-x-\frac{a}{2}\right) = a^2\left(x-\frac{a}{2}-x-\frac{a}{2}\right) \iff a\left(x^2-\frac{a^2}{4}\right) = a^3;$$

поскольку $a \geq \dfrac{1}{2\pi}$, то на a можно сократить:

$$x^2-\frac{a^2}{4} = a^2 \iff x = -\frac{\sqrt{5}a}{2} \quad \text{или} \quad x = \frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

2) Второе уравнение:

$$\frac{x+\frac{a}{2}}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+a^2} = -\frac{x-\frac{a}{2}}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a^2} \iff$$

$$\iff \left(x+\frac{a}{2}\right)\left(\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right) = -\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+a^2\right) \iff$$

$$\iff \left(x^2-\frac{a^2}{4}\right)\left(x-\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}\right) = a^2\left(-x+\frac{a}{2}-x-\frac{a}{2}\right) \iff$$

$$\iff \left(x^2-\frac{a^2}{4}\right)2x = -2xa^2 \iff x\left(x^2+\frac{3a^2}{4}\right) = 0 \iff x = 0.$$

Ответ. $-\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$; 0; $\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$.

Задача 3. (Псих-86.6)

Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x + 3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \le 3$.

Идея. Обозначить исследуемое выражение через параметр и определить, при каком наибольшем значении параметра у неравенства существует решение.
Указание. Ввести параметр $a = x + 3y$; выразить одну из переменных через параметр и вторую переменную и подставить в неравенство.
Указание. Опираясь на свойства квадратичной функции, определить, при каком наибольшем значении параметра неравенство имеет решения.

Решение. Введём обозначение: $a = x + 3y$. Переформулируем условие задачи: требуется найти наибольшее значение параметра a, при котором у неравенства $x^2 + xy + 4y^2 \le 3$ существует решение. Выразим переменную x через параметр и переменную y и подставим в неравенство:

$$(a - 3y)^2 + (a - 3y)y + 4y^2 \le 3 \iff 10y^2 - 5ay + a^2 - 3 \le 0;$$

последнее неравенство является квадратным по переменной y, решения существуют при неотрицательном дискриминанте:

$$D = (5a)^2 - 40(a^2 - 3) = 120 - 15a^2 \ge 0 \quad \iff \quad |a| \le 2\sqrt{2}.$$

Наибольшим значением параметра (то есть наибольшим значением выражения $x + 3y$), при котором неравенство имеет решения, является $a = 2\sqrt{2}$.

Ответ. $2\sqrt{2}$.

Замечание. При поиске наибольшего значения параметра можно воспользоваться методом выделения полного квадрата.

Задача 4. (Хим-91.1)

Найти максимум и минимум функции $f(x) = \dfrac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1}$.

Идея. Рассмотреть значения функции как параметр и определить, при каких наибольшем и наименьшем значениях параметра уравнение будет иметь решение.
Указание. Ввести параметр $a = \dfrac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1}$; перейти к квадратному уравнению относительно новой переменной $t = 3x + 1$ и определить, при каком наибольшем (наименьшем) значении параметра уравнение будет разрешимо.

Решение. Пусть $\dfrac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1} = a$. Переформулируем условие задачи: найти наибольшее и наименьшее значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1} = a$ имеет решение. Введём новую переменную $t = 3x + 1$. Тогда:

$$t = a(t^2 + 1) \quad \iff \quad at^2 - t + a = 0;$$

уравнение имеет решения при неотрицательном дискриминанте:

$$D = 1 - 4a^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a| \leq \frac{1}{2}.$$

Наибольшее значение параметра a равно $\frac{1}{2}$, а наименьшее значение параметра a равно $-\frac{1}{2}$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ равно $\frac{1}{2}$, а наименьшее значение функции $f(x)$ равно $-\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$.

Задача 5. (Псих-99.4)

Найти все значения параметра p, при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;3]$. Определить, при каждом таком p множество значений функции $f(x)$.

Идея. Обозначить значение функции через новый параметр a и определить, при каких значениях параметра p задача имеет решение $\forall a \in (-1;3]$.

Указание. Ввести параметр $a = \dfrac{3x+p}{x^2+5x+7}$; в зависимости от его значений перейти к линейному или квадратному уравнению относительно переменной x.

Указание. Определить, при каких значениях параметра p задача разрешима $\forall a \in (-1;3]$; при решении квадратного неравенства воспользоваться методом парабол.

Решение. Пусть $\dfrac{3x+p}{x^2+5x+7} = a$. Поскольку знаменатель дроби положительно определён $\forall x \in \mathbb{R}$, без дополнительных ограничений перейдём к квадратному уравнению относительно переменной x:

$$3x + p = a(x^2+5x+7) \quad \Longleftrightarrow \quad ax^2 + x(5a-3) + 7a - p = 0.$$

Переформулируем первую часть условия: найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение $ax^2 + x(5a-3) + 7a - p = 0$ имеет решения $\forall a \in (-1;3]$.

1) При $a = 0$ уравнение принимает вид: $3x = -p \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\dfrac{p}{3}$, то есть решение существует $\forall p \in \mathbb{R}$.

2) При $a \neq 0$ имеем квадратное уравнение; оно разрешимо при неотрицательном дискриминанте:

$$D = (5a-3)^2 - 4a(7a-p) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 25a^2 - 30a + 9 - 28a^2 + 4ap \geq 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3a^2 - 2a(15-2p) + 9 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g(a) = 3a^2 + 2a(15-2p) - 9 \leq 0.$$

Множество решений квадратного неравенства $g(a) \le 0$ должно содержать полуинтервал $(-1;3]$; значит,

$$\begin{cases} g(-1) \le 0, \\ g(3) \le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3-2(15-2p)-9 \le 0, \\ 27+6(15-2p)-9 \le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} p \le 9, \\ p \ge 9; \end{cases}$$

то есть $p=9$.

При найденном значении параметра p множество значений функции $f(x)$ (другими словами, множество значений параметра a) определяется из неравенства:

$$g(a) = 3a^2 + 2a(15-18) - 9 \le 0 \iff a^2 - 2a - 3 \le 0 \iff -1 \le a \le 3.$$

Ответ. $p=9$; $[-1;3]$.

Задача 6. (Биол-94.5)

Найти все значения x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

Идея. Поменять ролями параметр и переменную и переформулировать условие задачи для линейной функции.
Указание. В этой задаче x выполняет роль параметра, а a – роль переменной.
Указание. Воспользоваться свойством монотонности линейной функции.

Решение. В этой задаче x выполняет роль параметра, а a – роль переменной. Переформулируем задачу: требуется найти все значения параметра x, при которых неравенство

$$a(-2x^2+13x-13) + (4x^2-27x+33) > 0$$

выполняется для всех значений переменной a из интервала $(1;3)$. Другими словами, прямая $f(a) = a(-2x^2+13x-13) + (4x^2-27x+33)$ должна лежать выше оси абсцисс для $a \in (1;3)$. Учитывая монотонность линейной функции, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} f(1) \ge 0, \\ f(3) \ge 0, \\ f(2) > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -2x^2+13x-13+4x^2-27x+33 \ge 0, \\ 3(-2x^2+13x-13)+4x^2-27x+33 \ge 0, \\ 2(-2x^2+13x-13)+4x^2-27x+33 > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2-7x+10 \ge 0, \\ x^2-6x+3 \le 0, \\ x < 7; \end{cases} \iff \begin{cases} x \le 2 \quad \text{или} \quad x \ge 5, \\ 3-\sqrt{6} \le x \le 3+\sqrt{6}, \\ x < 7; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} 3-\sqrt{6} \le x \le 2; \\ 5 \le x \le 3+\sqrt{6}. \end{array} \right.$$

Замечание. Условие $f(2) > 0$ гарантирует несовпадение прямой $f(a)$ с осью абсцисс.

Ответ. $[3-\sqrt{6};2] \cup [5;3+\sqrt{6}]$.

Задача 7. (ЕГЭ.С)

Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$ выполняется для всех $x \in [1;3]$.

Идея. Решить неравенство относительно a.

Указание. Поменять ролями параметр и переменную; после преобразований решить неравенство методом интервалов.

Решение. Пусть a – переменная, x – параметр. Преобразуем выражения в числителе и знаменателе:

$$\frac{a-\left(\frac{x}{2}-2\right)}{a-\left(-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)} \ge 0.$$

Заметим, что для $x \in [1;3]$ $\dfrac{x}{2}-2 < -\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}$, поэтому решением неравенства являются промежутки:

$$a \le \frac{x}{2}-2 = f(x) \quad \text{и} \quad a > -\frac{x}{3}+\frac{2}{3} = g(x).$$

По условию неравенство должно выполняться для всех $x \in [1;3]$. Следовательно, либо $a \le f(1) = -\dfrac{3}{2}$, поскольку $f(x)$ возрастает; либо $a > g(1) = \dfrac{1}{3}$, так как $g(x)$ убывает.

Ответ. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right] \cup \left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Задача 8. (ВМК-93.6)

Найти все значения параметра a, при которых область определения функции $y = \dfrac{1}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}$ совпадает с областью определения функции $y = \dfrac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \dfrac{\sqrt{2}}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}$.

Идея. Выписав соотношения для области определения каждой функции, переформулировать задачу.

Указание. Сконцентрировать внимание на функции $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; использовать её для исследования области определения второй функции, указанной в условии задачи.

Указание. Показать, что условию задачи удовлетворяют только такие значения параметра, при которых уменьшаемое второй функции определено, то есть уравнение $f(x) = a$ не имеет решений.

Указание. Для преобразования выражений использовать формулы сокращённого умножения, метод дополнительного аргумента, основное тригонометрическое тождество и формулы для тригонометрических функций двойного аргумента.

Р е ш е н и е. Область определения первой функции:

$$3\cos x - 2\cos^3 x \neq \sqrt{2}a;$$

область определения второй функции:

$$\begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x \neq a, \\ 3\cos x - 2\cos^3 x \neq \sqrt{2}a. \end{cases}$$

Области определения совпадают в одном из двух случаев: а) уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = a$ не имеет решений; б) множество решений уравнения $\sin^3 x + \cos^3 x = a$ принадлежит множеству решений уравнения $3\cos x - 2\cos^3 x = \sqrt{2}a$.

а) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

$$|f(x)| \leq |\sin^3 x| + |\cos^3 x| \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

причём $f(0) = 1$; $f(\pi) = -1$; значит, уравнение $f(x) = a$ не имеет решений при $a < -1$ и $a > 1$.

б) Далее будем рассматривать $a \in [-1; 1]$. Используя формулы синуса и косинуса суммы, легко получить:

$$f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\cos x - 2\cos^3 x}{\sqrt{2}};$$

действительно, разложим сумму кубов на множители:

$$f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\cos x\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2x\right) =$$

$$= \frac{\cos x\,(3 - 2\cos^2 x)}{\sqrt{2}} = \frac{3\cos x - 2\cos^3 x}{\sqrt{2}}.$$

Пусть x_0 – корень уравнения $f(x) = a$; значит, он должен быть и корнем уравнения $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a$, то есть $x_0 + \frac{\pi}{4}$ – корень уравнения $f(x) = a$. Тогда и $\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = x_0 + \frac{\pi}{2}$ – корень уравнения $f(x) = a$. Следовательно, $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, то есть

$$\sin^3 x_0 + \cos^3 x_0 = \sin^3\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^3\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) \iff$$

$$\iff \sin^3 x_0 = 0 \iff x_0 = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

при этом $f(x_0) = f(\pi n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда как

$$f\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \neq f(x_0) = (-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Полученное противоречие доказывает, что не существует таких значений параметра, при которых множество решений уравнения $\sin^3 x + \cos^3 x = a$ принадлежит множеству решений уравнения $3\cos x - 2\cos^3 x = \sqrt{2}a$.

О т в е т. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Задача 9. (Экон.М-99.6)

Для каждого значения b найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $b\sin 2y + \log_4 (x\sqrt[8]{1-4x^8}) = b^2$.

Идея. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно параметра, определить условия существования его корней.

Указание. Представить b переменной, x и y – параметрами задачи.

Указание. Сформулировав необходимое и достаточное условие существования корней квадратного уравнения, воспользоваться оценочными неравенствами.

