ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов,
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

БАЗОВЫЙ КУРС
с решениями и указаниями

ЕГЭ
ОЛИМПИАДЫ
ЭКЗАМЕНЫ В ВУЗ

АЛГЕБРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов,
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

АЛГЕБРА

БАЗОВЫЙ КУРС
с решениями и указаниями

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова

Электронное издание

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-3029-4

Настоящее пособие составлено на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова и задач единого государственного экзамена преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 568 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-9963-1941-1.

ISBN 978-5-9963-3029-4

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии и физике. По каждому предмету вышли два пособия: базовый курс и углубленный курс, содержащий сложные задачи единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М.В. Ломоносова). Базовый курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач первой части ЕГЭ и некоторых задач второй части, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Углубленный курс содержит задачи, научившись решать которые, вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

В серии «ВМК МГУ – школе» вышли два пособия по информатике. Первое рекомендуется в качестве пособия при подготовке к ЕГЭ по информатике и ИКТ. Разделы этого пособия соответствуют темам, включенным в ЕГЭ. Второе – пособие по программированию – поможет вам подготовиться к экзамену по информатике, научиться решать задачи по программированию на языке Паскаль.

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Директор учебного центра
факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
М. В. Федотов

Предисловие

«Базовый курс» рассчитан на закрепление школьного материала по алгебре и приобретение навыков, необходимых для решения задач ЕГЭ и стандартных задач вступительных экзаменов в вуз.

Предлагаемый курс изначально не предполагает знаний, выходящих за рамки базовой школьной программы. Все приёмы, необходимые для решения задач, демонстрируются по ходу изучения материала.

Задачи в разделах расположены по принципу «*от простого – к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если Вам не удалось получить правильный ответ или у Вас возникли сомнения в правильности Вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

При составлении пособия авторы придерживались спиралевидного принципа подачи материала: сначала предлагаются простые задачи по всем основным разделам математики и методы их решения, затем рассматриваются более сложные задачи, для решения которых требуются более сложные методы или их комбинации. Это позволяет не только закрепить, но и осмыслить на новом уровне уже пройденный материал. Такая схема обучения с успехом применяется на очных и дистанционных подготовительных курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения.

Запись (У) после номера задачи означает, что задача предлагалась на устном экзамене по математике в МГУ.

Для задач письменного экзамена сначала идет сокращенное название факультета, затем – год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2 – это значит, что эта задача была на весенней олимпиаде факультета; на мехмате и физфаке весной проходили две олимпиады; на ВМК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения – одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМК-98.3) означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМК, третьим номером в варианте, а (М/м-97(2).1) означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико-математического факультета первым номером в варианте.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге

М/м – механико-математический факультет,
ВМК – факультет Вычислительной математики и кибернетики (.Б – отделение бакалавров по прикладной математике, .И – отделение бакалавров по информационным технологиям),
Физ – физический факультет,
Хим – химический факультет,

ВКНМ – Высший колледж наук о материалах,
ФНМ – факультет наук о материалах (до 2000 года – ВКНМ)
Биол – биологический факультет,
Почв – факультет почвоведения,
Геол – геологический факультет (.ОГ – отделение общей геологии),
Геогр – географический факультет,
Экон – экономический факультет (.М – отделение менеджмента, .К – отделение экономической кибернетики, .В – вечернее отделение),
ВШБ – Высшая школа бизнеса,
Псих – факультет психологии,
Фил – философский факультет,
Филол – филологический факультет,
Соц – социологический факультет,
ИСАА – Институт стран Азии и Африки,
ФГУ – факультет государственного управления (отделение «Антикризисное управление»),
ЧФ – Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь).

Используемые обозначения

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ – объединение; $\cap$ – пересечение; $\emptyset$ – пустое множество;
$\in$ – знак принадлежности; $\subset$ – знак включения подмножества;
$\forall$ – для любого; $A \backslash B$ – разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ – следовательно; $\Longleftrightarrow$ – тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел;
ОДЗ – область допустимых значений;

$\left\{\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;

$\left[\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства

1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, при решении которых используются различные полезные формулы и преобразования: формулы сокращённого умножения, выделение полного квадрата, домножение на сопряжённое выражение.

Необходимо знать и уметь применять следующие формулы:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{2}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{3}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{4}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{5}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \tag{6}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \tag{7}$$

причём все формулы нужно узнавать не только «слева направо», но и «справа налево».

Применение формул сокращённого умножения является одним из самых простых способов разложения алгебраического выражения на множители. Все формулы справедливы при любых вещественных a и b, которые сами могут являться числами, функциями или другими выражениями.

Помимо основных формул сокращённого умножения полезно знать и формулы для большего числа слагаемых, например:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

В общем случае: квадрат суммы нескольких чисел есть сумма квадратов этих чисел плюс сумма всевозможных удвоенных попарных произведений.

Полезно знать также две следующие формулы, верные $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-98.1) Найти численное значение выражения
$\left(\dfrac{9a^2-16b^2}{4b+3a} - \dfrac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \dfrac{8a^3-b^3}{2a-b}\right)$.

Решение. Согласно формулам (1) и (5)

$$9a^2 - 16b^2 = (3a-4b)(3a+4b), \quad 8a^3 - b^3 = (2a-b)(4a^2+2ab+b^2).$$

Последовательно преобразуем исходное выражение:

$$\left(\frac{(3a-4b)(3a+4b)}{4b+3a} - \frac{ab(a-3b)}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}{2a-b}\right) =$$

$= (3a-4b-a+3b)^2 : (6ab-4a^2-2ab-b^2) = (2a-b)^2 : (4a^2-4ab+b^2)\cdot(-1) = -1.$

Отметим, что выражение имеет смысл только при $4b+3a \neq 0$, $ab \neq 0$, $2a \neq b$.

Ответ. -1 при $4b+3a \neq 0$, $ab \neq 0$, $2a \neq b$.

Пример 2. (М/м-78.1) Выражение $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

Решение. *Первый способ.* Выделим полные квадраты в подкоренных выражениях:

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} = \sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} =$$

$$= \sqrt{32 - 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5 + 25} - \sqrt{32 + 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5 + 25} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}-5\right)^2} - \sqrt{\left(4\sqrt{2}+5\right)^2} =$$

$$= \left|4\sqrt{2}-5\right| - \left(4\sqrt{2}+5\right) = 4\sqrt{2} - 5 - 4\sqrt{2} - 5 = -10.$$

Замечание. Коэффициенты полных квадратов можно найти методом неопределённых коэффициентов (ищем $a, b \in \mathbb{N}$):

$$57 + 40\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = \left(a^2 + 2b^2\right) + 2ab\sqrt{2}.$$

Получаем систему уравнений $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 57, \\ ab = 20; \end{cases}$ значит, $b \in \{1; 2; 4; 5\}$, число a – нечётное. Подходит пара $a = 5$, $b = 4$; следовательно, $57 + 40\sqrt{2} = \left(5 + 4\sqrt{2}\right)^2$.

Аналогично $57 - 40\sqrt{2} = \left(5 - 4\sqrt{2}\right)^2$.

Второй способ. Примем числовое значение выражения за параметр и решим соответствующее уравнение.

Обозначим за A выражение $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$; тогда $A<0$, так как первый радикал меньше второго.

Возведём обе части в квадрат:

$$A^2 = 57-40\sqrt{2}+57+40\sqrt{2}-2\sqrt{\left(57-40\sqrt{2}\right)\cdot\left(57+40\sqrt{2}\right)} \iff$$

$$\iff \quad A^2 = 114-2\sqrt{57^2-1600\cdot 2} \quad \iff \quad A^2 = 100 \quad \iff \quad A = \pm 10.$$

Значит, $A=-10$.

Ответ. -10.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти значение выражения $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ при $a=4$, $b=5$.

2. (ЕГЭ) Найти значение выражения $\dfrac{2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\dfrac{2\sqrt{p}}{p-q}$ при $p=8$, $q=9$.

3. (ЕГЭ) Сократить дробь $\dfrac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}$.

4. (ЕГЭ) Сократить дробь $\dfrac{a+27b}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}$.

5. (Геол-93.1) Найти численное значение выражения
$$\left(\frac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2.$$

6. (Почв-98(1).1) Упростить выражение
$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{4a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

7. (Псих-84.1) Вычислить, не используя калькулятор
$$\left(\frac{3(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}):480}{(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right).$$

8. (ЕГЭ) Вычислить $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

9. (ЕГЭ) Выражение $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ является целым числом. Найти его.

10. (Почв-96.1) Доказать, что число $\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$ целое, и найти его.

11. (ЕГЭ) Упростите до целого числа выражение $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.
12. (МГУ-48.3) Выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ является целым числом. Найти это целое число.
13. (МГУ-48.2) Выражение $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ является целым числом. Найти это целое число.
14. (ИСАА-99.2) Упростив выражение
$A=\dfrac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\sqrt{2^{-2}\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)-0,5}}-2ab-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, где $a>b>0$ – действительные числа, выяснить, что больше: A или $0,01$?

1.2. Сравнение чисел

Теоретический материал

В этом разделе собраны простейшие задачи на сравнение чисел. В большинстве случаев достаточно сгруппировать подходящим образом слагаемые и возвести обе части неравенства в нужную степень. При этом в чётную степень можно возводить только неотрицательные величины.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$.

Решение. Для того чтобы избавиться от квадратных корней, будем возводить в квадрат. Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то можем возвести их в квадрат:

$$5+2\sqrt{6}<10 \quad\Longleftrightarrow\quad 2\sqrt{6}<5.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим очевидное неравенство $24<25$. Следовательно, исходное неравенство также справедливо.

Пример 2. (У) Выяснить, что больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{5}$?

Решение. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{3}\ \vee\ \sqrt[5]{5}$$

и будем сводить его к очевидному неравенству с помощью алгебраических преобразований. Для того чтобы избавиться от радикалов, надо возвести обе части неравенства в пятнадцатую степень:

$$\begin{array}{ccc} \left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} & \bigvee & \left(\sqrt[5]{5}\right)^{15} \\ 3^5 & \vee & 5^3 \\ 243 & > & 125. \end{array}$$

Поскольку не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$.

Ответ. $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$.

П р и м е р 3. (Экон-88.1) Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}$ или 3?

Р е ш е н и е. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} \ \vee \ 3$$

и будем работать с ним как с обычным, исключив преобразования, меняющие его знак. Возведём обе части неравенства $\sqrt[3]{4} \vee 3-\sqrt{2}$ в куб:

$$\begin{aligned} 4 \quad &\vee \quad (3-\sqrt{2})^3 = 45-29\sqrt{2} \\ 29\sqrt{2} \quad &\vee \quad 41. \end{aligned}$$

Теперь возведём обе части неравенства в квадрат и получим $1682 > 1681$; так как не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $\sqrt[3]{4}+\sqrt{2} > 3$.

О т в е т. Первое число больше.

Задачи

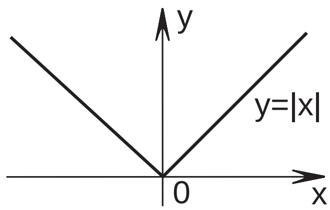
1. (ВМК-92.1) Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$ больше?
2. (Геол-94(1).1) Какое из двух чисел меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?
3. (Геол-82.1) Какое из следующих чисел больше: $\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}-2\sin\dfrac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$?
4. (У) Сравнить числа: 3^{400} и 4^{300}.
5. (У) Сравнить числа: $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.
6. (ЕГЭ) Сравнить $\sqrt{2004}+\sqrt{2007}$ и $\sqrt{2005}+\sqrt{2006}$.
7. (У) Сравнить числа: $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.
8. (У) Выяснить, что больше: 33^{44} или 44^{33}?
9. (У) Сравнить числа: π и $\sqrt{10}$.
10. (У) Сравнить числа: $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1/6}$ и $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/5}$.

1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем

Теоретический материал

Определим *модуль* (абсолютную величину) вещественного числа x следующим образом:

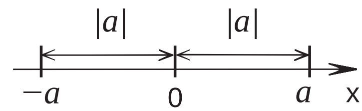
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$



Функция $y = |x|$ является чётной и неотрицательной на всей числовой оси.

Геометрическим смыслом модуля числа считается расстояние по числовой оси от начала отсчёта до рассматриваемого числа, причём одному и тому же значению $|a|$ соответствуют две симметричные относительно начала отсчёта точки: a и $-a$ соответственно.

Для преобразований выражений с модулями, а также для решения уравнений и неравенств, содержащих функции неизвестных величин под знаком модуля, рассматривают варианты раскрытия модулей в зависимости от знака подмодульного выражения. Например:



$$|f(x)| = g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{8}$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) > g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{9}$$

$$|f(x)| < g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) < g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{10}$$

В случае нестрогих неравенств с модулем неравенства равносильных систем также становятся нестрогими. Кроме того, принципиальной разницы в приписывании случая $f(x) = 0$ к любой из получаемых систем (или даже к обеим сразу) нет.

Иногда бывает удобно раскрывать модули через геометрический смысл. Например, при положительном a

$$|f(x)| = a \iff f(x) = \pm a; \tag{11}$$

$$|f(x)| < a \iff -a < f(x) < a; \tag{12}$$

$$|f(x)| > a \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > a; \\ f(x) < -a. \end{array}\right. \tag{13}$$

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Физ-95.3) Решить уравнение $2|x+1| = 2 - x$.

Р е ш е н и е. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x = -1$. Рассмотрим два случая.

1) При $x \geq -1$ исходное уравнение примет вид

$$2(x+1) = 2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Так как найденный корень удовлетворяет условию $x \geq -1$, то $x = 0$ является решением исходного уравнения.

2) При $x < -1$ уравнение запишется в виде

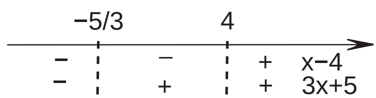
$$-2(x+1) = 2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x = -4.$$

Найденный корень удовлетворяет условию $x < -1$, следовательно, также является решением исходного уравнения.

О т в е т. $-4;\ 0$.

П р и м е р 2. (Экон-84.3) Решить неравенство $2|x-4| + |3x+5| \geq 16$.

Р е ш е н и е. Отметим нули подмодульных выражений на числовой прямой и проанализируем знаки подмодульных выражений.



1) При $x < -\dfrac{5}{3}$ оба подмодульных выражения отрицательны, следовательно,

$$\begin{cases} x < -\dfrac{5}{3}, \\ -2(x-4) - (3x+5) \geq 16; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x < -\dfrac{5}{3}, \\ x \leq -\dfrac{13}{5}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; -\dfrac{13}{5}\right].$$

2) При $-\dfrac{5}{3} \leq x < 4$ исходное неравенство примет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x < 4, \\ -2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x < 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [3; 4).$$

3) При $x \geq 4$ получим

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ 2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq \dfrac{19}{5}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [4; +\infty).$$

Объединив все три полученных промежутка, получим ответ.

О т в е т. $\left(-\infty;\ -\dfrac{13}{5}\right] \bigcup\, [3; +\infty)$.

П р и м е р 3. (Экон-89.3) Решить уравнение $||3-x|-x+1|+x=6$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $||x-3|-x+1|=6-x$ и будем раскрывать модули, начиная с внутреннего.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ |x-3-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 3, \\ 2 = 6-x; \end{cases} \iff x = 4.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < 3, \\ |3-x-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ |2x-4| = 6-x. \end{cases}$$

Так как при $x<3$ всегда $6-x>0$, то дальше удобнее раскрывать модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-4 = 6-x; \\ 2x-4 = x-6; \end{array} \right. \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}; \\ x = -2; \end{array} \right. \end{cases} \iff x = -2.$$

О т в е т. -2; 4.

Задачи

1. (Хим-00.1) Решить уравнение $|x|=2-x$.

2. (Геол.ОГ-79.1) Решить уравнение $|2x-3|=3-2x$.

3. (Геогр-77.1) Решить неравенство $2|x+1|>x+4$.

4. (Геогр-96(1).1) Решить уравнение $|5x-3|-|7x-4|=2x-1$.

5. (Биол-95.2) Решить уравнение $|x-1|+|2x-3|=2$.

6. (Геогр-00.2) Решить уравнение $|2x+8|-|x-5|=12$.

7. (Псих-95.1) Решить уравнение $|2x-15|=22-|2x+7|$.

8. (Псих-98.1) Решить уравнение $|4x-|x-2|+3|=16$.

9. (Геогр-97.1.) Решить неравенство $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2$.

10. (Хим-96(1).3) Решить неравенство $|x+|1-x||>3$.

11. (Геол-91.6) При всех значениях параметра a решить уравнение
а) $|x+2|+a|x-4|=6$; б) $|x+3|-a|x-1|=4$.

12. (Физ-84.4) Найти все значения параметра a, при которых все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ принадлежат отрезку $[0;4]$.

1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета

Теоретический материал

Квадратным трёхчленом называется выражение вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – коэффициенты (постоянные числа), $a \neq 0$, x – переменная. Если $a = 1$, то квадратный трёхчлен называется приведённым.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *квадратным уравнением.*

Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется действительным *корнем квадратного трёхчлена*, если $f(x_0) = 0$. Соответственно, это же значение x_0 обращает квадратное уравнение в верное равенство, то есть является корнем квадратного уравнения.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

По значению дискриминанта можно определить количество корней: если

- $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет действительных корней;
- $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет единственный корень $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (иногда говорят о наличии двух совпадающих корней);
- $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня, вычисляемые по формулам: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Замечание. В случае $b = 2p$, $p \in \mathbb{R}$, формулы корней можно упростить, используя понятие чётного дискриминанта: $D_1 = p^2 - ac$. Тогда формулы для корней принимают вид

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D_1}}{a}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D_1}}{a}.$$

Разложение на линейные множители. Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то справедливо разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

Замечание. В случае нулевого дискриминанта квадратный трёхчлен преобразуется к виду $a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – его корень.

Используя формулы корней квадратного трёхчлена (в случае неотрицательного дискриминанта, то есть при их наличии), можно установить связь между корнями и коэффициентами, которая нередко позволяет избежать непосредственного вычисления самих корней.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня x_1 и x_2 (может быть, совпадающих), то для них выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{14}$$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q, \end{cases} \tag{15}$$

то они же являются корнями приведённого квадратного трёхчлена x^2+px+q.

Применяя формулы сокращённого умножения и соотношения из теоремы Виета, можно получить полезные выражения для вычисления различных комбинаций корней квадратного уравнения без непосредственного вычисления самих корней. Например:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}; \tag{16}$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}\right); \tag{17}$$

$$x_1^4+x_2^4=\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)^2-2(x_1x_2)^2=\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)^2-2\frac{c^2}{a^2}. \tag{18}$$

Подобным образом можно выразить и многие другие комбинации корней через коэффициенты квадратного уравнения.

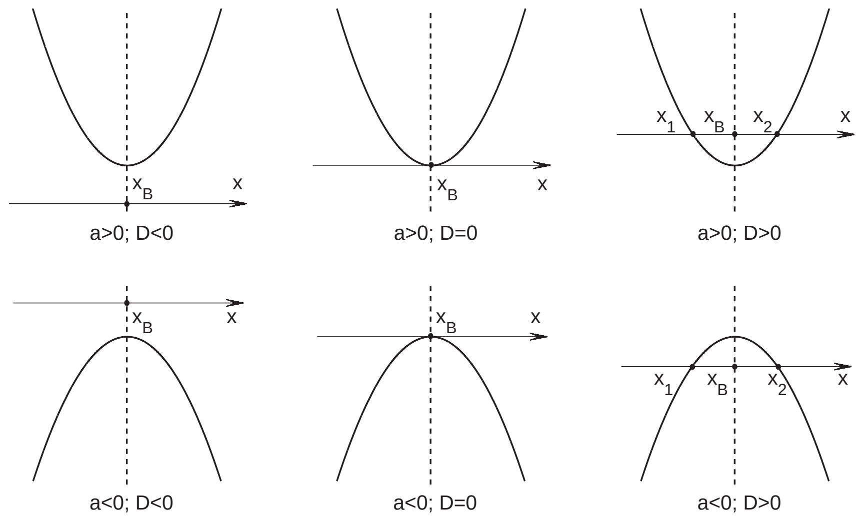
График квадратичной функции. Функция вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, называется *квадратичной функцией*. В силу представления

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a},$$

где $D=b^2-4ac$, можно говорить о том, что график квадратичной функции получается из графика степенной функции $y=x^2$ последовательными элементарными преобразованиями:

$$y=x^2 \;\to\; \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \;\to\; a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \;\to\; a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}=f(x);$$

то есть графиком квадратичной функции $f(x)$ является парабола с вершиной $(x_{\text{в}};y_{\text{в}})$, где $x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a}$, $y_{\text{в}}=-\dfrac{D}{4a}$. Вертикальная прямая $x=-\dfrac{b}{2a}$ задаёт её ось симметрии.



Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Пересечение параболы с осью абсцисс обусловливается наличием корней у квадратного трёхчлена, то есть знаком его дискриминанта.

Замечание. Опираясь на знание расположения параболы на координатной плоскости, можно решать квадратные неравенства, избегая промежуточных преобразований. Например, для $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $D = b^2 - 4ac > 0$ и $a > 0$:

- $f(x) > 0$ при $x < x_1$ или $x > x_2$;
- $f(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$;

где x_1 и x_2 – корни трёхчлена.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-80.1) Найти все значения параметра k, при которых уравнение $x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0$ имеет два различных решения.

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x и вычислим его дискриминант:

$$x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0, \quad D_1 = k^2 - (k^2 + 2k - 1) = 1 - 2k.$$

Два различных решения у квадратного уравнения будут лишь при положительном дискриминанте: $1 - 2k > 0$, откуда $k < \frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

П р и м е р 2. (Экон.М-00.1) Решить уравнение $3|x+1|+x^2+4x-3=0$.

Р е ш е н и е. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x=-1$.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ 3(x+1)+x^2+4x-3=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2+7x=0; \end{cases} \iff x=0.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < -1, \\ -3(x+1)+x^2+4x-3=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1, \\ x^2+x-6=0; \end{cases} \iff x=-3.$$

О т в е т. -3; 0.

П р и м е р 3. (У) Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2-5x-4=0$. Найти $x_1^3x_2+x_1x_2^3$.

Р е ш е н и е. Дискриминант данного квадратного уравнения $D=73$; следовательно, корни иррациональны, и непосредственное вычисление выражения $x_1^3x_2+x_1x_2^3$ будет громоздким. В этом случае удобнее выразить искомую комбинацию корней через коэффициенты квадратного уравнения, используя теорему Виета.

В искомом выражении вынесем общий множитель за скобку и воспользуемся формулами (14) и (16):

$$x_1^3x_2+x_1x_2^3=x_1x_2(x_1^2+x_2^2)=\frac{c}{a}\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right).$$

Подставив $a=3$, $b=-5$, $c=-4$, получим $-196/27$.

О т в е т. $-196/27$.

Задачи

1. (Физ-83.2) Решить уравнение $|5x^2-3|=2$.

2. (Соц-00.1) Решить уравнение $|x^2-3x|=2x-4$.

3. (Геол-81.1) Решить уравнение $x^2-4x+|x-3|+3=0$.

4. (Биол-96.2) Решить уравнение $(x-7)^2-|x-7|=30$.

5. (Геол-95.2) Решить неравенство $x^2-6 \geq |x|$.

6. (Геол-77.2) Решить неравенство $x^2-|5x-3|-x<2$.

7. (Хим-95.1) Решить неравенство $\dfrac{3x}{x^2+2} \geq 1$.

8. (ВМК-87.2) Существуют ли действительные значения a, для которых $a^2-4a+\sqrt{3}=-a\sqrt{2}$? Если да, то сколько их?

9. (Почв-96.2) Решить неравенство $3x^4 + 4 < 13x^2$.

10. (Геол-98.2) Решить уравнение $||4 - x^2| - x^2| = 1$.

11. (Филол-98.1) Решить неравенство $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{|1 + x|} \le 0$.

12. (Экон.К-83.1) Решить уравнение $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.

13. (У) Решить уравнение $x^2 + px + 35 = 0$ при условии, что сумма квадратов корней равна 74.

14. (У) Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.

15. (Геогр-92.2) Найти три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение $x = 2$.

16. (ВМК-80.4) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет два различных корня.

2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, простейшие системы уравнений

2.1. Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов

Теоретический материал

Неравенство называется *рациональным*, если левая и правая его части есть суммы отношений многочленов. При решении рациональных неравенств удобно применять метод интервалов. Для этого неравенство приводится к виду

$$\frac{(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \dots (x - x_k)^{p_k}}{(x - x_{k+1})^{p_{k+1}}(x - x_{k+2})^{p_{k+2}} \dots (x - x_n)^{p_n}} \ge 0,$$

где p_m – кратность корня x_m.

При этом полезно следовать следующему правилу: *при старшей степени в уравнениях и неравенствах должен быть знак плюс*, то есть каждая разность должна иметь вид $(x - x_m)$, а не $(x_m - x)$. Затем рисуется числовая ось, на ней расставляются все корни x_k, при этом точки, стоящие в знаменателе, выкалываются, а точки, стоящие в числителе, выкалываются, если неравенство строгое. После этого находятся знаки левой части на получившихся интервалах: они чередуются с учётом кратности каждого корня. Для наглядности можно рисовать змейку: начинаем справа сверху, переходим через ось, если кратность корня нечётная, и остаёмся на той же стороне, если кратность корня чётная.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-87.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{1-x} \geq -3$.

Решение. Перенесём всё в одну сторону и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{1}{1-x}+3 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1+3(1-x)}{1-x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4-3x}{1-x} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3x-4}{x-1} \geq 0;$$

значит, $x < 1$ или $x \geq \dfrac{4}{3}$.

Ответ. $(-\infty;1)\bigcup\left[\dfrac{4}{3};\infty\right)$.

Пример 2. (Биол-84.1) Решить неравенство $\dfrac{x}{1-x} < x-6$.

Решение. Перенесём всё в одну сторону и приведём к общему знаменателю:

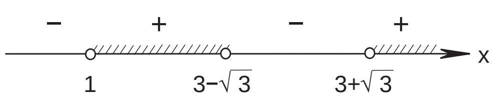
$$\frac{x}{1-x}-x+6<0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x+(6-x)(1-x)}{1-x}<0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x+6-x+x^2-6x}{1-x}<0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-6x+6}{x-1}>0.$$

Найдём нули числителя:

$$x^2-6x+6=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=3\pm\sqrt{3}.$$

Проставим знаки дроби на числовой оси:



значит, $1 < x < 3-\sqrt{3}$ или $x > 3+\sqrt{3}$.

Ответ. $(1;3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3};+\infty)$.

Пример 3. (ИСАА-92.3) Решить неравенство $\dfrac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \leq 1$.

Решение. Подмодульные выражения меняют знаки в точках $x=5$ и $x=6$.

1) При $x<5$ исходное неравенство запишется в виде

$$\frac{5-x-1}{2(6-x)-4} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4-x}{2(4-x)} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Следовательно, в этом случае $x \in (-\infty; 4) \cup (4; 5)$.

2) При $5 \le x < 6$ получим

$$\frac{x-5-1}{2(6-x)-4} \le 1 \iff \frac{x-6}{8-2x} \le 1 \iff \frac{x-6-8+2x}{8-2x} \le 0 \iff \frac{3x-14}{x-4} \ge 0.$$

Это неравенство выполняется $\forall x \in [5, 6)$.

3) При $x \ge 6$ неравенство примет вид

$$\frac{x-5-1}{2(x-6)-4} \le 1 \iff \frac{x-6}{2x-16} \le 1 \iff \frac{x-6-2x+16}{x-8} \le 0 \iff \frac{x-10}{x-8} \ge 0,$$

откуда, с учётом условия $x \ge 6$, получим $x \in [6; 8) \cup [10; +\infty)$.

Объединив все результаты, получим ответ.

О т в е т. $(-\infty; 4) \bigcup (4; 8) \bigcup [10; +\infty)$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить неравенство $\dfrac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \ge 0$.

2. (ЕГЭ) Решить неравенство $\dfrac{2}{x} - 10 \ge 0$.

3. (ЕГЭ) Решить неравенство $\dfrac{3x^2+3x}{x-5} \le 0$.

4. (М/м-77.1) Решить неравенство $x \le 3 - \dfrac{1}{x-1}$.

5. (Псих-82.1) Решить неравенство $\dfrac{2x-3}{4-x} > \dfrac{1}{x}$.

6. (Почв-00(1).1) Решить неравенство $\dfrac{1}{3-2x} \le 1$.

7. (Геогр-00(1).1) Решить неравенство $x \le \dfrac{8x-2}{x+5}$.

8. (ИСАА-00.1) Решить неравенство $|2x-1| > \dfrac{1}{x-2}$.

9. (Геол-82.2) Решить неравенство $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \ge 1$.

10. (Биол-99.2) Решить неравенство $\dfrac{3}{|x-1|} \ge 2x+5$.

11. (Геол-96(1).1) Решить неравенство $\dfrac{1}{x-1996} \le \dfrac{x}{x-1996}$.

12. (Филол-99.2) Решить неравенство $\dfrac{1}{x^2+8x-9} \ge \dfrac{1}{3x^2-5x+2}$.

13. (Геол-98(1).1) Решить неравенство $(x^2+5x-6)|x+4|^{-1}<0$.

14. (ВМК-98.1) Решить неравенство $2x>\dfrac{5x+3}{|x+2|}$.

15. (М/м-85.2) Решить неравенство $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{|x|-1}\geq\dfrac{2}{x-1}$.

16. (Геол-97.3) Решить неравенство $\dfrac{x}{20-\sqrt{x}}<10$.

17. (Физ-93.5) Решить неравенство $\dfrac{|x+3|+x}{x+2}>1$.

18. (Почв-00(1).1) Решить уравнение $\dfrac{x^{17}-1}{1-x^{15}}=\dfrac{1-x^{15}}{x^{13}-1}$.

19. (Соц-00.3) Решить неравенство $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}>\dfrac{1}{2x+3}$.

20. (Экон-87.3) Решить неравенство $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\leq 2$.

21. (Соц-99.5) Решить неравенство $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2|\leq 0$.

22. (Физ-82.2) Найти все значения параметра a, при каждом из которых решение уравнения $10x-15a=13-5ax+2a$ больше 2.

23. (Геол-79.1) Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие равенству $\dfrac{a}{2a-x}=3$.

2.2. Простейшие системы уравнений. Подстановка и исключение переменных при решении систем уравнений

Теоретический материал

В этом разделе собраны системы уравнений, решаемые стандартными приёмами: почленное сложение и вычитание уравнений, умножение и деление уравнений, подстановка и замена переменных.

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-94.1) Решить систему уравнений $\begin{cases}x+2y=6,\\3x^2-xy+4y^2=48.\end{cases}$

Решение. Выразим x из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases}x=6-2y,\\3(6-2y)^2-(6-2y)y+4y^2=48.\end{cases}$$

Теперь рассмотрим отдельно второе уравнение:

$$3\cdot 36+12y^2-72y-6y+2y^2+4y^2=48 \quad\Longleftrightarrow\quad 3y^2-13y+10=0,$$

откуда $y=1$ или $y=\dfrac{10}{3}$.

При $y=1$ имеем $x=6-2y=4$; при $y=\dfrac{10}{3}$ имеем $x=6-2y=-\dfrac{2}{3}$.

О т в е т. $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right)$, $(4;1)$.

П р и м е р 2. (Филол-88.2) Решить систему уравнений $\begin{cases}3|x+1|+2|y-2|=20,\\ x+2y=4.\end{cases}$

Р е ш е н и е. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases}3|x+1|+|2y-4|=20,\\ 2y-4=-x.\end{cases}$$

Подставим выражение для $2y-4$ из второго уравнения в первое, получим уравнение с одной неизвестной $3|x+1|+|x|=20$. Раскроем модули по определению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ -3(x+1)-x=20;\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<0,\\ 3(x+1)-x=20;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ 3(x+1)+x=20;\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ x=-\dfrac{23}{4};\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<0,\\ x=\dfrac{17}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x=\dfrac{17}{4};\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{23}{4};\\ x=\dfrac{17}{4}.\end{array}\right.$$

Подставив полученные значения x во второе уравнение исходной системы, найдём значения y. При $x=-\dfrac{23}{4}$ получим $y=\dfrac{39}{8}$, при $x=\dfrac{17}{4}$ получим $y=-\dfrac{1}{8}$.

О т в е т. $\left(-\dfrac{23}{4};\dfrac{39}{8}\right)$, $\left(\dfrac{17}{4};-\dfrac{1}{8}\right)$.

З а м е ч а н и е. Нередко более рациональным оказывается решение, в котором подставляется не явный вид одной из переменных, а некоторое выражение, однозначно его заменяющее или восстанавливающее.

П р и м е р 3. (Физ-77.2) Найти все значения параметра a, при которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases}x+y=a,\\ 2x-y=3;\end{cases}$ подчиняются также неравенству $x>y$.