Решение. Уравнение является квадратным относительно параметра:

$$b^2 - b\sin 2y - \log_4 (x\sqrt[8]{1-4x^8}) = 0;$$

необходимое и достаточное условие существования решения – неотрицательность дискриминанта на области допустимых значений:

$$\begin{cases} \sin^2 2y + 4\log_4 (x\sqrt[8]{1-4x^8}) \geq 0, \\ x > 0, \\ 1 - 4x^8 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^2 2y \geq -\log_4 (x^4\sqrt{1-4x^8}), \\ x > 0, \\ |x| < \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы:

$$f(y) = \sin^2 2y \geq -\log_4 (x^4\sqrt{1-4x^8}) = g(x).$$

Для левой части справедливы оценки: $0 \leq f(y) \leq 1$.

Минимальное значение правой части достигается при максимуме подлогарифменной функции. Рассмотрим

$$h(x) = x^4\sqrt{1-4x^8} = \sqrt{x^8(1-4x^8)};$$

подкоренное выражение является квадратичной функцией относительно переменной $t = x^8$; максимальное значение подкоренного выражения достигается при $t = \dfrac{1}{8}$ и равно $\dfrac{1}{4}$. Значит, при $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ $\quad g(x) \geq g\left(\dfrac{1}{\sqrt[8]{8}}\right) = 1$.

Следовательно, неравенство $f(y) \geq g(x)$ имеет решение только при одновременном выполнении двух условий: $g(x) = 1$ и $f(y) = 1$, то есть $x = \dfrac{1}{\sqrt[8]{8}}$ и $\sin^2 2y = 1 \iff |\sin 2y| = 1 \iff y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ или $y = \dfrac{\pi}{4} + \pi m;\quad n, m \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что при найденных значениях переменных дискриминант квадратного уравнения для параметра равен нулю.

Определим соответствующие значения параметра:

1) при $x = \dfrac{1}{\sqrt[8]{8}}$, $y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad b = \dfrac{\sin 2y}{2} = -\dfrac{1}{2}$;

2) при $x = \dfrac{1}{\sqrt[8]{8}}$, $y = \dfrac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ $\quad b = \dfrac{\sin 2y}{2} = \dfrac{1}{2}$.

При остальных значениях параметра решений нет.

Ответ. При $b = -\frac{1}{2}$ решение $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{8}}; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; при $b = \frac{1}{2}$ решение $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{8}}; \frac{\pi}{4} + \pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$; при остальных значениях параметра решений нет.

9.2. Чётность и симметричность по нескольким переменным, исследование единственности решения, необходимые и достаточные условия

Задача 1. (Псих-95.5)

Найти все значения a, при которых неравенство
$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\dfrac{x^2+9}{a+\cos x} - a$ имеет единственное решение.

Идея. Преобразовать неравенство, приведя все слагаемые к общему знаменателю и выделив в числителе полный квадрат; воспользоваться чётностью задачи по переменной.

Указание. Перенести все слагаемые в левую часть, привести выражение к общему знаменателю и выделить в числителе полный квадрат.

Указание. Выписать решение неравенства через равносильную совокупность систем; используя чётность выражений по переменной и требование единственности решения, получить возможные значения параметра.

Указание. Подставив найденные значения параметра в исходное уравнение, отобрать те, которые удовлетворяют условию задачи.

Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть, приведём к общему знаменателю и выделим в числителе полный квадрат:

$$a + \cos x - 2\sqrt{x^2+9} + \frac{x^2+9}{a+\cos x} \le 0 \iff$$

$$\iff \frac{(a+\cos x)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(a+\cos x) + (\sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \le 0 \iff$$

$$\iff \frac{\left(a+\cos x - \sqrt{x^2+9}\right)^2}{a+\cos x} \le 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} a+\cos x - \sqrt{x^2+9} = 0, \\ a+\cos x \ne 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+\cos x - \sqrt{x^2+9} \ne 0, \\ a+\cos x < 0. \end{cases}$$

Все функции чётные по переменной x. Значит, если x_0 – решение, то и $-x_0$ будет решением. Следовательно, требованию единственности удовлетворяет только $x = 0$. Подставим это значение переменной в обе системы для нахождения соответствующих значений параметра:

$$\begin{cases} a+1-3 = 0, \\ a+1 \ne 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+1-3 \ne 0, \\ a+1 < 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = 2, \\ a \neq -1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \neq 2, \\ a < -1. \end{cases}$$

Осталось проверить, действительно ли исходное неравенство при найденных значениях параметра не имеет других решений, кроме $x = 0$.

1) При $a = 2$ получаем:

$$\frac{\left(2 + \cos x - \sqrt{x^2 + 9}\right)^2}{2 + \cos x} \leq 0;$$

знаменатель дроби положителен $\forall x \in \mathbb{R}$. Значит, числитель должен быть равен нулю:

$$2 + \cos x = \sqrt{x^2 + 9}.$$

Заметим, что функция в левой части равенства ограничена сверху:

$$f(x) = 2 + \cos x \leq 3,$$

тогда как функция в правой части ограничена снизу:

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 9} \geq 3.$$

Поэтому равенство возможно только при $f(x) = 3$ и $g(x) = 3$, то есть при $x = 0$ $\Longrightarrow$ решение единственное $\Longrightarrow$ $a = 2$ подходит.

2) При $a < -1$ неравенство

$$\frac{\left(a + \cos x - \sqrt{x^2 + 9}\right)^2}{a + \cos x} \leq 0$$

верно для всех $x \in \mathbb{R}$, поскольку знаменатель дроби отрицателен, а числитель положителен. Поэтому $a < -1$ не подходят.

Ответ. 2.

Задача 2. (Биол-91.5)

Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} z \cos(x - y) + (2 + xy) \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ \left(x + y + a \sin^2 z\right)\left((1 - a)\ln(1 - xy) + 1\right) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Идея. Воспользоваться свойством симметрии задачи относительно двух переменных и чётностью по третьей переменной.

Указание. Преобразовав систему, заметить, что задача обладает симметрией относительно переменных x и y и является чётной по переменной z.

Указание. Упростив систему в соответствии с требованием единственности решения, найти возможные значения параметра.

Указание. Убедиться в том, что при найденном значении параметра исходная система удовлетворяет условию задачи.

Р е ш е н и е. Преобразуем второе уравнение системы:

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = a+1, \\ (x+y+a\sin^2 z)\left((1-a)\ln(1-xy)+1\right) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что данная система симметрична относительно переменных x и y, то есть если тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ является решением задачи, то и $(y_0; x_0; z_0)$ также будет решением. Значит, решение может быть единственным только при условии $x = y$:

$$\begin{cases} (2+x^2)\sin 2x = 0, \\ 2(x-1)^2 + z^2 = a+1, \\ (2x+a\sin^2 z)\big((1-a)\ln(1-x^2)+1\big) = 0. \end{cases}$$

Более того, система является чётной по переменной z, значит, решение будет единственным только при $z = 0$:

$$\begin{cases} (2+x^2)\sin 2x = 0, \\ 2(x-1)^2 = a+1, \\ 2x\big((1-a)\ln(1-x^2)+1\big) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем:

$$\sin 2x = 0 \iff x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая область определения логарифмической функции: $|x| < 1$, оставляем решение $x = 0$. Значение параметра определяется из второго уравнения системы: $a = 1$.

Осталось убедиться в том, что при $a = 1$ исходная система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2, \\ x+y+\sin^2 z = 0. \end{cases}$$

Сложив второе уравнение с удвоенным третьим, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\sin^2 z = 0 \iff x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

Найденные значения переменных обращают все три уравнения системы в тождества. Следовательно, при $a = 1$ задача имеет единственное решение.

О т в е т. 1.

Задача 3. (Фил-92.5)

Найти все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Идея. Провести замену переменных и воспользоваться свойством симметрии задачи относительно новых переменных.

Указание. Сгруппировав слагаемые в каждом из уравнений, перейти к новым переменным; отметить симметрию задачи относительно новых переменных.

Указание. Упростив систему в соответствии с требованием единственности решения, найти возможные значения параметра. Убедиться в том, что при найденных значениях параметра исходная система удовлетворяет условию задачи.

Решение. Сгруппируем слагаемые в каждом уравнении:

$$\begin{cases} b(x^2+2x+1)+y+2b-3=0, \\ b(y^2-6y+9)+x+2b+1=0; \end{cases} \iff \begin{cases} b(x+1)^2+(y-3)+2b=0, \\ b(y-3)^2+(x+1)+2b=0. \end{cases}$$

Введём новые переменные $u=x+1$ и $v=y-3$:

$$\begin{cases} bu^2+v+2b=0, \\ bv^2+u+2b=0. \end{cases}$$

Заметим, что система является симметричной относительно новых переменных u и v. Значит, решение задачи будет единственным только при условии $u=v$: $bu^2+u+2b=0$. Полученное уравнение имеет единственное решение в следующих случаях:

1) если оно линейно, то есть $b=0$; подставим найденное значение параметра в исходную систему и убедимся, что решение единственное:

$$\begin{cases} u=0, \\ v=0; \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} x+1=0, \\ y-3=0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ y=3. \end{array} \right.$$

2) если дискриминант равен нулю:

$D=1-8b^2=0 \iff b=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ или $b=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

а) при $b=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ система принимает вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}u^2+v-\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=0, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}v^2+u-\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=0; \end{cases} \iff \begin{cases} u^2-2\sqrt{2}v+2=0, \\ v^2-2\sqrt{2}u+2=0; \end{cases}$$

сложив уравнения, получаем:

$$(u-\sqrt{2})^2+(v-\sqrt{2})^2=0 \iff \begin{cases} u=\sqrt{2}, \\ v=\sqrt{2}; \end{cases} \text{ то есть } \begin{cases} x=-1+\sqrt{2}, \\ y=3+\sqrt{2}; \end{cases}$$

– единственное решение;

б) при $b = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2}}u^2 + v + \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}v^2 + u + \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 + 2\sqrt{2}v + 2 = 0, \\ v^2 + 2\sqrt{2}u + 2 = 0; \end{cases}$$

складываем:

$$(u+\sqrt{2})^2 + (v+\sqrt{2})^2 = 0 \iff \begin{cases} u = -\sqrt{2}, \\ v = -\sqrt{2}; \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} x = -1-\sqrt{2}, \\ y = 3-\sqrt{2}; \end{cases}$$

единственное решение.

Ответ. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; 0; $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 4. (Биол-95.6)

Найти все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

Идея. После преобразования уравнения воспользоваться оценочными неравенствами и чётностью задачи.
Указание. Выделить в левой части уравнения полный квадрат. Решение уравнения провести методом оценок.
Указание. Воспользоваться чётностью квадратичной функции от модуля переменной и методом парабол.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\left(x^2 - 6|x| - a\right)^2 + 12\left(x^2 - 6|x| - a\right) + 36 = \cos\frac{18\pi}{a} - 1 \iff$$

$$\iff \left(x^2 - 6|x| - a + 6\right)^2 = \cos\frac{18\pi}{a} - 1.$$

Заметим, что выражение в левой части равенства неотрицательно, тогда как функция справа принимает неположительные значения. Следовательно, равенство возможно в единственном случае:

$$\begin{cases} x^2 - 6|x| - a + 6 = 0, \\ \cos\dfrac{18\pi}{a} = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 6|x| - a + 6 = 0, \\ \dfrac{18\pi}{a} = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 6|x| - \dfrac{9}{n} + 6 = 0, \\ a = \dfrac{9}{n}, \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Поскольку задача является чётной по переменной, она имеет два решения только в том случае, если уравнение

$$f(t) = t^2 - 6t - \frac{9}{n} + 6 = 0, \; n \in \mathbb{Z}$$

имеет единственный положительный корень. Такая ситуация будет иметь место в одном из двух случаев:
1) дискриминант равен нулю, абсцисса вершины положительна:

$$\begin{cases} 9 + \dfrac{9}{n} - 6 = 0, \; n \in \mathbb{Z}, \\ 3 > 0; \end{cases} \iff \frac{9}{n} = -3 \iff n = -3;$$

то есть $a = -3$; $x = -3$ или $x = 3$;
2) корни разных знаков:

$$f(0) < 0 \iff -\frac{9}{n} + 6 < 0, \; n \in \mathbb{Z} \iff \frac{2n - 3}{n} < 0 \iff 0 < n < \frac{3}{2}.$$

Поскольку $n \in \mathbb{Z}$, то подходит только $n = 1$, то есть $a = 9$; $x = -3 - 2\sqrt{3}$ или $x = 3 + 2\sqrt{3}$.

Все преобразования были равносильными, поэтому дополнительной проверки найденных значений параметра не требуется.