Р е ш е н и е. Выразим обе переменные через параметр. Для этого сначала почленно сложим уравнения, а затем из удвоенного первого уравнения почленно вычтем второе уравнение:

$$\begin{cases} 3x = a + 3, \\ 3y = 2a - 3. \end{cases}$$

Требуемое неравенство $x > y$ эквивалентно неравенству $3x > 3y$. Подставляя в это неравенство найденные $3x$ и $3y$, получаем

$$a + 3 > 2a - 3 \quad \Longleftrightarrow \quad a < 6.$$

Следовательно, при $a < 6$ решения системы подчиняются условию $x > y$.

О т в е т. $(-\infty; 6)$.

Задачи

1. (Псих-80.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$

2. (ВМК-87.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = y(\sqrt{x} + 1). \end{cases}$

3. (М/м-79.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{2x - y} + \dfrac{3}{x - 2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x - y} - \dfrac{1}{x - 2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$

4. (Псих-94.2) Известно, что $x = 1$, $y = -1$ – одно из решений системы $\begin{cases} 2ax + by = 1, \\ ax^2 + by^2 = 2; \end{cases}$ найти все её решения.

5. (Физ-81.2) Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

6. (Почв-70.2) При каких значениях параметра α система уравнений $\begin{cases} \alpha x - 4y = \alpha + 1, \\ 2x + (\alpha + 6)y = \alpha + 3 \end{cases}$ не имеет решений?

7. (Экон-78.3) Найти все значения параметра, при которых система $\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b + 1)y = 2b + 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

8. (Филол-00.5) Найти все значения a, при каждом из которых уравнения $(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень.

2.3. Радикалы. Иррациональные уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Теоретический материал

Уравнения и неравенства с радикалами. Общей идеей при решении уравнений и неравенств с радикалами (корнями различной степени) является избавление от соответствующих корней, для чего применяется возведение в степень, соответствующую показателю корня. Однако в ряде случаев подобное действие приводит к приобретению посторонних решений, вследствие чего рекомендуется использовать равносильные преобразования на всех этапах решения задачи с учётом возникающих дополнительных условий. Кроме того, иногда полезно перед возведением в степень преобразовать решаемое соотношение к виду, наиболее близкому к простейшему.

Простейшие уравнения и неравенства с квадратным корнем. Методы решения простейших уравнений и неравенств с квадратным корнем хорошо алгоритмизированы и основаны на следующих равносильных переходах:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \tag{19}$$

следует заметить, что неравенство $f(x) \geq 0$, задающее область существования радикала, в приведённой системе выполняется автоматически (подобное касается и других типов задач);

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{20}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \tag{21}$$

заметим, что в последнем равносильном переходе вместо условия $g(x) \geq 0$ можно использовать условие $g(x) > 0$, поскольку исходное неравенство не имеет решений при $g(x) = 0$. Однако, нет необходимости над этим задумываться, так как при возведении неравенства в квадрат, главное, чтобы обе части неравенства были неотрицательными.

В случае нестрогих неравенств соответствующие знаки неравенств в равносильных системах становятся нестрогими:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{22}$$

$$\sqrt{f(x)} \le g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \tag{23}$$

При отличном от простейшего типе задания, уравнение или неравенство решается последовательным приведением к простейшему виду. Для этого нередко приходится группировать радикалы, возводить обе части в соответствующие степени, при этом также нужно использовать только равносильные переходы.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-93.3) Найти область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}$.

Решение. Область определения задается условием:

$$\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2} \ge 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-1)} \le 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ (x+2)(x-1) < 0; \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ -2 < x < 1. \end{array} \right.$$

Ответ. $(-2; 1) \cup \{2\}$.

Пример 2. (Соц-97.3) Решить уравнение $\sqrt{-3x+3} = x - 1$.

Решение. Согласно (19) $\sqrt{-3x+3} = x - 1 \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -3x + 3 = (x-1)^2, \\ x - 1 \ge 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \ge 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = -2; \end{array} \right. \\ x \ge 1. \end{cases}$$

Значит, $x = 1$.

Ответ. 1.

Пример 3. (Геол-84.2) Решить неравенство $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2$.

Решение. Согласно (21) $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < x + 2 \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 < (x+2)^2, \\ 2x^2 - 6x + 4 \ge 0, \\ x + 2 \ge 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 10x < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \ge 0, \\ x \ge -2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (0; 10), \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty), \\ x \ge -2; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (0; 1] \cup [2; 10).$$

Ответ. $(0; 1] \cup [2; 10)$.

Пример 4. (Биол-80.3) Решить неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

Решение. Согласно (20)

$$\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x^2+6x-5 > (8-2x)^2,\\ 8-2x \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-x^2+6x-5 \geq 0,\\ 8-2x < 0;\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x^2-38x+69 < 0,\\ x \leq 4;\end{cases}\\ \begin{cases}x \in [1;5],\\ x > 4;\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \in (3;23/5),\\ x \leq 4;\end{cases}\\ x \in (4;5];\end{array}\right. \iff x \in (3;5].$$

Ответ. $(3;5]$.

Пример 5. (Почв-98.1) Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}=1$.

Решение. Перенесём второй радикал в правую часть:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-1}+1.$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то можно возводить уравнение в квадрат. При этом условие $x+1 \geq 0$ писать нет необходимости, так как в получающемся уравнении $(x+1)$ равно квадрату положительной величины:

$$x+1 = (\sqrt{2x-1}+1)^2 \iff x+1 = 2x-1+1+2\sqrt{2x-1} \iff 2\sqrt{2x-1} = 1-x.$$

Полученное уравнение решаем стандартным способом:

$$\begin{cases}4(2x-1) = 1+x^2-2x,\\ 1-x \geq 0;\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-10x+5=0,\\ x \leq 1.\end{cases}$$

Корень $x = 5-\sqrt{20}$ – подходит, а корень $x = 5+\sqrt{20}$ – нет.

Ответ. $5-\sqrt{20}$.

Задачи

1. (Экон-89.1) Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{-x^2+x+20}}$.
2. (Геол-94.5) Решить неравенство $\sqrt{4z-3-z^2} \neq 0$.
3. (Экон-94.2) Найти область значений функции $y = -\sqrt{-3x^2+12x-3}$.
4. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sqrt{4x^2-27} = -x$.
5. (Геол-96.1) Решить уравнение $\sqrt{3x-5} = x-11$.

6. (Геогр-00.1) Решить уравнение $\sqrt{3x+2} = 2x-4$.
7. (Соц-99.1) Решить уравнение $\sqrt{y-1} = 6-y$.
8. (Физ-98(1).2) Решить уравнение $\sqrt{3x-x^2-2} = 2x-3$.
9. (ВМК-91.1) Решить уравнение $\sqrt{x+4}+x-2=0$.
10. (Геол-95.1) Решить уравнение $\sqrt{5x-6}+x=4$.
11. (Хим-98(1).1) Решить уравнение $7-x = 3\sqrt{5-x}$.
12. (Геогр-99.2) Решить уравнение $\sqrt{2x^2-8x+5} = x-2$.
13. (Биол-77.1) Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$.
14. (Почв-87.2) Решить неравенство $\sqrt{2x+3} \geq x$.
15. (Хим-96.2) Решить неравенство $\sqrt{x+5} > 7-x$.
16. (Экон-95.1) Решить неравенство $2x-5 < \sqrt{x^2-x-6}$.
17. (Псих-97.2) Решить неравенство $\sqrt{t+3} > 5-2t$.
18. (Псих-88.3) Решить неравенство $2x-11 < 2\sqrt{36-x^2}$.
19. (ВМК-75.1) Решить неравенство $\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3>0$.
20. (Геол-04.3) Решить неравенство $\sqrt{441-x^2} \leq x+21$.
21. (Геол.ОГ-84.2) Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} \leq 3x-3$.
22. (Экон-03.1) Решить неравенство $\sqrt{8+2x-x^2} \leq 2x+1$.
23. (Физ-05.2) Решить неравенство $\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6}-x$.
24. (Физ-85.2) Решить уравнение $\sqrt{x^4-2x-5} = 1-x$.
25. (Физ-99(2).2) Решить уравнение $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+1} = x+4$.
26. (Экон-00.1) Решить уравнение $3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x = \left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)^2$.
27. (ИСАА-91.1) Решить уравнение $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.
28. (Почв-98.1) Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=1$.
29. (Псих-93.2) Решить неравенство $\sqrt{1-x}-\sqrt{x} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
30. (Геол.ОГ-82.2) Решить уравнение $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$.

2.4. Смешанные задачи

Данный раздел рекомендуется изучать только после детального ознакомления с предыдущими базовыми разделами. В противном случае рекомендуется либо отложить его изучение, либо вернуться к изучению предыдущих разделов до достижения необходимого уровня знаний.

1. (ЕГЭ) Пусть $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-1} - y = 0, \\ y - |x-5| = 2. \end{cases}$ Найти разность $x_0 - y_0$.
2. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sqrt{4 - 7x|x+2|} = 3x + 2$.
3. (Геогр-95.3) Решить уравнение $\sqrt{2 - x^2} = |x| - 1$.
4. (Псих-99.1) Решить неравенство $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1$.
5. (Физ-98(1).2) Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{4}{x-2} + 1} = \dfrac{1}{x-2}$.
6. (Физ-00.2) Решить уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}$.
7. (М/м-94(1).2) Решить уравнение $3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x+2|$.
8. (Физ-00(2).2) Решить неравенство $\sqrt{x^2 + |x-4| - 18} > x - 4$.
9. (М/м-98.1) Решить неравенство $3\sqrt{|x+1| - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.
10. (ВМК-94.2) Решить неравенство $\sqrt{x-3} \leq 3 - |x-6|$.
11. (Физ-97(2).3) Решить неравенство $\sqrt{x^2 + x + 4} \leq 2x + |3x - 2|$.
12. (Экон.В-98.1) Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$.
13. (Экон.К-74.1) Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 4x} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$.
14. (Биол-97.3) Решить неравенство $\sqrt{|1 - 8x| - 2} \leq x + 1$.
15. (Экон-93.3) Решить неравенство $3\sqrt{x+2} \leq 6 - |x-2|$.
16. (ИСАА-93.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 8}}{3 - x} \geq 1$.
17. (М/м-95(2).1) Решить неравенство $\dfrac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x+15} + 2x} \geq 0$.
18. (Биол-93.3) Решить неравенство $5\sqrt{1 - \dfrac{1}{z}} > \dfrac{7z - 1}{z}$.
19. (Псих-83.2) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{51 - 2x - x^2}}{1 - x} < 1$.

20. (Экон.К-88.3) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+3x+13}{x+5} > 1$.

21. (Экон-98.3) Решить неравенство $\sqrt{x+4(2-\sqrt{4+x})} < \dfrac{x+12}{8-5\sqrt{4+x}}$.

22. (Геол-99(1).2) Решить систему уравнений $\begin{cases} 5y+4x=\sqrt{16x^2-25y^2}, \\ x^2+6x-7=0. \end{cases}$

23. (Геол-72.3) Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > \dfrac{1}{x-2}$.

24. (Филол-76.2) Найти все целочисленные решения неравенства $\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[8]{6-z}$.

25. (М/м-90.3) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \le x$.

26. (М/м-96(1).2) Решить неравенство $\dfrac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \le \sqrt{4x-3}$.

27. (Почв-97.6) Для каждого значения параметра a решить неравенство
а) $\sqrt{a^2-x^2} \ge a+1$; б) $\sqrt{a^2-x^2} \ge 2-a$.

28. (Псих-89.5) Для каждого значения параметра a решить неравенство
а) $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2} > 0$; б) $x+2a-\sqrt{3ax+4a^2} > 0$.

29. (Почв-99.7) Для каждого $b \le 0$ решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \ge b$.

3. Преобразование тригонометрических выражений, стандартные тригонометрические уравнения

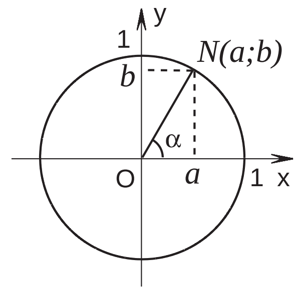
3.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формулы двойного и половинного аргументов

Теоретический материал

Рассмотрим окружность с центром в начале координат радиуса, равного единице (эту окружность обычно называют *тригонометрической окружностью*).

Рассмотрим произвольное действительное число α и радиус ON, образующий с положительным направлением оси Ox угол, радианная мера которого равна числу α (положительным считается направление против хода часовой стрелки).

Пусть конец единичного радиуса ON, соответствующего углу α, имеет координаты $N(a;b)$.



Определение. Число, равное ординате конца единичного радиуса, образующего угол α с положительным направлением оси Ox, называется *синусом* угла в α радиан и обозначается $\sin\alpha$.

Поскольку каждому значению величины угла α соответствует единственная точка $N(a;b)$ такая, что радиус ON образует угол α с осью Ox, то введённое отображение $y=\sin\alpha$ является функцией.

Определение. *Косинусом* угла в α радиан называется число, равное абсциссе конца единичного радиуса, образующего угол α с положительным направлением оси Ox. Оно обозначается $\cos\alpha$.

Поскольку каждому значению величины угла α на тригонометрической окружности соответствует единственная точка $N(a;b)$ такая, что радиус ON образует угол α с осью Ox, то введённое отображение $y=\cos\alpha$ является функцией.

Определение. *Тангенсом* угла α, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, называется число, равное отношению синуса угла α к косинусу этого угла. Тангенс угла обозначают $\operatorname{tg}\alpha$.

Так как каждому значению величины угла α, кроме $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, можно поставить в соответствие однозначно определённое значение $y=\operatorname{tg}\alpha$, то это соответствие является функцией.

Определение. *Котангенсом* угла α, $\alpha\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, называется число, равное отношению косинуса угла α к синусу этого угла. Котангенс обозначают $\operatorname{ctg}\alpha$.

Так как каждому значению величины угла α, кроме $\alpha=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, можно поставить в соответствие однозначно определённое значение $y=\operatorname{ctg}\alpha$, то это соответствие является функцией.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \qquad (\textit{основное тригонометрическое тождество});$$

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1,\quad x\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbb{Z};$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z};\qquad 1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x},\quad x\neq\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\qquad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad k\in\mathbb{Z},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Формулы тройного аргумента:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x;\qquad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Формулы половинного аргумента (для синуса и косинуса – формулы понижения степени):

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\ x\neq\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Псих-86.1) Найти $\operatorname{tg}^2 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

Решение. Выразим тангенс через синус и косинус, распишем двойные углы и перейдём от косинуса к синусу с помощью основного тождества:

$$\operatorname{tg}^2 2\alpha=\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(1-2\sin^2\alpha)^2}=\frac{4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{(1-2\sin^2\alpha)^2}=\frac{4\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{11}}{\left(1-\frac{8}{11}\right)^2}=\frac{112}{9}.$$

Другой способ: $\operatorname{tg}^2 2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2 2\alpha}-1=\dfrac{1}{(1-2\sin^2\alpha)^2}-1=\dfrac{1}{\left(1-\frac{8}{11}\right)^2}-1=\dfrac{112}{9}$.

Ответ. $\dfrac{112}{9}$.

Пример 2. (Почв-00.3) Найти $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin4\alpha>0$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества следует, что

$$\cos\alpha=\pm\frac{3}{5}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\pm\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=\pm\frac{24}{7}.$$

Так как $\sin4\alpha=2\sin2\alpha\cos2\alpha>0\iff\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}>0$, то $\operatorname{tg}2\alpha>0$.

Ответ. $\dfrac{24}{7}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Упростить выражение $\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.
2. (ЕГЭ) Найти значение выражения $2-\operatorname{tg}^2x\cdot\cos^2x$, если $\sin x=0,2$.
3. (ЕГЭ) Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{3}{2\sqrt7}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.
4. (ЕГЭ) Упростить выражение $\dfrac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$.

5. (ЕГЭ) Найти значение выражения $3\sqrt{2}\sin 2x$, если $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

6. (ВМК-80.1) Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

7. (Хим-95(1).2) Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

8. (Геол-00.2) Вычислить $\operatorname{tg} 2x$, если $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{5}$.

9. (Физ-87.3) Известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < \alpha < \dfrac{4\pi}{3}$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

10. (Почв-98.2) Найти $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < 2\pi$. Установить, какое из чисел больше: $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$ или $\dfrac{2}{7}$?

3.2. Простейшие тригонометрические уравнения. Разложение на множители, сведение к квадратному уравнению

Теоретический материал

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$\sin x = a,\ \ \cos x = a \text{ (где } |a| \le 1);$$

$$\operatorname{tg} x = a,\ \ \operatorname{ctg} x = a \text{ (где } a \in (-\infty; +\infty)).$$

Формулы решений этих уравнений имеют следующий вид:

$$\sin x = a \quad \text{при} \quad |a| \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a \quad \text{при} \quad |a| \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

В частных случаях $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \iff x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$
$$\operatorname{tg} x = 0 \iff x = \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$$
$$\operatorname{ctg} x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Решение уравнения $\sin x = a$ часто удобно записывать в виде двух серий корней:

$$x = \arcsin a + 2\pi n, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi n.$$

Уравнения вида

$$\sin(\omega x+\phi) = a,\ \ \cos(\omega x+\phi) = a,\ \ \operatorname{tg}(\omega x+\phi) = a,\ \ \operatorname{ctg}(\omega x+\phi) = a,\ \ \text{где}\ \ a, \omega, \phi \in \mathbb{R}$$

также относятся к простейшим. Их следует решать по общим формулам, заменив $\omega x + \phi$ на t, и уже после этого находить x из равенства $\omega x + \phi = t$.

Примеры решения задач

Пример 1. (ВМК-80.2) Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Решение. Применим формулу синуса двойного угла и разложим левую часть уравнения на множители:

$$\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^m \dfrac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ (-1)^m\dfrac{\pi}{3} + \pi m;\ \ n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (Геол-87.2) Решить уравнение $4\sin^2 x + 4\cos x = 1$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, сведём уравнение к квадратному:

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2}; \\ \cos x = \dfrac{3}{2} > 1; \end{array}\right. \iff x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. (ВМК-94.1) Решить уравнение $12\sin 5x = \cos 10x + 7$.

Решение. Применим формулу косинуса двойного угла и сведём уравнение к квадратному:

$$\sin^2 5x + 6\sin 5x - 4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin 5x = \sqrt{13} - 3; \\ \sin 5x = -3 - \sqrt{13} < -1; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff 5x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{13} - 3) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{(-1)^n}{5}\arcsin(\sqrt{13} - 3) + \dfrac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sin 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. (ЕГЭ) Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin \pi x(\cos x - 2) = 0$.

3. (ЕГЭ) Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x + \cos 2x = 2$.

4. (Почв-99.2) Решить уравнение $\cos 2x = \sin x$.

5. (Экон-87.1) Решить уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$.

6. (Хим-96(1).2) Решить уравнение $5 + \cos 2x = 6\cos x$.

7. (Геогр-89.1) Решить уравнение $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

8. (Биол-99.1) Решить уравнение $8\cos 6x - 12\sin 3x = 3$.

9. (Биол-00.2) Решить уравнение $3\cos 2x + 4 + 11\sin x = 0$.

10. (Геогр-99(1).1) Решить уравнение $2\cos 4x - 4\sin 2x = -1$.

11. (ВКНМ-99(1).1) Решить уравнение $(7\sin x - 4\sqrt{3})(7\sin x - 5\sqrt{2}) = 0$.

12. (Экон-85.2) Решить уравнение $2\sin x = 3\,\mathrm{ctg}\, x$.

13. (Физ-76.1) Решить уравнение $\cos 2x + 4\sin^3 x = 1$.

14. (Экон-76.2) Решить уравнение $3\,\mathrm{tg}\, x = 2\sqrt{5}\cos\dfrac{x}{2}$.

15. (Геол-00(1).2) Решить уравнение $5\sin\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}$.

16. (Геол-98.3) Найти все решения уравнения $5 + \dfrac{1}{\sin^2 3x} = 7\,\mathrm{ctg}\, 3x$.

17. (Экон.К-84.3) Найти все решения уравнения $3 - 12\sin^2 x - 2\cos 4x = -\dfrac{5}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$.

18. (Экон.В-98.3) Решить уравнение $\cos(2x^2) - \sqrt{3}\cos(x^2) - 2 = 0$.

19. (ВМК-85.3) Решить уравнение $4 - \cos 2\pi(13x + 9)^2 = 5\sin \pi(13x + 9)^2$.

3.3. Применение тригонометрических формул для сведения уравнений к простейшим

Теоретический материал

Формулы для тригонометрических функций от суммы и разности:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x, y, x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad x, y, x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y));$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x;\quad \cos(\pi-x)=-\cos x.$$

Соотношения между синусом, косинусом и тангенсом половинного угла:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x\neq\pi+2\pi n,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad n,k\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}},\quad x\neq\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Эти формулы иногда называют формулами универсальной тригонометрической подстановки.

Все формулы нужно уметь читать не только «слева направо», но и «справа налево». Так, например, в записи $\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x$ нужно узнавать $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, а не принимать ошибочно за $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Проверьте себя и напишите, чему равно выражение $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. Если вы убеждены в том, что это выражение равно тангенсу половинного угла, обратите внимание на то, что выражение, о котором идёт речь, неотрицательно, а тангенс половинного угла – знакопеременная функция. Таким образом,

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

и не следует писать в этом случае $\pm\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Мы пишем $\pm\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, чтобы «примирить» выражение, стоящее в левой части, которое может быть отрицательным, с неотрицательным корнем. Поставив $\pm\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, мы получаем двузначную функцию; символ «$\pm$» говорит лишь о том, что для каждого фиксированного x мы обязаны выбрать определённый знак, в зависимости от того, в какой четверти тригонометрического круга оказывается угол, стоящий под знаком функции в левой части формулы.

Если уравнение не является простейшим, то его нужно свести к одному или нескольким простейшим уравнениям, совокупность которых равносильна заданному.

При решении тригонометрических уравнений часто используется метод разложения на множители и метод замены переменной (введение новой переменной).

При решении уравнений следует следить за равносильностью преобразований. Иначе при решении полученной совокупности простейших уравнений возможно появление посторонних корней.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-91.1) Решить уравнение $\sin 7x \cos x = \sin 6x$.

Решение. *Первый способ.* Преобразуем произведение тригонометрических функций в сумму, после чего используем формулу разности синусов:

$$\sin 8x + \sin 6x = 2\sin 6x \quad\Longleftrightarrow\quad \sin 8x - \sin 6x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2\sin x \cos 7x = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $\cos 7x = 0$; следовательно, $x = \pi n$ или $x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi m}{7}$.

Второй способ. Представим $6x$ в правой части уравнения в виде $7x - x$ и воспользуемся формулой синуса разности:

$$\sin 7x \cos x = \sin(7x - x) \quad\Longleftrightarrow\quad \sin 7x \cos x = \sin 7x \cos x - \cos 7x \sin x \quad\Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \quad \cos 7x \sin x = 0$. Далее аналогично.

Ответ. $\pi n,\ \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi m}{7};\quad n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (Физ-83.1) Решить уравнение $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

Решение. Преобразовав сумму тригонометрических функций в произведение, получим

$$2\sin 4x \cos x = \sin 4x \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0; \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi n}{4},\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m;\quad n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. (ИСАА-91.3) Решить уравнение
$\cos^2(45^\circ + x) = \cos^2(45^\circ - x) + \sqrt{5}\cos x$.

Решение. Понизим степень у квадратов косинусов:

$$1+\cos(90^\circ+2x) = 1+\cos(90^\circ-2x)+2\sqrt{5}\cos x \quad\Longleftrightarrow\quad \sin 2x+\sqrt{5}\cos x = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} < -1; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad x = 90^\circ + n\cdot 180^\circ,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в градусах, согласно условию.

Ответ. $90^\circ + n\cdot 180^\circ,\ n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. (ВМК-94(1).3) Вычислить $\cos 2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Решение. Преобразуем искомое выражение, используя формулу приведения и формулу универсальной тригонометрической подстановки:

$$\cos 2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{7}}}{1+\frac{1}{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Ответ. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $\cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = 1$.
2. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$.
3. (Хим-00.2) Решить уравнение $\cos 3x + \sin x\sin 2x = 0$.
4. (Физ-98(1).1) Решить уравнение $\sin 3x - \sin 2x\cos x = 0$.
5. (Физ-97(2).1) Решить уравнение $\cos 9x - \cos 7x = \sqrt{2}\sin x$.
6. (Физ-94(1).1) Решить уравнение $\sin x\sin 3x = \frac{1}{2}$.
7. (Хим-78.1) Решить уравнение $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x$.
8. (Физ-99(1).1) Решить уравнение $\sin 14x = \cos 4x - \sin 6x$.
9. (Физ-00(1).1) Решить уравнение $\sin 5x + \sin 2x = \sin 7x$.
10. (Физ-99(2).1) Решить уравнение $\sin x - \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$.
11. (Физ-96.1) Найти все решения уравнения $\cos 3x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 5x$.
12. (Геогр-74.2) Решить уравнение $\sin x + \cos\left(5x - \frac{9\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin(3x + \pi)$.
13. (Хим-83.1) Решить уравнение
$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$.
14. (Псих-90.1) Решить уравнение
$4\sin^2\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 2(\sqrt{5} - \sqrt{3})\cos(2x - \pi) + \sqrt{15} - 4 = 0$.
15. (Биол-81.2) Решить уравнение $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$.
16. (Экон.К-80.4) Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

17. (Почв-96(1).1) Найдите $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$, если известно, что $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha>0$.

18. (Геол-94(1).4) Найти все решения уравнения $\sin 5x=\sin 5$.

19. (Физ-93.2) Решить уравнение $\cos 5x=\cos(5+x)$.

20. (ИСАА-00.3) Решить $3\sin 2x-\dfrac{1}{2}=4\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

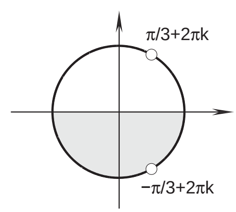
21. (М/м-00(2).4) Найти $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$, если $\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{4}{9}$.

3.4. Различные задачи на отбор корней

Данный раздел рекомендуется изучать только после детального ознакомления с предыдущими базовыми разделами. В противном случае рекомендуется либо отложить его изучение, либо вернуться к изучению предыдущих разделов до достижения необходимого уровня знаний.

Примеры решения задач

Пример 1. (ЕГЭ) Указать корни уравнения $\cos x=\dfrac{1}{2}$, для которых $\sin x<0$.



Решение. Решениями исходного уравнения являются $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Так как синус отрицателен в третьей и четвёртой четвертях, то нам подходит только $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ответ. $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Пример 2. (Биол-85.2) Найти все корни уравнения $7\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=1+5\cos 2x$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Применив формулы приведения и косинуса двойного угла, получим

$$-7\sin x=1+5(1-2\sin^2 x)\quad\Longleftrightarrow\quad 10\sin^2 x-7\sin x-6=0\quad\Longleftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{6}{5}>1,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Значит, $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Для удобства отбора корней представим это решение в виде двух серий: $x_1=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi l$ и $x_2=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ l,m\in\mathbb{Z}$.

Отберём $l \in \mathbb{Z}$ такие, что $x_1 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то есть

$$\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi l \leq \frac{3\pi}{2} \iff \frac{2\pi}{3} \leq 2\pi l \leq \frac{5\pi}{3} \iff \frac{1}{3} \leq l \leq \frac{5}{6};$$

видно, что таких целых l нет.

Для второй серии

$$\frac{\pi}{2} \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m \leq \frac{3\pi}{2} \iff \frac{4\pi}{3} \leq 2\pi m \leq \frac{7\pi}{3} \iff \frac{2}{3} \leq m \leq \frac{7}{6};$$

подходит $m = 1$. В результате $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$.

О т в е т. $\frac{7\pi}{6}$.

П р и м е р 3. (ВМК-83.2) Решить уравнение $\dfrac{2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1}{2\sin x \cos x + 1} = -1$.

Р е ш е н и е. Область определения:

$$2\sin x \cos x + 1 \neq 0 \iff \sin 2x \neq -1 \iff x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Домножив на знаменатель исходное уравнение, получим

$$2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x + 1 = -\sin 2x - 1 \iff 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0,$$

откуда либо $\sin x = -\sqrt{2}$, либо $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. В первом случае решений нет, так как $-\sqrt{2} < -1$. Во втором случае $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Эта серия разбивается на две: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$ – не входит в область определения, и $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ – подходит.

О т в е т. $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Указать те корни уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, которые лежат в промежутке $[0; 2\pi]$.

2. (ЕГЭ) Указать те корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, для которых $\cos x > 0$.

3. (ЕГЭ) Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3} - 2} + 2$ на промежутке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$?

4. (Филол-85.1) Найти все решения уравнения $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x$, удовлетворяющие условию $-5 < x < -3$.
5. (М/м-89.1) Решить уравнение $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$.
6. (Геол-82.3) Решить уравнение $\sqrt{1-\cos^2 x} + 6\cos 2x = 0$.
7. (М/м-79.1) Найти все решения уравнения $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.
8. (Физ-84.1) Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{2-\sin x} = 0$.
9. (Геол.ОГ-78.1) Решить уравнение $\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$.
10. (Псих-77.1) Решить уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$.
11. (Физ-00.1) Решить уравнение $3\cos 3x + \dfrac{2}{\cos x} = 3\cos x$.
12. (Биол-85.2) Найти все решения уравнения $5\cos 2x + 7\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
13. (Геол-80.2) Решить уравнение $\dfrac{2 - 3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$.
14. (Филол-75.3) Найти все решения уравнения $\operatorname{ctg}\dfrac{11\pi}{6} = \dfrac{2\operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)}$.
15. (Геол-99(1).1) Решить уравнение $\cos(6\sin x) = -1$.
16. (ВМК-83.2) Решить уравнение $\dfrac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$.
17. (ВМК-91.2) Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) = 1$.
18. (Физ-00(2).1) Решить уравнение $\dfrac{\cos 6x}{\cos 2x} + 6\sin 2x + 1 = 0$.
19. (Псих-82.3) Решить уравнение $2\sin x - \sqrt[4]{3} = (\sqrt{2} - \sqrt[4]{12})\sqrt{\sin x}$.
20. (Экон-89.4) Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

4. Стандартные текстовые задачи

4.1. Пропорциональные величины

Теоретический материал

В этом разделе собраны стандартные текстовые задачи, приводимые к одному линейному уравнению или к системе линейных уравнений.

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-95.4) Саша и Серёжа дважды обменивались марками, причём каждый раз 1/7 количества марок, имевшихся на данный момент у Саши, обменивалась на половину количества марок, имевшихся у Серёжи. Сколько марок было у Саши и сколько у Серёжи до первого обмена, если после первого обмена у Саши было 945 марок, а после второго обмена у Серёжи – 220?

Решение. Пусть сначала у Саши было n марок, а у Серёжи m марок.

После первого обмена у Саши станет $\frac{6}{7}n + \frac{1}{2}m$ штук, а у Серёжи $\frac{1}{7}n + \frac{1}{2}m$ штук, причём $\frac{6}{7}n + \frac{1}{2}m = 945$.

После второго обмена у Серёжи будет $\frac{1}{7} \cdot 945 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}n + \frac{1}{2}m\right) = 220$ штук. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{6}{7}n + \frac{1}{2}m = 945, \\ \frac{1}{7} \cdot 945 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}n + \frac{1}{2}m\right) = 220; \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{6}{7}n + \frac{1}{2}m = 945, \\ \frac{1}{7}n + \frac{1}{2}m = 170; \end{cases} \iff \begin{cases} n = 1085, \\ m = 30. \end{cases}$$

Ответ. 1085 и 30 штук.

Задачи

1. (ЕГЭ.А) На склад привезли 126 тонн яблок, груш и слив. Яблок оказалось в 4 раза больше, чем груш. Слив на 18 тонн меньше, чем груш. Сколько тонн яблок привезли на склад?

2. (Почв-84.1) Площади участков земли относятся как $4 : 3 : 5$. Средняя урожайность всех трёх участков одинакова и составляет 28 ц зерна с гектара. Известно, что с третьего участка собрано на 84 ц зерна больше, чем с первого. Определить, какова площадь каждого из трёх участков.

3. (Почв-93.1) Представить число 128 в виде суммы четырёх слагаемых так, чтобы первое слагаемое относилось ко второму, как $2 : 3$, второе к третьему, как $3 : 5$, а третье к четвёртому – как $5 : 6$.

4. (Почв-94(1).1) С двух полей, первое из которых по площади вдвое меньше второго, собрали урожай свёклы. Средняя урожайность составила 150 ц/га, в то время, как на первом поле собрали по 156 ц/га. Какова урожайность свёклы на втором поле?

5. (Почв-92.2) Самолёт, осуществляя полет по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях А, Б или В с одной и той же скоростью, но по-разному расходуя горючее. В первый раз самолёт находился в метеоусловиях А половину полётного времени, в метеоусловиях Б – треть времени, в метеоусловиях В – 1/6 полётного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях А и 3/4 – в метеоусловиях В. В третий раз – по четверти полётного времени в метеоусловиях А и Б, а половину времени – в метеоусловиях В. На сколько процентов израсходует самолёт полётный норматив

горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях B, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\,\%$, во второй раз – на $92{,}5\,\%$, а в третий – на $97{,}5\,\%$?

6. (Соц-98.3) В городе N $9\,\%$ коренного населения в зимний период заняты народным промыслом. Летом $36\,\%$ коренного населения уезжает из города, но общая численность за счёт приезжающих туристов составляет $4/5$ от численности населения в зимний период. Определить, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Теоретический материал

Последовательность чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ называется *арифметической прогрессией*, если найдётся такое число d, называемое разностью прогрессии, что

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d, \quad \cdots, \quad a_n = a_{n-1} + d.$$

Для решения задач на арифметические прогрессии необходимо знать следующие формулы:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},$$

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Последовательность чисел $b_1, b_2, \cdots, b_n$ (где $b_1 \neq 0$) называется *геометрической прогрессией*, если найдётся такое число $q \neq 0$, называемое знаменателем прогрессии, что

$$b_2 = b_1 q, \quad b_3 = b_2 q, \quad \cdots, \quad b_n = b_{n-1} q.$$

Для решения задач на геометрические прогрессии необходимо знать следующие формулы:

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1},$$

$$S_n = b_1 + \cdots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{при} \quad q \neq 1, \quad S_n = n \cdot b_1 \quad \text{при} \quad q = 1.$$

Если $|q| < 1$, то $b_1 + \cdots + b_n + \cdots = b_1 \cdot \dfrac{1}{1-q}$.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Экон.В-98.2) Второй член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ равен 2, а сумма пятого и шестого членов равна 9. Найти сумму первых двадцати членов прогрессии, номера которых кратны 2.

Р е ш е н и е. Пусть a_1 и d – первый член и разность данной прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} a_2 = 2, \\ a_5 + a_6 = 9; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + d = 2, \\ (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 9; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{9}{7}, \\ d = \dfrac{5}{7}. \end{cases}$$

Искомая сумма $S = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{38} + a_{40}$ может быть найдена как сумма членов арифметический прогрессии с разностью $2d$, первым членом a_2 и $n = 20$. В нашем случае формула суммы арифметической прогрессии примет вид:

$$S = \frac{2a_2 + (20-1)\cdot 2d}{2}\cdot 20 = \frac{2(a_1+d)+38d}{2}\cdot 20 = 10(2a_1+40d) = \frac{2180}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{2180}{7}$.

Пример 2. (Хим-94(1).3) Для членов геометрической прогрессии $b_1, b_2, \dots$ известно, что $b_2b_4 = 25$ и $b_3 + b_5 = 15$. Найти b_1.

Решение. Пусть b_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2b_4 = b_1q\cdot b_1q^3 = b_1^2q^4$, $b_3 + b_5 = b_1q^2 + b_1q^4 = b_1q^2(1+q^2)$ и

$$\begin{cases} b_2b_4 = 25, \\ b_3 + b_5 = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1^2q^4 = 25, \\ b_1q^2(1+q^2) = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1q^2 = \pm 5, \\ b_1q^2(1+q^2) = 15. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $b_1q^2 > 0$, так как $1 + q^2 > 0$, поэтому

$$\begin{cases} b_1q^2 = 5, \\ b_1q^2(1+q^2) = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} q^2 = 2, \\ b_1 = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $\dfrac{5}{2}$.

Пример 3. (Биол-91.3) Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвёртого километров после старта он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?

Решение. Пусть t_n мин – время прохождения $n-$го километра пути. Известно, что $t_n = t_{n-1} + \tau$, где τ – постоянная величина, то есть t_n является арифметической прогрессией с разностью τ. Известно, что $t_2 + t_4 = 3$ мин 20 с, поэтому

$$t_2 + t_4 = t_1 + \tau + t_1 + 3\tau = 2t_1 + 4\tau = 2(t_1 + 2\tau) = 3\frac{1}{3} \iff t_1 + 2\tau = \frac{5}{3};$$

время, затраченное на прохождение 5 км после старта:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = \frac{2t_1 + (5-1)\tau}{2}\cdot 5 = 5(t_1 + 2\tau) = 5\cdot\frac{5}{3} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

Ответ. 8 мин 20 с.

Замечание. При формулировании ответа рекомендуется сохранять обозначения и наименования, предложенные в условии.

Задачи

1. (ЕГЭ) Сумма второго, девятого и десятого члена арифметической прогрессии равна 60. Найти седьмой член этой прогрессии.

2. (ЕГЭ) В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $S_6 = 63$, $q = -0,5$. Найти b_1.

3. (ЕГЭ) В арифметической прогрессии (a_n) $a_{87} = -36$, $a_{89} = 142$. Найти a_{88}.

4. (ЕГЭ) В геометрической прогрессии $(a_n > 0)$ известно, что $a_{n+m} = 27$, $a_{m-n} = 12$. Найти a_m.

5. (ЕГЭ) Вычислить $\dfrac{1+2+2^2+...+2^{13}}{1+2+2^2+...+2^6}$.

6. (ЕГЭ) Вычислить $180 \cdot 1,3(4)$.

7. (ЕГЭ) Вычислить сумму геометрической прогрессии $S = 1 + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{36} + ...$

8. (Физ-79.2) Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов этой прогрессии равна 105. Найти первый член и разность этой прогрессии.

9. (Экон-87.2) В магазине продано 12 тонн орехов трёх сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

10. (ВМК-88.1) Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

11. (ИСАА-93.2) Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи членов этой прогрессии.

12. (ВМК-96.1) Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a+d=10$, $a \cdot d = 7$. Найти b^3+c^3.

13. (Геогр-91.3) Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел (в том же порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.

14. (Физ-92.5) Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

15. (ВМК-95(1).1) В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четвёртого по четырнадцатый включительно равна 77. Найти номер того члена прогрессии, который равен 7.

16. (Хим-89.2) Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

17. (Почв-95.1) Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвёртый член арифметической прогрессии составляет $50\,\%$ от второго члена арифметической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй её член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

18. (М/м-95(1).1) Найти первый член геометрической прогрессии, если известно, что третий член этой прогрессии равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

19. (Псих-97.3) В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего её членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найти последний член прогрессии.

20. (ВМК-79.1) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 6. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Выяснить, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии?

21. (М/м-93(1).2) Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна её первому члену, умноженному на 5, а сумма первых пятнадцати членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.

22. (Филол-75.4) Найти сумму корней уравнения $\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - 3\cos^3 x}{\cos^2 x}$, принадлежащих отрезку $1 \le x \le 50$.

4.3. Скорость, движение и время

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на движение. При составлении систем для таких задач обычно не требуется никаких особых математических знаний. Требуется лишь здравый смысл и знание того, что

$$\text{расстояние} = \text{скорость} \cdot \text{время}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-89.2) Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от пункта A, по горной дороге со скоростью 6 км/час поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения из пункта B. Найти скорость автобуса на подъёме, если известно, что она в 2 раза меньше его скорости на спуске.

Решение. Пусть x км/ч – скорость автобуса на подъёме, a км – расстояние от пункта A до места встречи пешехода с автобусом на его обратном пути. Запишем условие одновременного начала движения и встречи:

$$\frac{a}{6} = \frac{12}{x} + \frac{12-a}{2x},$$

время движения автобуса от пункта B до встречи с пешеходом:

$$\frac{12-a}{2x} = \frac{12}{60}$$

и ограничение времени движения автобуса от пункта A до пункта B:

$$0 < \frac{12}{x} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 12.$$

Из полученной системы найдём x:

$$\begin{cases} \dfrac{12-a}{2x} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{a}{6} = \dfrac{12}{x} + \dfrac{12-a}{2x}, \\ x > 12; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 12 - \dfrac{2}{5}x, \\ ax = 3(36-a), \\ x > 12; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 27x + 180 = 0, \\ x > 12; \end{cases}$$

откуда $x = 12$ (не подходит) или $x = 15$ (подходит).

Ответ. 15 км/ч.

Пример 2. (М/м-97.3) Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 минут в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад, через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найти расстояние от A до места первой встречи автомобилей, если $AB = 480$ км.

Решение. *Первый способ.* Пусть второй автомобиль выехал со скоростью x км/ч из A через τ часов после первого автомобиля. Первая встреча произошла на расстоянии a км от A при обгоне вторым автомобилем первого:

$$\frac{a}{80} = \frac{a}{x} + \tau;$$

встреча двух автомобилей после разворота второго:

$$\frac{480-48}{80} = \frac{480+48}{x} + \tau + \frac{20}{60};$$

прибытие первого автомобиля в B:

$$\frac{48}{80} = \frac{120-48}{x}.$$

Из третьего уравнения получаем $x = 120$ км/ч. Тогда из второго уравнения находим $\tau = \dfrac{2}{3}$ часа и, подставляя всё в первое уравнение, получаем

$$a\left(\frac{1}{80} - \frac{1}{120}\right) = \frac{2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad a = 160.$$

Второй способ: если отсчитывать время с момента первой встречи, то получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{480 - a - 48}{80} = \dfrac{480 - a + 48}{x} + \dfrac{20}{60}, \\ \dfrac{48}{80} = \dfrac{72}{x}; \end{cases}$$

откуда $a = 160$.

Ответ. 160 км.

Пример 3. (Геол-95(1).5) Поезд, идущий с постоянной скоростью из пункта A в пункт B, был задержан у семафора на 16 мин. Расстояние от семафора до пункта B равно 80 км. При каких значениях первоначальной скорости поезд прибудет в пункт B не позже запланированного срока, если после задержки он увеличил скорость на 10 км/ч?

Решение. Пусть x км/ч – первоначальная скорость поезда. Для того чтобы поезд прибыл не позднее расписания, необходимо, чтобы фактическое время в пути от семафора до пункта B не превышало планового, то есть

$$\frac{16}{60} + \frac{80}{x+10} \leq \frac{80}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{15} \leq \frac{200}{x(x+10)},$$

откуда с учётом $x > 0$ получаем

$$x^2 + 10x - 3000 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -60 \leq x \leq 50 \quad \Longrightarrow \quad x \in (0; 50].$$

Ответ. Не более 50 км/ч.

Задачи

1. (ЕГЭ) Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

2. (ЕГЭ) Моторная лодка прошла 10 км по озеру и 4 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

3. (ЕГЭ) Два пешехода отправляются одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 50 км, и встречаются через 5 ч. Определите скорость первого пешехода, если его скорость на 2 км/ч больше, чем у второго.

4. (Почв-82.1) Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через $2/3$ часа после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он шел на $3/8$ часа дольше, чем товарный поезд шел 5 км?

5. (Геогр-78.1) Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошёл за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода. (Собственная скорость – скорость в неподвижной воде.)

6. (Филол-99.1) Расстояние в 160 км между пунктами А и Б автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, со скоростью 20 км/ч. Какое расстояние автомобиль проехал по ровной дороге?

7. (Геогр-95.2) Теплоход затратил 5 часов на путь вниз по течению реки от пункта A до пункта B. На обратный путь против течения он затратил 8 часов 20 минут. Найти скорость теплохода, если путь от A до B равен 100 километрам.

8. (ВМК-97.1) Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению реки. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C – 14 км. В 12^{00} из пункта B отплыла лодка и отправилась в A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула и в 14^{00} того же дня прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде.

9. (Хим-78.2) Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

10. (Экон.К-77.2) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал $1/4$ пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

11. (Геогр-99.3) По реке из пункта A в пункт B выплыл катер. Одновременно из пункта B в пункт A выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от B к A, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта B, повернул обратно и прибыл в пункт A одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

12. (Биол-86.3) Из пункта A по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $6/5$ скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/час. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на один час раньше, чем легковой автомобиль.

13. (Хим-79.3) От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 часов и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянная, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.

14. (Геол-79.4) Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет $5/8$ скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.

4.4. Работа и производительность

Теоретический материал

При составлении систем уравнений для задач этого раздела надо помнить, что

$$\text{работа} = \text{производительность} \cdot \text{время}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-85.3) Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовили за один час 30 деталей?

Решение. Пусть x и y деталей в час – производительности 1-го и 2-го рабочих соответственно; $t = 90/y$ часов – искомая величина. Из условия получаем

$$\begin{cases} \dfrac{60}{x} = \dfrac{60}{y} - 3, \\ \dfrac{30}{x+y} = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 30, \\ 20\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right) = 1. \end{cases}$$

Выразив x из первого уравнения и подставив его во второе, получим уравнение $y^2 - 70y + 600 = 0$ с корнями $y = 60$ и $y = 10$. Корень $y = 60 > 30$ не подходит, а при $y = 10$ искомое время $t = 9$ часов.

Ответ. 9 часов.

Задачи

1. (ЕГЭ) Для распечатки 302 страниц были использованы две копировальные машины. Первая работала 8 минут, вторая 10 минут. Сколько страниц в минуту печатает первая машина, если первая печатает в минуту на 4 страницы больше, чем вторая?

2. (ЕГЭ) Двое рабочих изготавливают по одинаковому количеству деталей. Первый выполнил эту работу за 6 ч, второй за 4 ч, так как изготовлял в час на 14 деталей больше первого. Сколько деталей изготовил второй рабочий?

3. (ЕГЭ) На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй, и они вместе закончили работу через 4 дня. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму. За сколько дней может выстроить эту стену первый каменщик, работая один?

4. (ЕГЭ) За определенное время на заводе собирают 90 автомобилей. Первые 3 часа на заводе выполняли установленную норму, а затем стали собирать на 1 автомобиль в час больше. Поэтому за час до срока уже было собрано 95 автомобилей. Сколько автомобилей в час должны были собирать на заводе?

5. (Геол-93.3) Для рытья котлована выделили два экскаватора. После того, как первый проработал 2 ч, его сменил второй, который за 3 ч закончил работу. Всю работу один второй экскаватор выполнил бы на 4 ч быстрее, чем один первый экскаватор. За какое время выроют котлован оба экскаватора, работая вместе?

6. (Фил-79.4) Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трёх одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

7. (Геол-98(1).4) Первая бригада выполняет работу на 2 часа быстрее второй бригады и на 7 часов медленнее, чем обе бригады, работающие одновременно. Выполнят ли бригады, работающие одновременно, эту работу быстрее, чем за 7 часов 57 минут?

4.5. Проценты, формула сложного процента

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геол-94.7) Технология изготовления дискет состоит из четырёх этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определённое количество процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе – на 25 %, на втором этапе – на 20 %, на третьем этапе – на 10 %, на четвёртом этапе – на 8 %. На сколько процентов в результате увеличится содержание кремния?

Решение. Напомним, что одним процентом называется одна сотая часть числа. Пусть S — исходное содержание кремния, R – содержание кремния после четырёх этапов.

Фраза «величина S увеличилась на $p\,\%$» означает, что значение величины S возросло на $\dfrac{S}{100}\cdot p$ и стало равно $S+\dfrac{S}{100}\cdot p = S\left(1+\dfrac{1}{100}\cdot p\right)$, то есть увеличение на $p\,\%$ даёт увеличение в $\left(1+\dfrac{1}{100}\cdot p\right)$ раз. Тогда после четырёх этапов:

$$R = S\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right) = S\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{27}{25} = S\cdot 1,782.$$

Содержание кремния увеличилось на $\left(\dfrac{R-S}{S}\right)\cdot 100\,\% = 78,2\,\%$.

Ответ. $78,2\,\%$.

Пример 2. (ИСАА-95.3) На счёт, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на ту сумму, которую вкладчик имел на счету в начале второго квартала, начисляются в конце этого квартала r_2 процентов, причём $r_1+r_2=150$. Вкладчик положил на счёт в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала (после начисления процентов) половину этой суммы. При каком значении r_1 счёт вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

Решение. Пусть вкладчик в начале первого квартала вложил S денег, тогда на начало второго перейдёт сумма

$$S\left(1+\frac{r_1}{100}\right)-\frac{S}{2} = S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right);$$

в конце второго квартала на счету будет

$$S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{r_2}{100}\right) = S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{150-r_1}{100}\right) =$$

$$= S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{r_1}{100}\right);$$

рассмотрим функцию

$$f(r_1) = S\left(\frac{r_1}{100}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{r_1}{100}\right) =$$

$$= \frac{S}{100^2}(r_1+50)(250-r_1) = S\cdot 10^{-4}(-r_1^2+200r_1+12500).$$

Наибольшее значение $f(r_1)$ принимает в вершине параболы, которая задаётся квадратным трёхчленом относительно r_1. Абсцисса вершины $r_1 = 100\,\%$.

Ответ. $100\,\%$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Некоторое число уменьшили на 20 %. На сколько процентов надо увеличить результат, чтобы получить первоначальное число?

2. (ЕГЭ) Цену товара повысили на 50 %, а затем снизили на 50 %. Как изменится цена товара?

3. (ЕГЭ) Магазин в первый день продал 40 % имеющихся овощей. За второй день он продал 80 % овощей, проданных в первый день. В третий день оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

4. (ЕГЭ) Цена изделия составляла 1000 рублей и была снижена сначала на 10 %, а затем еще на 20 %. Какова окончательная цена товара?

5. (ЕГЭ) Цену товара повысили на 25 %, затем новую цену повысили еще на 10 % и, наконец, после перерасчёта произвели повышение цены еще на 12 %. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

6. (ЕГЭ) Сумма двух чисел равна 1100. Найдите наибольшее из них, если 6 % одного из них равны 5 % другого.

7. (ЕГЭ) Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения трёх лет она выросла на 765,1 рубля при 2 % годовых.

8. (Соц-00.2) В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

9. (Геол-98.4) Из цистерны в бассейн сначала перелили 50 % имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 литров, затем еще 5 % от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31 %. Сколько литров воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 литров воды?

10. (Экон.М-95.4) В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. тонн железной руды. В течение нескольких последующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25 % по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объём добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. тонн. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

11. (Геол-96.6) В двух банках в конце года на каждый счёт начисляется прибыль: в первом банке – 60 % к текущей сумме на счёте, во втором – 40 % к текущей сумме на счёте. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги – во второй банк, с таким расчётом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

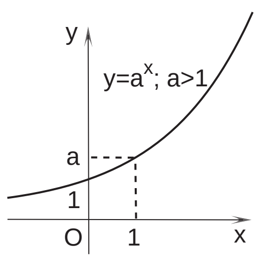
5. Стандартные показательные и логарифмические уравнения и неравенства

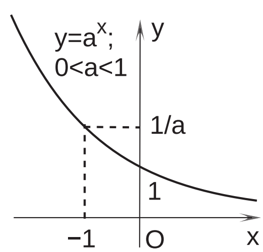
5.1. Преобразование логарифмических выражений. Сравнение логарифмических и показательных значений

Теоретический материал

Функция $y = a^x$, где $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *показательной*. Областью её определения являются все $x \in \mathbb{R}$. Областью её значений являются все $y > 0$, причём $\forall y > 0$ найдётся только одно значение x, на котором он достигается.

Если $a > 1$, то $y = a^x$ возрастает; если $0 < a < 1$, то $y = a^x$ убывает.





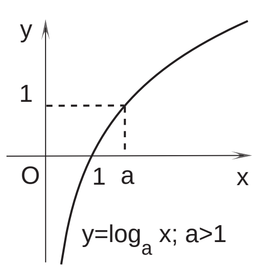
При преобразовании выражений с показательными функциями необходимо помнить свойства степеней с вещественными показателями:

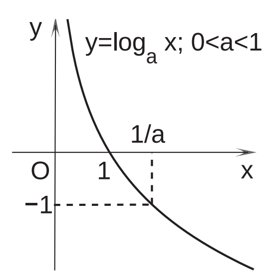
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad a > 0;$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad b > 0;$$

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

Функция $y = \log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической*. Напомним, что число b называется *логарифмом* числа $c > 0$ по основанию $a > 0$, $a \neq 1$, если $a^b = c$; обозначение: $b = \log_a c$, где $c > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.





Показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными.

Областью значения логарифмической функции является вся числовая ось, причём $\forall y \in \mathbb{R}$ найдётся только один $x > 0$, на котором y достигается.

Если $a > 1$, то $y = \log_a x$ возрастает; если $0 < a < 1$, то $y = \log_a x$ убывает.

При преобразовании выражений с логарифмическими функциями необходимо помнить свойства логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad xy > 0;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad \frac{x}{y} > 0;$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0;$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \neq 0;$$

$$\log_{a^y} x = \frac{1}{y} \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad y \neq 0;$$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad x > 0.$$

Последняя формула называется формулой перехода к новому основанию и имеет полезные следствия:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad x \neq 1;$$

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Напомним также то, что

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \qquad \lg x = \log_{10} x, \quad \ln x = \log_e x;$$

и основное логарифмическое тождество:

$$a = b^{\log_b a}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-98.1) Вычислить $\log_{b^3 \sqrt[7]{a^5}} \dfrac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}$, если $\log_b a = \sqrt{3}$.

Решение. Перейдём к основанию b:

$$\log_{b^3 \sqrt[7]{a^5}} \frac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}} = \frac{\log_b \dfrac{\sqrt[7]{a}}{b\sqrt{b}}}{\log_b \left(b^3 \sqrt[7]{a^5}\right)} = \frac{\log_b \sqrt[7]{a} - \log_b b\sqrt{b}}{\log_b b^3 + \log_b \sqrt[7]{a^5}} = \frac{\dfrac{1}{7}\log_b a - \dfrac{3}{2}}{3 + \dfrac{5}{7}\log_b a} = \frac{\dfrac{1}{7}\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}}{3 + \dfrac{5}{7}\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 21}{42 + 10\sqrt{3}} = \frac{2 - 7\sqrt{3}}{14\sqrt{3} + 10} = \frac{(2 - 7\sqrt{3})(7\sqrt{3} - 5)}{2(49 \cdot 3 - 25)} = \frac{49\sqrt{3} - 157}{244}.$$

Ответ. $\dfrac{49\sqrt{3} - 157}{244}$.

Замечание. В принципе, полученную в ходе решения дробь $\dfrac{2\sqrt{3} - 21}{42 + 10\sqrt{3}}$ тоже можно считать ответом. Проведённые преобразования носят сугубо формальный характер.

Пример 2. (Геогр-97(1).1) Найти область определения функции $y=\sqrt{x^2-x-2}+\log_{3+x}(9-x^2)$.

Решение. Область определения данной функции складывается из неотрицательности подкоренной функции, положительности функции, стоящей под знаком логарифма, положительности основания логарифма и неравенства основания единице:

$$\begin{cases} x^2-x-2\geq 0, \\ 9-x^2>0, \\ 3+x>0, \\ 3+x\neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty), \\ -3<x<3, \\ x>-3, \\ x\neq -2; \end{cases} \iff (-3;-2)\cup(-2;-1]\cup[2;3).$$

Ответ. $(-3;-2)\cup(-2;-1]\cup[2;3)$.

Пример 3. (Биол-94.2) Какое из двух чисел больше: $\sqrt{11}$ или $9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2}$? Ответ должен быть обоснован.

Решение. Преобразуем показатель степени второго числа:

$$\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{2}\log_8 2=\frac{1}{2}\log_3\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}\log_3\frac{10}{9}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log_3\frac{10}{9}+\log_3 3\right)=\frac{1}{2}\log_3\frac{10}{3}.$$

Значит, второе число имеет вид $9^{\frac{1}{2}\log_3\frac{10}{3}}=3^{\log_3\frac{10}{3}}=\dfrac{10}{3}$. Сравниваем:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{11} & \vee & \dfrac{10}{3} \\ 3\sqrt{11} & \vee & 10 \\ 99 & \vee & 100. \end{array}$$

Поскольку $99<100$ и не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный результат соответствует знаку неравенства между исходными числами.

Ответ. Второе больше.

Задачи

1. (ЕГЭ) Вычислить $\log_2\log_2\sqrt[4]{2}$.
2. (ЕГЭ) Вычислить $\log_6 8-\log_6 2+\log_6 9$.
3. (ЕГЭ) Указать значение выражения $\left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{\log_9 6}}$.
4. (ЕГЭ) Указать значение выражения $\log_6\dfrac{36}{a}$, если $\log_6 a=-6$.
5. (ЕГЭ) Указать значение выражения $\lg 15$, если $\lg 2=a$, $\lg 3=b$.

6. (ЕГЭ) Упростить $6^{-0,5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0,5+\log_2 0,5}$.

7. (ЕГЭ) Найти значение выражения $\dfrac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - (\log_3 2)\log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18}$.

8. (ЕГЭ) Вычислить $\log_{3\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$, если $\log_9 6 = a$.

9. (ВМК-84.1) Известно, что $\log_a b = 7$. Найти $\log_b (a^2 b)$.

10. (Экон-90.1) Имеют ли общие точки область значений функции $y = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}x - 2x^2$ и промежуток $[\log_3 15; +\infty)$? Ответ обоснуйте.

11. (ВМК-83.1) Найти область определения функции $y = \sqrt{16 - x^2}\log_2 (x^2 - 5x + 6)$.

12. (Геол-89.1) Определить, какое из чисел больше: $2\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{5}$ или $3\log_8 26$? Ответ должен быть обоснован.

13. (ВМК-82.1) Какое из чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5 + \log_{\frac{1}{2}} 9}$?

14. (Геол.ОГ-85.1) Определить, какое из чисел больше: $2^{\log_3 5} - 0,1$ или $5^{\log_3 2}$? Результат обосновать.

15. (Физ-82.3) Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислить $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

16. (М/м-92.3) Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y$, $q = \log_x y$. Найти число $\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3} \sqrt{xyz}$, считая, что оно определено.

5.2. Простейшие показательные уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Теоретический материал

При решении простейшего уравнения с показательными функциями

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0$$

возможны два случая:

1) $a = 1$, $\quad f(x)$ и $g(x)$ определены;
2) $a > 0,\ a \neq 1$, $\quad f(x) = g(x)$.

При решении простейшего неравенства с показательными функциями

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad a > 0$$

возможны следующие варианты:

1) $a > 1$, $\quad f(x) > g(x)$;
2) $a = 1$, $\quad$ нет решений;

3) $0 < a < 1, \quad f(x) < g(x)$.

Заметим, что в случае нестрогого неравенства между показательными функциями нестрогим становится и неравенство между $f(x)$ и $g(x)$, причём случай $a = 1$ рассматривается отдельно.

Особого внимания заслуживает ситуация, когда в качестве основания степени выступает не число, а функция $a(x)$:

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) \text{ и } g(x) \text{ определены}; \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) \in (0;1) \cup (1;+\infty), \\ f(x) = g(x); \end{cases} \end{array}\right. \tag{24}$$

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \end{array}\right. \tag{25}$$

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) \text{ и } g(x) \text{ определены}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases} \end{array}\right. \tag{26}$$

Отметим, что требование $a(x) > 0$ фактически накладывается определением показательной функции.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Экон.М-97.1) Решить уравнение $3^{|x|} = 5^{x^2+3x}$.

Р е ш е н и е. Используя основное логарифмическое тождество, приведем правую часть уравнения к показательному виду с основанием 3 и воспользуемся монотонностью показательной функции:

$$3^{|x|} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{x^2+3x} \iff 3^{|x|} = 3^{(x^2+3x)\log_3 5} \iff |x| = x(x+3)\log_3 5.$$

Модуль будем раскрывать по определению.

1) Значение $x = 0$ является решением.

2) При $x > 0$ уравнение примет вид

$$x = x(x+3)\log_3 5 \iff (x+3)\log_3 5 = 1 \iff x = \log_5 3 - 3.$$

Это значение отрицательно и, следовательно, не подходит.

3) При $x<0$ получим

$$-x = x(x+3)\log_3 5 \iff (x+3)\log_3 5 = -1 \iff x = -\log_5 3 - 3 < 0.$$

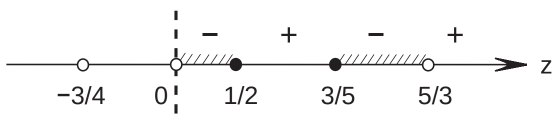
Ответ. $0;\ -\log_5 3-3$.

Пример 2. (Геол.ОГ-77.1) Решить неравенство $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x - 11\cdot 3^{x-1}-5} \ge 5$.

Решение. Обозначив $z=3^x>0$, получаем

$$\frac{11z-93}{12z^2-11z-15} \ge 5 \iff \frac{10z^2-11z+3}{12z^2-11z-15} \le 0.$$

Отметим нули числителя $z=\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{3}{5}$ и нули знаменателя $z=-\dfrac{3}{4}$, $z=\dfrac{5}{3}$ на числовой прямой и применим метод интервалов.



Получим $\left[\begin{array}{l} z\le \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{3}{5}\le z<\dfrac{5}{3}; \end{array}\right.$ следовательно, $\left[\begin{array}{l} x\le \log_3\dfrac{1}{2}; \\ \log_3\dfrac{3}{5}\le x<\log_3\dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

Ответ. $(-\infty;-\log_3 2]\cup\left[\log_3\dfrac{3}{5};\log_3\dfrac{5}{3}\right)$.

Пример 3. (ВМК-72.1) Решить уравнение $9^{1-(x-1)^2}-12\cdot 3^{-(x-1)^2}+1=0$.

Решение. Обозначив $z=3^{-(x-1)^2}>0$, получим

$$9z^2-12z+1=0 \iff z=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$3^{-(x-1)^2}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3} \iff -(x-1)^2=\log_3(2\pm\sqrt{3})-1 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = 1-\log_3(2-\sqrt{3}) = 1+\log_3(2+\sqrt{3}); \\ (x-1)^2 = 1-\log_3(2+\sqrt{3}) < 0 \text{ — нет решений}; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff x-1=\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})} \iff x=1\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})}.$$

Ответ. $1\pm\sqrt{1+\log_3(2+\sqrt{3})}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $3^x = 27 \cdot \sqrt[4]{9}$.
2. (ЕГЭ) Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} < 1$.
3. (ЕГЭ) Решить неравенство $7^x - \left(\sqrt{7}\right)^x - 6 > 0$.
4. (ЕГЭ) Решить неравенство $(0,1)^{4x^2-2x-2} \geq (0,1)^{2x-3}$.
5. (Экон-83.1) Решить уравнение $2^{x+2} \cdot 5^{x+2} = 2^{3x} \cdot 5^{3x}$.
6. (Физ-95(2).1) Решить уравнение $2^{x-1} \cdot 3^x = 0,5 \cdot 6^{2-x}$.
7. (Хим-98.1) Решить уравнение $4^x + 2^x - 2 = 0$.
8. (Геол-84.1) Решить уравнение $3 \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0$.
9. (Хим-90.1) Решить уравнение $4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64$.
10. (Физ-82.4) Решить неравенство $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$.
11. (Геол-80.1) Решить неравенство $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$.
12. (ВМК-77.1) Решить неравенство $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$.
13. (Физ-80.4) Решить неравенство $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.
14. (Физ-97(1).5) Решить неравенство $2^{x-3} < \frac{2}{8^{\frac{1}{x}}}$.
15. (Геол-97(1).4) Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2} > 2,25^{x^2-10}$.
16. (ЕГЭ.С) Решить неравенство $(1,25)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$.
17. (Физ-96(1).3) Решить уравнение $3^{2x} = (0,6^x + 2) \cdot 25^x$.
18. (Биол-91.1) Решить уравнение $4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0$.
19. (Физ-96.3) Решить уравнение $5^{\frac{x}{2}} - 5^{2-\frac{3x}{2}} = 24 \cdot 5^{-\frac{x}{2}}$.
20. (Физ-94(1).3) Решить уравнение $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$.
21. (Физ-96(2).5) Решить неравенство $4^{x-0,5} + 2^{x+1} - 16 < 0$.
22. (М/м-75.1) Решить неравенство $98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}$.
23. (Геогр-73.4) Найти решения уравнения $3^{x^2+4x} = \frac{1}{25}$, удовлетворяющие неравенству $x > -3$.

24. (Почв-92.3) Решить уравнение $\dfrac{9^x - 82\cdot 3^x + 162 - 3^{\frac{x}{2}+2}}{3^{\frac{x}{2}} - 9} = -9$.

25. (Хим-97.2) Решить неравенство $(\sqrt{2}+1)^x + 1 < 2(\sqrt{2}-1)^x$.

26. (Хим-95(1).3) Решить неравенство $2^{\frac{1-x}{x}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$.

27. (Физ-85.4) При каждом значении параметра a решить уравнение $4^x - 2a(a+1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0$.

5.3. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Теоретический материал

При решении простейших уравнений и неравенств с логарифмами используются переходы к системам и совокупностям равносильных условий, что нередко упрощает последовательность преобразований, а также часто избавляет от необходимости находить условия на область допустимых значений переменной.

Например, простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

равносильно условиям $f(x) = g(x) > 0$. Заметим, что из двух требуемых условий $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ при выполнении равенства $f(x) = g(x)$ достаточно выбрать лишь одно (удобнее выбрать более простое).

При решении простейшего логарифмического неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

возможны два случая:

1) $a > 1$, $\quad f(x) > g(x) > 0$;
2) $0 < a < 1$, $\quad 0 < f(x) < g(x)$.