Ответ. $-3; 9$.

Задача 5. (Хим-84.5)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2| \cdot |x+a-4| + \left(\frac{a^2 - 4a + 3}{|a-2|} - |a-2|\right) \cdot |x-2| + \frac{1}{2}|a-2| \cdot |x-a| \leq 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Идея. После преобразования уравнения и введения новой переменной воспользоваться чётностью задачи.
Указание. Ввести новую переменную, относительно которой выражение чётно.
Указание. Раскрыв модули, провести исследование возможности существования у системы неравенств первой степени единственного решения.

Решение. Пусть $y = x - 2$, $b = a - 2 \neq 0$; в новых обозначениях неравенство принимает вид:

$$|b| \cdot |y+b| + 2\left(\frac{b^2 - 1}{|b|} - |b|\right) \cdot |y| + |b| \cdot |y-b| \leq 2 \iff$$

$$\iff b^2\left|\frac{y}{b} + 1\right| - 2\left|\frac{y}{b}\right| + b^2\left|\frac{y}{b} - 1\right| \leq 2.$$

Функция в левой части неравенства чётная относительно новой переменной $t = \dfrac{y}{b}$, поэтому если t_0 – решение, то и $-t_0$ будет решением. Следовательно, нужно найти такие значения параметра b, при которых у неравенства

$$b^2|t+1| + b^2|t-1| - 2|t| - 2 \le 0$$

существует единственное положительное решение.
1) При $0 < t \le 1$ имеем:

$$2b^2 - 2t - 2 \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \ge b^2 - 1;$$

решение будет единственным, если $b^2 - 1 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |b| = \sqrt{2}$, то есть $a = 2 \pm \sqrt{2}$;
2) При $t > 1$ получаем:

$$2b^2 t - 2t - 2 \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t(b^2 - 1) \le 1.$$

При $b^2 - 1 = 0$ подходят все $t > 1$ и, значит, решение не является единственным. При $b^2 - 1 \ne 0$ решение тоже не может быть единственным, так как пересечение двух открытых полупрямых не может дать одну точку.

Ответ. $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$.

Задача 6. (Хим-02.6)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

Идея. Выполнив замену переменных и преобразовав сумму тригонометрических функций, воспользоваться чётностью задачи относительно новой переменной.
Указание. Преобразовать уравнение, выделив в показателе первого слагаемого полный квадрат и применив к сумме тригонометрических функций метод дополнительного аргумента.
Указание. Воспользовавшись чётностью задачи, сформулировать необходимое условие единственности решения у исходного уравнения; произвести отбор возможных значений параметра.
Указание. Подставив найденные значения параметра в исходное уравнение и применив метод оценок, проверить выполнение условия задачи.

Решение. Преобразуем уравнение, выделив в показателе первого слагаемого полный квадрат и применив к сумме тригонометрических функций метод дополнительного аргумента:

$$2 \cdot 2^{-(x-1)^2} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi(x-1)}{4} - 2 - \sqrt{2} = a^3 - 3a^2 + a.$$

Пусть $t = x - 1$; в новых обозначениях уравнение имеет вид:

$$2 \cdot 2^{-t^2} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi t}{4} - 2 - \sqrt{2} = a^3 - 3a^2 + a.$$

Заметим, что функция в левой части уравнения

$$f(t) = 2 \cdot 2^{-t^2} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi t}{4} - 2 - \sqrt{2}$$

чётная, то есть если t_0 является решением уравнения, то и $-t_0$ также будет решением. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы $t = 0$. Подставим это значение переменной в уравнение и найдём значения параметра, при которых $t = 0$ будет решением:

$$2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = a^3 - 3a^2 + a \iff a^3 - 3a^2 + a = 0 \iff$$

$$\iff a(a^2 - 3a + 1) = 0 \iff a = 0 \quad \text{или} \quad a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Осталось убедиться в том, что при отобранных значениях параметра уравнение действительно имеет единственное решение. Поскольку каждое из найденных значений a обращает правую часть в ноль, необходимо рассмотреть уравнение:

$$2\left(2^{-t^2} - 1\right) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi t}{4} - 1\right) = 0.$$

Оба слагаемых в левой части уравнения неположительны. Поэтому равенство возможно только при одновременном выполнении двух условий:

$$\begin{cases} 2^{-t^2} = 1, \\ \cos\dfrac{\pi t}{4} = 1; \end{cases} \iff t = 0 \ \text{– единственное решение.}$$

Ответ. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$; 0; $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 7. (Экон-90.6)

Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3+2\sqrt{2})^y - 3a = x^2 + 6x + 5, \\ y^2 - (a^2 - 5a + 6)x^2 = 0, \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Идея. Упростить систему, воспользовавшись чётностью задачи по одной из переменных и требованием единственности решения.

Указание. Заметив, что основания степеней являются сопряжёнными радикальными выражениями, установить чётность задачи по переменной y.

Указание. Основываясь на требовании единственности решения, упростить систему и найти все значения параметра, при которых $y = 0$ является решением.

Указание. Подставив найденные значения параметра в исходную систему, проверить единственность решения.

Указание. При решении уравнения, содержащего как показательные, так и квадратичную функции, воспользоваться методом оценок.

Решение. Воспользовавшись равенством $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$, перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3-2\sqrt{2})^{-y} = x^2+6x+5+3a, \\ y^2 = (a^2-5a+6)x^2, \\ -6 \le x \le 0. \end{cases}$$

Система является чётной по переменной y. Значит, если y_0 – решение, то и $-y_0$ также будет решением. Условию единственности решения удовлетворяет только $y=0$. Подставим это значение в систему:

$$\begin{cases} x^2+6x+3a+3=0, \\ (a^2-5a+6)x^2=0, \\ -6 \le x \le 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение.
1) Если $a^2-5a+6=0 \iff a=2$ или $a=3$, то $x \in \mathbb{R}$.

а) При $a=2$ из первого уравнения получаем: $x^2+6x+9=0 \iff x=3$; найденное значение удовлетворяет неравенству, поэтому пара (3;0) – решение. Убедимся, что других решений нет. Для этого рассмотрим исходную систему при $a=2$:

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3-2\sqrt{2})^{-y} = x^2+6x+11, \\ y^2=0, \\ -6 \le x \le 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2+6x+9=0, \\ y=0, \\ -6 \le x \le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=3, \\ y=0. \end{cases}$$

б) При $a=3$ первое уравнение: $x^2+6x+12=0$, $D_1 = 9-12 < 0$ – решений нет.

2) Если $a \ne 2$ и $a \ne 3$, то $x=0$. Из первого уравнения получаем $a=-1$. Подставим найденное значение параметра в исходную систему и убедимся, что решение будет единственным:

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{2})^y + (3-2\sqrt{2})^{-y} = x^2+6x+2, \\ y^2 = 12x^2, \\ -6 \le x \le 0. \end{cases}$$

Заметим, что $f(y) = (3-2\sqrt{2})^y + (3-2\sqrt{2})^{-y} \ge 2$ (сумма двух взаимно обратных положительных чисел), тогда как при $x \in [-6;0]$ $h(x) = x^2+6x+2 \le 2$ (на рассматриваемом отрезке $h(x) \le h(-6) = h(0) = 2$). Равенство возможно только при одновременном выполнении условий: $f(y)=2$ и $h(x)=2$. Значит, из первого уравнения последней системы получаем, что $y=0$ и $x=-6$ или $x=0$. Проверяя найденные пары во втором уравнении и неравенстве, оставляем единственное решение $(0;0)$.

Ответ. $-1; 2$.

Задача 8. (Хим-86.5)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|}, \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Идея. Преобразовав второе уравнение и выполнив замену переменных, воспользоваться симметрией задачи относительно новых переменных.
Указание. Выделить во втором уравнении полные квадраты, произвести замену переменных.
Указание. Отметив симметрию задачи относительно новых переменных, сформулировать необходимые условия существования четырёх различных решений у исходной системы; произвести отбор возможных значений параметра.
Указание. Подставив отобранные значения параметра в исходную систему, проверить выполнение условий задачи.

Решение. Выделим во втором уравнении полные квадраты:

$$\begin{cases} \sqrt{|x-1|}+\sqrt{7|y|}=1, \\ (x-1)^2+(7y)^2=-4a; \end{cases}$$

сделаем замену переменных $u=|x-1|$, $v=7|y|$; в новых обозначениях система имеет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}=1, \\ u^2+v^2=-4a. \end{cases}$$

Заметим, что каждому положительному значению u соответствуют два различных значения переменной x; каждому положительному значению v соответствуют два различных значения переменной y. Значит, исходная система будет иметь ровно четыре различных решения, если система для новых переменных либо (а) имеет единственное решение $(u;v)$, причём $u>0$, $v>0$; либо (б) имеет два решения $(0;v)$ и $(u;0)$, где $u>0$, $v>0$. Рассмотрим оба варианта.

а) Поскольку система для новых переменных симметрична по u и v, необходимым условием единственности её решения является равенство $u=v$. Получаем:

$$\begin{cases} \sqrt{u}=\dfrac{1}{2}, \\ u^2=-2a; \end{cases} \iff \begin{cases} u=\dfrac{1}{4}, \\ a=-\dfrac{1}{32}. \end{cases}$$

Покажем, что при найденном значении параметра система для новых переменных:

$$\begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}=1, \\ u^2+v^2=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

действительно имеет единственное решение. Рассмотрим второе уравнение:

$$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=\frac{1}{8} \quad\Longleftrightarrow\quad \left((\sqrt{u}+\sqrt{v})^2-2\sqrt{u}\sqrt{v}\right)^2-2(\sqrt{uv})^2=\frac{1}{8};$$

воспользуемся равенством $\sqrt{u}+\sqrt{v}=1$ (первое уравнение):

$$(1-2\sqrt{uv})^2-2uv=\frac{1}{8} \quad\Longleftrightarrow\quad 1-4\sqrt{uv}+4uv-2uv=\frac{1}{8} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2uv-4\sqrt{uv}+\frac{7}{8}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{uv}=\dfrac{1}{4}; \\ \sqrt{uv}=\dfrac{7}{4}; \end{array}\right.$$

в первом случае $\begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}=1, \\ \sqrt{uv}=\dfrac{1}{4}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} u=\dfrac{1}{4}, \\ v=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$

во втором случае система $\begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}=1, \\ \sqrt{uv}=\dfrac{7}{4} \end{cases}$ решений не имеет

$\Longrightarrow \quad u=\dfrac{1}{4},\ v=\dfrac{1}{4}$ – единственное решение.

Значит, при $a=-\dfrac{1}{32}$ исходная система имеет ровно четыре различных решения.

б) Полагаем $u=0$: $\begin{cases} \sqrt{v}=1, \\ v^2=-4a; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} v=1, \\ a=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

При $v=0$: $\begin{cases} \sqrt{u}=1, \\ u^2=-4a; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} u=1, \\ a=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$ Подставим найденное значение параметра в систему для новых переменных и убедимся в том, что она имеет только два различных решения $(0;1)$ и $(1;0)$:

$$\begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}=1, \\ u^2+v^2=1; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}=1, \\ 2uv-4\sqrt{uv}=0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \sqrt{u}+\sqrt{v}=1, \\ \sqrt{uv}=0 \quad \text{или} \quad \sqrt{uv}=2; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} u=0,\ v=1; \\ u=1,\ v=0. \end{array}\right.$$

(В равносильных переходах использованы результаты, проведённых в пункте а) преобразований выражения u^2+v^2.) Следовательно, при $a=-\dfrac{1}{4}$ у исходной системы четыре различных решения.

Ответ. $-\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{32}$.

9.3. Редукция задачи и переформулирование условия

Задача 1. (ИСАА-93.6)

Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 + 2|x-a| \geq a^2$ справедливо для всех x.

Идея. Раскрыв модуль и разложив выражения на множители, решить неравенства методом интервалов и произвести отбор тех значений параметра, которые обеспечивают выполнение условий задачи.
Указание. Раскрыть модуль двумя способами; разложить квадратные трёхчлены на множители; решить неравенства методом интервалов.
Указание. Учесть условия раскрытия модуля и требования задачи.

Решение. Раскроем модуль:
1) При $x \geq a$ получаем: $x^2 - a^2 + 2(x-a) \geq 0 \iff (x-a)(x+a+2) \geq 0$. Поскольку данное неравенство должно выполняться для всех $x \geq a$, корни квадратного трёхчлена должны удовлетворять соотношению: $a \geq -a-2 \iff a \geq -1$.
2) При $x \leq a$ получаем: $x^2 - a^2 - 2(x-a) \geq 0 \iff (x-a)(x+a-2) \geq 0$. Данное неравенство выполняется для всех $x \leq a$ тогда и только тогда, когда $a \leq -a+2 \iff a \leq 1$.

Следовательно, исходное неравенство справедливо для всех x, если $a \in [-1;1]$.

Ответ. $[-1;1]$.

Задача 2. (М/м-86.5)

Найти все значения a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

Идея. Выразив переменную y из первого уравнения и подставив во второе, найти зависимость переменной x от параметров и третьей переменной и определить условия существования решения для любого значения параметра b.
Указание. Воспользоваться методом подстановки, выразив y из первого уравнения и подставив во второе.
Указание. Из полученного уравнения найти зависимость переменной x от параметров и третьей переменной; определить значения параметра a, при которых уравнение имеет решение для $\forall b \in \mathbb{R}$.

Решение. Выразим переменную y из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$\begin{cases} y = bx - az^2, \\ (b-6)x + 2b(bx - az^2) - 4z = 4. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение: $(2b^2 + b - 6)x = 2abz^2 + 4z + 4$.

1) Если $2b^2+b-6\neq 0$, то есть $\left[\begin{array}{l} b\neq -2; \\ b\neq \dfrac{3}{2}; \end{array}\right.$ то $\begin{cases} y=bx-az^2, \\ x=\dfrac{2abz^2+4z+4}{2b^2+b-6}. \end{cases}$ Значит, для любого действительного значения переменной z и любого значения параметра a из второго уравнения последней системы однозначно определяется соответствующее значение переменной x, а из первого уравнения находится значение $y\ \Rightarrow\ \forall b\in\mathbb{R},\ b\neq -2,\ b\neq \dfrac{3}{2}$ решение существует.

2) При $b=-2$ решение также должно существовать. Подставим это значение в исходную систему и определим те значения второго параметра a, при которых система будет разрешима: $\begin{cases} y=-2x-az^2, \\ az^2-z-1=0; \end{cases}$ второе уравнение – квадратное по переменной z, корни существуют при $D=1+4a\geq 0\iff a\geq -\dfrac{1}{4}$. Каждый корень z_0 второго уравнения определяет вид линейной зависимости между двумя другими переменными, то есть решение исходной системы при $b=-2$ может быть представлено в виде: $(x;-2x-az_0^2;z_0)$, где $x\in\mathbb{R}$.

3) Решение должно существовать и при $b=\dfrac{3}{2}$:
$\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x-az^2, \\ 3az^2+4z+4=0; \end{cases}$ значит, $D_1=4-12a\geq 0\iff a\leq\dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $\forall b\in\mathbb{R}$ исходная система имеет решение при $a\in\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$.

Ответ. $\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$.

Задача 3. (Геол-98(1).8)

При каких a для любого $b\geq 2$ неравенство

$$(b-1)x+2\sqrt{1-(b-1)^{-2}}<\left(\frac{a+1}{b-1}-b+1\right)\frac{1}{x}$$

выполняется для всех $x<0$?

Идея. Преобразовав выражение, свести задачу к проблеме существования решения квадратного неравенства.

Указание. Перенести все слагаемые в левую часть, привести к общему знаменателю и учесть ограничения на переменную.

Указание. При исследовании квадратного неравенства воспользоваться методом парабол.

Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть неравенства и умножим обе части неравенства на $(b-1)x<0$:

$$(b-1)^2x^2+2x\sqrt{(b-1)^2-1}+(b-1)^2-(a+1)>0.$$

Обозначим $c = (b-1)^2 \geq 1$. Тогда получаем: $cx^2 + 2x\sqrt{c-1} + c - a - 1 > 0$.

1) При $c = 1$ получаем: $x^2 > a$. Поскольку данное неравенство должно выполняться для любого $x < 0$, параметр должен удовлетворять условию: $a \leq 0$.

2) При $c > 1$ абсцисса вершины параболы отрицательна: $x_в = -\dfrac{\sqrt{c-1}}{c}$, поэтому условие задачи равносильно требованию: $f(x_в) > 0$, то есть

$$\frac{c-1}{c} - 2\frac{c-1}{c} + c - a - 1 > 0 \iff \frac{c^2-2c+1}{c} > a \iff \frac{(c-1)^2}{c} > a;$$

поскольку функция в левой части неравенства при $c > 1$ может принимать только положительные значения, то значения параметра, найденные в предыдущем пункте ($a \leq 0$), нас устраивают.

Ответ. $(-\infty; 0]$.

Задача 4. (Почв-00.7)

Найдите все значения параметра a, при которых при любых значениях параметра b уравнение $|x-2| + b|2x+1| = a$ имеет хотя бы одно решение.

Идея. Изучив область значений функции в левой части равенства, отобрать значение параметра a, удовлетворяющее условию задачи.

Указание. Используя неравенства $|a|+|b| \geq |a-b|$ и $|a|-|b| \leq |a-b|$, провести исследование области значений суммы модулей при двух различных "удобных" значениях параметра b.

Указание. Исходя из требования существования решения при любых значениях параметра b, отобрать значение параметра a; убедиться в том, что условия задачи выполнены.

Решение. Проведём исследование области значений выражения в левой части равенства при двух специальных значениях параметра b.

1) При $b = \dfrac{1}{2}$ получаем: $|x-2| + 2b\left|x+\dfrac{1}{2}\right| = |x-2| + \left|x+\dfrac{1}{2}\right| \geq \left|x-2-x-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$; использовано соотношение: $|a|+|b| \geq |a-b|$.

2) При $b = -\dfrac{1}{2}$ получаем: $|x-2| + 2b\left|x+\dfrac{1}{2}\right| = |x-2| - \left|x+\dfrac{1}{2}\right| \leq \left|x-2-x-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$; использовано соотношение: $|a|-|b| \leq |a-b|$.

Значит, единственным возможным значением параметра a, при котором при любых значениях параметра b уравнение

$$|x-2| + 2b\left|x+\frac{1}{2}\right| = a$$

имеет хотя бы одно решение, является $a = \dfrac{5}{2}$. Подставив найденное значение в исходное уравнение, получим: $2|x-2| + 2b|2x+1| = 5$. Раскрывая модули на разных промежутках, убеждаемся в том, то данное уравнение имеет решение при любых значениях параметра b. Действительно,

1) при $x \le -\frac{1}{2}$ получаем: $4 - 2x - 4bx - 2b = 5 \iff (2x+1)(2b+1) = 0$;
при $b = -\frac{1}{2}$ равенство выполняется $\forall x \in \mathbb{R} \implies$ все $x \le -\frac{1}{2}$ – решения;
при остальных значениях параметра b решение единственное: $x = -\frac{1}{2}$;

2) рассмотрения уравнения на остальных промежутках не требуется, так из первого случая следует, что при любых значениях параметра b есть решения.

Ответ. $\frac{5}{2}$.

Задача 5. (Геол-79.6)

Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств $abx \ge 4a + 7b + x$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ следует неравенство $ab \ge 5$.

Идея. Выписав неравенства для параметра a, переформулировать задачу и решить методом парабол.
Указание. Обратить внимание на положительную определённость переменной и параметров; выписать неравенства для параметра a и переформулировать задачу.
Указание. Полученное квадратное неравенство решить методом парабол.

Решение. Прежде всего отметим, что условию задачи могут удовлетворять только $x > 0$, так как при $x = 0$ из условий $abx \ge 4a + 7b + x$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ следует, что $a = 0$ и $b = 0$, а при этих значениях $ab = 0 < 5$. По аналогичным соображениям параметры a и b не могут быть равны нулю и при $x \ne 0$. Итак, далее рассматриваем только положительно определённые x, a и b.

Сгруппируем слагаемые: $a(bx - 4) \ge 7b + x$; поскольку $a > 0$ и $7b + x > 0$, должно выполняться неравенство: $bx - 4 > 0$, то есть $b > \frac{4}{x}$.

Задачу можно переформулировать так: требуется найти такие значения переменной x, при которых для любого $b > \frac{4}{x}$ из неравенства $a \ge \frac{7b+x}{bx-4}$ следует неравенство $a \ge \frac{5}{b}$, что возможно в том и только в том случае, когда $\frac{7b+x}{bx-4} \ge \frac{5}{b}$.

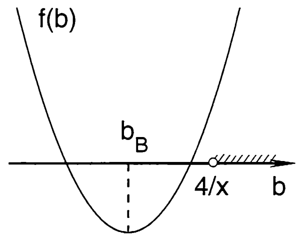
Последнее неравенство можно преобразовать:

$$f(b) = 7b^2 - 4bx + 20 \ge 0.$$

1) Если $D_1 = 4x^2 - 140 \le 0 \iff |x| \le \sqrt{35}$, то неравенство верно $\forall b \in \mathbb{R}$, в том числе и для $b > \frac{4}{x}$;

2) Если $D_1 > 0 \iff |x| > \sqrt{35}$, то неравенство выполняется для любого $b > \frac{4}{x}$,

если $\begin{cases} b_{\text{в}} = \dfrac{2x}{7} < \dfrac{4}{x}, \\ f\left(\dfrac{4}{x}\right) \ge 0; \end{cases}$ из первого неравенства получаем: $x^2 < 14$, что противоречит условию $|x| > \sqrt{35} \implies$ в данном случае решений нет.



Ответ. $(0; \sqrt{35}]$.

Задача 6. (Георг-85.5)

Найти все значения параметра a, удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, для каждого из которых выражение $1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$ принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

Идея. Выделив в подкоренном выражении полные квадраты, переформулировать задачу.

Указание. Выделить в подкоренном выражении полные квадраты функций переменных; переформулировать задачу, исходя из требований единственности.

Указание. Учесть область допустимых значений для арифметического квадратного корня.

Решение. Наименьшее значение суммы $1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$ соответствует минимуму подкоренного выражения $f(x,y) = x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10$. Преобразуем выражение, выделив полные квадраты при $-1 < a < 1$:

$f(x,y) = (x - ay)^2 + (1 - a^2)y^2 - 6y + 10 =$

$$= (x - ay)^2 + \left(y\sqrt{1 - a^2} - \frac{3}{\sqrt{1 - a^2}}\right)^2 - \frac{9}{1 - a^2} + 10.$$

Минимум подкоренного выражения достигается при единственной паре $y = \dfrac{3}{1 - a^2}$ и $x = \dfrac{3a}{1 - a^2}$ и равен $10 - \dfrac{9}{1 - a^2}$. Так как $f(x,y)$ стоит под корнем, то она должна быть неотрицательна. Тогда с учётом условия $-1 < a < 1$ получаем:

$$10 - \frac{9}{1 - a^2} \ge 0 \iff a^2 \le \frac{1}{10} \iff |a| \le \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ. $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{10}}; \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right]$.

Задача 7. (ВМК-90.6)

Найти все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b неравенство
$\left|\log_6 \dfrac{x}{36} + \left(\dfrac{10a+3b+31}{5}\right)x^2 - 9b^2 - 9b - 1\right| \le \log_6 \dfrac{36}{x} + \left(\dfrac{10a+3b+41}{5}\right)x^2 -$
$-(6b+2)x + 9b^2 + 15b + 3$ имеет хотя бы одно решение.

Идея. Раскрыв модуль через геометрический смысл, переформулировать задачу и решить систему неравенств методом оценок.

Указание. При решении исходного неравенства воспользоваться подходом, основанным на геометрической интерпретации модуля; выписать равносильную систему неравенств и для неё переформулировать условие задачи.

Указание. Показать, что одно из неравенств системы выполняется для любых допустимых значений параметров и переменной.

Указание. При исследовании второго неравенства воспользоваться результатом, полученным для некоторого фиксированного значения параметра b, методом оценок и свойствами квадратичной функции.

Решение. Область допустимых значений переменной: $x > 0$. Раскрывая модуль через геометрический смысл

$$|u| \le v \iff \begin{cases} u \le v, \\ u \ge -v; \end{cases} \iff \begin{cases} u - v \le 0, \\ u + v \ge 0; \end{cases}$$

получаем для нашего неравенства:

$$\begin{cases} 2\log_6 \dfrac{x}{36} + (6b+2)x - 18b^2 - 24b - 4 - 2x^2 \le 0, \\ \dfrac{2(10a+3b+36)}{5}x^2 - (6b+2)x + 6b + 2 \ge 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \log_6 x - x^2 + (3b+1)x - (3b+2)^2 \le 0, \\ \dfrac{10a+3b+36}{5}x^2 - (3b+1)x + 3b + 1 \ge 0. \end{cases}$$

Требуется найти все значения параметра a, при которых данная система имеет хотя бы одно решение для любых значений параметра b.