Особого внимания заслуживает ситуация, когда в качестве основания логарифма выступает не число, а функция $a(x)$:

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) > 0, \\ a(x) \in (0;1) \cup (1;+\infty); \end{cases} \tag{27}$$

причём из двух требуемых условий $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ достаточно выбрать одно (более простое);

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x); \end{cases} \end{array} \right. \tag{28}$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ 0 < f(x) \leq g(x). \end{cases} \end{array} \right. \tag{29}$$

Естественно, что любые другие задачи с логарифмическими функциями так или иначе сводятся к решению приведённых простейших уравнений и неравенств.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-74.2) Решить уравнение
$\log_{16} (x^2 - 2x - 3)^2 - 2\log_{16} (x^2 + x - 2) = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Представим 16 в виде 2^4, вынесем все степени за знаки логарифмов и, домножив равенство на 2, получим

$$\log_2 |x^2 - 2x - 3| - \log_2 (x^2 + x - 2) = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |x^2 - 2x - 3| = 2(x^2 + x - 2), \\ |x^2 - 2x - 3| > 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |(x+1)(x-3)| = 2(x^2 + x - 2), \\ x \neq -1 \quad \text{и} \quad x \neq 3. \end{cases}$$

Решим полученное уравнение с модулем.

1) При $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ получим

$$x^2 - 2x - 3 = 2x^2 + 2x - 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Подходит $x = -2 - \sqrt{5}$.

2) При $x \in (-1; 3)$ получим

$$-x^2 + 2x + 3 = 2x^2 + 2x - 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2 = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Подходит $x = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

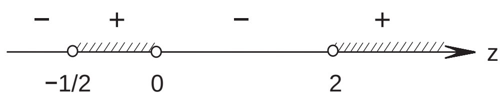
Ответ. $-2 - \sqrt{5}$; $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Пример 2. (Геол-98.5) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x-2)} + \dfrac{3}{2}$.

Решение. Обозначив $z = \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$, получаем

$$z > \frac{1}{z} + \frac{3}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2z^2 - 3z - 2}{z} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(2z+1)(z-2)}{z} > 0,$$

откуда $-\dfrac{1}{2} < z < 0$ или $z > 2$.



Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 0; \\ \log_{\frac{1}{3}}(x-2) > 2; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{3} > x-2 > 1; \\ 0 < x-2 < \dfrac{1}{9}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 3 < x < \sqrt{3}+2; \\ 2 < x < \dfrac{19}{9}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\left(2; \dfrac{19}{9}\right) \cup (3; \sqrt{3}+2)$.

П р и м е р 3. (Геогр-94.3) Решить неравенство $\log_x(2-x-x^2) > 0$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.* Исходное неравенство эквивалентно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ 2-x-x^2 > 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < 2-x-x^2 < 1; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ x^2+x-1 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2+x-2 < 0, \\ x^2+x-1 > 0; \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ -2 < x < 1, \\ x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right); \end{cases} \end{array}\right. \iff \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1.$$

Второй способ. Из положительности функции под логарифмом следует $2-x-x^2 > 0$, то есть $-2 < x < 1$. Значит, основание логарифма меньше 1 и исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2-x-x^2 < 1, \\ 0 < x < 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \\ 0 < x < 1; \end{cases}$$

откуда $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1$.

О т в е т. $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти произведение корней уравнения $2\log_4^2 x + \log_4 x - 1 = 0$.
2. (ЕГЭ) Решить неравенство $\log_3 \dfrac{x-7}{2x-5} < 0$.
3. (Соц-98.2) Решить уравнение $\log_2(x^2-5) = \dfrac{3}{2}\log_{\sqrt{8}}(1-x)$.
4. (Почв-77.2) Решить уравнение $2\lg\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - \lg(x-1) = \lg\left(x+\dfrac{5}{2}\right) + \lg 2$.
5. (Геол-00.1) Решить неравенство $\log_{\sqrt{2}}(5x-4) \le 8$.
6. (Геол.ОГ-83.3) Решить неравенство $\log_3(5x^2+6x+1) \le 0$.
7. (Псих-80.4) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \ge 1$.
8. (ВМК-86.1) Решить неравенство $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) - 1 \le 0$.
9. (М/м-87.2) Решить неравенство $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3}) < 2$.
10. (ВМК-90.1) Решить неравенство $\log_{x^2+4} 8 < 1$.
11. (Биол-96.3) Решить неравенство $1 + \log_{\frac{1}{4}}(\log_3(4-x)) > 0$.
12. (Геол-00(1).3) Решить неравенство $\log_2(x-3)(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2)(x-6) \le 2$.
13. (Филол-98.3) Решить уравнение $\dfrac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2$.
14. (Геол.ОГ-82.3) Решить неравенство
$\log_3((x+2)(x+4)) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7$.
15. (Хим-97(1).2) Решить уравнение $\log_x(3x-2) = 2$.
16. (Физ-97(1).3) Решить уравнение $\log_9 \dfrac{x^2}{4} + \log_3(x+5) = 1$.
17. (Биол-80.2) Решить уравнение $2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 \dfrac{x}{4} - 11 = 0$.
18. (Геол.ОГ-76.1) Найти все решения уравнения $4 + \log_2 x^2 = \log_x 64$.
19. (Хим-98(1).2) Решить уравнение $\log_4 x + 2\log_x 4 = 3$.
20. (Филол-89.3) Решить уравнение $\log_{2x+2}(2x^2-8x+6) = 2$.
21. (Почв-71.5) Решить неравенство $2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) \ge 1$.
22. (Почв-96(1).2) Решите уравнение $\log_{4x-x^2} x = \log_{12-3x} x$.
23. (ВМК-96(1).2) Решить уравнение $\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2$.

24. (Почв-95(1).3) Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_x 2} - \log_2 \dfrac{1}{x} \le 2$.

25. (Геогр-72.3) Найти все значения x, для которых справедливо неравенство $2\log_7 x - \log_x 49 < 3$.

26. (ЕГЭ) Решить неравенство $\log_{x-1}(x+2) \le 0$.

27. (ВМК-73.2) Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}} \left(5x - \dfrac{3}{10}\right) \le 0$.

28. (Филос-92.2) Решить неравенство $\log_x (x^2 - x^3 + 21x) \ge 3$.

29. (М/м-97(1).2) Решить неравенство $\log_{x+1} \dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} \le 1$.

30. (Экон-98.1) Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-x}{5}} \dfrac{x-1}{2} \ge 0$.

31. (Геол-75.2) Решить неравенство $\log_{9x^2-6x+1} \dfrac{1}{9x^2-18x+8} < -1$.

32. (Геол-73.4) Решить неравенство $\log_{2x-x^2} \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^4 > 0$.

5.4. Смешанные задачи

Данный раздел рекомендуется изучать только после детального ознакомления с предыдущими базовыми разделами. В противном случае рекомендуется либо отложить его изучение, либо вернуться к изучению предыдущих разделов до достижения необходимого уровня знаний.

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $10^{1-\lg x} = 100^{2+\lg x}$.

2. (ВМК-85.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} 6^x - 2\cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$

3. (Хим-92.1) Решить уравнение $x + 1 + \log_{\frac{1}{3}}(-2 + 3^{-x}) = 0$.

4. (М/м-76.1) Решить уравнение $\log_{\sin(-x)} \left(\sin \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{3x}{2}\right) = 1$.

5. (ИСАА-99.1) Решить уравнение $\lg^2 (x-2)^2 = 3^{2\log_3 \sqrt{2}} \cdot \dfrac{\log_5(2-x)}{\log_5 10}$.

6. (Экон.К-80.1) Решить неравенство $\log_5(26 - 3^x) > 2$.

7. (Биол-71.1) Решить уравнение $\log_{\frac{1}{4}} 2x \cdot \log_{\frac{1}{4}} \left(x \cos^5 \dfrac{\pi}{3}\right) = 7\cos\dfrac{2\pi}{3} \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2$.

8. (М/м-95.2) Решить неравенство $\dfrac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3$.

9. (М/м-88.2) Решить неравенство $\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0$.

10. (Физ-87.2) Решить уравнение $4^{\sin x} + 2^{5-2\sin x} = 18$.

11. (М/м-94(2).2) Решить систему $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

12. (Почв-83.3) Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32. \end{cases}$

13. (Почв-75.3) Решить уравнение $x + 27^{\frac{5}{2}|\log_{9\sqrt{3}} \sqrt[3]{x}|} = \dfrac{10}{3}$.

14. (Биол-74.2) Решить уравнение $5 \cdot \left(\dfrac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{\frac{\sin 2x}{2}}$.

15. (Физ-89.3) Решить уравнение $\log_2 (x+4) + 2\log_2 \sqrt{x} = 5$.

16. (Геол-97(1).2) Решить уравнение $2 - \log_3 x = \log_3 \left(\dfrac{5}{3}|x| + 2\right)$.

17. (Физ-94(1).2) Решить уравнение $\dfrac{1}{6}\log_2 (x-2) - \dfrac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x-5}$.

18. (Физ-83.3) Решить неравенство $\dfrac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2}\log_2 x > 1$.

19. (Геол-83.3) Решить неравенство $\log_{\sin \frac{\pi}{3}} (x^2 - 3x + 2) \geq 2$.

20. (ИСАА-94.2) Решить уравнение $2^{x\log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1$.

21. (Филол-91.2) Решить уравнение $\log_2 (5 \cdot 2^x + 3) = 2x + 1$.

22. (Биол-87.3) Решить неравенство $\dfrac{3\log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2\log_{0,5} x + 1$.

23. (Почв-70.2) Решить уравнение $\log_8 (4^{x^2-1} - 1) + \dfrac{2}{3} = \log_8 (2^{x^2+2} - 7)$.

24. (ВМК-76.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - \log_2 y = 2, \\ 2^x \cdot \log_2 y = 1. \end{cases}$

25. (Геол-96(1).3) Решить уравнение $\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}} (x-1) = 2$.

26. (Геол-97.5) Решить неравенство $11^{\log_{\frac{1}{11}} \log_7 x} < 7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{11} x}$.

27. (Физ-81.4) Решить неравенство $5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1$.

28. (Почв-98.4) Решить систему $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$

6. Линейные и однородные тригонометрические уравнения, системы тригонометрических уравнений, использование ограниченности тригонометрических функций

6.1. Линейные тригонометрические уравнения, метод вспомогательного аргумента

Теоретический материал

Линейным тригонометрическим уравнением называется уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = c.$$

Если хотя бы один из коэффициентов a или b равен нулю, то решение не требует специальных подходов, поэтому будем рассматривать случай $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Если свободный член линейного уравнения равен нулю, то оно принимает вид

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

и называется *линейным однородным тригонометрическим уравнением.*

Для его решения рассматривается возможность $\cos x = 0$, которая при подстановке в уравнение приводит к условию $\sin x = 0$, противоречащему в данном случае основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Делением на $\cos x$ (где $\cos x \neq 0$) исходное уравнение приводится к виду

$$a\operatorname{tg} x = -b,$$

после чего оно решается как простейшее тригонометрическое уравнение.

Для преобразования левой части линейного тригонометрического уравнения

$$a\sin x + b\cos x = c$$

используется способ введения дополнительного угла (*метод вспомогательного аргумента*); обе части уравнения делятся на величину $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

из свойств тригонометрических функций заключаем, что найдётся единственный угол φ такой, что

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \varphi \in [0; 2\pi),$$

после чего уравнение переписывается в виде

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{то есть} \quad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

а затем решается как простейшее тригонометрическое уравнение.

При решении уравнения

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

можно в качестве дополнительного угла использовать $\psi\in[0;2\pi)$ такой, что $\cos\psi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\psi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; тогда уравнение примет вид

$$\cos(x-\psi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Выбор пути сведения к простейшему уравнению относительно синуса или косинуса зависит от конкретных условий рассматриваемой задачи, однако возможность введения дополнительного угла обусловлена основным тригонометрическим тождеством, то есть $\forall p,q\in\mathbb{R}$ таких, что $p^2+q^2=1$, найдётся такой угол $\varphi\in[0;2\pi)$, что $\sin\varphi=p$, $\cos\varphi=q$.

Таким образом,

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\psi).$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-85.4) Решить уравнение $3\sin x+5\cos x=\sqrt{17}$.

Решение. Уравнение является линейным и решается методом вспомогательного аргумента:

$$\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x+\frac{5}{\sqrt{34}}\cos x=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{34}},\quad \text{где}\quad \sqrt{34}=\sqrt{3^2+5^2};$$

существует угол $\varphi\in[0;2\pi)$ такой, что $\sin\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$, поэтому $\cos(x-\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Longleftrightarrow x-\varphi=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\Longleftrightarrow x=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Замечание. В качестве значения дополнительного угла можно использовать любой из вариантов:

$$\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}=\arccos\frac{5}{\sqrt{34}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}=\operatorname{arcctg}\frac{5}{3}.$$

Ответ. $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти сумму корней уравнения $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$, принадлежащих промежутку $[-\pi;\pi]$. Ответ записать в градусах.

2. (Физ-96(1).1) Решить уравнение $1 - \sin 5x = \cos 5x$.
3. (Хим-82.1) Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$.
4. (Хим-79.1) Решить уравнение $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$.
5. (Физ-94(2).2) Решить уравнение $5\cos x + 2\sin x = 3$.
6. (Физ-98(2).1) Решить уравнение $\cos 4x - \sin 3x \cos x + \cos 2x = 0$.
7. (Филол-94.1) Решить уравнение $\dfrac{2}{\pi}\sin x + \cos 19\pi = \cos x$.
8. (Псих-81.3) Найти все решения уравнения $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$, удовлетворяющие условию $0,4\pi < x < \dfrac{6\pi}{7}$.
9. (Геол-79.3) Найти все числа A, при каждом из которых уравнение $5\sin x + 2\cos x = A$ имеет решение.
10. (Экон-92.1) Вычислить $\log_{11/25}|\sin 3\beta| + \log_{11/25}|\sin\beta|$, если $\sin\left(\beta - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\beta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.
11. (Геол-90.3) Решить уравнение $1 - (2\cos x + \sqrt{3})\cdot \operatorname{ctg} x = 2\sin x$.
12. (Геол.ОГ-79.6) Найти все значения параметра α, при каждом из которых уравнение $x^2 + \dfrac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \dfrac{1}{\cos\alpha} + 2\sqrt{2} = 0$ имеет единственное решение.
13. (Геогр-00(1).3) Решить уравнение
$$3(\sin x - 1) + 4\cos x + \cos\left(2x + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = 0.$$

6.2. Однородные тригонометрические уравнения второй степени, замена тригонометрических выражений

Теоретический материал

Тригонометрическое уравнение вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

где $n \in \mathbb{N}$, все $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, называется *однородным тригонометрическим уравнением n-ой степени* (все слагаемые имеют одинаковую степень относительно $\sin x$ и $\cos x$).

При $a_0 = 0$ левая часть уравнения раскладывается на множители. Приравнивая их к нулю, приходим к совокупности уравнений: $\cos x = 0$ и однородному уравнению меньшей степени.

При $a_0 \neq 0$ рассматривается возможность $\cos x = 0$, которая при подстановке в уравнение приводит к условию $\sin x = 0$, противоречащему в данном случае основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Значит, в однородном уравнении $\cos x \neq 0$, и обе части уравнения можно разделить на $\cos^n x$. Полученное уравнение

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \ldots + a_{n-1} \operatorname{tg} x + a_n = 0$$

является уравнением n-ой степени относительно $\operatorname{tg} x$.

Однородное уравнение второй степени имеет вид

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0.$$

Пусть $a_0 \neq 0$. Делением на $\cos^2 x \neq 0$ (в соответствии с общим приёмом решения однородных тригонометрических уравнений) оно приводится к виду

$$a_0 \operatorname{tg}^2 x + a_1 \operatorname{tg} x + a_2 = 0,$$

после чего решается как квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$.

При ненулевой правой части тригонометрического уравнения

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = a_3$$

полезно использовать представление $a_3 = a_3 \cdot 1 = a_3 \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$, что позволяет привести уравнение к однородному:

$$(a_0 - a_3) \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + (a_2 - a_3) \cos^2 x = 0.$$

Заметим, что если при решении линейного уравнения

$$a \sin x + b \cos x = c$$

воспользоваться формулами двойного угла и основным тригонометрическим тождеством, то уравнение запишется в виде

$$2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = c \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (b + c) \sin^2 \frac{x}{2} - 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + (c - b) \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$

то есть линейное уравнение свелось к однородному уравнению второй степени.

З а м е ч а н и е. Для сведения линейного уравнения к уравнению второй степени можно также воспользоваться формулами универсальной тригонометрической подстановки:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Следует отметить, что эти формулы сужают область определения исходного уравнения, так как не допускают случая $\cos \dfrac{x}{2} = 0$, то есть $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; поэтому серию $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ как возможное решение следует проверять отдельно, до применения этих формул. В результате получим

$$a \sin x + b \cos x = c \quad \Longleftrightarrow \quad (b + c) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c - b = 0,$$

то есть задача свелась к решению того же квадратного уравнения для $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$, что и в предыдущем случае.

Можно, наоборот, свести однородное уравнение второй степени к линейному. Для этого надо использовать формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

В этом случае однородное уравнение

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0$$

примет вид

$$a_0 \frac{1-\cos 2x}{2} + a_1 \frac{\sin 2x}{2} + a_2 \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \iff$$
$$\iff a_1 \sin 2x + (a_2 - a_0)\cos 2x = -a_0 - a_2.$$

Полученное уравнение можно решить методом вспомогательного аргумента.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол.ОГ-85.4) Решить уравнение $5\sin^2 x - 4\sin x \cos x - \cos^2 x = 4$.

Решение. Представив правую часть в виде

$$4 = 4\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x,$$

после приведения подобных слагаемых получим

$$\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, а это противоречит основному тригонометрическому тождеству, поэтому решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями рассматриваемого уравнения, и обе его части можно поделить на $\cos^2 x \neq 0$:

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1; \\ \operatorname{tg} x = 5; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \operatorname{arctg} 5 + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \operatorname{arctg} 5 + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. (Геогр-76.3) Решить уравнение $1 - \sin 2x = -(\sin x + \cos x)$.

Решение. Обозначив $z = \sin x + \cos x$, получаем $z^2 = 1 + \sin 2x$, то есть $\sin 2x = z^2 - 1$. Исходное уравнение после подстановки принимает вид

$$1 - (z^2 - 1) = -z \iff z^2 - z - 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} z = -1; \\ z = 2. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем совокупность уравнений и применяем метод вспомогательного аргумента:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = -1; \\ \sin x + \cos x = 2; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 1. \end{array}\right.$$

Второе уравнение решений не имеет; из первого

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \quad \text{то есть} \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ \pi + 2\pi n;\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Если величины $\sin x$ и $\cos x$ входят в уравнение только в виде суммы (или разности) и произведения, то с помощью замены $z = \sin x + \cos x$ (или $z = \sin x - \cos x$) исходное уравнение сводится к квадратному относительно z.

Задачи

1. (ЕГЭ) Указать число корней уравнения $6\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 2$, принадлежащих промежутку $[-\pi; 0]$.
2. (Физ-91.1) Решить уравнение $8 - 7\sin 2x = 12\sin^2 x$.
3. (ИСАА-97.3) Решить уравнение $1 - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$.
4. (Геол.ОГ-80.1) Решить уравнение $\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x$.
5. (Хим-94(1).2) Решить уравнение $\sin 2x + \cos^2 x = 0$.
6. (Почв-79.3) Решить уравнение $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x + 1$.
7. (ВМК-98.3) Решить уравнение $24|\cos^3 x| - 2\sin^3 x + \sin x = 0$.
8. (Хим-94.3) Решить уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$.

6.3. Системы тригонометрических уравнений

Теоретический материал

Если в системе уравнений переменные являются аргументами тригонометрических функций, то говорят о *системе тригонометрических уравнений.* При решении таких систем используются в комплексе как методы решения систем уравнений в целом, так и способы решения тригонометрических уравнений в отдельности. Наиболее часто встречаются системы, решаемые подстановкой, а также системы, сводящиеся к функциям от суммы или разности переменных.

Отдельное внимание при решении систем тригонометрических уравнений следует уделять связи или независимости целочисленных переменных в различных сериях решений.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон.К-79.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Из второго уравнения получим $2\cos^2 x - 1 = 0 \iff \cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Рассмотрим два случая.

1) $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Подставим в первое уравнение:

$$4\sin y - 6 = 5 + 4(1 - \sin^2 y) \iff 4\sin^2 y + 4\sin y - 15 = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin y = -\dfrac{5}{2} < -1; \\ \sin y = \dfrac{3}{2} > 1; \end{array}\right. \text{ решений нет.}$$

2) $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Подставив в первое уравнение, получим

$$4\sin y + 6 = 5 + 4(1 - \sin^2 y) \iff 4\sin^2 y + 4\sin y - 3 = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin y = -\dfrac{3}{2} < -1; \\ \sin y = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \sin y = \frac{1}{2} \iff y = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

В результате решением системы являются

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \quad y = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\left(\pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m; (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n\right)$; $m, n \in \mathbb{Z}$.

П р и м е р 2. (Геол-81.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Преобразуем исходную систему следующим образом:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{3\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos y}{\sin y}; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = 3\sin x \sin y, \\ \cos x \neq 0,\ \sin y \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = 3 \cdot \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \neq 0,\ \sin y \neq 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\cos x \neq 0$, $\sin y \neq 0$; значит, исходная система равносильна системе $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$ Складывая и вычитая эти уравнения, находим:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1, \\ \cos(x + y) = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 2\pi n, \\ x + y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi l; \end{cases} \end{array}\right.$$

откуда $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi m + \pi n, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi m - \pi n \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi l + \pi k, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \pi l - \pi k, \end{cases}$ где $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi(m+n); -\dfrac{\pi}{6} + \pi(m-n)\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi(l+k); \dfrac{\pi}{6} + \pi(l-k)\right)$; $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

П р и м е р 3*. (Биол-79.5) Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)(1+\cos(xy)\sin(xy)) = (\sqrt{3}+1)\sin^2(xy) + \cos(2xy), \\ x^2y^2 - y^2 + 1 = 0, \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 \le 6. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Из первого уравнения, используя формулы $1 = \sin^2(xy) + \cos^2(xy)$ и $\cos(2xy) = \cos^2(xy) - \sin^2(xy)$, получаем

$$(\sqrt{3}+1)\sin^2(xy) + (\sqrt{3}+1)\cos^2(xy) + (\sqrt{3}+1)\sin(xy)\cos(xy) =$$

$$= (\sqrt{3}+1)\sin^2(xy) + \cos^2(xy) - \sin^2(xy) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin^2(xy) + (\sqrt{3}+1)\sin(xy)\cos(xy) + \sqrt{3}\cos^2(xy) = 0.$$

Это однородное уравнение второй степени. Так как $\cos(xy) = 0$ не является решением, оно сводится к уравнению

$$\operatorname{tg}^2(xy) + (1+\sqrt{3})\operatorname{tg}(xy) + \sqrt{3} = 0, \quad D = (\sqrt{3}-1)^2;$$

$\operatorname{tg}(xy) = -\sqrt{3}$ или $\operatorname{tg}(xy) = -1$; значит, $xy = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ или $xy = -\dfrac{\pi}{4} + \pi m$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим второе уравнение исходной системы: $x^2y^2 - y^2 + 1 = 0$. Обозначим $z = xy$ и с помощью этого уравнения выразим x и y через z. Заметим, что $y = 0$ не является решением уравнения; поделим уравнение на y^2, получим $1 = \dfrac{1}{y^2} + x^2$, откуда $x^2 = \dfrac{y^2-1}{y^2}$. Следовательно,

$$\begin{cases} y^2 = 1 + z^2, \\ x^2 = \dfrac{z^2}{1+z^2}. \end{cases}$$

Подставив эти зависимости в последнее условие системы $\dfrac{1}{x^2} + y^2 \le 6$, получим

$$\frac{1+z^2}{z^2} + 1 + z^2 \le 6 \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 - 4z^2 + 1 \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - \sqrt{3} \le z^2 \le 2 + \sqrt{3}.$$

Покажем, что при $n, m \ne 0$ в ранее полученных сериях $|z| > 2$ и, следовательно, эти значения не подходят:

1) для $z = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ при $n \ge 1$ получаем $z \ge -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3} > 2$, а при $n \le -1$ получаем, что $z \le -\dfrac{\pi}{3} - \pi < -2$;

2) для $z=-\dfrac{\pi}{4}+\pi m$ при $m\geq 1$ получаем $z\geq -\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}>2$, а при $n\leq -1$ получаем, что $z\leq -\dfrac{\pi}{4}-\pi<-2$.

Следовательно, решение возможно только при $n=0$ и $m=0$. Проверим соответствующие значения z:

1) при $n=0$ получаем $z=-\dfrac{\pi}{3}$, и так как $1<\dfrac{\pi^2}{9}<2$, то $2-\sqrt{3}\leq z^2\leq 2+\sqrt{3}$;

2) при $m=0$ получаем $z=-\dfrac{\pi}{4}$, и так как $\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi^2}{16}<1$, то $2-\sqrt{3}\leq z^2\leq 2+\sqrt{3}$.

Окончательно получаем $\begin{cases} xy=-\dfrac{\pi}{3} \quad \text{или} \quad xy=-\dfrac{\pi}{4}, \\ x^2=\dfrac{(xy)^2}{1+(xy)^2},\ y^2=1+(xy)^2; \end{cases}$

1) если $xy=-\dfrac{\pi}{3}$, то $x^2=\dfrac{\pi^2}{\pi^2+9}$, $y^2=\dfrac{\pi^2+9}{9}$; учитывая, что x и y разных знаков, получаем $x=-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}$, $y=\dfrac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}$; $x=\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}}$, $y=-\dfrac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}$;

2) если $xy=-\dfrac{\pi}{4}$, то $x^2=\dfrac{\pi^2}{\pi^2+16}$, $y^2=\dfrac{\pi^2+16}{16}$; учитывая, что x и y разных знаков, получаем $x=-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$, $y=\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$; $x=\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$, $y=-\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}$.

О т в е т. $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}};\dfrac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}};-\dfrac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}};\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}};-\dfrac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить систему уравнений $\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x-\cos y=-\sqrt{2}. \end{cases}$

   В ответе записать значение y в градусах, где $y\in[0;360^\circ]$.

2. (Геол.ОГ-71.1) Найти все решения системы $\begin{cases} \cos 2x+\sin y=\sqrt{3}\cos 30^\circ, \\ 2\cos 2x-\sin y=\sin 540^\circ. \end{cases}$

3. (Экон.К-76.2) Найти все решения системы уравнений
   $$\begin{cases} \operatorname{tg}^2(x-y)-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(x-y)+1=0, \\ \sin x=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$
   удовлетворяющие условиям $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$, $-\pi\leq y\leq 0$.

4. (Фил-77.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=5-2\sqrt{6}, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

5. (ВМК-73.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$

6. (Экон.К-72.2) Найти $\operatorname{tg} x$, если $\begin{cases} y\sin x + \cos x = 2, \\ -4\sin x + 2y\cos x = -y. \end{cases}$

7. (ВМК-75.2) Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin(2x + \sin^2 y) = 0, \\ x - 3\sin^2 y = -2. \end{cases}$

8. (Филол-00.4) Решить систему $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

9. (Геол-76.2) Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} \cdot (\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1) = 0, \\ \cos^2 x + \dfrac{\operatorname{tg} y}{4} - 1 = 0. \end{cases}$$

10. (Геол-75.3) Найти все решения системы $\begin{cases} 5^{\sin x + \operatorname{tg} y} = 1, \\ 7^{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = 7, \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$.

11. (Псих-99.3) Решить систему $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$

12. (Геол-83.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

13. (Почв-94(1).4) Найти все решения системы $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{4}, \end{cases}$ удовлетворяющие неравенствам $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

14. (Геогр-87.4) Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \sin(2x - y) = 0, \\ \cos(y - x) = 1, \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $\pi \leq x \leq 2\pi, \quad -\pi \leq y \leq \pi$.

15. (ВМК-77.3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2})\operatorname{tg} 5y = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2})\sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$$

16. (Хим-99(1).3) Найти все значения x из отрезка $[0;\pi]$, удовлетворяющие системе $\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2}. \end{cases}$

17. (Биол-80.5) Найти все те решения уравнения $3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 = 0$, которые являются также решениями уравнения $\cos^2 x + 3\cos x \sin 2x - 8\sin x = 0$.

18. (Биол-79.5) Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \cos^2 xy - 3\sin xy \cos xy = 2\cos y \cos(2xy - y) - 2\cos^2(xy - y), \\ x^3 - xy + 1 = 0, \\ x^6 + 2xy \le 5. \end{cases}$$

6.4. Использование ограниченности тригонометрических функций, оценочные неравенства

Теоретический материал

При решении уравнений этого раздела следует помнить основные свойства тригонометрических функций и знать тригонометрические формулы, приведённые в предыдущих разделах.

Рассмотрим следующие приёмы решения тригонометрических уравнений:

- $\sin a(x) + \cos b(x) = 2$, где $a(x)$ и $b(x)$ – функции переменной x. Поскольку каждое из слагаемых левой части не превосходит 1, решение надо искать среди тех x, для которых $\sin a(x) = 1$ и $\cos b(x) = 1$, то есть

$$\sin a(x) + \cos b(x) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin a(x) = 1, \\ \cos b(x) = 1. \end{cases}$$

Аналогичная ситуация имеет место, если в левой части уравнения стоит сумма или разность синусов или косинусов.

- $\sin a(x) \cdot \cos b(x) = 1$, где $a(x)$ и $b(x)$ – функции переменной x. Поскольку каждый из множителей левой части по абсолютной величине не превосходит 1, решение надо искать среди тех x, для которых $\sin a(x) = \pm 1$ и $\cos b(x) = \pm 1$, то есть

$$\sin a(x) \cdot \cos b(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin a(x) = 1, \\ \cos b(x) = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin a(x) = -1, \\ \cos b(x) = -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Аналогичная ситуация имеет место, если произведение синусов или косинусов равно -1.

- $\sin^k x + \cos^m x = 1$, где k и m – заданные натуральные числа. При $k, m \ge 2$ из неравенств

$$\sin^k x \le \sin^2 x, \quad \cos^m x \le \cos^2 x$$

и основного тригонометрического тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

следует, что

$$1 = \sin^k x + \cos^m x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Равенство возможно лишь при условии

$$\begin{cases} \sin^k x = \sin^2 x, \\ \cos^m x = \cos^2 x; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin^2 x(\sin^{k-2} x - 1) = 0, \\ \cos^2 x(\cos^{m-2} x - 1) = 0. \end{cases}$$

Полученная система легко решается.

Подобным образом можно найти решение уравнений такого типа и при $k, m \le 2$, и при $k, m \notin \mathbb{N}$.

- $a(x)\sin x + b(x)\cos x = c(x)$, где функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ таковы, что $c^2(x) \ge a^2(x) + b^2(x)$. Вводим вспомогательный угол $\varphi(x)$ так, чтобы

$$\sin\varphi(x) = \frac{b(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}, \quad \cos\varphi(x) = \frac{a(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}.$$

Исходное уравнение запишется в виде

$$\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}\sin(x + \varphi(x)) = c(x) \iff$$

$$\iff \quad \sin(x + \varphi(x)) = \frac{c(x)}{\sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}.$$

Так как в рассматриваемом классе задач $c^2(x) \ge a^2(x) + b^2(x)$, то правая часть уравнения по модулю не меньше единицы. Поскольку левая часть уравнения по модулю не больше единицы, решения уравнения содержатся среди решений системы

$$\begin{cases} |\sin(x + \varphi(x))| = 1, \\ \sqrt{a^2(x) + b^2(x)} = |c(x)|, \end{cases}$$

которая в конкретных задачах, как правило, легко решается.

Примеры решения задач

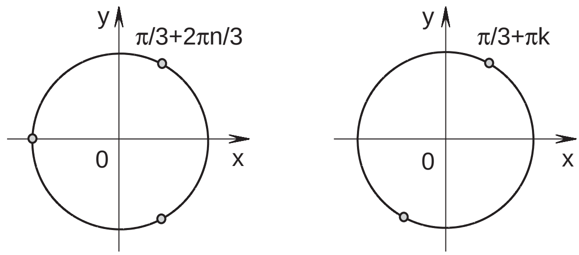
Пример 1. (У) Решить уравнение $\cos 3x + \sin\left(2x - \dfrac{7\pi}{6}\right) = -2.$

Решение. Так как $-1 \le \cos 3x \le 1$ и $-1 \le \sin\left(2x - \dfrac{7\pi}{6}\right) \le 1$, то исходное равенство может выполняться только при условии

$$\begin{cases} \cos 3x = -1, \\ \sin\left(2x - \dfrac{7\pi}{6}\right) = -1; \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ 2x - \dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} &x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}, \\ &x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \right.$$

Из первой серии на тригонометрической окружности получаем три точки, из второй – две.