Прежде всего отметим, что первое неравенство системы выполняется $\forall x > 0$. Действительно, поскольку $\log_6 x < x$, справедливы оценки:

$$\log_6 x - x^2 + (3b+1)x - (3b+2)^2 < x - x^2 + (3b+1)x - (3b+2)^2 =$$

$$= -x^2 + (3b+2)x - (3b+2)^2 \le 0,$$

так как $D = (3b+2)^2 - 4(3b+2)^2 = -3(3b+2)^2 \le 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим второе неравенство системы. Оно должно выполняться при любом значении параметра b. Значит, должно быть хотя бы одно решение и при $b = -\dfrac{1}{3}$. В этом случае на области допустимых значений:

$$(2a+7)x^2 \ge 0 \iff a \ge -\frac{7}{2}.$$

Докажем, что для $a \ge -\frac{7}{2}$ второе неравенство имеет решение не только при $b = -\frac{1}{3}$, но и $\forall b \in \mathbb{R}$. Поскольку $(2a+7)x^2 \ge 0$, справедлива оценка:

$$(2a+7)x^2 + \frac{3b+1}{5}x^2 - (3b+1)x + 3b + 1 \ge \frac{3b+1}{5}x^2 - (3b+1)x + 3b + 1 =$$

$$= \frac{3b+1}{5}\left(x^2 - 5x + 5\right) = \frac{3b+1}{5}\left(x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = f(x).$$

Легко убедиться в том, что независимо от значения параметра b и знака первого сомножителя неравенство $f(x) \ge 0$ имеет по крайней мере два решения $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ и $x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, что гарантирует существование решения и второго неравенства системы.

Ответ. $\left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Задача 8. (ВМК-98.5)

Найти все значения параметра a, при которых существуют (x, y), удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2-3y, y+2) \le 5, \\ \sqrt{a^2 + \frac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2}\arcsin x(\pi + 2\arcsin x)} \ge y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

Идея. Разрешив первое неравенство относительно переменной y и переформулировав задачу для второго неравенства системы, воспользоваться свойствами квадратичных функций.

Указание. Решить первое неравенство системы, перейдя к равносильной совокупности условий.

Указание. Отметив, что левая и правая части второго неравенства зависят от разных переменных, переформулировать задачу.

Указание. При поиске наибольшего или наименьшего значения квадратичной функции на отрезке воспользоваться свойством монотонности.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы:

$$\max(2-3y, y+2) \le 5 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2-3y \le 5, \\ y+2 \le 5; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \le y \le 3.$$

Перейдём ко второму неравенству. Заметим, что его можно записать в виде:

$$\sqrt{f(x)} \ge g(y),$$

где $f(x) = a^2 + \frac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1-x^2} - 16 - \frac{2}{\pi^2}\arcsin x(\pi + 2\arcsin x)$, $g(y) = y^2 + 2ay + 7$. Поскольку требуется найти такие значения параметра a, при которых существует хотя бы одно решение системы, то задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения параметра a, при которых:

$$\max\sqrt{f(x)} \geq \min g(y),$$

где $x \in [-1;1]$ (область допустимых значений аргумента арккосинуса), $y \in [-1;3]$.

Максимум величины $\sqrt{f(x)}$ определяется максимумом функции $f(x) \geq 0$. Используя равенство $\arccos\sqrt{1-x^2} = |\arcsin x|$ и произведя замену переменной $t = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, получим функцию:

$$h(t) = a^2 + \frac{6}{\pi}|t| - 16 - \frac{2}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2}t^2.$$

Поиск её максимального значения на отрезке $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ не сложен:

$$h(t) = \left[\begin{array}{lll} h_1(t) = a^2 - 16 + \frac{4}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2}t^2 & \text{при} & t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]; \\ h_2(t) = a^2 - 16 - \frac{8}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2}t^2 & \text{при} & t \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]; \end{array}\right.$$

1) при $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\max h_1(t) = h_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 - 16 + 2 - 1 = a^2 - 15$;

2) при $t \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ $\max h_2(t) = h_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a^2 - 16 + 4 - 1 = a^2 - 13$;

значит, для $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\max h(t) = a^2 - 13$.

Минимальное значение функции $g(y)$ при $y \in [-1;3]$ зависит от расположения вершины параболы:

1) если $y_в < -1 \iff a > 1$, то $\min g(y) = g(-1) = 8 - 2a$; неравенство принимает вид: $\sqrt{a^2-13} \geq 8 - 2a \iff a \in \left[\frac{11}{3};+\infty\right)$;

2) если $-1 \leq y_в \leq 3 \iff -3 \leq a \leq 1$, но при таких значениях параметра подкоренное выражение всегда меньше нуля $\Longrightarrow$ решений нет;

3) если $y_в > 3 \iff a < -3$, то $\min g(y) = g(3) = 6a + 16$; неравенство: $\sqrt{a^2-13} \geq 6a + 16 \iff a \leq -\sqrt{13}$.

Ответ. $(-\infty;-\sqrt{13}] \bigcup \left[\frac{11}{3};+\infty\right)$.

9.4. Смешанные задачи

Задача 1. (Геол-95.8)

Найти все значения a, при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Идея. Сделав замену переменных и воспользовавшись свойствами квадратичной функции, переформулировать условие задачи.
Указание. Выполнив замену переменных, перейти к квадратному неравенству.
Указание. Вычислить абсциссу вершины параболы, отыскать ближайшее целое и выписать неравенство для параметра, обеспечивающее выполнение условия задачи.

Решение. Неравенство является квадратным относительно функции $y = 3^x$:

$$g(y) = y^2 - 20y - a < 0.$$

Заметим, что положение вершины параболы не зависит от параметра: $y_в = 10$, то есть $x_в = \log_3 10$. Ближайшее целое число к абсциссе вершины $\log_3 10$ есть $x = 2$, поскольку $2 < \log_3 10 < 3$ и $\log_3 10 - 2 < 3 - \log_3 10$. При $x = 2$ $y = 9$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют только те значения параметра, при которых:

$$g(9) \geq 0 \iff 81 - 180 - a \geq 0 \iff a \leq -99.$$

Ответ. $(-\infty; -99]$.

Задача 2. (Хим-96(1).5)

Решить систему $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5x+5} \geq 2, \\ x^2 + 6x + 5 \leq 0. \end{cases}$

Идея. Сделав замену переменных, перейти к следствию, устанавливающему равенство новых переменных.
Указание. Сделать замену переменных: $y = \sqrt{x+2} \geq 0$, $z = \sqrt{x^2+5x+5} \geq 0$. После преобразований выделить полный квадрат.
Указание. Вывести следствие (равенство новых переменных); воспользоваться им, вернувшись к исходной системе.

Решение. Сделаем замену переменных: $y = \sqrt{x+2} \geq 0$, $z = \sqrt{x^2+5x+5} \geq 0$. Тогда:

$$\begin{cases} y + z \geq 2, \\ y^2 + z^2 - 2 \leq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} y + z \geq 2, \\ -2y^2 - 2z^2 \geq 4; \end{cases}$$

возведём первое неравенство последней системы в квадрат и сложим с первым:

$$-y^2 + 2yz - z^2 \geq 0 \iff (y - z)^2 \leq 0 \iff y = z;$$

воспользуемся полученным следствием:

$$\begin{cases} y + z \geq 2, \\ y^2 + z^2 - 2 \leq 0, \\ y = z; \end{cases} \iff \begin{cases} y \geq 1, \\ y^2 \leq 1; \\ y = z; \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1, \\ z = 1; \end{cases}$$

значит,

$$\begin{cases} x + 2 = 1, \\ x^2 + 5x + 5 = 1; \end{cases} \iff x = -1.$$

Ответ. -1.

Задача 3. (Экон-98.7)

Найти все значения a, при которых уравнения
$x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0$ и $x^3 - ax^2 - 10a^2x + 10a^3 - 1 = 0$
имеют хотя бы один общий корень.

Идея. Переформулировав задачу, разложить линейную комбинацию уравнений на множители и определить нужные значения параметра.
Указание. Переформулировать задачу, объединив уравнения в систему.
Указание. Сложить первое уравнение системы с удвоенным вторым и разложить получившееся уравнение на множители; определить возможные значения параметра; проверить их в исходных уравнениях.

Решение. Переформулируем задачу: требуется найти все значения параметра, при которых система

$$\begin{cases} x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 + 2 = 0, \\ x^3 - ax^2 - 10a^2x + 10a^3 - 1 = 0; \end{cases}$$

имеет решение. Сложим почленно первое уравнение с удвоенным вторым и разложим полученный многочлен третьей степени на множители:

$$x^3 - 7a^2x + 6a^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - a)(x - 2a)(x + 3a) = 0;$$

осталось определить значения параметра, при которых корни последнего уравнения являются решениями системы:

1) подставим $x = a$ в первое уравнение системы:
$a^3 + 2a^3 - a^3 - 2a^3 + 2 = 0$ – нет решений;

2) подставим $x = 2a$ в первое уравнение:
$$8a^3 + 8a^3 - 2a^3 - 2a^3 + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^3 = -\frac{1}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad a = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}};$$

3) подставим $x = -3a$ в первое уравнение:
$$-27a^3 + 18a^3 + 3a^3 - 2a^3 + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a^3 = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Ответ. $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Задача 4. (Фил-80.5)

Найти все значения a из промежутка $[1; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ принимает наибольшее значение.

Идея. Выразив из уравнения параметр через переменную и удовлетворив условию на параметр, найти максимальный корень и соответствующее ему значение параметра.

Указание. Выразить из уравнения параметр через переменную, переформулировать ограничения на параметр.
Указание. Определить все значения переменной, при которых уравнение имеет решение для $a \geq 1$; отобрать максимальный корень и найти из уравнения соответствующее значение параметра.

Решение. Поскольку условие задачи содержит ограничения для параметра, перепишем уравнение в виде: $a(2x+1) = -x^2 + 6x + 13$.

1) При $x = -\dfrac{1}{2}$ уравнение решений не имеет;

2) При $x \neq -\dfrac{1}{2}$ получаем: $a = \dfrac{-x^2+6x+13}{2x+1}$. Найдём все значения переменной, при которых выполняется условие задачи $a \geq 1$:

$$\frac{-x^2+6x+13}{2x+1} \geq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-4x-12}{2x+1} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty; -2] \cup \left(-\frac{1}{2}; 6\right].$$

Наибольшее значение $x = 6$. Найдём значения параметра, при которых $x = 6$ является корнем исходного уравнения:

$$a \cdot (2 \cdot 6 + 1) = -36 + 36 + 13 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1.$$

Ответ. 1.

Задача 5. (Псих-88.6)

Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leq \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

Идея. Воспользовавшись неравенством для суммы двух взаимно обратных положительных чисел, переформулировать задачу.
Указание. Разложив выражение в левой части на множители и воспользовавшись неравенством для суммы двух взаимно обратных положительных чисел, переформулировать задачу.
Указание. При поиске наибольшего возможного значения параметра использовать оценочные неравенства.
Указание. Убедиться в том, что при наибольшем из найденных значений параметра решение неравенства существует.

Решение. Область допустимых значений аргумента: $a \geq 0$.

При $a = 0$ неравенство преобразуется в тождество, решением является любое значение переменной из области допустимых значений переменной: $x \neq 1$.

При $a > 0$ разложим выражение в левой части на множители:

$$a\left(\sqrt{a}(x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{a}(x-1)^2}\right) \leq \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right| \quad \Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad \sqrt{a}(x-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{a}(x-1)^2} \le \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|.$$

В левой части неравенства стоит сумма двух взаимно обратных положительных чисел, поэтому выражение слева принимает значения, не меньшие двух. Значит, необходимым условием существования решения является:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right| \ge 2 \quad \iff \quad \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right| \ge \sqrt[4]{a} \quad \iff \quad a \le \frac{1}{16}\sin^4\frac{\pi}{2}x.$$

Наибольшее возможное значение параметра есть $a = 1/16$. Убедимся в том, что в этом случае существуют решения исходного неравенства:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{4}{(x-1)^2} \le 2\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right| \quad \iff \quad \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} = 1, \\ \left|\sin\dfrac{\pi}{2}x\right| = 1; \end{cases} \quad \iff \quad x = 3.$$

Ответ. $\dfrac{1}{16}$.

Задача 6. (Псих-92.4)

Найти все значения параметров u и v, при которых существуют два различных корня уравнения $x(x^2+x-8) = u$, являющихся одновременно корнями уравнения $x(x^2-6) = v$.

Идея. Решить задачу методом неопределённых коэффициентов.

Указание. Представив многочлены третьей степени в виде произведения линейных сомножителей с учётом требований задачи, сопоставить коэффициенты и найти нужные значения параметров.

Решение. Прежде всего отметим, что если уравнение третьей степени имеет два различных действительных корня, то существует и третий. Поэтому с учётом требований задачи уравнения можно представить в следующем виде:

- первое уравнение: $(x-x_1)(x^2+px+q) = 0$;
- второе уравнение: $(x-x_2)(x^2+px+q) = 0$.

Раскрыв скобки, приведём подобные слагаемые и сопоставим коэффициенты (то есть применим метод неопределённых коэффициентов):

- первое уравнение: $x^3 + (p-x_1)x^2 + (q-px_1)x - qx_1 = 0$;

$$\begin{cases} p - x_1 = 1, \\ q - px_1 = -8, \\ -qx_1 = -u; \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = p-1, \\ px_1 = q+8, \\ qx_1 = u; \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = p-1, \\ p(p-1) = q+8, \\ qx_1 = u; \end{cases}$$

- второе уравнение: $x^3 + (p - x_2)x^2 + (q - px_2)x - qx_2 = 0$;

$$\begin{cases} p - x_2 = 0, \\ q - px_2 = -6, \\ -qx_2 = -v; \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = p, \\ px_2 = q + 6, \\ qx_2 = v; \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = p, \\ p^2 = q + 6, \\ qx_2 = v. \end{cases}$$

Из вторых уравнений систем получаем: $p = -2$, $q = -2$. Значит, $x_1 = -3$, $x_2 = -2$; $u = 6$, $v = 4$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения параметров удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $u = 6$, $v = 4$.

Задача 7. (М/м-99(2).3)

Найти все x, при которых хотя бы одно из двух выражений

$|x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x$ и $|x|(|x|-|x-8|)+24$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

Идея. Переформулировав задачу, решить неравенство с двумя модулями стандартным способом.

Указание. Требование задачи равносильно неположительности суммы двух выражений.

Указание. Ввести новую переменную и перейти к неравенству с двумя модулями, которое решить стандартным способом.

Решение. Обозначим:

$f(x) = |x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x, \quad g(x) = |x|(|x|-|x-8|)+24.$

Требование задачи, очевидно, равносильно тому, что сумма двух данных выражений неположительна. Значит,

$$|x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x+|x|(|x|-|x-8|)+24 \le 0 \iff$$

$$|x^2-8x+15|-(x^2-6x+9)-6x+x^2-|x^2-8x|+24 \le 0;$$

пусть $y = x^2 - 8x + 15$, тогда

$$|y| - |y-15| + 15 \le 0 \iff y \le 0.$$

Следовательно,

$$x^2 - 8x + 15 \le 0 \iff 3 \le x \le 5.$$

Ответ. $[3;5]$.

Задача 8. (Псих-98.6)

Найти все целые значения параметров a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right) - b\cdot 2^{\sin \pi bx} - \left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right) + b\cdot 2^{\sin \pi bx}\right| = 2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

Идея. Раскрыть модуль и отобрать целочисленные значения параметров, при которых полученные уравнения будут иметь решения.
Указание. Заметить, что условию задачи отвечают только положительные значения параметра b. Раскрыть модуль, отобрать целочисленные значения параметра a, при которых полученное уравнение имеет решения.
Указание. Выписать решения в общем виде; провести отбор тех значений параметра b, при которых существует не менее 10 различных решений.

Решение. Область допустимых значений переменной и параметров: $b \neq 0$, $b^2 - x^2 \geq 0$.

Рассмотрим различные возможные значения параметра b.

1) При $b < 0$ каждое слагаемое подмодульной функции неположительно; получаем:

$$\arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} = ab;$$

данное уравнение может иметь не более двух корней при любом значении параметра a.

2) При $b > 0$ каждое слагаемое подмодульной функции неотрицательно; имеем:

$$-b \cdot 2^{\sin \pi bx} = ab \iff 2^{\sin \pi bx} = -a.$$

Функция в левой части уравнения принимает значения из отрезка $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Значит, при $a < -2$ и $a > -\frac{1}{2}$ уравнение решений не имеет. При остальных значениях параметра $a \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ корни есть. Поскольку по условию $a \in \mathbb{Z}$, переберём возможные варианты.

а) Если $a = -2$, получаем:

$$2^{\sin \pi bx} = 2 \iff \sin \pi bx = 1 \iff x = \frac{1}{2b} + \frac{2n}{b},\ n \in \mathbb{Z};$$

учтём область допустимых значений: $-b \leq x \leq b$, то есть

$$-b \leq \frac{1}{2b} + \frac{2n}{b} \leq b \iff -2b^2 \leq 4n + 1 \leq 2b^2;$$

данному неравенству при $b \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет не менее 10 различных значений n тогда и только тогда, когда $b \geq 4$.

б) Если $a = -1$, получаем:

$$2^{\sin \pi bx} = 1 \iff \sin \pi bx = 0 \iff x = \frac{m}{b},\ m \in \mathbb{Z};$$

учтём область допустимых значений:

$$-b \leq \frac{m}{b} \leq b \iff -b^2 \leq m \leq b^2;$$

значит, $b \geq 3$.

Ответ. $a = -2; b = 4; 5; 6; \ldots;\ a = -1; b = 3; 4; 5\ldots$

Задача 9. (Фил-82.5)

Найти все значения параметра γ, при каждом из которых минимально количество пар (n, m) целых чисел n и m, удовлетворяющих условию $\gamma^3|n| \le \sqrt{2}(\gamma^2 - m^2)$.

Идея. Определив, что условию задачи удовлетворяют только положительные значения параметра, организовать перебор по числу целочисленных решений.

Указание. Рассмотрев неравенство при различных значениях параметра, определить, что конечное число целочисленных решений может существовать только при $\gamma > 0$.

Указание. Переформулировать задачу для положительных значений параметра; отметить чётность по каждой из переменных.

Указание. Организовать перебор по числу целочисленных решений.

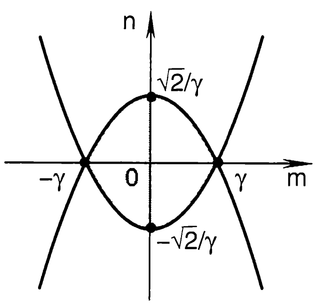
Решение. Рассмотрим возможные значения параметра γ:

1) при $\gamma < 0$ получаем: $|n| \ge \dfrac{\sqrt{2}}{\gamma} - \dfrac{\sqrt{2}m^2}{\gamma^3}$. При любом фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}$ и любом $\gamma < 0$ данное неравенство имеет бесконечно много целочисленных решений. Значит, $\gamma < 0$ не подходят;

2) при $\gamma = 0$ получаем: $m = 0$, n – любое целое $\Longrightarrow$ решений бесконечно много. Поэтому $\gamma = 0$ тоже не подходит;

3) при $\gamma > 0$ получаем: $|n| \le \dfrac{\sqrt{2}}{\gamma} - \dfrac{\sqrt{2}m^2}{\gamma^3}$. Данное неравенство имеет конечное число целочисленных решений.

Значит, далее рассматриваем только $\gamma > 0$. Множество решений неравенства $|n| \le \dfrac{\sqrt{2}}{\gamma} - \dfrac{\sqrt{2}m^2}{\gamma^3}$ на плоскости переменных изображено на рисунке.



Отметим, что пара $(0; 0)$ будет решением для любого $\gamma > 0$. Проверим, существуют ли такие значения параметра, при которых целочисленное решение неравенства будет единственным:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\gamma} < 1, \\ \gamma < 1, \\ \gamma > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma > \sqrt{2}, \\ \gamma < 1, \\ \gamma > 0; \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{решений нет;}$$

значит, единственного целочисленного решения быть не может.

Далее организуем перебор по возможному количеству целочисленных решений. Заметим, что неравенство является чётным по переменным m и n, то есть если пара $(m_0; n_0)$ является решением, то и пары $(m_0; -n_0)$, $(-m_0; n_0)$, $(-m_0; -n_0)$ также будут решениями. Следовательно, целочисленных решений будет не меньше трёх. Три решения возможны в одном из двух случаев:

1) это решения $(0;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$; при этом пары $m=0$, $|n|=2$; $|m|=1, n=0$ и $|m|=1$, $|n|=1$ не должны быть решениями; для определения соответствующих значений параметра удобно воспользоваться исходным неравенством:

$$\begin{cases} \gamma^3 \le \sqrt{2}\gamma^2, \\ 2\gamma^3 > \sqrt{2}\gamma^2, \\ 0 > \sqrt{2}(\gamma^2-1), \\ \gamma^3 > \sqrt{2}(\gamma^2-1), \\ \gamma > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma \le \sqrt{2}, \\ \gamma > \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \gamma < 1, \\ \gamma^3 + \sqrt{2}(1-\gamma^2) > 0, \\ \gamma > 0; \end{cases} \iff \gamma \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right);$$

заметим, что $\gamma^3 + \sqrt{2}(1-\gamma^2) > 0$ для всех $\gamma \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$;

2) это могут быть и решения $(0;0)$, $(1;0)$, $(-1;0)$; при этом пары $|m|=2$, $n=0$; $m=0$, $|n|=1$ и $|m|=1$, $|n|=1$ не должны быть решениями; определим соответствующие значения параметра:

$$\begin{cases} 0 \le \sqrt{2}(\gamma^2-1), \\ 0 > \sqrt{2}(\gamma^2-4), \\ \gamma^3 > \sqrt{2}\gamma^2, \\ \gamma^3 > \sqrt{2}(\gamma^2-1), \\ \gamma > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma \ge 1, \\ \gamma < 2, \\ \gamma > \sqrt{2}, \\ \gamma^3 - \sqrt{2}\gamma^2 + \sqrt{2} > 0, \\ \gamma > 0; \end{cases} \iff \gamma \in \left(\sqrt{2}; 2\right).$$

заметим, что $\gamma^3 - \sqrt{2}\gamma^2 + \sqrt{2} = \gamma^2(\gamma - \sqrt{2}) + \sqrt{2} > 0$ для всех $\gamma \in \left(\sqrt{2}; 2\right)$;

Ответ. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \cup \left(\sqrt{2}; 2\right)$.

Ответы

1.1.

7. $n = 5k + 2,\ k = 0; 1; 2; \ldots$
11. Нет.
14. $n = 6l + 1,\ n = 6l + 2,\ l \in \mathbb{N}$.
17. $n = 33m,\ m \in \mathbb{N}$.

1.2.

1. $(1; k),\ k \in \mathbb{Z};\ (l; 1),\ l \in \mathbb{Z}$.
2. $(0; 0),\ (-1; 0)$.
3. Решений нет.
7. $(0; 0)$.
8. $(1; 2),\ (2; 1)$.
9. $(0; -1; 0),\ (6; -1; 0),\ (0; 1; 0),\ (6; 1; 0)$.
10. $(0; 0)$.
11. $(0; 0),\ (2; 2)$.
12. $(1; 2; 2),\ (2; 2; 1),\ (2; 1; 2)$.
13. $(2; 1)$.
14. $(0; \pm 2),\ (3; \pm 5),\ (4; \pm 7)$.
15. $(1; 1),\ (2; 3)$.
16. $(2; 3; 1),\ (3; 2; 1),\ (1; 2; 3),$ $(1; 3; 2),\ (2; 1; 3),\ (3; 1; 2)$.
17. $(0; 0; 0)$.

1.3.

1. 3.
3. $-1;\ 0$.
11. Да.
13. $n = 5p + 1,\ p \in \mathbb{Z}$.
15. $n = 3k,\ n = 3k + 1,\ k \in N$.
17. Нет.
18. $(0; 0)$.

1.4.

3. Нет.
4. $p = -2,\ q = -2$.
5. Нет.
6. Девятки.
7. $x = y = 0$.
8. Да.
13. 9.
14. 2.