Только одна точка окружности принадлежит сразу двум сериям, это $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

П р и м е р 2. (У) Решить уравнение $\sin^{11} x + \cos^5 x = -1$.

Р е ш е н и е. Перепишем исходное уравнение в виде

$$-\sin^{11} x - \cos^5 x = 1.$$

Так как $-\sin^{11} x \le \sin^2 x$ и $-\cos^5 x \le \cos^2 x$, то

$$1 = -\sin^{11} x - \cos^5 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

это возможно только при условии

$$\left\{ \begin{aligned} &-\sin^{11} x = \sin^2 x, \\ &-\cos^5 x = \cos^2 x; \end{aligned} \right. \iff \left[\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &\sin x = 0, \\ &\cos x = -1; \end{aligned} \right. \\ &\left\{ \begin{aligned} &\sin x = -1, \\ &\cos x = 0; \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \iff \left[\begin{aligned} &x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ &x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \right.$$

О т в е т. $\pi + 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.

П р и м е р 3. (Геогр-98.4) Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 + 3\cos^2\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Р е ш е н и е. Поделив обе части на два, преобразуем левую часть с использованием дополнительного угла:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 + \frac{3}{2}\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{3}{2}\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Область значений косинуса составляет отрезок $[-1;1]$, поэтому левая часть полученного уравнения не превосходит единицы, тогда как правая часть не меньше неё. Значит, равенство возможно только в случае

$$\begin{cases} \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1, \\ \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$

решением этой системы является серия $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

О т в е т. $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{37\pi}{2}+x\right)=3x^2+1$.
2. (У) Решить уравнение $\sin x+\sin 9x=2$.
3. (У) Решить уравнение $\cos x-\sin 3x=-2$.
4. (ЕГЭ) Решить уравнение $2\cos^2 2x-\sin 3x=3$.
5. (ЕГЭ) Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^3 x=1$.
6. (У) Решить уравнение $\sin^3 x-\cos^7 x=1$.
7. (У) Решить уравнение $\sin x+\sqrt{\cos x}=1$.
8. (У) Решить уравнение $\sin x\cdot\sin 7x=1$.
9. (У) Решить уравнение $\cos x\cdot\cos 6x=-1$.
10. (У) Решить уравнение $\sin^5 x\cdot\cos^6 x=\dfrac{1}{31}$.
11. (У) Решить уравнение $\sin^6 x\cdot\cos^{10} x=\dfrac{7}{8}$.
12. (У) Решить уравнение $\cos x=x^2+1$.
13. (У) Решить уравнение $\cos^2(\pi x)-\sqrt{x^2-5x+4}=1$.
14. (У) Решить уравнение $\cos^2 x=0,5\left(\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)$.
15. (У) Решить уравнение $\sin 9x\cdot\sin x+\cos x=\dfrac{3}{2}$.
16. (У) Решить уравнение $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^2 x$.
17. (У) Решить уравнение $\cos^2 x+\cos^2\sqrt{3}x=2$.
18. (Геогр-98.4) Решить уравнение $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2+5\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.
19. (Экон-90.5) Найти все корни уравнения $\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 2\pi x}\cdot\cos\pi x+\sin\pi x=\sqrt{2}$, расположенные на отрезке $[-3;1]$.

7. Изображение множества точек на координатной плоскости, использование графических иллюстраций в уравнениях и неравенствах различных типов

7.1. Геометрические места точек, графики функций, правила линейных преобразований графиков

Теоретический материал

Геометрическим местом точек с данным свойством называется множество всех точек плоскости (пространства), обладающих этим свойством.

Например, геометрическим местом точек плоскости, удалённых на расстояние R от данной точки O этой плоскости, является окружность радиуса R с центром в точке O; геометрическим местом точек плоскости, равноудалённых от точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB, лежащий в этой плоскости.

Функцией называется отображение числового множества X на числовое множество Y, при котором каждому значению x из множества X, называемого *областью определения*, ставится в соответствие единственное значение y из множества Y, называемого *множеством значений*. Для обозначения функции используется $y = f(x)$.

График функции $y = f(x)$ – это множество точек плоскости с координатами (x, y), у которых $x \in X$ – допустимые значения аргумента, а $y = f(x) \in Y$ – соответствующие им значения функции.

Графическое изображение функции даёт наглядное представление о её основных особенностях.

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для всех $x \in X$ выполняется соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = f(-x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для всех $x \in X$ имеет место соотношение $(-x) \in X$ и равенство $f(x) = -f(-x)$.

З а м е ч а н и е. График чётной функции симметричен относительно оси y, а график нечётной функции центральносимметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для всех $x \in X$ выполняются соотношения $(x+T) \in X$, $(x-T) \in X$ и равенства $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. При этом число T называется *периодом* функции.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на множестве $D \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in D$, $\quad x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на множестве $D \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in D$, $\quad x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонной* на множестве $D \subset X$, если она является возрастающей или убывающей на этом множестве.

Все задачи этого раздела решаются с помощью преобразования графиков элементарных функций:

$$y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$y = a^x, \quad y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

Замечание. Графики линейной ($y = kx + b$) и квадратичной ($y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$) функций могут быть также получены с помощью приведённых ниже преобразований из графиков функций $y = x$ и $y = x^2$. Однако на практике их обычно строят непосредственно: вычисляют точки пересечения с осями координат, для параболы находят координаты вершины и так далее.

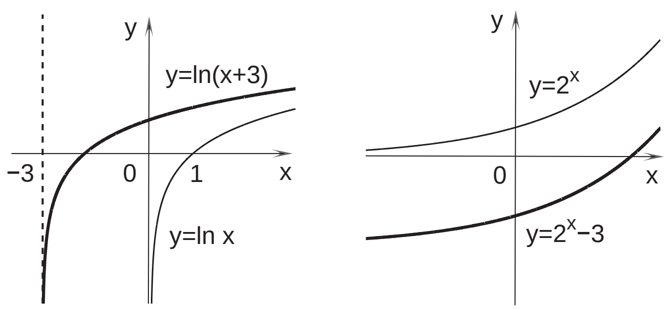
Приведём основные приёмы преобразования графиков функции:

- График функции $y = f(x \pm a)$, $a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси x на a единиц влево для $f(x+a)$ и на a единиц вправо для $f(x-a)$.

  Пример: график функции $y = \ln(x+3)$ получается сдвигом влево на 3 единицы графика $y = \ln x$.

- График функции $y = f(x) \pm a$, $a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом его вдоль оси y на a единиц вверх для $f(x) + a$ и на a единиц вниз для $f(x) - a$.

  Например, график функции $y = 2^x - 3$ получается сдвигом вниз на 3 единицы графика $y = 2^x$.



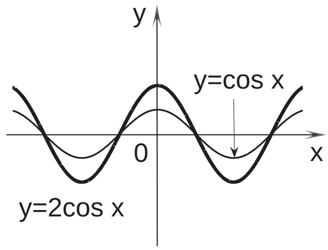
- График функции $y = kf(x)$ при $k > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ деформацией исходного графика $y = f(x)$ вдоль оси y: растяжением в k раз при $k > 1$ или сжатием в $1/k$ раз при $k < 1$. При $k = -1$ происходит симметричное отражение графика $y = f(x)$ относительно оси x, а при $k < 0$ и $k \neq -1$ происходит отражение сначала относительно оси x с последующим необходимым деформированием этого графика.

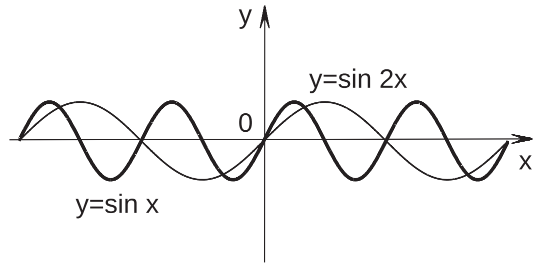
  Например, график функции $y = 2\cos x$ получается растяжением в два раза вдоль оси y графика $y = \cos x$.

- График функции $y = f(kx)$ при $k > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ деформацией исходного графика $y = f(x)$ вдоль оси x: сжатием в k раз при $k > 1$ или растяжением в $1/k$ раз при $k < 1$. При $k < 0$ предварительно необходимо симметрично отобразить график $y = f(x)$ относительно оси y, а затем осуществить необходимую деформацию этого графика.

  Например, график функции $y = \sin 2x$ получается сжатием в два раза вдоль оси x графика $y = \sin x$.

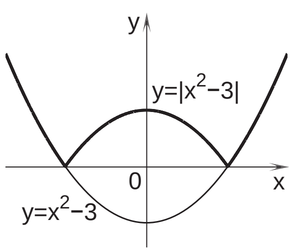
  Замечание. Если $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то функция $y = f(kx)$ – периодическая функция с периодом $T_1 = \dfrac{T}{k}$.

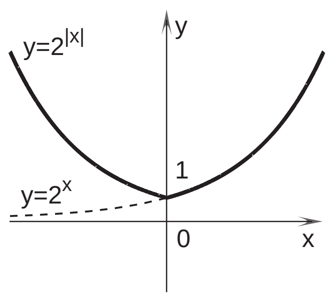




- График функции $y = f(kx+b) = f\left(k\left[x+\dfrac{b}{k}\right]\right)$ строится как комбинация первых двух пунктов. А именно, $f(x)$ сначала деформируется в k раз, а затем переносится на $\dfrac{b}{k}$ единиц в нужную сторону.

- График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика, лежащая над осью x, остаётся без изменения, а часть графика, находящаяся под осью x, отражается симметрично относительно оси x. Таким образом, ниже оси x графика нет.





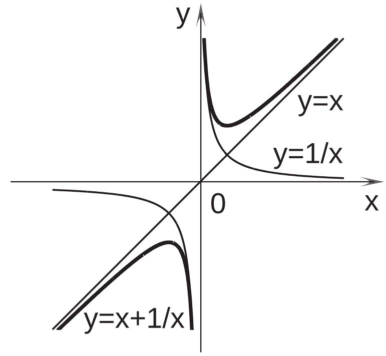
Например, график функции $y = |x^2-3|$ получается из графика $y = x^2-3$ отражением нижней части графика.

- График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: вместо левой (относительно оси y) части графика изображается отражённая (относительно оси y) правая. При этом правая часть графика остаётся без изменения.

  Например, график функции $y = 2^{|x|}$ получается из графика $y = 2^x$ отражением правой части графика.

- Метод сложения графиков. Он заключается в следующем. Чтобы построить график $y = f_1(x) + f_2(x)$, сначала нужно построить вспомогательные графики функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, а затем складывать соответствующие значения y для этих функций в каждой точке x. При этом следует помнить, что число точек, в которых необходимо провести сложение графиков, выбирается таким образом, чтобы получить достаточно полное представление о графике функции $y = f_1(x) + f_2(x)$, используя необходимые закономерности поведения функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.

Например, график функции $y = x + \dfrac{1}{x}$ получается сложением графиков функций $y = x$ и $y = \dfrac{1}{x}$.



Сумма возрастающих (убывающих) функций есть также возрастающая (убывающая) функция. Сумма возрастающей и убывающей функций может вообще не являться монотонной функцией.

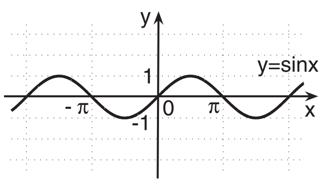
Все перечисленные выше факты позволяют не только эффективно строить графики функций, но и на их основе делать выводы о свойствах этих функций.

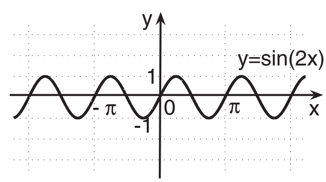
Примеры решения задач

П р и м е р 1. (У) Построить график функции $y = -3\sin 2|x|$.

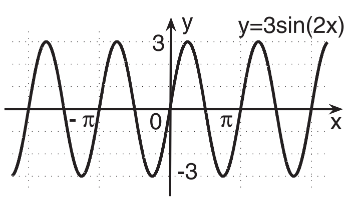
Р е ш е н и е. Построим график функции $y = \sin x$ и последовательными преобразованиями приведём его к графику функции $y = -3\sin 2|x|$.

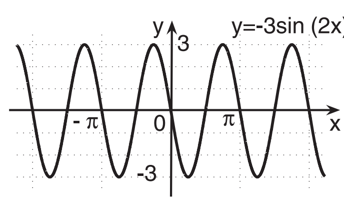
Сначала сжатием в два раза вдоль оси x получим график $y = \sin 2x$.



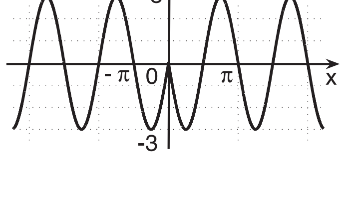


Потом растяжением в 3 раза вдоль оси y получим график $y = 3\sin 2x$, отразив который относительно оси x, получим график $y = -3\sin 2x$.



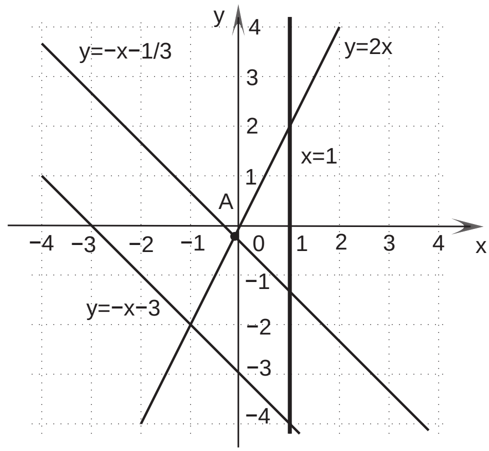


И, наконец, с помощью отражения правой части графика относительно оси y получаем график $y = -3\sin 2|x|$.



П р и м е р 2. (Экон.К-72.3) Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases}(1-x)(x+y+3)(2x-y)=0,\\(x-1)(3x+3y+1)=0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Заметим, что $x=1$ является решением системы, и проведём на координатной плоскости соответствующую прямую. Оставшиеся решения исходной системы удовлетворяют системе
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-x-3;\\y=2x;\end{array}\right.\\y=-x-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

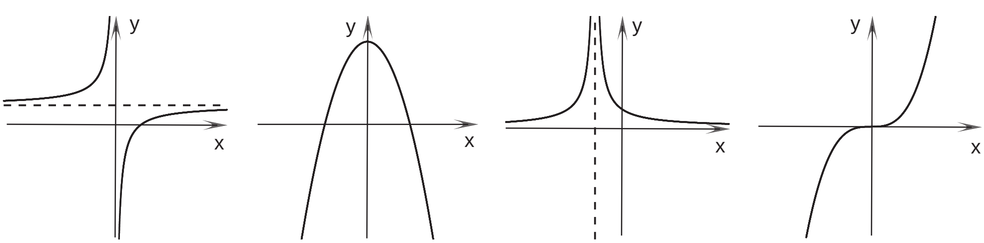


Каждое уравнение в системе задаёт прямую на координатной плоскости. Поскольку первая и третья прямые параллельны, решением системы будет точка пересечения прямых $y=2x$ и $y=-x-\dfrac{1}{3}$. Координаты точки пересечения можно найти, решив систему из этих двух уравнений.

О т в е т. Прямая $x=1$; точка $A\left(-\dfrac{1}{9};-\dfrac{2}{9}\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ.А) На одном из четырёх рисунков изображён график нечётной функции. Указать этот рисунок.



2. (У) Построить график функции $y=|x^2+5x-6|$.
3. (У) Построить график функции $y=x^2+5|x|-6$.
4. (У) Построить график функции $y=3\cos 2x$.
5. (У) Построить график функции $y=1-\dfrac{1}{|x|}$.
6. (У) Построить график функции $y=\dfrac{x}{x+1}$.

7. (У) Построить график функции $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

8. (Экон-72.2) Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений
$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 12y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$

9. (ВМК-99.2) На координатной плоскости (x, y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - (2 - \sqrt{3})x$, пересекает её в точках A и B. Найти сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

10. (Геол-82.5) Построить на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют условию $y = 4 - \left|y - \dfrac{6}{x}\right| - 2\left|\dfrac{3}{x} - 1\right|$, и среди точек этого множества найти те, у которых координата y принимает наибольшее значение.

7.2. Плоские геометрические фигуры, применение метода координат

Теоретический материал

При решении задач этого раздела следует алгебраическими преобразованиями привести исходную задачу к системе равенств и неравенств вида[1]

$$\begin{cases} a \le x \le b, \\ y = f(x), \\ y \ge g(x), \\ y \le h(x). \end{cases}$$

После этого на координатной плоскости необходимо изобразить графики всех функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$. Они разобьют координатную плоскость (x, y) на подобласти, на каждой из которых надо построить соответствующие множества точек или графики, удовлетворяющие системе.

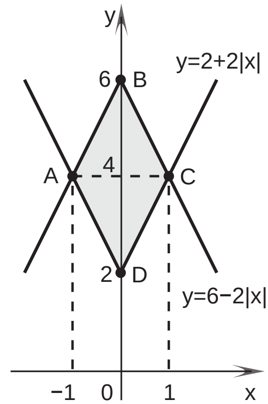
Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-81.3) Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости системой неравенств $\begin{cases} y \le 6 - 2|x|, \\ y \ge 2 + 2|x|. \end{cases}$

Решение. Построим на координатной плоскости графики функций $y = 6 - 2|x|$ и $y = 2 + 2|x|$.

[1] В конкретных задачах может встречаться несколько равенств и неравенств одного вида, или некоторые из них могут отсутствовать. Знаки нестрогих неравенств могут быть заменены на строгие.

Нас интересуют точки, которые лежат ниже графика функции $y = 6 - 2|x|$ и выше графика функции $y = 2 + 2|x|$, то есть точки, лежащие внутри ромба $ABCD$, где $B(0;6)$ и $D(0;2)$ – точки пересечения графиков с осью Oy.



Для того чтобы вычислить координаты точек пересечения графиков друг с другом (A и C), достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 6 - 2|x|, \\ y = 2 + 2|x|; \end{cases}$$

откуда $A(-1;4)$ и $C(1;4)$.

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, то есть

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4.$$

Ответ. 4.

Пример 2. (Экон-88.4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $\left|y - \frac{1}{2}x^2\right| + \left|y + \frac{1}{2}x^2\right| \le x + 2$.

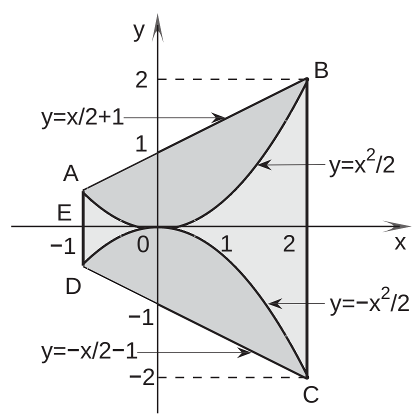
Решение. Раскрываем модули по определению.

1) При $y < -\frac{x^2}{2}$ получим $-y + \frac{1}{2}x^2 - y - \frac{1}{2}x^2 \le 2 + x \iff y \ge -\frac{x}{2} - 1$.

2) При $-\frac{x^2}{2} \le y < \frac{x^2}{2}$ получим $-y + \frac{1}{2}x^2 + y + \frac{1}{2}x^2 \le 2 + x \iff x \in [-1;2]$.

3) При $y \ge \frac{x^2}{2}$ получим $y - \frac{1}{2}x^2 + y + \frac{1}{2}x^2 \le 2 + x \iff y \le \frac{x}{2} + 1$.

Построив на плоскости точки, координаты которых удовлетворяют этим неравенствам, получим трапецию $ABCD$, где координаты вершин $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $B(2;2)$, $C(2;-2)$, $D\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ вычисляются как общие точки соответствующих функций. Площадь трапеции равна



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)AH = \frac{1}{2}(1+4)\cdot 3 = \frac{15}{2},$$

где $H\left(2;\frac{1}{2}\right)$, AH – высота трапеции.

Ответ. $\frac{15}{2}$.

Задачи

1. (ИСАА-96.2) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой $\begin{cases} y \geq -|x| - 1, \\ y \leq -2|x| + 3. \end{cases}$

2. (Геол-99.3) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости (x, y) системой неравенств $\begin{cases} x(x + y - \sqrt{2}) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2. \end{cases}$

3. (Геол.ОГ-81.4) Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости условием $|x| + |y - 1| \leq 4$.

4. (Экон-88.4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $2 \cdot (2 - x) \geq |y - x^2| + |y + x^2|$.

5. (Геол.ОГ-80.5) Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости следующими условиями $\begin{cases} ||x - y| - |y - 1|| = x - 2y + 1, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1. \end{cases}$

6. (Экон-91.5) Найти площадь плоской фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию $(x^2 + y^2 - x - y) \cdot (x^2 + y^2 - 1) \leq 0$.

7. (ИСАА-97.5) Найти площадь фигуры, заданной условиями $\begin{cases} y \leq \sqrt{4 - x^2}, \\ y \geq |x - 1| - 3. \end{cases}$

8. (Геол-95(1).8) Изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством $x^2 + y^2 + 6(x - |y|) \leq 0$. Найти площадь этой фигуры.

9. (Почв-96(1).6) Определить площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\log_{(x^2+y^2)}(x + y) > 1$.

7.3. Использование графических иллюстраций при решении уравнений и неравенств

Теоретический материал

В этом разделе приведены задачи, при решении которых вам помогут графические иллюстрации. Однако, помните: *все заключения, которые вы делаете, используя график, необходимо строго обосновать.*

Примеры решения задач

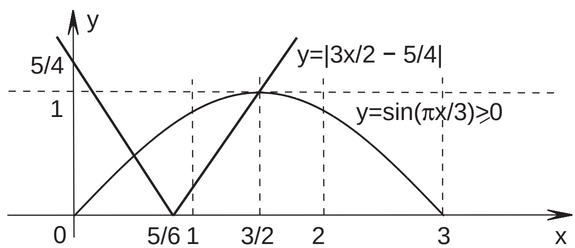
Пример 1. (Экон.К-70.2) Решить уравнение

$$|5 - 6x| - 4\sin\frac{\pi x}{3} - 4\sin\frac{2\pi x}{3} + \frac{8\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{3}} = 0.$$

Решение. Используя формулу $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, преобразуем последнее слагаемое к виду

$$\frac{8\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{3}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{3}} = 4\sin\frac{2\pi x}{3}, \quad \text{где} \quad \cos\frac{\pi x}{3} \neq 0, \quad \text{то есть} \quad x \neq \frac{3}{2}+3n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Уравнение переписывается в виде $|6x-5| = 4\sin\dfrac{\pi x}{3}$, то есть $\sin\dfrac{\pi x}{3} = \left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}\right|$. Построим графики левой и правой частей уравнения.



1) При $x<0$ решений нет, так как в этом случае $\left|\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}\right| > 1 \geq \sin\dfrac{\pi x}{3}$.

2) Рассмотрим $x \in \left[0;\dfrac{5}{6}\right]$. Значение $x=\dfrac{1}{2}$ является решением. Других решений нет, так как на этом отрезке функция $y=\sin\dfrac{\pi x}{3}$ возрастает, а функция $y=\left|\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}\right|$ убывает.

3) При $\dfrac{5}{6}<x\leq\dfrac{3}{2}$ исследуемое уравнение примет вид $\sin\dfrac{\pi x}{3} = \dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$. Значение $x=3/2$ является решением этого уравнение, но не входит в область определения исходного уравнения, так как включено в серию $x=\dfrac{3}{2}+3n$ при $n=0$. Для того чтобы доказать отсутствие других решений на этом промежутке, достаточно доказать возрастание функции $f(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}-\sin\dfrac{\pi x}{3}$.

Рассмотрим $\dfrac{5}{6}\leq x_1<x_2\leq\dfrac{3}{2}$ и покажем, что $f(x_2)-f(x_1)>0$. Преобразуем разность $f(x_2)-f(x_1)$ следующим образом:

$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{3}{2}(x_2-x_1) - \left(\sin\frac{\pi x_2}{3} - \sin\frac{\pi x_1}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}(x_2-x_1) - 2\sin\frac{\pi(x_2-x_1)}{6}\cos\frac{\pi(x_2+x_1)}{6}.$$

Так как аргументы синуса и косинуса при $\dfrac{5}{6} \le x_1 < x_2 \le \dfrac{3}{2}$ принадлежат первой четверти, справедливы оценки:

$$0 \le \cos\frac{\pi(x_2+x_1)}{6} \le 1 \quad \text{и} \quad 0 \le \sin\frac{\pi(x_2-x_1)}{6} \le \frac{\pi(x_2-x_1)}{6}.$$

Следовательно,

$$f(x_2) - f(x_1) \ge \frac{3}{2}(x_2-x_1) - 2\sin\frac{\pi(x_2-x_1)}{6} \ge$$

$$\ge \frac{3}{2}(x_2-x_1) - 2\frac{\pi(x_2-x_1)}{6} = (x_2-x_1)\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{3}\right) > 0.$$

Возрастание функции $f(x)$, а значит, и отсутствие решений при $\dfrac{5}{6} < x \le \dfrac{3}{2}$, доказаны.

4) При $x > \dfrac{3}{2}$ решений нет, так как в этом случае $\left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}\right| > 1 \ge \sin\dfrac{\pi x}{3}$.

О т в е т. $\dfrac{1}{2}$.

Задачи

1. (ВМК-86.2) Найти координаты точки, лежащей на прямой $3x - 5y = 17$ и наименее удалённой от начала координат.

2. (Почв-74.4) Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполняется для всех таких x, что $1 \le x \le 2$.

3. (Псих-85.4) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x^2 + x| + |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

4. (Почв-95(2).5) Найти все значения b, при которых система $\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ имеет два решения.

5. (Хим-93(2).5) Найти число решений уравнения $2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$.

6. (Геогр-00(1).5) Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и $3\frac{1}{3}$ км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

7. (ВМК-82.5) Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $|x+3| - a|x-1| = 4$.

8. (Экон.М-96.6) При каких значениях p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием $|2x + y| + |x - y + 3| \le p$, будет равна 24?

8. Элементы математического анализа

8.1. Производная, её геометрический и физический смысл. Производные элементарных функций, основные правила дифференцирования функций

В этом разделе собраны задачи, при решении которых вам понадобится умение вычислять производные простейших функций и знание геометрического и физического смысла производной.

Заметим, что производная не входит в программу вступительных экзаменов некоторых вузов (в частности, МГУ) и, следовательно, все задачи, предлагаемые на вступительных экзаменах в эти вузы, могут быть решены без использования производной.

Все задачи этого раздела взяты из материалов ЕГЭ и снабжены указанием соответствующего уровня сложности:

A – задачи базового уровня сложности;

B – задачи повышенного уровня сложности;

C – задачи высокого уровня сложности.

Для успешного решения задач этого раздела достаточно запомнить производные элементарных функций, уметь применять основные правила дифференцирования и иметь представление о геометрическом и физическом смысле производной. Все эти сведения приводятся ниже. Строгое определение предела, непрерывной функции и доказательство основных формул входит в программу первого курса вуза, и ознакомиться с этим можно в соответствующей специализированной литературе.

Теоретический материал

Геометрический смысл производной

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$ и зафиксируем на нём точку A_0 с координатами $(x_0; f(x_0))$. Пусть точка $A(x; f(x))$ также принадлежит графику, но не совпадает с точкой A_0. Проведём секущую через точки A_0 и A.

Если при приближении точки A к точке A_0 секущая, проведённая через эти две точки, стремится к некоторому предельному положению, то это предельное положение секущей называют *касательной* в точке A_0 (левый рисунок).

Установим связь между касательной, проведённой в точке A_0, и производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

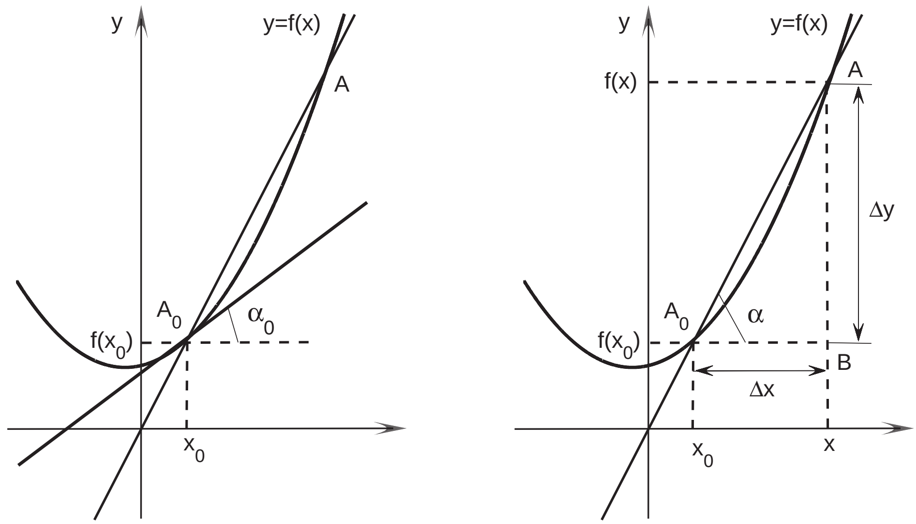
В дальнейшем величину $\Delta x = x - x_0$ будем называть *приращением аргумента*, а величину $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ *приращением функции* $y = f(x)$.

Пусть α есть угол наклона секущей A_0A, а α_0 – угол наклона касательной.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔA_0AB (правый рисунок), где точка B имеет координаты $(x; f(x_0))$. Получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{A_0B} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если приращение аргумента Δx устремить к нулю, то точка A будет стремиться к точке A_0, и секущая будет стремиться к касательной. Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ будет стремиться к $\operatorname{tg} \alpha_0$.



По определению, *производная* в точке x_0 есть предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при Δx, стремящемся к нулю, запись такова:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

И так как $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $\operatorname{tg} \alpha_0$, то значение производной равно угловому коэффициенту касательной. В этом заключается *геометрический смысл производной.*

Физический смысл производной

Пусть точка движется вдоль координатной прямой и её координата в момент времени t определяется функцией $f(t)$. Рассмотрим промежуток времени $[t_0; t]$. В момент времени t_0 точка имеет координату $f(t_0)$, а в момент времени t – координату $f(t)$. Значит, её перемещение за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ равно $\Delta f = f(t) - f(t_0)$. Разделив перемещение на промежуток времени, получим *среднюю скорость* движения за промежуток времени $[t_0; t]$

$$v_{\text{ср.}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta f}{\Delta t}.$$

Предел средней скорости при Δt, стремящемся к нулю, называют *мгновенной скоростью* движения в момент времени t_0. Следовательно,

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t_0).$$

В общем случае, если какая-либо величина y изменяется по закону $y = f(t)$, то мгновенная скорость изменения этой величины при $t = t_0$ равна $f'(t_0)$. Таким образом, производная есть мгновенная скорость изменения функции. В этом заключается *физический смысл производной.*

Производные элементарных функций

Для того, чтобы успешно решать задачи с использованием производных, необходимо запомнить, чему равны производные следующих элементарных функций:

$$C' = 0 \quad \text{для любой константы } C \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

$$x' = 1, \qquad (x^a)' = ax^{a-1}, \tag{31}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \tag{32}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{33}$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{34}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{35}$$

Основные правила дифференцирования функций:

1) постоянный множитель можно выносить за знак производной; производная суммы двух функций равна сумме их производных:

$$(Cf(x))' = Cf'(x), \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x); \tag{36}$$

2) производные произведения и частного двух дифференцируемых функций вычисляются по формулам:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \tag{37}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)};$$

3) производная сложной функции вычисляется следующим образом:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{38}$$

В частности, для линейной функции $g(x) = kx + b$:

$$(f(kx + b))' = kf'(kx + b). \tag{39}$$

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (ЕГЭ) Найти производную функции $y = 3\cos x + x^2$.

Р е ш е н и е. Согласно (36) имеем:

$$y' = (3\cos x + x^2)' = 3(\cos x)' + (x^2)'.$$

Далее, применив (32) и (31), получим: $y' = -3\sin x + 2x$.

О т в е т. $-3\sin x + 2x$.

П р и м е р 2. (ЕГЭ) Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = 3 + 2t + t^2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. В какой момент времени скорость точки будет равна 5?

Р е ш е н и е. Так как скорость точки в момент времени t есть значение производной $x'(t)$, то нам надо найти t такое, что $x'(t) = 5$. Поэтому

$$x'(t) = 5 \iff 2 + 2t = 5 \iff t = \frac{3}{2}.$$

О т в е т. $\frac{3}{2}$.