1.5.

1. $10^{\log_9 3} > 7^{\log_4 2}$.
2. $\log_4 7 > \log_{1/3} 2$.
3. $\log_{11} 12 > \log_{12} 13$.
4. $\log_2 \pi + \log_\pi 2 > 2$.
5. $\log_2 5 > \log_3 5$.
6. $\log_2 3 > \log_3 2$.
7. $\log_{11} 119 < \log_{15} 227$.
8. $4^{\sqrt{\log_4 5}} = 5^{\sqrt{\log_5 4}}$.
9. $3^{40} > 4^{30}$.
10. $\sqrt[9]{9!} > \sqrt[8]{8!}$.
11. $\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \sin 5 > 0$.
12. $\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1 > \dfrac{1}{2}$.
13. $\lg(\operatorname{arctg} 2) > 0$.
14. $\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{8}$.
15. $\sin 3 > \sin 3^\circ$.
16. $\sin\dfrac{\pi}{7} < \sqrt{\dfrac{2}{7}} < \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$.
17. $\log_2 3 > \log_5 8$.
18. $\log_3 7 > \log_7 27$.
19. $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.
20. $\sin 31^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$.
21. $\operatorname{tg} 55^\circ > 1{,}4$.
22. $10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}$.
23. $\sqrt[3]{40} + 1 < \sqrt[3]{88}$.
24. $\log_2 14 < \sqrt{15}$.
25. $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$.
26. Первое число больше.

2.1.

3. 0.
4. 6.
5. $-\dfrac{\pi}{7}$.
6. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

7. $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
8. $\dfrac{12}{37}$.
9. 7.
10. 15.
11. 1.
12. $\dfrac{2+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.
13. $-\dfrac{12+5\sqrt{3}}{26}$.
14. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
15. $\sqrt{\dfrac{3}{11}}$.
16. $4\pi - 10$.
17. $14 - 4\pi$.
19. x.
20. $\dfrac{2b}{a}$.

2.2.

2. $\dfrac{\pi}{4} < \arcsin\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3}$.
3. $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{10}$; 0; $\operatorname{ctg}\dfrac{9\pi}{10}$.
4. $\pm\cos\dfrac{\pi}{18}$; $\pm\cos\dfrac{5\pi}{18}$.
5. $\operatorname{arctg} 3^{\frac{1}{\pi}} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
6. 0.
7. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
8. $[1; +\infty)$.
9. $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
10. $\pm\dfrac{\pi}{14}$.
11. $\dfrac{\pi}{16}$; $\dfrac{3\pi}{16}$.
12. При $k = 1$; $\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi - \pi\sqrt{7}}{4}; \cos\dfrac{\pi + \pi\sqrt{7}}{4}\right)$.
13. $\left[\dfrac{-5-2\sqrt{3}}{26}; 0\right]$.
14. $[-3; -2) \cup \{1\}$.

2.3.

1. $(-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{R}$.
3. $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
4. $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.
5. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \pi + 2\pi m,\ n, m \in \mathbb{Z}$.
6. $\left[-\dfrac{\pi}{4} - \pi n; \dfrac{\pi}{4} - \pi n\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{4}; \infty\right), n \in \mathbb{N}$.
7. $\mathbb{R}$.
8. $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$.
9. $\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6}; \pi\right]$.
10. $\left(-\dfrac{7\pi}{12}, -\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \dfrac{\pi}{12}\right)$.
11. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
12. $-\dfrac{\pi}{3}$.
13. $\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \ \dfrac{17\pi}{12} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
14. $\left(0; \dfrac{\pi}{8}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{8}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{8}\right)$.

2.4.

1. $|x| > 1,\ \ x \neq \dfrac{\pi k}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.
2. $\dfrac{\pi}{4} + \pi k \le x < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $\sqrt{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.
3. $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
4. $\left[\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$; $n \in \mathbb{Z}$.
5. $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \operatorname{arctg} 2 + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
6. $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right)$.
7. $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

8. $[0,6;1]$.

9. $\left[\frac{1}{2};\frac{120}{169}\right]$.

10. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2};\ n,\ m\in\mathbb{Z}$.

11. $\pi+\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

12. $\frac{\pi}{12}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{12}+2\pi m;\quad k,m\in\mathbb{Z}$.

13. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.

14. $-\frac{12}{5}\le a\le 0$.

15. $[-13;-4\pi)\bigcup\left(-4\pi;-\frac{11\pi}{3}\right)\bigcup$
$\left(-\frac{7\pi}{3};-2\pi\right)\bigcup\left(-2\pi;-\frac{5\pi}{3}\right)\bigcup$
$\bigcup\left(-\frac{\pi}{3};-1\right]$.

16. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right]\bigcup\left\{\frac{3}{2}\right\}\bigcup$
$\bigcup\left[\frac{2\pi}{3}+\pi m;\frac{3\pi}{4}+\pi m\right)$;
$n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}_0$.

16. $(2;\ -1),\ \left(\frac{12}{7};\ -\frac{1}{7}\right)$.

17. $(-1;\ 1;\ -2),(-1;\ 1;\ 2)$.

18. Решений нет.

19. $(-1;-1;-1)$.

20. $(2;\ 1)$.

21. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

22. $x\in\mathbb{R}$.

23. $x\in\left[3;\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};+\infty\right)$

24. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+l_1);\right.$
$\left.-\frac{\pi}{3}+\pi(k_1-l_1);2\pi k_1\right)$,
$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(k_2+l_2);\right.$
$\left.\frac{\pi}{3}+\pi(k_2-l_2);2\pi k_2\right)$,
$\left(\frac{2}{3}\pi+\pi(m_1+n_1);\right.$
$\left.\frac{\pi}{3}+\pi(m_1-n_1);\pi+2\pi m_1\right)$,
$\left(\frac{\pi}{3}+\pi(m_2+n_2);\right.$
$\left.\frac{2\pi}{3}+\pi(m_2-n_2);\pi+2\pi m_2\right)$;
$n_1,n_2,l_1,l_2,m_1,m_2,k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

25. $(-2;\ 2),(2;\ -2),\ (2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$,
$(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

3.1.

1. $(0,1;\ 0,01),\ (100;\ 10)$.
2. $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$.
3. $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.
4. $(-1;\ 1)$.
5. $(-2;\ -2)$.
6. $[-2;-1)\cup[0;1]$.
7. $\left(\frac{3}{4};7\right]$.
8. $(9;\ 1)$.
9. $\left\{-5;\ -\frac{4}{5};\ 2\right\}$.
10. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.
11. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.
12. 2.
13. $(2-\sqrt{2};\ 1]\cup[3;\ 2+\sqrt{2})$.
14. $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.
15. $(0;\ \pm1)$.

3.2.

1. $\left(\frac{3}{7};\ \frac{11}{7}\right)$.
2. $(-3;-2)\cup\{-1\}\cup(0;1)$.
3. $(-4;\ -2),\ (0;\ -2)$.
4. -1.
5. $-4\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}$.
6. $(x+4-\sqrt{6})(x+4+\sqrt{6})(x+2)(x+6)$.
7. $1\pm\sqrt{3},\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
8. $(1;2;3),\ (-1;-2;-3)$.
9. $(1;3),\ (3;1)$.
10. $(3+\sqrt{10};\ -3+\sqrt{10})$,
$(3-\sqrt{10};\ -3-\sqrt{10}),\ (3;\ 2),\ (-2;\ -3)$.
11. $(2;1),\ (-2;-1),\ \left(\frac{7}{2\sqrt{2}};-\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$,
$\left(-\frac{7}{2\sqrt{2}};\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$.

12. $\left(-\infty;\ -1-\sqrt{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}+1}\right)\cup$
$\cup\left(-1+\sqrt{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}+1};\ +\infty\right)$.

13. $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

14. $(-\infty;-\sqrt{5}-2)\cup(-\sqrt{5}+2;0)\cup$
$\cup(0;\sqrt{5}-2)\cup(\sqrt{5}+2;+\infty)$.

3.3.

1. 50.
2. -34.
3. $-5;\ 5$.
4. $-4;\ 1$.
5. $1/3$.
6. $\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{25}\right)$, $\left(\dfrac{1}{25};\dfrac{1}{9}\right)$.
7. $[5;10]$.
8. $(-\infty;\ -1]\cup\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\cup[0;\ +\infty)$.
9. $\{-3\}\cup(1;\ +\infty)$.
10. $\{0\}\cup(16;\ +\infty)$.
11. $\left(-\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{8}\right)$.
12. $x=1-\sqrt{(a-1)^2+4}$ и
$x=1+\sqrt{(a+2)^2+4}$ при $a<-2$;
$x=1-\sqrt{(a-1)^2+4}$ и
$x=1-\sqrt{(a+2)^2+4}$ при
$-2\le a<-1/2$;
$x=-3/2$ при $a=-1/2$;
$x=1-\sqrt{(a-1)^2+4}$ и
$x=1-\sqrt{(a+2)^2+4}$ при
$-1/2<a\le 1$;
$x=1+\sqrt{(a-1)^2+4}$ и
$x=1-\sqrt{(a+2)^2+4}$ при $a>1$;
при $a=-1/2$ уравнение имеет только один корень.
13. $\left[\dfrac{27-4\sqrt{66}}{9};\ \dfrac{8-\sqrt{85}}{3}\right]\cup$
$\cup\left[\dfrac{17+\sqrt{349}}{6};\ \dfrac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.
14. $(\sqrt[3]{4};\ 9)$.
15. $(1;\ 1)$, $\left(\dfrac{5}{2};\ -2\right)$.
16. $(15;\ 10)$, $(10;\ 15)$.
17. $(-\infty;\ -2)\cup(0;\ +\infty)$.
18. $\dfrac{5}{3};\ \dfrac{5}{4}$.

3.4.

1. $0;\ 1$.
2. $10;\ 10^{-\frac{5}{4}}$.
3. $1;\ 4$.
4. $\pm\sqrt{-\log_2\dfrac{6-\sqrt{26}}{2}}$; в другом виде
$\pm\sqrt{\log_2\dfrac{6+\sqrt{26}}{5}}$.
5. $-1\pm\sqrt{2}$.
6. $-1;\ \dfrac{2}{3}$.
7. $3;\ 81$.
8. 2^{-8}, 2^{27}.
9. $\left(\dfrac{2}{3};\ 1\right)\cup(1;\ 2]$.
10. $-\dfrac{1}{4}$.
11. $\left(-1;\ \dfrac{1}{3}\right]\cup\left[1;\ \dfrac{7}{3}\right)$.
12. $[-1;\ 1)\cup(1;\ 3]$.
13. $[1;\ 5)\cup(10;\ +\infty)$.
14. $[-\log_3 2;\ 0)\cup\left(\dfrac{1}{2}\log_3 2;\ 1\right]$.
15. $(0;3]$.
16. $\dfrac{3}{2};\ \dfrac{36}{25}$.
17. $(5;\ 0)$, $\left(\dfrac{1}{5};\ 2\right)$.
18. $(-\infty;\ 0)\cup(\log_3 2;\ 1)$.
19. $(3;\ -2)$.
20. $\left(\log_2(\sqrt{6}-2);\log_3\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}\right)$.
21. $(5;\ 2)$, $\left(\dfrac{93}{2};\ \dfrac{33}{2}\right)$.
22. ± 1.

3.5.

1. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

2. $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. $(-1)^n \arcsin \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n$, $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.
4. $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
5. $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $\dfrac{\pi k}{2}$; $n, k \in \mathbb{Z}$.
6. 3 корня.
7. $x = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$; $y = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$; $z = \dfrac{9}{\sqrt{13}}$; $v = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$.
8. $(\sqrt{\pi};\ \pm\sqrt{\pi})$, $\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{7\pi}}{2}\right)$.
9. Нет решений.

4.1.

1. $\dfrac{5}{7}$.
2. В 2 раза.
3. $\dfrac{18}{29}$.
4. 2,1 кг.
5. 45 минут.
6. 48 минут.
7. В 2 раза.
8. 28 млн.т.

4.2.

1. 8 книг.
2. 3.
3. $[15, +\infty)$.
4. 6 насосов; нет.
5. 36.
6. 40 минут и 1 час соответственно.
7. 50 км/ч.

4.3.