П р и м е р 3. (ЕГЭ) Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x) = 2x + e^x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Р е ш е н и е. Тангенс угла наклона касательной в точке с абсциссой x_0 равен значению $f'(x_0)$. Поскольку $f'(x) = 2 + e^x$, искомый угловой коэффициент равен

$$f'(0) = 2 + e^0 = 2 + 1 = 3.$$

О т в е т. 3.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.
2. (ЕГЭ) Найти $f'(1)$, если $f(x) = \frac{5}{x} + 4e^x$.
3. (ЕГЭ) Найти скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t) = \frac{t^2}{4}$, в момент времени $t_0 = 4$.
4. (ЕГЭ) Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (3x^2 + 1)(3x^2 - 1)$.
5. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = x^2 e^x$ в точке $x_0 = 1$.
6. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = x \ln x$ в точке $x_0 = e$.
7. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = \frac{2 - x}{x}$ в точке $x_0 = 0,5$.
8. (ЕГЭ) Найти значение производной функции $y = \frac{e^x}{x}$ в точке $x_0 = 2$.
9. (ЕГЭ) Найти угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = 4x^3 - 6x^2 + 9$ через точку с абсциссой $x_0 = 1$.
10. (ЕГЭ) Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3\sin x + 12x$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.
11. (ЕГЭ) Найти тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $y = -\frac{4}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

8.2. Исследование функций с помощью производной

Теоретический материал и примеры решения задач

С помощью производных можно находить промежутки[2] возрастания и убывания функций:

- если $f'(x) > 0$ во всех точках некоторого промежутка, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке[3];
- если $f'(x) < 0$ во всех точках некоторого промежутка, то $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Наглядный смысл признака возрастания (убывания) функции ясен из физических рассуждений.

Пусть точка движется по оси ординат согласно закону $y = f(t)$, тогда её скорость в момент времени t равна $f'(t)$. Если $f'(t) > 0$ в каждый момент времени t из промежутка I, то точка движется в положительном направлении оси ординат, то есть если $t_1 < t_2$, то $f(t_1) < f(t_2)$. Это означает, что функция $f(t)$ возрастает на промежутке I.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания), то эта точка присоединяется к этому промежутку.

П р и м е р 1. Производная функции $f(x) = x^3$ равна $f'(x) = 2x^2$; она положительна на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Согласно признаку возрастания $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а согласно замечанию точка $x = 0$ присоединяется к каждому из промежутков. В результате получаем, что $f(x) = x^3$ возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

Экстремумы

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный максимум* (сокращённо *максимум*), если её значение в точке x_0 больше других значений вблизи[4] этой точки.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный минимум* (сокращённо *минимум*), если её значение в точке x_0 меньше других значений вблизи этой точки.

С помощью производной можно вычислить экстремум (максимум или минимум) функции, руководствуясь правилом: если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум, то в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.

Проиллюстрируем это утверждение с помощью геометрического смысла производной.

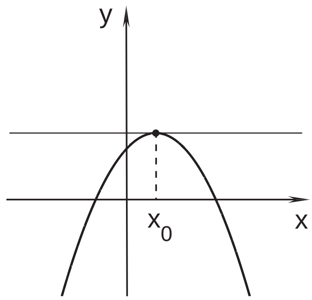
Пусть точка x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$. Возможен только один из следующих двух вариантов:

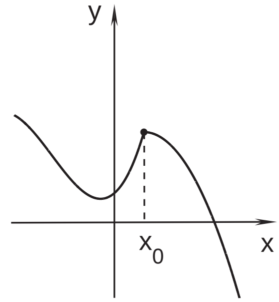
---

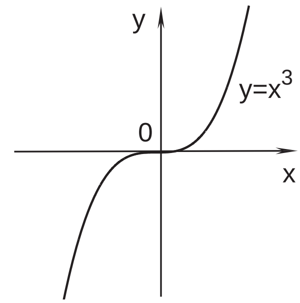
[2] Под промежутком подразумевается одно из следующих подмножеств прямой: интервал, отрезок, полуинтервал, луч (как содержащий, так и не содержащий начальную точку), а также вся прямая.

[3] Это условие не является необходимым, а является только достаточным. См. замечание и пример 1.

[4] То есть существует интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0, такой, что для любого $x \in (a; b)$, отличного от x_0, справедливо $f(x) < f(x_0)$.







1) если производная в точке x_0 определена, то она равна нулю, то есть функция имеет в этой точке горизонтальную касательную (левый рисунок);

2) производной в точке x_0 не существует, то есть функция не имеет в точке x_0 касательной (центральный рисунок).

З а м е ч а н и е. Точка x_0, в которой производная функции $y = f(x)$ обращается в ноль, может и не являться точкой экстремума. Например, для функции $y = x^3$ производная $y' = 3x^2$ обращается в ноль при $x_0 = 0$, однако, эта точка не является точкой экстремума, так как слева и справа от неё функция $y = x^3$ возрастает (правый рисунок). Поэтому равенство нулю производной является лишь необходимым условием.

Одним из достаточных условий экстремума является смена знака производной при переходе через точку, в которой производная равна нулю или не существует.

П р и м е р 2. (ЕГЭ) Найти минимум[5] функции $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 7\dfrac{1}{6}$.

Р е ш е н и е. Для начала вычислим производную функции y:

$$y' = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1).$$

Производная обращается в ноль в точках $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

При переходе через точку $x = -2$ производная меняет знак с плюса на минус, это значит, что сама функция сначала возрастала, а потом стала убывать и, следовательно, точка $x = -2$ является точкой максимума функции y.

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, это значит, что сама функция сначала убывала, а потом стала возрастать и, следовательно, точка $x = 1$ является точкой минимума функции y. Сам минимум равен

$$y(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 7\frac{1}{6} = 6.$$

О т в е т. 6.

[5]В задачах ЕГЭ под минимумом подразумевается строгий локальный минимум – не путать с наименьшим значением.

Пример 3. (ЕГЭ) При каком наибольшем значении a функция $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-ax^2+7ax+5$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение. Исследуем знаки производной в зависимости от значений параметра a. Производная

$$f'(x)=2x^2-2ax+7a.$$

Если квадратное уравнение $2x^2-2ax+7a=0$ имеет корни $x_1\neq x_2$, то $f'(x)<0$ на интервале $(x_1;x_2)$. Следовательно, на этом интервале $f(x)$ убывает, и этот случай нам не подходит.

Если квадратное уравнение $2x^2-2ax+7a=0$ не имеет корней, то $f'(x)>0$ на всей числовой прямой, и этот случай нам подходит.

Если же квадратное уравнение $2x^2-2ax+7a=0$ имеет только один корень x_0, то $f'(x)>0$ на $(-\infty;x_0)$ и $(x_0;+\infty)$, а согласно замечанию точка x_0 присоединяется к каждому из промежутков. В результате получаем, что $f(x)$ возрастает на $(-\infty;+\infty)$.

Итак, нас устраивает случай, когда квадратное уравнение $2x^2-2ax+7a=0$ либо не имеет корней, либо имеет только один корень, то есть случай, когда $D\leq 0$. Таким образом,

$$D\leq 0 \iff \frac{D}{4}=a^2-14a\leq 0 \iff a\in[0;14].$$

Наибольшее значение $a=14$.

Ответ. 14.

Пример 4. (ЕГЭ) Найти наибольшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и диагональю OP, где O – начало координат, а P – точка на графике функции $y=\dfrac{3}{x}+16x^2e^{3-4x}$; $0,4\leq x\leq 1$.

Решение. Пусть A и B – проекции точки P на оси координат. Тогда искомая площадь равна

$$S=OA\cdot OB=y\cdot x=3+16x^3e^{3-4x}.$$

Наибольшее значение функция S принимает либо в точке локального максимума, либо на конце отрезка $[0,4;1]$. Сначала вычислим значение S на концах отрезка:

$$S_1=S(0,4)=3+16\cdot 0,4^3e^{3-4\cdot 0,4}=3+1,024e^{1,4};$$

$$S_2=S(1)=3+\frac{16}{e}.$$

Теперь вычислим значение S в точке локального экстремума. Найдём нули производной:

$$S'=0 \iff 16(x^3e^{3-4x})'=0 \iff (x^3)'e^{3-4x}+x^3(e^{3-4x})'=0 \iff$$

$$\iff 3x^2e^{3-4x}+x^3e^{3-4x}(-4)=0 \iff x^2e^{3-4x}(3-4x)=0.$$

На отрезке $[0,4;1]$ это уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{3}{4}$, значение S в этой точке равно

$$S_3 = S\left(\frac{3}{4}\right) = 3 + 16\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}.$$

Покажем, что $S_2 < S_3$. Для этого воспользуемся оценкой $2,4 < e < 3$:

$$S_2 = 3 + \frac{16}{e} < 3 + \frac{16}{2,4} = 3 + \frac{20}{3} = 9\frac{2}{3} < 9\frac{3}{4} = S_3.$$

Теперь сравним S_3 и S_1:

$$\begin{array}{ccl} S_3 & \vee & S_1 \\ 9\dfrac{3}{4} & \vee & 3 + 1,024e^{1,4} \\ 6\dfrac{3}{4} & \vee & 1,024e^{1,4} \\ \dfrac{27}{4} & \vee & 1,024e^{1,4} \\ 27 & \vee & 4 \cdot 1,024e^{1,4} \\ 27 & \vee & 4,096e^{1,4}. \end{array}$$

Так как $5 \cdot 3^{3/2} > 4,096e^{1,4}$, то, доказав неравенство $27 > 5 \cdot 3^{3/2}$, мы получим, что $27 > 4,096e^{1,4}$. Итак, сравним 27 и $5 \cdot 3^{3/2}$:

$$\begin{array}{rcl} 27 & \vee & 5 \cdot 3^{3/2} \\ 27 & \vee & 5 \cdot \sqrt{27} \\ \sqrt{27} & \vee & 5 \\ 27 & \vee & 25. \end{array}$$

Так как $27 > 25$, то $27 > 4,096e^{1,4}$ и $S_3 > S_1$. Следовательно, наибольшее значение площади прямоугольника равно $S_3 = 9,75$.

Ответ. $9,75$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Найдите максимум функции $y = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 2x + 8\dfrac{5}{6}$.
2. (ЕГЭ) Найдите минимум функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
3. (ЕГЭ) Найдите минимум функции $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2$.
4. (ЕГЭ) Найдите минимум функции $y = 5\dfrac{3}{4} + 3x + \dfrac{x^2}{2} - x^3 - \dfrac{x^4}{4}$.
5. (ЕГЭ) При каком наибольшем значении b функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 3bx - 1$ возрастает на всей числовой прямой?

6. (ЕГЭ) При каком наибольшем значении m функция $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + mx^2 - 4mx + 3$ убывает на всей числовой прямой?

7. (ЕГЭ) Найдите длину промежутка возрастания функции $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$.

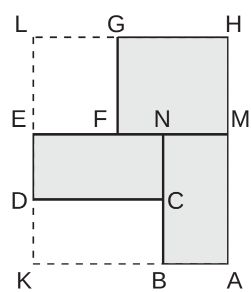
8. (ЕГЭ) При каком натуральном значении параметра a уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$ имеет ровно два корня?

9. (ЕГЭ) При каком наименьшем целом значении параметра p уравнение $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x = p$ имеет 3 корня?

10. (ЕГЭ) Найдите середину промежутка убывания функции $f(x) = x - 2\ln x$.

11. (ЕГЭ) Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B – на оси Ox, и её абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A. Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB, где точка O – начало координат, а
$$f(x) = \sqrt{7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x}, \quad \frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{9\pi}{8}.$$

12. (ЕГЭ) Требуется разместить на земле участок $ABCDEFGH$ площадью 1800 м^2, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где $FG = EF = 10$ м, $BC = 15$ м и $CD \ge 40$ м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, LH и CD, при которых периметр является наименьшим.



8.3. Первообразные элементарных функций, основные правила нахождения первообразных. Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной

Теоретический материал и примеры решения задач

О п р е д е л е н и е. Непрерывная и дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка
$$F'(x) = f(x).$$

Пример 1. Функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Заметим, что $\dfrac{x^3}{3} + 5$ имеет также производную x^2 и поэтому также является первообразной для функции $f(x) = x^2$ на $(-\infty; +\infty)$.

В общем случае справедливо следующее утверждение: любая первообразная функции $f(x)$ на промежутке I может быть представлена в виде

$$F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная, а $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на промежутке I.

Пример 2. Функция $F(x) = \dfrac{1}{x}$ не является первообразной для $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как в точке $x = 0$ равенство $F'(x) = f(x)$ не выполняется. Но на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $F(x)$ будет первообразной для $f(x)$.

Приведём для основных элементарных функций соответствующие им первообразные:

$$f(x) = x^a \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1), \qquad F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C; \tag{40}$$

$$f(x) = \sin x, \qquad F(x) = -\cos x + C; \tag{41}$$

$$f(x) = \cos x, \qquad F(x) = \sin x + C; \tag{42}$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad F(x) = \operatorname{tg} x + C; \tag{43}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \qquad F(x) = -\operatorname{ctg} x + C; \tag{44}$$

$$f(x) = e^x, \qquad F(x) = e^x + C; \tag{45}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad F(x) = \ln|x| + C. \tag{46}$$

При вычислении производных мы пользовались тем, что постоянный множитель можно выносить за знак производной и производная суммы двух функций равна сумме их производных. Эти же правила используются при нахождении первообразных.

Пример 3. Найти первообразную F функции $f(x)=e^x+\sin x$, если известно, что $F(0)=-1$.

Решение. Так как первообразная суммы двух функций равна сумме первообразных, то сначала, используя (45) и (41), найдём первообразные каждого из слагаемых, а потом их сложим. Получим

$$F(x)=e^x-\cos x+C,$$

где C – произвольная постоянная. Теперь выберем из множества всех первообразных ту, которая удовлетворяет условию $F(0)=-1$. Для этого определим значение константы C из условия

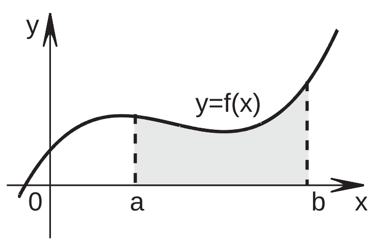
$$F(0)=e^0-\cos 0+C=-1 \quad\Longleftrightarrow\quad C=-1,$$

следовательно, $F(x)=e^x-\cos x-1$.

Ответ. $F(x)=e^x-\cos x-1$.

Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной

Рассмотрим на отрезке $[a;b]$ непрерывную знакопостоянную функцию $y=f(x)$. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, называют *криволинейной трапецией.*



Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема.

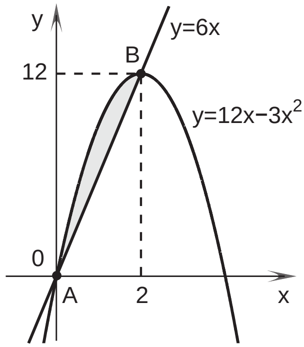
Теорема. Если $f(x)$ – непрерывная неотрицательная на отрезке $[a;b]$ функция, а $F(x)$ – её первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a;b]$, то есть

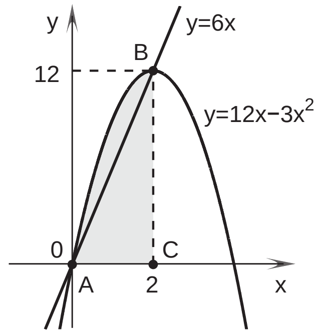
$$S=F(b)-F(a).$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y=6x$ и параболой $y=12x-3x^2$.

Решение. Построим на координатной плоскости графики этих функций. Координаты точек их пересечения найдём из системы:

$$\begin{cases} y=6x, \\ y=12x-3x^2; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0; \\ y=0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=2; \\ y=12; \end{array}\right. \end{array}\right.$$





следовательно, графики пересекаются в точках $A(0;0)$ и $B(2;12)$. Для того чтобы вычислить интересующую нас площадь, надо из площади, находящейся под параболой, вычесть площадь, находящуюся под прямой. Площадь криволинейной трапеции ABC равна

$$S_1 = F(2) - F(0),$$

где первообразная функции $y = 12x - 3x^2$ равна $F(x) = 6x^2 - x^3$. Следовательно,

$$S_1 = F(2) - F(0) = 16 - 0 = 16.$$

Площадь под прямой есть площадь прямоугольного треугольника ABC, где $C(2;0)$. Поэтому здесь нет необходимости использовать первообразную:

$$S_2 = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 12.$$

Искомая площадь равна $S_1 - S_2 = 16 - 12 = 4$.

Ответ. 4.

Задачи

1. (ЕГЭ) Указать первообразную функции $f(x) = x + \cos x$.
2. (ЕГЭ) Указать первообразную функции $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0;+\infty)$.
3. (ЕГЭ) Указать первообразную функции $f(x) = 2 - e^x$.
4. (ЕГЭ) Найти первообразную F функции $f(x) = e^x + \cos x$, если известно, что $F(0) = -1$.
5. (ЕГЭ) Известно, что $F(x)$ – первообразная функции $f(x) = -18x^2 - 7$ и $F(0) = 0$. Найти $F(1)$.
6. (ЕГЭ) Для функции $f(x) = 2\cos x$ указать первообразную F, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$.
7. (ЕГЭ) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 5$; $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$.

8. (ЕГЭ) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x}$ и $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{4}$.

9. (ЕГЭ) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sin\frac{1}{2}x$, $y = \sin x$, $y = 0$ при $0 \le x \le 2\pi$.

10. (ЕГЭ) Найти значение выражения $2S$, если S – площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y + x = 3$.

11. (ЕГЭ) Найти значение выражения $6S$, если S – площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x + 1$ и графиком её производной.

9. Текстовые задачи

В этом параграфе, в отличие от §4, рассматриваются более сложные задачи, приводящие к нелинейным уравнениям и системам. Рассматриваются также задачи на целые числа с перебором вариантов и отбором решений.

9.1. Скорость, движение и время

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на движение. При составлении систем для таких задач требуется лишь здравый смысл и знание того, что

$$\text{расстояние} = \text{скорость} \cdot \text{время}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (М/м-87.4) Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой – на 20 км/ч, то они прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.

Решение. Обозначим за x и y км/ч соответственно скорости первого и второго поездов, за a км – расстояние BC. Условие одновременного прибытия в точке C записывается уравнением:

$$\frac{a+60}{x} = \frac{a}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad a > 0;$$

так как явно не сказано, какой именно из поездов увеличил скорость на 20 км/ч, а какой на 25 км/ч, с формальной точки зрения получаем совокупность:

$$\frac{a+60}{x+25} = \frac{a}{y+20} = \frac{a}{y} - 2 \qquad \text{или} \qquad \frac{a+60}{x+20} = \frac{a}{y+25} = \frac{a}{y} - 2.$$

1) Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} \dfrac{a+60}{x} = \dfrac{a}{y}, \\ \dfrac{a+60}{x+25} = \dfrac{a}{y+20}, \\ \dfrac{a}{y+20} = \dfrac{a}{y} - 2; \end{cases}$$

почленно делим первое уравнение на второе:

$$\frac{x+25}{x} = \frac{y+20}{y}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{5}{4}y;$$

подставляем в первое уравнение: $\dfrac{4}{5}(a+60) = a \iff a = 240$ км; подставляем в третье уравнение: $\dfrac{240}{y+20} = \dfrac{240}{y} - 2 \iff y = 40$ км/ч. Тогда $x = 50$ км/ч.

2) Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} \dfrac{a+60}{x} = \dfrac{a}{y}, \\ \dfrac{a+60}{x+20} = \dfrac{a}{y+25}, \\ \dfrac{a}{y+25} = \dfrac{a}{y} - 2; \end{cases}$$

почленно делим первое уравнение на второе:

$$\frac{x+20}{x} = \frac{y+25}{y}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{4}{5}y;$$

подставляем в первое уравнение: $\dfrac{5}{4}(a+60) = a \iff a = -300 < 0$; значит, данный вариант не подходит.

О т в е т. 50 км/ч; 40 км/ч.

Задачи

1. (Геол-00.3) От причала A к причалу B отплыли катер и лодка, причём скорость катера в 5 раз больше скорости лодки. Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала B за 2 часа, а лодка за 4 часа?

2. (Биол-87.2) Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Найти, какую часть пути от A до B пройдёт плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

3. (ВМК-99(1).1) Пункты A, B, C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/час и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 час. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 часа, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти расстояние между B и C.

4. (Геогр-77.4) Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 минут позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

5. (ВКНМ-99(1).3) Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход Π_1, а в тот же момент из деревни в город вышел пешеход Π_2. Скорости пешеходов были равны. Встретившись, Б и Π_2 некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью, равной 12 км/ч, а Π_2 уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и Π_2, одновременно пришли оба пешехода. Найти скорость пешехода Π_1.

6. (Хим-81.3) Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый – остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найти расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

7. (ВМК-92.4) Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут того же дня. Найти время отправления мотоцикла из города B.

9.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Перед тем, как приступить к решению задач этого раздела необходимо повторить соответствующие определения и формулы, приведённые в разделе 4.2, стр. 48.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геогр-99(1).2) Сумма первых пяти членов возрастающей геометрической прогрессии равна 15, а их произведение равно 1155. Найти шестидесятый член прогрессии.

Р е ш е н и е. Обозначим за d разность прогрессии, $a_3 = x$; получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d) = 15,\\ (a_3 - 2d)(a_3 - d)a_3(a_3 + d)(a_3 + 2d) = 1155;\end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases}5x = 15,\\ (x^2 - 4d^2)(x^2 - d^2)x = 1155.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $x = 3$ и подставляем во второе:

$$(9 - 4d^2)(9 - d^2) = 385 \quad \iff \quad 4d^4 - 45d^2 - 304 = 0,$$

откуда $d^2 = 16$, то есть $d = 4$ с учётом условия $d > 0$. Следовательно,

$$a_{60} = a_1 + 59d = a_3 - 2d + 59d = 3 + 57 \cdot 4 = 231.$$

О т в е т. 231.

П р и м е р 2. (Псих-00.2) Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов равна целому числу, кратному четырём, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.

Р е ш е н и е. Если первый член геометрической прогрессии равен 10, то второй и третий равны $10q$ и $10q^2$, где q знаменатель прогрессии. По условию задачи $10q + \ 10q^2 = 4n \leq 1000$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $n \leq 250$ и

$$q^2 + q - \frac{2n}{5} = 0 \quad \iff \quad q = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}.$$

Так как по условию $q > 1$, то корень $q = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}$ не подходит. Отберём n, при которых второй корень больше единицы:

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2} > 1 \quad \iff \quad \sqrt{1 + \frac{8n}{5}} > 3 \quad \iff \quad n > 5.$$

В результате получаем $q = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}$ при $n = 6, 7, ..., 250$.

О т в е т. $\dfrac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}}{2}$ при $n = 6, 7, ..., 250$.

Задачи

1. (Геол-94.1) Какое из двух чисел больше: $2\sqrt{17}$ или $8,(24)$?

2. (Почв-00.2) Первый, второй и четвёртый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель этой геометрической прогрессии.

3. (ВМК-90.2) Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечётными номерами на 15 больше суммы членов с чётными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

4. (М/м-97(2).2) Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна (-3), сумма третьих членов равна 1, а сумма пятых членов равна 5. Найти разность арифметической прогрессии.

5. (ЕГЭ.С) Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить соответственно 2, 5, 7 и 7, то получим четыре числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие геометрическую прогрессию.

6. (ЕГЭ.С) Сумма утроенного второго и четвёртого членов арифметической прогрессии равна 12. При каком значении разности прогрессии произведение третьего и пятого членов прогрессии будет наименьшим?

7. (Геол-80.4) В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

8. (М/м-00(1).2) О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвёртых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

9. (ВМК-94(2).5) В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента сразу после 30-й инъекции?

10. (Соц-98.5) Найти все натуральные значения параметра n, при каждом из которых задача: «Найти арифметическую прогрессию, если известны её семнадцатый член и сумма n первых членов» не имеет решений или её решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

9.3. Концентрация, смеси и сплавы, массовые и объёмные доли

Теоретический материал

Все задачи этого раздела сводятся к системам линейных или квадратных уравнений. При решении задач на сплавы и смеси надо помнить, что

$$\text{концентрация вещества}\,(\%) = \frac{\text{масса вещества}}{\text{полная масса раствора (сплава)}} \cdot 100\,\%.$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-81.3) Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый – 40 %-й, второй – 60 %-й. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20 %-й раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80 %-го раствора, то получился бы 70 %-й раствор. Сколько было 40 %-го и 60 %-го растворов?

Решение. Пусть количество 40 %-го раствора составляет x кг, а количество 60 %-го раствора – y кг. При смешивании x кг 40 %-го раствора, y кг 60 %-го раствора и 5 кг чистой воды получается раствор массой $(x+y+5)$ кг, содержащий 20 % кислоты по условию. Поскольку в x кг 40 %-го раствора кислоты содержится $\frac{x}{100} \cdot 40 = 0,4x$ кг, а в y кг 60 %-го раствора содержится $0,6y$ кг кислоты, то в $(x+y+5)$ кг полученного раствора содержится $(0,4x+0,6y)$ кг кислоты, что составляет 20 % от $(x+y+5)$ кг, то есть $0,2(x+y+5)$ кг. Получаем уравнение

$$0,4x + 0,6y = 0,2(x+y+5).$$

Если же вместо 5 кг воды добавить 5 кг 80 %-го раствора, то получится раствор той же массы $(x+y+5)$ кг, но масса кислоты в нём составит $(0,4x+0,6y+0,8\cdot 5)$ кг. Так как полученный раствор по условию 70 %-й, то справедливо равенство

$$0,4x + 0,6y + 0,8 \cdot 5 = 0,7(x+y+5).$$

Итак, x и y можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y = 0,2(x+y+5), \\ 0,4x + 0,6y + 4 = 0,7(x+y+5); \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + y = 5; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ. 1 кг 40 %-го раствора и 2 кг 60 %-го раствора.

Пример 2. (Геол-91.3) В баке находится 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объёму количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством её в исходной смеси. Определить количество воды в исходной смеси.

Решение. Проследим за изменением количества кислоты в баке на каждом из этапов. Пусть изначально в баке было x литров кислоты. На первом этапе из бака отлили y литров смеси (причём $y = x + 10$) и долили y литров воды. На втором этапе из бака отлили y литров смеси. Занесём в таблицу характеристики смеси.

	всего смеси	кислота	концентрация	отлили кислоты
1 этап	100 л	x	$\dfrac{x}{100}$	$y\cdot\dfrac{x}{100}$
2 этап	100 л	$x-y\dfrac{x}{100}$	$\dfrac{x-y\frac{x}{100}}{100}$	$y\dfrac{x-y\frac{x}{100}}{100}$

Так как количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством её в исходной смеси, то

$$\left(x-y\frac{x}{100}\right)-y\frac{x-y\frac{x}{100}}{100}=\frac{x}{4}\quad\Longleftrightarrow\quad\left(x-y\frac{x}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{y}{100}\right)=\frac{x}{4}\quad\Longleftrightarrow$$

$$x\left(1-\frac{y}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{y}{100}\right)=\frac{x}{4}\quad\Longleftrightarrow\quad\left(1-\frac{y}{100}\right)^2=\frac{1}{4}\quad\Longleftrightarrow\quad 1-\frac{y}{100}=\pm\frac{1}{2},$$

откуда $y=50$ литров или $y=150$ литров; по смыслу задачи $y<100$; следовательно, $y=50$, $x=40$ и искомая величина $100-x=60$ литров.

Ответ. 60 литров.

Задачи

1. (ЕГЭ) Масса первого сплава на 3 кг больше массы второго сплава. Первый сплав содержит 10 % цинка, второй 40 % цинка. Новый сплав, полученный из двух первоначальных, содержит 20 % цинка. Определите массу нового сплава.

2. (ЕГЭ) Кусок сплава меди с оловом массой 15 кг содержит 20 % меди. Сколько чистой меди необходимо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 40 % олова?

3. (ЕГЭ) Свежие грибы содержат 92 % воды, а сухие 8 %. Сколько получится сухих грибов из 23 килограммов свежих?

4. (ЕГЭ) К 40 % раствору соляной кислоты добавили 50 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60 %. Найдите первоначальный вес раствора.

5. (ЕГЭ) Какое количество воды нужно добавить в 1 литр 9 %-ного раствора уксуса, чтобы получить 3 %-ный раствор?

6. (Филол-00.1) Имеется 40 литров 0,5 % раствора и 50 литров 2 % раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько нужно взять второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5 % раствора уксусной кислоты?

7. (Физ-78.2) Руда содержит 40 % примесей, а выплавленный из неё металл содержит 4 % примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?

8. (Экон-80.4) Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй – 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определить, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве.

9. (Геол-95.6) Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке – 10 %, во втором – 40 %. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором – 30 %. Определить массу полученного слитка.

10. (Геол-96(1).5) В одном декалитре кислотного раствора 96 % объёма составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40 %?

11. (ВМК-96.2) Первый раствор содержит 20 % азотной кислоты и 80 % воды, второй – 60 % кислоты и 40 % воды. Первая смесь была получена из 15 л первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 л первого раствора, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если процентное содержание воды во второй смеси вдвое больше процентного содержания кислоты в первой?

12. (ВМК-00.2) Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора 1 л воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора 39 л воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найти концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

13. (Экон-79.3) Из сосуда, до краёв наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объём воды в сосуде стал на 3 литра больше объёма оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

14. (Геол-81.5) Для составления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда: первый ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости A. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости A ко всему объёму имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд?

9.4. Целые числа, перебор вариантов, отбор решений

Теоретический материал

Все задачи этого раздела сводятся к уравнениям и неравенствам в целых числах, решение которых может быть получено перебором.

Для того, чтобы организовать перебор, надо отбросить заведомо неприемлемые варианты.

При решении задач на целые числа полезно использовать делимость целых чисел, разложение на простые сомножители, соображения симметрии.

Рассмотрим некоторые основные приёмы решения уравнений в целых числах.

Разложение на множители

Пусть каким-либо образом удалось получить представление исходного уравнения в виде

$$f_1(x,y,z)\cdot f_2(x,y,z)=d,$$

где d – некоторое целое число, а функции $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x,y,z)$ принимают только целочисленные значения при целых x,y,z. После этого следует перебрать всевозможные пары целых чисел (d_1,d_2) такие, что $d_1\cdot d_2=d$, и для каждой такой пары решить систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=d_1, \\ f_2(x,y,z)=d_2. \end{cases}$$

Предполагается, что каждое уравнение системы проще исходного уравнения.

Рассмотрим наиболее типичные преобразования к требуемому виду.

1. Пусть $(ax)^2-(by)^2=d$. Тогда формула разности квадратов приводит к искомому равенству $(ax+by)\cdot(ax-by)=d$.

2. Пусть $ax^2+bxy+cy^2=d$ и квадратный трёхчлен at^2+bt+c раскладывается на множители с целыми коэффициентами. Это означает, что соответствующий дискриминант является полным квадратом. Тогда легко выписать требуемое представление

$$(a_1x+b_1y)\cdot(a_2x+b_2y)=d.$$

   В этих рассуждениях $a,\ b,\ c,\ d$ – целые числа.

Использование оценок

Рассматривается уравнение $f_1(x,y,z)+f_2(y,z)+f_3(z)=d$, где $f_1,\ f_2,\ f_3$ – заданные неотрицательные выражения, d – натуральное число. Из уравнения следует неравенство

$$0\le f_3(z)=d-f_1(x,y,z)-f_2(y,z)\le d,$$

откуда определяются возможные значения z. При каждом конкретном z_0 мы будем иметь уравнение

$$f_1(x,y,z_0)+f_2(y,z_0)=d-f_3(z_0).$$

Таким образом, мы свели исходное уравнение к аналогичному уравнению с меньшим числом слагаемых и переменных. Для него аналогичным образом получается неравенство

$$0 \leq f_2(y, z_0) \leq d - f_3(z_0),$$

откуда для данного z_0 находятся возможные значения y. При каждом конкретном y_0 мы будем иметь уравнение

$$f_1(x, y_0, z_0) = d - f_2(y_0, z_0) - f_3(z_0),$$

откуда находятся целые значения x_0, отвечающие (y_0, z_0), либо делается заключение об отсутствии решений при данных (y_0, z_0). Перебрав все возможные пары (y_0, z_0), найдём все возможные значения x_0.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (У) Найти все пары натуральных чисел p и q, для которых $4p^2 = q^2 - 9$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде $(q - 2p)(q + 2p) = 9$. Так как p и q – натуральные числа, то $q + 2p \geq 3$, следовательно, возможны только следующие варианты:

$$1)\ \begin{cases} q + 2p = 9, \\ q - 2p = 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad q = 5,\ p = 2;$$

$$2)\ \begin{cases} q + 2p = 3, \\ q - 2p = 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad q = 3,\ p = 0.$$

Так как нас интересуют только натуральные значения, то второй вариант не подходит.

О т в е т. $(2; 5)$.

П р и м е р 2. (У) Решить в целых числах уравнение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде

$$(y - z)^2 + 2z^2 = 30 - 5x^2.$$

Так как левая часть уравнения неотрицательна, то и правая часть уравнения тоже должна быть неотрицательна, то есть

$$30 - 5x^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leq 6.$$

Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем, что x^2 может принимать значения 0; 1; 4.