1. 1 набор за 4 рубля и 16 наборов по 6 рублей.
2. 11000 тыс.р. и 12600 тыс.р.
3. 10500 тыс.р. и 12600 тыс.р.
4. 10 человек.
5. 8, 56, 392.
6. 432 человека.
7. 20 рейсов.
8. При шести членах; -66.
9. 300 или 600 шт.
10. 156 домов.

5.1.

1. $[1; 3]$.
2. $-\dfrac{1}{2}$.
3. $c > 0$.
4. $q \leq 0$.
5. $(p^2 + 2q)^2 - 2q^2$.
6. $y^2 + \left(p^3 - p^2 - 3pq + 2q\right) y - \left(p^2 - 2q\right)\left(p^3 - 3pq\right) = 0$.
7. Минус.
8. $(-\infty; 20]$.
9. 0; 1.
10. $(3 - 2\sqrt{3}; 2\sqrt{15} - 6)$.
11. $\pm\sqrt{3}$.
12. $\{0\} \cup [3; +\infty)$;
    если $m = 0$, то $x = 0$;
    если $m = 3$, то $x = \dfrac{9}{2} > 0$;
    если $m > 3$, то два положительных корня;
    если $0 \neq m < 3$, то нет решений.
13. $\{0\} \cup (2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5})$.
14. $1 - \sqrt{2}$; $5 + \sqrt{10}$.

5.2.

1. $\left(\dfrac{16}{17}; 2\right)$.
2. $(-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$.
3. $\left(-\dfrac{16}{7}; -1\right)$.
5. $(-\infty; 20]$.
6. -3.
7. -8.
8. $[-3; 3]$.
9. $\{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

10. $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right) \bigcup \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.
11. $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$.
12. $\left(0; \frac{1}{8}\right)$.
13. $(-\infty; -3) \cup (1; 6)$.
14. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$.
15. 1) $\left(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}\right)$; 2) $\frac{7}{3}$.
16. $(-\sqrt[3]{36}; -3] \cup \left(0; \frac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)$.
17. $[2; 4) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup \left\{\frac{5}{3}\right\}$.
18. $(-6; 7)$.

5.3.

1. -3.
2. -5.
3. 1.
4. $p = 3$.
7. Прямая $q = -ap - a^2$.
9. $-\frac{82}{9}$.
10. $(-\infty; -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.
11. 2; A.
12. $(-\infty; -2-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.
13. $[2; +\infty)$.
14. $\left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.
15. Если $k = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; если $k = 0$, то $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; если $k = 1$, то $x = \pm \arccos\frac{\sqrt{7}-1}{2} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.
16. 1.
17. $k \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
18. $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) \bigcup \left(\frac{3}{4}; \frac{33}{32}\right]$.
19. $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.

6.1.

1. πn, $n \in \mathbb{Z}$.
2. ± 2; 0.
3. 1.
4. 2.
5. 2.
6. $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$; $\pm\frac{2\pi}{3} - 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.
7. Нечётная.
10. $\frac{\pi}{2}$.
11. 2π.

6.2.

1. $(-\infty; -2]$.
2. $[-1; +\infty)$.
3. $[0; 3]$.
4. $\left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$.
5. $(1; 8]$.
6. $[-3; 0]$.
7. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
8. $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. $1 - 2\pi$.
10.
11. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
12. $(-\infty; 0)$.
13. $\frac{2}{3}$.
14. 7.
15. 3.
16. $-1; 3$.
17. $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.
18. $1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.
19. $\left(2\pi - \frac{1}{8}; +\infty\right)$.

6.3.

1. Нет.
2. $f(x) = -x^2 - 4x + c,\ c \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{3}{4x} - \dfrac{x^2}{4}$.
4. $f(x) = \dfrac{5}{8x^2} - \dfrac{x^3}{8}$.
5. 99 решений; $x_n = \dfrac{n}{99}$, $n = 0, 1, 2, \ldots 98$.
6. $[2; +\infty)$.
7. $0;\ \dfrac{1}{3};\ \dfrac{2}{3}$.
8. $\dfrac{3}{7}$.
9. -2.
10. 25.
11. 9, 2.
12. 42.
13. Три корня.
14. Пять корней.
15. Два нуля.
16. Два нуля.
17. $f(x) = -\log_3\left(\dfrac{-x}{3}\right)$ при $x < 0$.
    Корни уравнения $-\dfrac{1}{9}$; 81.
18. $1 + 8n,\ 7 + 8k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.
19. $-\dfrac{1}{2} + 8k,\ k \in \mathbb{Z}$.
20. $[3\sqrt{2}; 6]$.
21. 1.
22. -1.

6.4.

1. $4;\ \dfrac{19}{4}$.
2. $2;\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.
3. При $a = -2$ $x \in \left\{2;\ \dfrac{6}{5};\ \dfrac{10}{3}\right\}$;
   при $a = -\dfrac{1}{2}$ $x \in \left\{-\dfrac{1}{5};\ 0;\ \dfrac{1}{3}\right\}$.
4. $[1; 3]$.
5. $[2; 3) \cup (3; 4]$.
6. $\left(\dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}; \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}\right)$.
7. $a = 4; b \in \left(-3 - \sqrt{45}; 3 - \sqrt{45}\right) \cup$
   $\cup \left(\sqrt{45} - 3; \sqrt{45} + 3\right)$.
8. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.
9. $\pm\sqrt{2}$.
10. $\left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
11. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
12. $[0; 1) \cup (1; 2] \cup \{3\}$.
13. $0;\ \dfrac{9 + \sqrt{81 + 12\pi}}{2}$.
14. $\pm\dfrac{1}{6};\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.
15. 27.
16. -112.
17. $[1;\ 1,5] \cup [2,5;\ 3]$.

7.1.

1. Решений нет.
2. $-1; 2$.
3. 3.
4. $y_{min} = 0,\ y_{max} = 1$.
5. $y_{min} = \dfrac{2}{3},\ y_{max} = 2$.
6. $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$.
7. $y_{min} = 1,\ y_{max} = \sqrt{2}$.
8. $(0;\ 1),\ (1;\ 0)$.
9. $(0;\ 0)$.
10. Решений нет.
11. 8.
12. 0; 1.
13. $(4; -3; 0),\ (2; -1; 2)$.
14. 4,25.
15. $(1; -1)$.

7.2.

1. $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 1\right),\ \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; -1\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
2. 3.

3. -1; -2.
4. $(-2;\pi k)$, $\left(2;\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
5. $\pi/4$.
6. $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
7. $(0;1)$.
8. $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ 1\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
9. $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.
10. Решений нет.
11. Решений нет.
12. $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
13. 0.
14. $(-2;-4)$, $(-1;-3)$.
15. $-\dfrac{5\pi}{12}$; $-\dfrac{\pi}{12}$.
16. $\dfrac{\pi}{2}+2\pi\cdot(2k-1)$, $k\in\mathbb{Z}$.
17. $a=4l-1$, $l\in\mathbb{Z}$.
18. $0,99$.
19. $-\dfrac{\pi}{12}$; $\dfrac{23\pi}{12}$.
20. πn, $n\in\mathbb{Z}$.
21. $\left(1;-\dfrac{\pi}{2}\right)$.
22. $\left(\dfrac{3}{82};+\infty\right)$.
23. $(-1;2)$, $(-1;-2)$.
24. $(1;256,5;128),(-1;-256,5;-128)$.
25. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.
26. $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

7.3.

1. Решений нет.
2. 0.
3. $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\cup(2;+\infty)$.
4. $x\in(0;1)\cup\{2\}$ при $\alpha=\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $x\in(0;1)$ при остальных α.
5.
6. -1.
7. $\left[1;\dfrac{\pi}{3}\right]$.
8. Решений нет.
9. 2.
10. $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ 0{,}1\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.
11. $(3;+\infty)$.
12. $(-2;1)$.
13. При $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ $x=\dfrac{\sqrt{3}-5}{2}$; при $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ $x=\dfrac{-\sqrt{3}-5}{2}$.
14. 1.
15. $-\dfrac{3}{4}$.
16. $(-\infty;+\infty)$.
17. 0.
18. При $a=\dfrac{1}{3}$ $x=1$, при остальных значениях a решений нет.
19. $(-1;-3)$, $(3;-3)$.
20. 2.
21. При $a\neq 0$ $x=0$; при $a=0$ $x=0$ и $x=-1$.
22. 2.
23. $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
24. 5.

8.1.

14. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
17. Не имеет.
18. Да.

8.3.

7. $2^{x-1}+2^{y-1}\geq\sqrt{2^{x+y}}$.

9.1.

1. $(3;3;3)$
2. $-\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$; 0; $\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$.
3. $2\sqrt{2}$.
4. $\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{1}{2}$.
5. $p=9$; $[-1;3]$.
6. $[3-\sqrt{6};2]\cup[5;3+\sqrt{6}]$.

7. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \bigcup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
8. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
9. При $b = -\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{8}}; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;
при $b = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{8}}; \frac{\pi}{4} + \pi m\right)$, $m \in \mathbb{Z}$;
при остальных значениях параметра решений нет.

4. 1.
5. $\frac{1}{16}$.
6. $u = 6$, $v = 4$.
7. $[3; 5]$.
8. $a = -2$; $b = 4; 5; 6; \ldots$;
$a = -1$; $b = 3; 4; 5\ldots$
9. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right) \bigcup \left(\sqrt{2}; 2\right)$.

9.2.

1. 2.
2. 1.
3. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 0; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
4. $-3; 9$.
5. $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$.
6. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; 0; $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.
7. $-1; 2$.
8. $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{32}$.

9.3.

1. $[-1; 1]$.
2. $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.
3. $(-\infty; 0]$.
4. $\frac{5}{2}$.
5. $(0; \sqrt{35}]$.
6. $\left[-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$.
7. $\left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$.
8. $(-\infty; -\sqrt{13}] \bigcup \left[\frac{11}{3}; +\infty\right)$.

9.4.

1. $(-\infty; -99]$.
2. -1.
3. $-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Литература

1. *Золотарёва Н. Д., Попов Ю. А., Семендяева Н. Л., Федотов М. В.* Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз) – М.: Фойлис, 2010. – 568 с.

2. *Федотов М. В., Разгулин А. В.* Алгебра. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 260 с.

3. *Федотов М. В., Хайлов Е. Н.* Задачи устного экзамена по математике.– М.: МАКС Пресс, 2002. – 144 с.

4. Математика. Задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова с ответами и решениями (1999-2004 гг.) *Сост. Е. А. Григорьев.* – М.: Издательство УНЦ ДО, 2005. – 399 с.

5. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2000-2002, 2003, 2004 гг.). – М.: Механико-математический факультет МГУ.

6. *Глазков Ю. А., Варшавский И. К., Гаиашвили М. Я.* Математика. Единый государственный экзамен. Решение задач группы В. – М.: Изд-во "Экзамен", 2009. – 382 с.

7. *Сергеев И. Н.* Математика. Единый государственный экзамен. Задания типа С. – М.: Изд-во "Экзамен", 2009. – 318 с.

8. *Денищева Л. О., Бойченко Е. М., Глазков Ю. А. и др.* Единый государственный экзамен 2003-2004: Контрольные измерительные материалы: Математика. – М.: Просвещение, 2003. – 191 с.

9. *Денищева Л. О., Рязановский А. Р., Семенов П. В., Сергеев И. Н.* ЕГЭ 2008. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов. – М.: Эксмо, 2008. – 240 с.

10. *Галеев Э. М.* Подготовка к ЕГЭ по математике. Задания типа В и С. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 96 с.

Учебное издание

ЗОЛОТАРЁВА Наталья Дмитриевна, ПОПОВ Юрий Александрович,
САЗОНОВ Василий Викторович, СЕМЕНДЯЕВА Наталья Леонидовна,
ФЕДОТОВ Михаил Валентинович

АЛГЕБРА. Углубленный курс с решениями и указаниями

Под редакцией М.В. Федотова

Подписано в печать 18.10.2010. Формат 70×90 $^1/_{16}$.
Бумага офс. № 1. Гарнитура Таймс.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 34,0 Тираж 1500 экз.
Заказ 1665. Изд. № 9310.
Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета. 125009,
Москва, ул. Б. Никитская, 5/7. Тел.: 629-50-91.
Факс: 697-66-71. Тел.: 939-34-93 (отдел реализации).
E-mail: secretary-msu-press@yandex.ru
Сайт Издательства МГУ: www.msu.ru/depts/MSUPubl2005
Интернет-магазин: http://msupublishing.ru

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6

АЛГЕБРА

ISBN 978-5-211-05950-4

9785211 059504