1) При $x^2 = 0$ получаем уравнение $(y - z)^2 + 2z^2 = 30$ или $(y - z)^2 = 30 - 2z^2$. Из условия $30 - 2z^2 \geq 0$ следует, что $z^2 = 0$; $z^2 = 1$; $z^2 = 4$; $z^2 = 9$, однако ни при одном из этих значений не существует целого y.

2) При $x^2 = 1$ имеем уравнение $(y - z)^2 = 25 - 2z^2$. Из условия $z^2 \leq \dfrac{25}{2}$ получаем возможные значения: $z^2 = 0$; $z^2 = 1$; $z^2 = 4$; $z^2 = 9$. Уравнение имеет целые решения только при $z^2 = 0$. В этом случае $y^2 = 25 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm 5$.

3) При $x^2 = 4$ имеем $(y - z)^2 = 10 - 2z^2$. Так как $z^2 \leq 5$, то $z^2 = 0$; $z^2 = 1$; $z^2 = 4$. При этих значениях уравнение не имеет целых решений.

О т в е т. $(1; 5; 0)$, $(1; -5; 0)$, $(-1; 5; 0)$, $(-1; -5; 0)$.

Пример 3. (ВМК-86.3) В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых, в свою очередь, в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

Решение. Обозначим количество томов в собрании: n штук с художественными произведениями, l штук с письмами, p штук с публицистикой. Из условия задачи получаем

$$\begin{cases} n = kl,\ n, k, l \in \mathbb{N}, \\ 3l = p,\ p \in \mathbb{N}, \\ n + l + p < 20, \\ 2n = 14 + l; \end{cases}$$

подставляем последовательно $n = kl$ и $p = 3l$ в два последних условия:

$$\begin{cases} kl + l + 3l < 20, \\ 2kl = 14 + l; \end{cases}$$

из второго уравнения следует, что l – чётное; подставляем из уравнения в неравенство: $2kl = l + 14$, то есть $l + 14 + 8l < 40$, откуда $9l < 26$, $l = 2$ или $l = 1$ – нечётное; значит, $l = 2$, $p = 3l = 6$.

Ответ. 6 шт.

Задачи

1. (У) Решить в целых числах уравнение $6x^2 + 5y^2 = 74$.
2. (У) Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$.
3. (У) Решить в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 21$.
4. (У) Решить в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.
5. (У) Решить в целых числах уравнение $x^2 = y^2 + 2y + 13$.
6. (У) Решить в целых числах уравнение $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7$.
7. (Экон.К-66.1) Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причём «троек» было больше, чем «пятёрок», и меньше, чем «четвёрок». Кроме того, число «четвёрок» делилось на 10, а число «пятёрок» было чётным. Определить, сколько каких оценок получила группа.
8. (Экон-94.1) Найти все целочисленные решения системы $\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \leq 5. \end{cases}$
9. (Биол-92.4) Найти все пары целых чисел p, q, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам $\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$

10. (Почв-77.5) Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

11. (ВМК-82.4) На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

12. (М/м-00(2).2) Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашёл 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашёл. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберёзовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесённых Петей домой грибах?

13. (Геол.ОГ-88.5) В пионерский лагерь отправилась автобусная колонна с 510 пионерами, состоящая из «Икарусов» и «Лиазов», причём количество тех и других нечётно. Число пионеров в каждом из «Лиазов» одинаково и кратно трём, а в каждом «Икарусе» – в 1,2 раза больше, чем в одном «Лиазе». Сколько всего автобусов в колонне?

10. Раскрытие модулей в уравнениях и неравенствах различных видов

В этом параграфе предлагаются более сложные и интересные задачи по сравнению с разделом 1.3, в котором рассматривались простейшие задачи с модулями.

10.1. Различные приёмы раскрытия модулей, системы уравнений и неравенств с модулями

Теоретический материал

Напомним определение модуля вещественного числа x:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Раскрытие модулей по определению

Приведём уже упоминавшиеся ранее эквивалентные переходы при раскрытии модулей по определению:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{47}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) > g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{48}$$

$$|f(x)| < g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) < g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{49}$$

Заметим, что при подобном раскрытии модулей нам не приходится исследовать знак функции $g(x)$, стоящей в правой части неравенств:

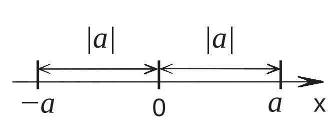
- из равносильной совокупности (48) автоматически следует, что все значения x из области определения $f(x)$ и $g(x)$, при которых $g(x) < 0$, являются решением исходного неравенства;
- из равносильной совокупности (49) при $g(x) < 0$ автоматически следует отсутствие решений у исходного неравенства.

В случае нестрогих неравенств с модулем неравенства равносильных систем также становятся нестрогими. Кроме того, нет принципиальной разницы в приписывании случая $f(x) = 0$ к любой из получаемых систем (или даже к обеим сразу).

Рассмотрим другой подход к раскрытию модулей, основанный на использовании геометрического смысла модуля.

Раскрытие модулей через геометрический смысл

Геометрическим смыслом модуля числа считается расстояние по числовой оси от начала отсчёта до рассматриваемого числа, причём одному и тому же значению $|a|$ соответствуют две симметричные относительно начала отсчёта точки: $-a$ и a.



Использование геометрического смысла модуля позволяет существенно сократить равносильные преобразования при раскрытии модулей. Например:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array} \right. \end{cases} \tag{50}$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{aligned} &f(x) > g(x), \\ &f(x) < -g(x); \end{aligned}\right. \tag{51}$$

$$|f(x)| < g(x) \iff -g(x) < f(x) < g(x). \tag{52}$$

Заметим, что при таком раскрытии модулей в неравенствах нам не приходится исследовать знак не только функции $g(x)$, стоящей в правой части неравенств, но и функции $f(x)$, стоящей под знаком модуля. Это сокращает работу при решении задач.

В случае нестрогих неравенств с модулем все неравенства равносильных систем также становятся нестрогими.

Дополнительные факты и сведения

В ряде случаев для упрощения решения бывает удобно использовать специальный вид уравнения или неравенства. Например:

$$|f(x)| = f(x) \iff f(x) \ge 0; \tag{53}$$

$$|f(x)| \le f(x) \iff f(x) \ge 0; \tag{54}$$

$$|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \iff \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0; \end{cases} \tag{55}$$

$$|f(x)| + |g(x)| \le f(x) + g(x) \iff \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \tag{56}$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон.К-78.1) Найти все решения уравнения $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$, удовлетворяющие неравенству $x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Раскроем модуль через геометрический смысл. Согласно (50) получаем:

$$|x^2+x-1| = 2x-1 \iff \begin{cases} 2x - 1 \ge 0, \\ \left[\begin{aligned} &x^2 + x - 1 = 2x - 1, \\ &x^2 + x - 1 = -(2x - 1); \end{aligned}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{aligned} &x^2 - x = 0, \\ &x^2 + 3x - 2 = 0; \end{aligned}\right. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{aligned} &x = 0 \quad \text{или} \quad x = 1, \\ &x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{или} \quad x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \end{aligned}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{aligned} &x = 1, \\ &x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}. \end{aligned}\right.$$

Корень $x = 1$ не удовлетворяет неравенству $x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Проверим второй корень:

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\sqrt{17}-3}{2} & \vee & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\
\sqrt{51}-3\sqrt{3} & \vee & 2 \\
\sqrt{51} & \vee & 3\sqrt{3}+2 \\
51 & \vee & 31+12\sqrt{3} \\
20 & \vee & 12\sqrt{3} \\
5 & \vee & 3\sqrt{3} \\
25 & < & 27
\end{array}$$

Значит, $\dfrac{\sqrt{17}-3}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, и $x = \dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$ является решением задачи.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$.

Пример 2. (Биол-83.3) Решить неравенство $8 + 6 \cdot |3 - \sqrt{x+5}| > x$.

Решение. Раскроем модуль через геометрический смысл. Согласно (51) получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 6(3-\sqrt{x+5}) > x-8, \\ 6(3-\sqrt{x+5}) < 8-x; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 6\sqrt{x+5} < 26-x, \\ 6\sqrt{x+5} > x+10. \end{array}\right.$$

Каждое из получившихся неравенств решаем по стандартному алгоритму для радикалов:

1) $$6\sqrt{x+5} < 26-x \iff \begin{cases} 36(x+5) < (26-x)^2, \\ x \ge -5, \\ 26-x \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-88x+496 > 0, \\ -5 \le x \le 26; \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in (-\infty; 44-12\sqrt{10}) \cup (44+12\sqrt{10}; +\infty) \\ -5 \le x \le 26; \end{cases} \iff -5 \le x < 44-12\sqrt{10};$$

2) $$6\sqrt{x+5} > x+10 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 36(x+5) > (x+10)^2, \\ x \ge -10, \end{cases} \\ \begin{cases} x+5 \ge 0, \\ x < -10; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-16x-80 < 0, \\ x \ge -10, \end{cases} \\ \emptyset; \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} -4 < x < 20, \\ x \ge -10; \end{cases} \iff -4 < x < 20.$$

Объединяя результаты первого и второго случаев, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} -5 \le x < 44-12\sqrt{10}, \\ -4 < x < 20; \end{array}\right. \iff -5 \le x < 20.$$

Ответ. $[-5; 20)$.

Пример 3. (ВМК-74.3) Найти все значения x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям $\begin{cases} |x-2|+|x-3|=1, \\ 813x-974 \le 163x^2. \end{cases}$

Решение. Сначала рассмотрим уравнение

$$|x-2|+|x-3|=1 \iff |x-2|+|3-x|=(x-2)+(3-x) \iff$$

$$\iff \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 3-x \ge 0; \end{cases} \iff 2 \le x \le 3.$$

Теперь найдём корни квадратного трёхчлена $163x^2-813x+974$. Вычисление дискриминанта будет достаточно громоздким, поскольку все коэффициенты являются трёхзначными числами. Если же целочисленный корень ($x_1=2$) найти подбором, то второй корень можно получить с помощью теоремы Виета из соотношения $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{974}{163}$. Непосредственное вычисление дискриминанта $D = 813^2 - 4 \cdot 163 \cdot 974 = 25921 = 161^2$ приводит к тем же значениям $x_1 = \dfrac{813-161}{2 \cdot 163} = 2$, $x_2 = \dfrac{487}{163}$. В результате исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ x \in (-\infty;2] \cup \left[\dfrac{487}{163};+\infty\right); \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=2, \\ \left[\dfrac{487}{163};3\right]. \end{array}\right.$$

Ответ. $\{2\} \cup \left[\dfrac{487}{163};3\right]$.

Задачи

1. (Геол-91.2) Решить уравнение $|x^2-2x-1|-x+1=0$.

2. (Физ-98(2).2) Решить неравенство $|x^2+2x-8|>2x$.

3. (Биол-98.2) Решить неравенство $|x^2+x-2|+|x+4| \le x^2+2x+6$.

4. (Физ-96(2).3) Решить неравенство $-1<|x^2-9|<27$.

5. (Экон-90.2) Решить уравнение $\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|$.

6. (Геогр-99(1).3) Решить уравнение $\sqrt{|x^2+14x+47|-1}=|x+7|-1$.

7. (ВМК-00(1).1) Решить неравенство $\big||x^2-8x+2|-x^2\big| \ge 2x+2$.

8. (М/м-00(1).1) Решить неравенство а) $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$;
   б) $\dfrac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|} < \dfrac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

9. (Почв-00.4) Решить систему уравнений $\begin{cases} |x-y|+2x=6, \\ |2x-y|+3x=6 \end{cases}$
   и изобразить множество решений на координатной плоскости (x,y).

10. (ИСАА-99.5) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-6}-3}{|x-1|-4} \geq 1$.

11. (ВМК-98(1).2) Решить неравенство
а) $|\sqrt{x-4}-3| > |\sqrt{9-x}-2|+1$; б) $|\sqrt{-2x-4}-3| < |\sqrt{9+2x}-2|+1$.

12. (Геогр-78.5) а) Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений
$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0. \end{cases}$$
б) Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует ровно два значения x, удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} |x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12x|x|=0, \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0. \end{cases}$$

13. (Геол-86.5) а) Для каждой пары положительных чисел a и b найти решение неравенства $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{a^2}} > \left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{b}\right|$.
б) Для каждой пары положительных чисел c и d найти решение неравенства $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{c^2}} > \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{d}$.

14. (ВМК-95(1).4) Для каждого значения a решить неравенство
а) $|x+2a| \leq \dfrac{1}{x}$; б) $\left|\dfrac{1}{x}+2a\right| > x$.

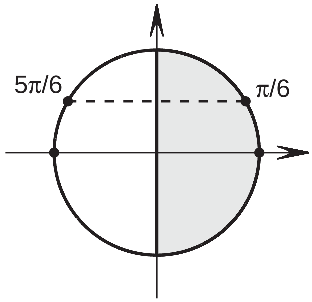
10.2. Раскрытие модулей в тригонометрических уравнениях

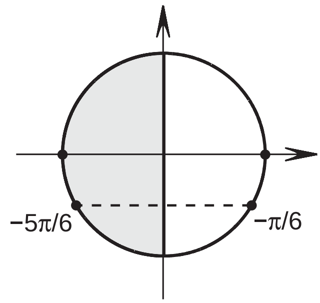
В этом разделе собраны тригонометрические уравнения с модулями. Для успешного решения таких задач необходимо помнить и уметь применять тригонометрические формулы, приведённые в предыдущих разделах.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-97(1).3) Решить уравнение $|\cos x|-\cos 3x = \sin 2x$. В ответе указать сумму корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-8\pi; 7\pi]$.

Решение. Раскроем модуль по определению.
1) При $\cos x \geq 0$ получим
$$\cos x - \cos 3x = \sin 2x \iff 2\sin x \sin 2x = \sin 2x \iff$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff x \in \left\{\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{6}+2\pi m,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k;\quad n,m,k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
Согласно условию $\cos x \geq 0$ оставляем углы I и IV четвертей:
$$x \in \left\{2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi m,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k;\quad n,m,k \in \mathbb{Z}\right\}.$$





2) При $\cos x < 0$ получим

$$-\cos x - \cos 3x = \sin 2x \iff \cos x(\sin x + \cos 2x) = 0 \implies 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \quad n, m, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Согласно условию $\cos x < 0$, получим $\quad x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Теперь найдём сумму корней, лежащих на отрезке $[-8\pi; 7\pi]$.

1) $x = 2\pi n \in [-8\pi; 7\pi]$; тогда $n = -4, -3, \ldots, 3$; $\quad S_1 = -8\pi - 6\pi - ... + 6\pi = -8\pi$.

2) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m \in [-8\pi; 7\pi]$; тогда $-8 \le m \le 6$; данную серию можно рассматривать как арифметическую прогрессию из 15 членов с разностью π и $a_1 = \dfrac{\pi}{2} - 8\pi$;

$S_2 = \dfrac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 15(a_1 + 7d) = 15\left(\dfrac{\pi}{2} - 8\pi + 7\pi\right) = -\dfrac{15\pi}{2}$.

3) $x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k \in [-8\pi; 7\pi]$; тогда $-8 \le k \le 6$; это арифметическая прогрессия из 15 членов с разностью π и $a_1 = \dfrac{\pi}{6} - 8\pi$;

$S_3 = \dfrac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 15(a_1 + 7d) = 15\left(\dfrac{\pi}{6} - 8\pi + 7\pi\right) = -\dfrac{25\pi}{2}$.

В результате $\quad S = S_1 + S_2 + S_3 = -8\pi - \dfrac{15\pi}{2} - \dfrac{25\pi}{2} = -28\pi$.

Ответ. -28π.

Пример 2. (Биол-75.4) Решить уравнение

$$\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x = |1 - 2\cos x + \cos 2x|.$$

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$\sin x + \sin 3x - 2\sin 2x = |1 + \cos 2x - 2\cos x| \iff$$

$$\iff 2\sin 2x \cos x - 2\sin 2x = |2\cos^2 x - 2\cos x| \iff$$

$$\iff 2\sin 2x(\cos x - 1) = |2\cos x(\cos x - 1)| \iff$$

$$\iff 2\sin x \cos x(\cos x - 1) = |\cos x| \cdot |\cos x - 1|.$$

Рассмотрим два случая:
1) $\cos x = 1$ является решением, то есть $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
2) Если $\cos x \neq 1$, то уравнение можно поделить на $|1 - \cos x| = 1 - \cos x > 0$. Получим:

$$-2\sin x\cos x = |\cos x| \quad\iff\quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \quad\iff\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi q,\ q \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Объединив найденные решения, получим ответ.

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ -\dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ 2\pi k;\ n, m, k \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (ЕГЭ.С) Решить уравнение $\cos^2 x + 0,5|\cos x| \cdot \sin x = 0$.
2. (Экон.К-77.1) Решить уравнение $\dfrac{\cos x}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x|$.
3. (Почв-77.3) Решить уравнение $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$.
4. (Почв-99(1).2) Решить уравнение $\left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right| = \sin x - \dfrac{1}{2}$.
5. (Псих-89.2) Решить уравнение $\left|\cos^2 \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1$.
6. (Почв-97.3) Решить уравнение $2\sin^2 x - \dfrac{|\sin x|}{\cos x} = 0$.
7. (Геол.ОГ-76.3) Найти все решения уравнения $\dfrac{|1 - \cos x|}{1 - \cos x}\sin x = 4\sin^2 x\cos x$.
8. (Биол-98.3) Решить уравнение $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2}\sin x\left(\cos x - \dfrac{2}{3}\right)$.
9. (Почв-91.3) Решить уравнение $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin x = |\cos x|$.
10. (Экон-95.2) Решить уравнение $2|\sin x| + \sqrt{3}\log_{\operatorname{tg} x}\left(-\dfrac{\cos x}{|\sin x|}\right) = 0$.
11. (Экон-97.1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\sin \dfrac{\pi(x+y)}{4}\right| + \left|1 - \sin \dfrac{\pi(x-y)}{4}\right| = 0, \\ \sqrt{4 - |x| - |y+2|} = \sqrt{4 - |x| - |y+2|}. \end{cases}$$

12. (Геол-99.5) Решить уравнение
$$|\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3| = |\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3|.$$
13. (Хим-96.5) Решить уравнение
$$|1 + \cos\pi\sqrt{x}| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos\pi\sqrt{x} - 45.$$
14. (ВМК-81.5) Найти все решения уравнения $|\sin(2x-1)| = \cos x$, удовлетворяющие условию $|x| \le 2\pi$.

10.3. Раскрытие модулей в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах

В этом разделе собраны задачи с модулями, содержащие показательные и логарифмические функции.

Для успешного решения таких задач необходимо помнить и уметь применять соответствующие формулы, приведённые в предыдущих разделах.

Примеры решения задач

Пример 1. (Экон-91.2) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{7}} \log_3 \dfrac{|-x+1| + |x+1|}{2x+1} \ge 0$.

Решение. Поочерёдно снимаем логарифмы, используя монотонность логарифмической функции, не забывая при этом про ОДЗ:
$$0 < \log_3 \frac{|x-1| + |x+1|}{2x+1} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < \frac{|x-1| + |x+1|}{2x+1} \le 3.$$
Так как числитель дроби положителен всегда, то неравенство имеет смысл только при положительном знаменателе, то есть при $x > -\dfrac{1}{2}$, что позволяет уйти от дроби и снять второй модуль в числителе:
$$2x + 1 < |x-1| + x + 1 \le 6x + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |x-1| > x, \\ |x-1| \le 5x + 2; \end{cases}$$
раскрываем модули в неравенстве через геометрический смысл:
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 1 < -x, \\ x - 1 > x; \end{array}\right. \\ \begin{cases} x - 1 \ge -5x - 2, \\ x - 1 \le 5x + 2; \end{cases} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, \\ x \ge -\dfrac{1}{6}, \\ x \ge -\dfrac{3}{4}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{6} \le x < \frac{1}{2}.$$
Все найденные решения удовлетворяют условию $x > -\dfrac{1}{2}$.

Ответ. $\left[-\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Пример 2. (ВМК-88.4) Решить неравенство $8^x \geq 6 \cdot 9^{|x-1|}$.

Решение. Раскрывая модуль по определению, получаем два случая.

1) Если $x \geq 1$, то $8^x \geq 6 \cdot 9^{x-1} \iff \left(\frac{9}{8}\right)^x \leq \frac{3}{2} \iff x \leq \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}$.

2) Если $x < 1$, то $8^x \geq 6 \cdot 9^{1-x} \iff 72^x \geq 54 \iff x \geq \log_{72} 54$.

В итоге $x \in [\log_{72} 54; 1) \cup \left[1; \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}\right] \iff x \in \left[\log_{72} 54; \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}\right]$.

Ответ. $\left[\log_{72} 54; \log_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2}\right]$.

Задачи

1. (Экон.К-86.1) Решить уравнение $2^{|x+1|} = \left(\sqrt{2}\right)^{-2x+3}$.
2. (М/м-98(1).1) Решить уравнение $2^{2x} - 2^{x+2} + \left|2^x - \frac{1}{3}\right| = -\frac{7}{3}$.
3. (М/м-93(1).1) Решить неравенство $5\left(\sqrt[6]{\frac{1}{5}}\right)^{35x} < 5^{|x^2+6x-1|}$.
4. (М/м-97(2).1) Решить неравенство $\dfrac{21 - 2^x - 2^{6-x} - |3 - 2^x|}{5 - |3 - 2^x|} \geq 1$.
5. (Почв-84.3) Решить неравенство $\log_2 \left|1 + \frac{1}{x}\right| > 1$.
6. (Физ-95(2).5) Решить неравенство $|\log_7 (x+2)| > 1$.
7. (Экон.К-85.2) Решить неравенство $x \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - x\right) \geq |x|$.
8. (Геол-92.3) Решить уравнение $|3 \log_x x^4 + 7 \log_7 2 \cdot \log_2 x^2| = -\log_x 49$.
9. (Экон.М-99.1) Решить неравенство $\log_{1+|7x+17|}(|3x+8| + |7x+17|) \leq 1$.
10. (ВМК-70.2) Решить уравнение $|1 - \log_{\frac{1}{6}} x| + 2 = |3 - \log_{\frac{1}{6}} x|$.
11. (ВМК-93.3) Решить неравенство $|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leq 3^x + 4x - x^2 - 7$.
12. (Экон-83.3) Решить неравенство $\log_3(x^2 - 2) < \log_3 \left(\frac{3}{2}|x| - 1\right)$.
13. (Геол-99(1).5) Решить неравенство $2 < \left|2 \log_{\frac{1}{2}} (3x+1) - 4\right| \leq 3$.
14. (Соц-97.5) Решить систему $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ \left|x\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2}x - 1. \end{cases}$
15. (М/м-90.2) Решить уравнение $3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0$.

11. Разложение на множители и расщепление в уравнениях и неравенствах различных видов

11.1. Понятие расщепления, равносильные преобразования

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, для решения которых необходимо иметь навыки разложения на множители алгебраических выражений. После разложения на множители получающиеся уравнения и неравенства решаются расщеплением.

Основная идея расщепления при решении уравнений $f(x)\cdot g(x)=0$ достаточно проста и основана на том, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, а другой при этом *имеет смысл*, то есть

$$f(x)\cdot g(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x) \text{ -- определена;} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} g(x)=0, \\ f(x) \text{ -- определена.} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Неравенство $f(x)\cdot g(x)<0$ справедливо тогда и только тогда, когда множители имеют разные знаки, то есть

$$f(x)\cdot g(x)<0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)>0, \\ g(x)<0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)<0, \\ g(x)>0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Неравенство $f(x)\cdot g(x)>0$ справедливо тогда и только тогда, когда множители имеют одинаковые знаки, то есть

$$f(x)\cdot g(x)>0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

При решении нестрогих неравенств можно воспользоваться аналогичной совокупностью с нестрогими неравенствами, например,

$$f(x)\cdot g(x)\le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)\ge 0, \\ g(x)\le 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x)\le 0, \\ g(x)\ge 0; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

но иногда удобнее расщепить нестрогое неравенство на равенство и строгое неравенство

$$f(x)\cdot g(x)\ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x)\cdot g(x)>0, \\ f(x)\cdot g(x)=0. \end{array}\right.$$

Теперь рассмотрим более общий случай. Пусть уравнение или неравенство приведено к виду, когда в правой части стоит нуль, а в левой – произведение сомножителей $F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot\ldots\cdot F_n(x)$, зависящих от аргумента таким образом, что решение уравнения $F_k(x) = 0$ или неравенства $F_k(x) > 0$ при $\forall k = 1, 2, ..., n$ трудностей не представляет.

Правило расщепления уравнений: произведение равно нулю в тех и только тех случаях, когда хотя бы один из его сомножителей равен нулю, а все остальные имеют при этом смысл.

Правило расщепления неравенств: произведение отрицательно в тех и только тех случаях, когда нечётное число его сомножителей отрицательны, а остальные положительны; произведение положительно в тех и только тех случаях, когда чётное число его сомножителей отрицательны, а остальные положительны (при этом нуль может считаться чётным числом).

Замечание. Случай, когда множителей больше, чем два, можно свести к случаю с двумя множителями, последовательно производя расщепление.

Примеры решения задач

Пример 1. (Псих-81.1) Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы

$$x^5 \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0.$$

Возможны два варианта: либо $x = 0$ и при этом $x^2 - 4y^2 \geq 0$, либо $x^2 - 4y^2 = 0$.

В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 4y^2 \geq 0, \\ x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ -4y^2 \geq 0, \\ -y + \sqrt{-4y^2} = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ 0 = 2; \end{cases}$$

то есть система не имеет решений.

Во втором случае получаем систему

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = 2|y|, \\ x - y = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 2y, \\ x = y + 2; \end{cases}$$

откуда и получаем ответ.

Ответ. $\left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$, $(4; 2)$.

Пример 2. (Геол-94(1).6) Решить неравенство $|x| \cdot (x^4 - 2x^2 - 3) \geq 0$.

Решение. Исходное неравенство равносильно совокупности уравнения

$$|x| \cdot (x^4 - 2x^2 - 3) = 0 \qquad (*)$$

и неравенства

$$|x| \cdot (x^4 - 2x^2 - 3) > 0. \qquad (**)$$

1) Решим уравнение (*) расщеплением. Один из корней уравнения $x_1 = 0$, другие являются корнями биквадратного уравнения $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$, решая которое, получим $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$.

2) В силу неотрицательности модуля неравенство (**) при $x \neq 0$ равносильно неравенству

$$x^4 - 2x^2 - 3 > 0 \iff (x^2+1)(x^2-3) > 0 \iff (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0 \iff$$

$$\iff x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right).$$

Объединяя найденные решения, получаем ответ.

О т в е т. $\left(-\infty; -\sqrt{3}\,\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Задачи

1. (ЕГЭ.В) Найти сумму корней уравнения $(x+1)\cdot\sqrt{2x^2+5x+2} = 0$.
2. (ЕГЭ.В) Найти произведение корней уравнения $(2x-3)\cdot\sqrt[3]{2x^2-5x+2} = 0$.
3. (Экон-86.3) Решить уравнение $\sqrt{3x+4}\cdot(9x^2+21x+10) = 0$.
4. (ВМК-78.1) Решить неравенство $(x-1)\cdot\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$.
5. (Геол-88.2) Решить неравенство $(x^2+8x+15)\cdot\sqrt{x+4} \geq 0$.
6. (Экон.К-86.3) Решить неравенство $(8x^2-6x+1)\cdot\sqrt{-25x^2+15x-2} \geq 0$.
7. (М/м-83.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.
8. (М/м-95(1).2) Решить уравнение $\dfrac{|x^3|-|5x|}{\sqrt{2x^2-4x-1}-|x|+2} = 0$.
9. (ЕГЭ.С) При каких значениях параметра a уравнение $(x^2+4x+3)\sqrt{x-a} = 0$ имеет ровно два решения?
10. (Псих-98.3) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{16-3x^2+22x} \leq 0$.
11. (Геол-95.3) Решить систему $\begin{cases} x^3\cdot\sqrt{x-y} = 0, \\ 2y^2+y = 21+2xy. \end{cases}$
12. (Псих-90.3) Решить неравенство $\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{15}{88-32x}\right)^2 \leq 1$.
13. (Геол-99(1).7) Решить неравенство $\sqrt{4x-x^2-3} \geq \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}$.
14. (М/м-73.3) Решить неравенство $4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2-x)\cdot 2^x + 2^{x+1}\cdot x\sqrt{2-x^2}$.

15. (Геогр-96(1).4) Решить неравенство
$$\frac{\left(3x-2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x-\log_{\sqrt{3}}2\sqrt{7}\right)^2}{x-8\sin\frac{241\pi}{12}}\le 0\,.$$

11.2. Расщепление в тригонометрических уравнениях и неравенствах

В этом разделе собраны тригонометрические уравнения и неравенства, которые решаются с помощью разложения на множители и расщепления.

Для успешного решения таких задач необходимо помнить тригонометрические формулы из предыдущих разделов.

Примеры решения задач

Пример 1. (Биол-83.1) Решить уравнение $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$.

Решение. Распишем синус двойного угла и вынесем общий множитель:
$$4\cos^3 x+6\sqrt{2}\sin x\cos x=8\cos x \iff \cos x\cdot(4\cos^2 x+6\sqrt{2}\sin x-8)=0.$$

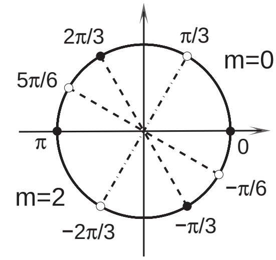
Либо $\cos x=0$ и $x=\pi/2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, либо $4\cos^2 x+6\sqrt{2}\sin x-8=0$. Используя основное тригонометрическое тождество, получим квадратное уравнение
$$2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2=0 \iff \sin x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{2}}{4} \iff \left[\begin{aligned}&\sin x=\sqrt{2};\\ &\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}\right.$$

В первом случае решений нет, так как $\sqrt{2}>1$; во втором случае
$x=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ (-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}$.

Пример 2. (М/м-95.3) Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x}\cdot\operatorname{tg}\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

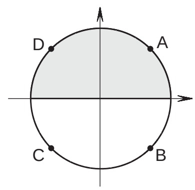
Решение. Первый случай:
$$\begin{cases}\sin 3x=0,\\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\ne 0;\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z},\\ x\ne\frac{\pi}{3}+\frac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z};\end{cases}$$



отметив соответствующие значения на тригонометрической окружности с учётом выколотых точек, получаем $x=\pi n$ или $x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.

Второй случай:
$$\begin{cases}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0,\\ \sin 3x\ge 0;\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z},\\ \sin 3x\ge 0;\end{cases} \iff \begin{cases}3x=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z},\\ \sin 3x\ge 0.\end{cases}$$

Рассмотрим тригонометрическую окружность с аргументом $3x$. Каждое из значений серии $3x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$ попадает в одну из четырёх точек $A(n=0,4,8...)$, $B(n=1,5,9...)$, $C(n=2,6,10...)$, $D(n=3,7,11...)$ этой окружности.



Так как синус положителен только в первой и второй четвертях, то нам подходят только A и D. В результате получаем

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} n=4l,\ l\in\mathbb{Z}; \\ n=3+4k,\ k\in\mathbb{Z}; \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{12}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{19\pi}{12}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

О т в е т. $\pi n,\ -\dfrac{\pi}{3}+\pi m,\ \dfrac{19\pi}{12}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{12}+2\pi l;\quad n,m,k,l\in\mathbb{Z}.$

П р и м е р 3. (М/м-93(2).3) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} (\cos y+\sin x-1)\cdot\left(\operatorname{tg}^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}^2\left(y+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=0, \\ (\sin x-\cos y)\cdot(2-\sin 2y+\sin y)=0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Область определения:

$$\begin{cases} \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0, \\ \cos\left(y+\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq -\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ y\neq \dfrac{\pi}{3}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Исходная система равносильна следующей системе совокупностей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos y=1; \\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(y+\dfrac{\pi}{6}\right)=0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin x=\cos y; \\ \sin y+2=\sin 2y. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно последнее уравнение

$$\sin y+2=\sin 2y \iff \begin{cases} \sin 2y=1, \\ \sin y=-1; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos y=-\dfrac{1}{2}, \\ \sin y=-1; \end{cases}$$

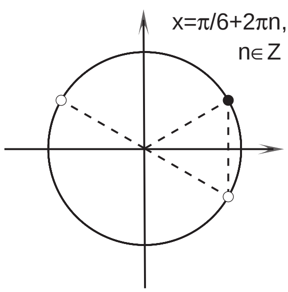
решений нет. Следовательно, исходная система равносильна системе

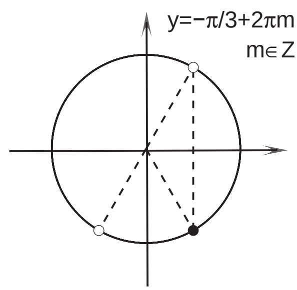
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos y = 1; \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0; \end{array}\right. \\ \sin x = \cos y; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin x = \cos y; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0, \\ \sin x = \cos y. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из первой системы следует, что $\sin x = \cos y = \dfrac{1}{2}$, то есть

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z};$$

откуда с учётом области определения получаем $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.





Из второй системы следует, что

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi m, \\ \sin x = \cos y. \end{cases}$$

Подставим значения x и y во второе уравнение и преобразуем его:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \pi m\right) \iff \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \pi m\right) \iff$$

$$\iff \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} - \pi m)\right) \iff \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi m\right).$$

Значит, числа $n, m \in \mathbb{Z}$ должны быть одинаковой чётности, то есть $m - n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$; следовательно, $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(n + 2k)$ – решение исходной системы.

О т в е т. $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi l; -\dfrac{\pi}{6} + \pi(l + 2k)\right)$; $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$.

Задачи

1. (Псих-84.3) Решить уравнение $2(\cos x - 1)\sin 2x = 3\sin x$.

2. (Почв-94.1) Решить уравнение $\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cos^2 x$.

3. (ИСАА-98.1) Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 6x = 1$.

4. (Псих-91.2) Решить уравнение $(\cos x - 1)\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\cos 2x - 1\right) = \sin^2 x$.

5. (Фил-78.3) Решить уравнение $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$.

6. (Биол-89.3) Решить уравнение
$$\sin x(3\sin 2x \sin^3 x + 12\sin 2x \sin x - 16\cos x) + 2\sin 4x = 0.$$

7. (ЕГЭ.С) Найти сумму корней уравнения $\sin 2x \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$. Ответ записать в градусах.

8. (Почв-96(1).5) Решить уравнение $(1 - \cos 8x)\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x \cdot \operatorname{ctg} x$.

9. (М/м-97.1) Решить уравнение $(2\sin^2 x - 3\sin x + 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$.

10. (М/м-97.1) Решить уравнение $(2\cos^2 x - \cos x - 1)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0$.

11. (Экон.К-87.1) Решить уравнение $(2\sin x - 1)\sqrt{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = 0$.

12. (М/м-81.2) Решить систему $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$

13. (ВМК-78.2) Решить уравнение $(1 + \operatorname{tg}^2 2x)\left(\sin\dfrac{21x}{4}\cos\dfrac{7x}{4} + \sin\dfrac{5x}{4}\cos\dfrac{x}{4}\right) =$
$= \dfrac{1}{\cos^2 2x}\left(\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{5x}{4} - \sin\dfrac{7x}{4}\cos\dfrac{21x}{4}\right)$.

14. (Филол-70.2) Найти все x, удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{2} < \left|3x - \dfrac{\pi}{2}\right| \le \pi$ и являющиеся решением уравнения $1 + \cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

15. (ВМК-98(1).3) Решить уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0$.

16. (Псих-98.4) Решить уравнение $\operatorname{tg} 8x - \operatorname{tg} 6x = \dfrac{1}{\sin 4x}$ при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

17. (М/м-00(1).3) Найти все корни уравнения
$$\cos x \sin\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\sin x + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$
принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

11.3. Расщепление в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах, модифицированный метод интервалов

Теоретический материал

В этом разделе собраны показательные и логарифмические уравнения и неравенства, которые решаются с помощью разложения на множители и расщепления.

Однородные выражения второй степени

Однородное уравнение второй степени можно свести к квадратному уравнению делением обеих частей, например, на $(g(x))^2$:

$$Af^2(x) + Bf(x)g(x) + Cg^2(x) = 0, \quad A, C \neq 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0; \end{array} \right. \\ A \cdot \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)^2 + B \cdot \dfrac{f(x)}{g(x)} + C = 0. \end{array} \right.$$

В случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют общих нулей (например, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$; $f(x)$, $g(x)$ – показательные функции), от выписанной совокупности остаётся только квадратное уравнение.

С другой стороны, если сразу рассмотреть $S(x)$ как квадратный трёхчлен относительно $f(x)$ с коэффициентами A, $Bg(x)$, $Cg^2(x)$, то деления не потребуется.

В случае, когда нам надо разложить на множители выражение вида

$$S(x) = Af^2(x) + Bf(x)g(x) + Cg^2(x), \quad A, C \neq 0,$$

можно также рассмотреть его как квадратный трёхчлен относительно $f(x)$ с коэффициентами A, $Bg(x)$, $Cg^2(x)$ и воспользоваться разложением на множители квадратного трёхчлена. Напомним, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

Модифицированный метод интервалов

При решении различных неравенств нередко бывает удобно заменить некоторые функции (показательные, логарифмические и др.) более простыми, но того же знака, быть может, с дополнительными условиями эквивалентности. Целью такой замены является приведение неравенства произвольного вида к рациональному, которое решается обычным методом интервалов.

На практике для реализации такого *модифицированного метода интервалов* наиболее часто используются следующие утверждения, истинность которых легко доказать, используя домножение неравенства на выражение, сопряжённое левой части неравенства (первые два утверждения), или используя монотонность показательной и логарифмической функций (третье и четвёртое):

- $|f(x)| - |g(x)| \vee 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f^2(x) - g^2(x) \vee 0;$
- $\sqrt[2k]{f(x)} - g(x) \vee 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) - g^{2k}(x) \vee 0$
  при $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$;

- $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\,(f(x)-g(x)) \ \vee\ 0$
  при $a(x) > 0$;

- $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\,(f(x)-g(x)) \ \vee\ 0$
  при $f(x) > 0,\ \ g(x) > 0,\ \ a(x) > 0,\ a(x) \neq 1$;

то есть в произведениях $F_1(x)F_2(x)...F_n(x) \ \vee\ 0$ множители указанного вида можно с необходимыми условиями эквивалентности переходов (чаще всего сводящимися просто к условиям существования конкретных выражений) заменять более простыми того же знака.

Из двух последних утверждений можно получить следующие видоизменения:

- $a(x)^{f(x)} - b(x) \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\left(f(x) - \log_{a(x)} b(x)\right) \ \vee\ 0$
  при $b(x) > 0$, $0 < a(x) \neq 1$ $\left(b(x) = a(x)^{\log_{a(x)} b(x)}\right.$ по основному логарифмическому тождеству);

- $\log_{a(x)} f(x) - b(x) \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\left(f(x) - a(x)^{b(x)}\right) \ \vee\ 0$
  при $f(x) > 0,\ \ a(x) > 0,\ a(x) \neq 1$;

если в некоторых случаях вычитаемое является константой (и, в частности, нулём), то утверждения существенно упрощаются, но сохраняют свой вид, например:

$$\log_{a(x)} f(x) \ \vee\ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a(x)-1)\,(f(x)-1) \vee 0$$

при $f(x) > 0,\ \ a(x) > 0,\ a(x) \neq 1$.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Почв-88.3) Решить уравнение $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.

Р е ш е н и е. Разделим обе части уравнения $3 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$ на 2^{2x} и положим $z = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 0$, тогда $2z^2 - 7z + 3 = 0$; $z = \dfrac{1}{2}$ или $z = 3$, следовательно, $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = 3$ или $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = \log_{\frac{5}{2}} 3$ или $x = \log_{\frac{5}{2}} \dfrac{1}{2} = -\log_{\frac{5}{2}} 2$.

О т в е т. $-\log_{\frac{5}{2}} 2$; $\log_{\frac{5}{2}} 3$.

П р и м е р 2. (Физ-93.1) Решить неравенство $\dfrac{2x-1}{2^x-1} < 0$.

Р е ш е н и е. Применим модифицированный метод интервалов, то есть заменим в исходном неравенстве $2^x - 1 = 2^x - 2^0$ на $(2-1)(x-0) = x$:

$$\frac{2x-1}{2^x-1} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

О т в е т. $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

П р и м е р 3. (М/м-94(2).3) Решить неравенство
$\log_{2-5x} 3 + \dfrac{1}{\log_2(2-5x)} \le \dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\log_{2-5x} 3 + \log_{2-5x} 2 \le \frac{1}{\log_6\,(6x^2-6x+1)} \iff$$

$$\iff \log_{2-5x} 6 \le \frac{1}{\log_6\,(6x^2-6x+1)} \iff \frac{1}{\log_6(2-5x)} \le \frac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)};$$

приведём к общему знаменателю:

$$\frac{\log_6(6x^2-6x+1)-\log_6(2-5x)}{\log_6(2-5x)\log_6(6x^2-6x+1)} \le 0.$$

Выражение $\log_a f(x)$ при $a>1$ и $f(x)>0$ имеет тот же знак, что и $f(x)-1$, а выражение $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ при $a>1$ и $f(x)>0$, $g(x)>0$ имеет тот же знак, что и $f(x)-g(x)$ (модифицированный метод интервалов), поэтому неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{6x^2-6x+1-2+5x}{(2-5x-1)(6x^2-6x+1-1)} \le 0, \\ 6x^2-6x+1>0, \\ 2-5x>0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{6x^2-x-1}{(5x-1)x(x-1)} \ge 0, \\ 6x^2-6x+1>0, \\ x<\dfrac{2}{5}. \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x \in \left[-\dfrac{1}{3};0\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{2}\right] \bigcup (1;+\infty), \\ x \in \left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \bigcup \left[\dfrac{3+\sqrt{3}}{6};+\infty\right), \\ x<\dfrac{2}{5}; \end{cases} \iff x \in \left[-\frac{1}{3};0\right) \bigcup \left(\frac{1}{5};\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right).$$

О т в е т. $\left[-\dfrac{1}{3};0\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{5};\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

Задачи

1. (Хим-84.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \ge 0$.

2. (М/м-81.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \ge 0$.

3. (Геол-88.3) Решить уравнение $\left(2x^2-5x+2\right)\cdot(\log_{2x} 18x+1)=0$.

4. (М/м-71.1) Решить уравнение
$(x+4)\log_4(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\dfrac{8}{3}\log_2(x^2-1)$.

5. (Псих-78.1) Решить уравнение $\log_3\dfrac{3}{x}\log_2 x-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$.

6. (Почв-78.5) Решить уравнение
$$\sqrt{x}(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}})=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

7. (ВМК-98(1).1) Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_2\dfrac{4}{x}}\geq\log_2\dfrac{x}{8}-1$.

8. (ЕГЭ.В) Решить уравнение $2\cdot 4^x-3\cdot 10^x=5\cdot 25^x$.

9. (Геол-98(1).2) Решить уравнение $\log_9(4^x-2\cdot 18^x)=2x$.

10. (ЕГЭ.С) При каких значениях параметра a уравнение
$2\cdot 9^x-(2a+3)6^x+3a\cdot 4^x=0$ имеет ровно один корень?

11. (Геол-86.3) Решить уравнение $\dfrac{2\cdot 6^x-4^x-15}{6^x-9^x-5}=3$.

12. (Физ-00(1).7) При каких значениях b уравнение
$25^x-(2b+5)\cdot 5^{x-\frac{1}{x}}+10b\cdot 5^{-\frac{2}{x}}=0$ имеет ровно два решения?

13. (Почв-80.4) Решить неравенство $\left(4x^2-16x+7\right)\cdot\log_2(x-3)>0$.

14. (Геол-95.4) Решить неравенство $\dfrac{3^x-2}{x^2-6x+5}\leq 0$.

15. (ЕГЭ.В) Указать количество целых решений неравенства
$(2^x-1)(25-5^x)>0$.

16. (ЕГЭ.С) Решить неравенство $\dfrac{x^2-3}{3^x-4}<0$.

17. (Экон-93.1) Решить неравенство $\log_{7^x-6}25<2$.

18. (М/м-91.2) Решить неравенство $\dfrac{\log_3\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)}{\log_9 2x}\geq 1$.

19. (Почв-79.2) Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_3(x^2-7x+12)}<\dfrac{1}{\log_3 20}$.

20. (ВМК-97.2) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{1-x^2}}2<\log_{2x^2}\dfrac{1}{2}$.

21. (ИСАА-91.5) Решить неравенство $\log_{\log_{\frac{1}{2}}x}\log_{\frac{1}{7}}x>0$.

22. (М/м-89.2) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\dfrac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\leq 0$.

11.4. Смешанные задачи

1. (ЕГЭ.В) Указать число корней уравнения $(2^{x^2}-32)\sqrt{3-x}=0$.

2. (Геогр-98.1) Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{-4x^2+13x-3}+1}{\log_{3x}7}\geq 0$.

3. (Экон.К-83.2) Решить уравнение $\sqrt{4-x^2}\cdot(\sin 2\pi x-3\cos\pi x)=0$.

4. (М/м-99(2).1) Решить уравнение
$$(x^2+4)\lg\sin^2 3x+x^2\lg\cos^2 2x=4\lg\left(\cos 2x\sin^3 3x\right).$$

5. (М/м-97.2) Решить неравенство $\left(1-\dfrac{x}{2}\right)\log_{13-3\cdot 2^x}4\leq 1$.

6. (М/м-73.1) Решить уравнение
$\cos 2x+\log_4\dfrac{1}{2}\sin x+2\cos x\log_{\frac{1}{2}}\sin x=2\cos x+\sin^2 x\log_2\sin^2 x$.

7. (Физ-86.3) Решить систему $\begin{cases}3^y=x,\\ 2\sin x+\sin 2x=2\cos^2\dfrac{x}{2}.\end{cases}$

8. (Геол-96.3) Найти все решения уравнения $\dfrac{\cos 10x-\cos 8x}{2x^2+\pi x-\pi^2}=\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{2x^2+\pi x-\pi^2}$, принадлежащие интервалу $(0;\pi)$.

9. (М/м-98(2).2) Решить неравенство $\dfrac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|}\geq 0$.

10. (Почв-97(1).4) Решить неравенство $\dfrac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\log_{2^x}3}>0$.

11. (ИСАА-92.5) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}|\cos x|\cdot\log_5(x^2-9)<0$.

12. (Хим-93(1).4) Решить систему уравнений $\begin{cases}6x^2+17xy+7y^2=16,\\ \log_{2x+y}(3x+7y)=3.\end{cases}$

13. (М/м-98(1).3) Решить неравенство
$\log_2\left(\sqrt{x+\dfrac{11}{2}}+\dfrac{x}{2}+1\right)\cdot\log_3(-2x-x^2)\geq\log_3\left(\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\cdot\log_2(-2x-x^2)$.

14. (ИСАА-95.5) Решить неравенство $\sqrt{4x-x^2-3}(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos 2x})\geq 0$.

15. (Биол-88.5) Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi\,(2x-y-2)}{6}\right)\cdot\left(\sqrt{3-x^2-y^2+2x}-3\right)=0,\\ 3\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi\,(2x-y)}{6}=\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi\,(2x-y)}{6}.\end{cases}$$

16. (Геол-95.5) Решить уравнение
$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-\operatorname{tg}\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\log_2(4-x^2)=0$.

17. (М/м-75.5) Найти все значения x в промежутке $-0,5<x<1,5$, удовлетворяющие уравнению $\log_3\left(\sin 3x-\cos 2x-\dfrac{3}{10}\right)=\log_3\left(\sin 7x-\cos 6x-\dfrac{3}{10}\right)$.

18. (Экон.К-83.6) Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geq 0$.

19. (Экон-84.6) Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^3\sqrt{a^3+a^2-a-1}-x^2\sqrt{a^3+a^2}+x\sqrt{a^4-a^2}-a^2\leq 0$$

удовлетворяет условию $a\leq x\leq 2a+1$.

Часть II. Указания и решения

1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства

1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений

Задача 1. **(ЕГЭ)**

Найдите значение выражения $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ при $a=4,\ b=5.$

Идея. Используя информацию об области допустимых значений, разложить числитель и знаменатель первой дроби на множители.
Указание. Сократить числитель и знаменатель первой дроби на $\sqrt{a}.$

Решение. Область допустимых значений $a>0,\ a+b>0$; значит, при $a=4,$ $b=5$ выражение определено; упрощаем:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}=\left(\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}=0.$$

Ответ. 0.

Задача 2. **(ЕГЭ)**

Найдите значение выражения $\dfrac{2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\dfrac{2\sqrt{p}}{p-q}$ при $p=8,\ q=9.$

Идея. Привести выражение к общему знаменателю.
Указание. Разложить знаменатель второй дроби на множители и привести выражение к общему знаменателю.

Решение. Область допустимых значений $p\ge 0,\ q\ge 0,\ p\ne q$; приводим выражение к общему знаменателю:

$$\frac{2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\frac{2\sqrt{p}}{p-q}=\frac{2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\frac{2\sqrt{p}}{(\sqrt{p}-\sqrt{q})(\sqrt{p}+\sqrt{q})}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{p}+\sqrt{q})-2\sqrt{p}}{(\sqrt{p}-\sqrt{q})(\sqrt{p}+\sqrt{q})}=\frac{2\sqrt{q}}{(\sqrt{p}-\sqrt{q})(\sqrt{p}+\sqrt{q})}=\frac{2\sqrt{q}}{p-q};$$

при $p=8$, $q=9$ выражение принимает значение $\dfrac{2\sqrt{9}}{8-9}=-6$.

О т в е т. -6.

Задача 3. (ЕГЭ)

Сократите дробь $\dfrac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}$.

И д е я. Разложить числитель на множители.
У к а з а н и е. Используя формулу разности квадратов, разложить числитель на множители.

Р е ш е н и е. Раскладываем выражение в числителе дроби по формуле разности квадратов двух чисел ($a\geq 0,\ b\geq 0,\ \sqrt{a}\neq 9\sqrt{b}$):

$$\frac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-9\sqrt{b})(\sqrt{a}+9\sqrt{b})}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}=\sqrt{a}+9\sqrt{b}.$$

О т в е т. $\sqrt{a}+9\sqrt{b}$.

Задача 4. (ЕГЭ)

Сократите дробь $\dfrac{a+27b}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}$.

И д е я. Разложить числитель на множители.
У к а з а н и е. Используя формулу суммы кубов, разложить числитель на множители.

Р е ш е н и е. Раскладываем выражение в числителе дроби по формуле суммы кубов двух чисел ($\sqrt[3]{a}\neq -3\sqrt[3]{b}$):

$$\frac{a+27b}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}\right)\left((\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}\cdot 3\sqrt[3]{b}+(3\sqrt[3]{b})^2\right)}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+9\sqrt[3]{b^2}.$$

О т в е т. $\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+9\sqrt[3]{b^2}$.

Задача 5. (Геол-93.1)

Найти численное значение выражения $\left(\dfrac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2$.

Идея. Применить формулы сокращённого умножения и сократить общие множители.
Указание. Разложить числитель первой дроби по формуле суммы кубов и сократить первую дробь.
Указание. Разложить знаменатель второй дроби по формуле разности квадратов и сократить вторую дробь.

Решение. Разложим числитель первой дроби по формуле суммы кубов, а знаменатель второй дроби по формуле разности квадратов и сократим дроби ($a \geq 0$, $b \geq 0$, $4a \neq b$):

$$\left(\frac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(2\sqrt{a}+\sqrt{b})((2\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2)}{2(2\sqrt{a}+\sqrt{b})}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{2(2\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(2\sqrt{a}-\sqrt{b})(2\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(2\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{2}{(2\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right)^2=$$

$$=\frac{(2\sqrt{a})^2-2\cdot 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}\cdot\frac{4}{(2\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{(2\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\cdot\frac{4}{(2\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=2.$$

Ответ. 2 при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $4a \neq b$.

Задача 6. (Почв-98(1).1)

Упростить выражение $\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{4a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

Идея. Приведя выражения в скобках к общему знаменателю, применить формулы сокращённого умножения и сократить общие множители.
Указание. Учитывая наличие $\sqrt{2a}$ и $\sqrt{b}$ в первой скобке, можем утверждать, что $a > 0$ и $b > 0$ для преобразования дробей во второй скобке.
Указание. $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$; $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.

Решение. Последовательно преобразуем ($a > 0$, $b > 0$, $2a \neq b$):

$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{4a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=\frac{\left(\sqrt{2a}-\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{2a}+\sqrt{b}\right)^2}{2a-b}\cdot\frac{b-2a}{2\sqrt{ab}}=$$

$$=-\frac{2a+b-2\sqrt{2ab}-2a-b-2\sqrt{2ab}}{2\sqrt{ab}}=\frac{4\sqrt{2}\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}}=2\sqrt{2}.$$

Ответ. $2\sqrt{2}$, если $a > 0$, $b > 0$, $2a \neq b$.

Задача 7. (Псих-84.1)

Вычислить, не используя калькулятор,
$\left(\dfrac{3(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}):480}{(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right)$.

Идея. Преобразовав все дробные числа к удобному для вычислений формату, выполнить указанные действия последовательно, в соответствии с приоритетами операций.

Указание. Вычисления в делимом удобнее производить в обыкновенных дробях, а в делителе логичнее использовать десятичные.

Замечание. Несмотря на допустимость вычисления значения исходного выражения «по действиям», преобразования «по цепочке» значительно оптимизируют процесс.

Решение. $\left(\dfrac{3\left(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right)=$

$$=\left(\frac{\left(\frac{17}{90}-\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{9}\right):160}{\left(\frac{70}{18}-\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-1}:\frac{6,79+0,21}{0,7}=\left(\frac{\frac{7}{90}:160}{\frac{21}{9}\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-1}:10=$$

$$=\left(\frac{7}{90}\cdot\frac{1}{160}\cdot\frac{9}{21}\cdot\frac{8}{3}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{10}=\frac{90\cdot 20}{10}=180.$$

Ответ. 180.

Задача 8. (ЕГЭ)

Вычислите $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Идея. Выражения под радикалами сворачиваются в полные квадраты соответствующих чисел.

Указание. $4+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$; $4-2\sqrt{3}=\left(1-\sqrt{3}\right)^2$.

Решение. Последовательно преобразуем:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=|1+\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}|=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$$

Ответ. 2.

Задача 9. (ЕГЭ)

Выражение $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ является целым числом. Найдите его.

Идея. Выражение под радикалом сворачивается в квадрат разности двух чисел.

Указание. $3-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$.

Решение. $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{2}=$

$$=|1-\sqrt{2}|-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1.$$

Ответ. -1.

Задача 10. (Почв-96.1)

Доказать, что число $\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$ целое, и найти его.

Идея. Последовательно применить формулы квадрата разности и суммы, привести подобные слагаемые и использовать формулу разности квадратов.
Указание. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Решение. Последовательно преобразуем выражение:

$$\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)=$$

$$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{27}-2\sqrt[4]{81}+7\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{27}+2\sqrt[4]{81}-7\right)=$$

$$=\left(4\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(4\sqrt{3}-1\right)=48-1=47.$$

Ответ. 47.

Задача 11. (ЕГЭ)

Упростите до целого числа выражение $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

Идея. Выражение под радикалом сворачивается в полный куб соответствующего числа.
Указание. $10+6\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^3$; соответствующее число несложно угадывается или подбирается.

Решение. Последовательно преобразуем:

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1.$$

Ответ. 1.

Задача 12. (МГУ-48.3)

Выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ является целым числом. Найти это целое число.

Идея. Выражения под радикалами сворачиваются в полные кубы соответствующих чисел.

Указание. $5\sqrt{2}+7=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$; $5\sqrt{2}-7=\left(\sqrt{2}-1\right)^3$; соответствующие числа несложно угадываются или подбираются.

Решение. Последовательно преобразуем:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2.$$

Ответ. 2.

Замечание. Для поиска выражений в основаниях третьей степени можно применять метод неопределённых коэффициентов, однако в данном примере он не слишком актуален: все коэффициенты легко подбираются или угадываются.

Задача 13. (МГУ-48.2)

Выражение $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ является целым числом. Найти это целое число.

Идея. Преобразовать выражения под радикалами к полным кубам соответствующих чисел.
Указание. $20+14\sqrt{2}=\left(2+\sqrt{2}\right)^3$; $20-14\sqrt{2}=\left(2-\sqrt{2}\right)^3$; соответствующие числа несложно угадываются или подбираются.

Замечание. Метод неопределённых коэффициентов для поиска соответствующих чисел в скобках в данном случае не слишком актуален, числа несложно подобрать.

Решение. Последовательно преобразуем:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$$

Ответ. 4.

Задача 14. (ИСАА-99.2)

Упростив выражение $A=\dfrac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\sqrt{2^{-2}\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)-0,5}}-2ab-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, где $a>b>0$ – действительные числа, выяснить, что больше: A или $0,01$?

Идея. Преобразовать выражение, используя формулы сокращённого умножения, вынесение множителей за скобку и группировку слагаемых.
Указание. Числитель дроби преобразуется к виду $(a-b)(3b+\sqrt{ab})$, знаменатель преобразуется к виду $\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем исходное выражение:

$$A = \frac{3ab - b\sqrt{ab} + a\sqrt{ab} - 3b^2}{\sqrt{2^{-2}\left(ab^{-1} + a^{-1}b\right) - 0,5}} - 2ab - 6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{3b(a-b) + \sqrt{ab}(a-b)}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - \frac{1}{2}}} - 2ab - 6\sqrt{a}\cdot b\sqrt{b} = \frac{(a-b)(3b+\sqrt{ab})}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4ab} - \frac{1}{2}}} - 2ab - 6b\sqrt{ab} =$$

$$= \frac{(a-b)(3b+\sqrt{ab})2\sqrt{ab}}{|a-b|} - 2ab - 6b\sqrt{ab} = 6b\sqrt{ab} + 2ab - 2ab - 6b\sqrt{ab} = 0,$$

где использовалось условие $a > b > 0$ для преобразования корня из дроби и раскрытия модуля; сравнив A с числом $0,01$, получаем, что $0,01$ больше.

О т в е т. $0,01$.

1.2. Сравнение чисел

Задача 1. (ВМК-92.1)

Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$ больше?

И д е я. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному сравнению.

У к а з а н и е. Составить формальное неравенство $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}} \vee \sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$, возвести обе его части в куб и использовать равенства $1990 = 1991 - 1;\ 1992 = 1991 + 1$.

Р е ш е н и е. Составим формальное неравенство $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}} \vee \sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$, возведём обе его части в куб:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}} & \vee & \sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}} \\ \sqrt[3]{\dfrac{1991-1}{1991}} & \vee & \sqrt[3]{\dfrac{1991}{1991+1}} \\ (1991-1)(1991+1) & \vee & 1991^2 \\ 1991^2 - 1 & < & 1991^2. \end{array}$$

Так как не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть второе число больше.

О т в е т. Второе число больше.

З а м е ч а н и е. Можно рассматривать эту задачу в общем виде: доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}\quad \dfrac{n-1}{n} < \dfrac{n}{n+1}$. Кроме того, можно использовать функцию $f(n) = \dfrac{n-1}{n}$, доказав её возрастание, то есть $f(n) < f(n+1)$.

Задача 2. (Геол-94(1).1)

Какое из двух чисел меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?

Идея. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному сравнению.
Указание. Возвести обе части неравенства в шестую степень.

Решение. Составим формальное неравенство $\sqrt[3]{47} \ \vee \ \sqrt{13}$ и возведём обе его части в шестую степень, чтобы избавиться от радикалов:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[3]{47} & \vee & \sqrt{13} \\ 47^2 & \vee & 13^3 \\ 2209 & > & 2197. \end{array}$$

Так как не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть второе число меньше.

Ответ. Второе число меньше.

Задача 3. (Геол.ОГ-82.1)

Какое из следующих чисел больше: $\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} - 2\sin\dfrac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$?

Идея. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному сравнению.
Указание. Вычислить предварительно табличные значения тригонометрических функций. Формальное неравенство принимает вид $\sqrt{3} \ \vee \ \sqrt[3]{5}$. Возвести обе его части в куб, а затем в квадрат.

Решение. $\sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, поэтому формальное неравенство имеет вид $\sqrt{3} \vee \sqrt[3]{5}$; возводим обе его части куб: $3\sqrt{3} \vee 5$, затем в квадрат: $27 > 25$; так как не было преобразований, изменяющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть первое число больше.

Ответ. Первое число больше.

Задача 4. (У)

Сравнить числа 3^{400} и 4^{300}.

Идея. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному сравнению.
Указание. Возвести обе части неравенства в степень $1/100$.

Р е ш е н и е. Составим формальное неравенство $3^{400} \ \vee \ 4^{300}$ и возведём обе его части в степень $\dfrac{1}{100}$:

$$\begin{aligned} (3^{400})^{\frac{1}{100}} &\ \vee\ (4^{300})^{\frac{1}{100}} \\ 3^4 &\ \vee\ 4^3 \\ 81 &\ >\ 64. \end{aligned}$$

Поскольку не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $3^{400} > 4^{300}$.

О т в е т. $3^{400} > 4^{300}$.

Задача 5. (У)

Сравнить числа $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

И д е я. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими знака, привести его к очевидному неравенству.
У к а з а н и е. Составить формальное неравенство $\sqrt{7}+\sqrt{10} \vee \sqrt{3}+\sqrt{19}$, возвести обе его части в квадрат, привести подобные члены и снова возвести в квадрат.

Р е ш е н и е. Возведём обе части неравенства $\sqrt{7}+\sqrt{10} \ \vee \ \sqrt{3}+\sqrt{19}$ в квадрат:

$$\begin{aligned} 17+2\sqrt{70} &\ \vee\ 22+2\sqrt{57} \\ 2\sqrt{70} &\ \vee\ 5+2\sqrt{57} \\ 280 &\ \vee\ 25+228+20\sqrt{57} \\ 27 &\ \vee\ 20\sqrt{57}. \end{aligned}$$

Из соотношений $27 < 140 = 20 \cdot 7 < 20\sqrt{57}$ получаем, что первое число меньше второго.

О т в е т. $\sqrt{7}+\sqrt{10} \ < \ \sqrt{3}+\sqrt{19}$.

Задача 6. (ЕГЭ)

Сравните $\sqrt{2004}+\sqrt{2007}$ и $\sqrt{2005}+\sqrt{2006}$.

И д е я. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному неравенству.
У к а з а н и е. Составить формальное неравенство

$$\sqrt{2004}+\sqrt{2007} \ \vee \ \sqrt{2005}+\sqrt{2006};$$

возвести в квадрат, привести подобные слагаемые и ещё раз возвести в квадрат.
У к а з а н и е. Воспользоваться равенствами $2005 = 2004+1$; $2007 = 2006+1$.
У к а з а н и е. После возведения в квадрат, приведения подобных и повторного возведения в квадрат получаем $2004 \cdot (2006+1) \ \vee \ (2004+1) \cdot 2006$.

Р е ш е н и е. Составим формальное неравенство, возведём в квадрат, приведём подобные слагаемые и ещё раз возведём в квадрат:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2004}+\sqrt{2007} & \vee & \sqrt{2005}+\sqrt{2006} \\ 2004+2007+2\sqrt{2004}\cdot\sqrt{2007} & \vee & 2005+2006+2\sqrt{2005}\cdot\sqrt{2006} \\ \sqrt{2004}\cdot\sqrt{2007} & \vee & \sqrt{2005}\cdot\sqrt{2006} \\ 2004\cdot(2006+1) & \vee & (2004+1)\cdot 2006 \\ 2004 & < & 2006. \end{array}$$

Поскольку не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть второе выражение больше первого.

О т в е т. Второе выражение больше первого.

Задача 7. (У)

Сравнить числа $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.

И д е я. Упростить выражения $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ и свести неравенство к очевидному.

У к а з а н и е. Представить выражение $9+4\sqrt{5}$ в виде квадрата суммы двух чисел.

У к а з а н и е. Представить выражение $38+17\sqrt{5}$ в виде куба суммы двух чисел.

Р е ш е н и е. Преобразуем выражения под радикалами, используя формулы сокращённого умножения:

$$9+4\sqrt{5}=5+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+4=(\sqrt{5}+2)^2;$$

$$38+17\sqrt{5}=2^3+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot 5\cdot 2+5\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^3;$$

следовательно, $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$; $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}$. Таким образом, надо сравнить $2+\sqrt{5}$ и $2+\sqrt{5}+\dfrac{11}{1000}$. Очевидно, что второе число больше.

О т в е т. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}<\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.

Задача 8. (У)

Выяснить, что больше: 33^{44} или 44^{33}?

И д е я. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному неравенству.

У к а з а н и е. Возвести обе части неравенства в степень $\dfrac{1}{11}$ и сократить общие множители.

Р е ш е н и е. Составим формальное неравенство и возведём обе его части в степень $\dfrac{1}{11}$:

$$\begin{array}{rcl} 33^{44} & \vee & 44^{33} \\ 33^{4} & \vee & 44^{3} \\ 3^4\cdot 11^4 & \vee & 4^3\cdot 11^3 \\ 3^4\cdot 11 & \vee & 4^3 \\ 891 & \vee & 64. \end{array}$$

Из неравенства $891 > 64$ следует, что $33^{44} > 44^{33}$.

О т в е т. $33^{44} > 44^{33}$.

Задача 9. (У)

Сравнить числа π и $\sqrt{10}$, где $\pi = 3,14...$

И д е я. Сравнить π^2 и 10, оценив π сверху и снизу.
У к а з а н и е. Использовать оценку $3,14 < \pi < 3,15$.

Р е ш е н и е. Так как $\pi^2 < 3,15^2 = 9,9225 < 10$, то $\pi < \sqrt{10}$.

З а м е ч а н и е. Если в качестве оценки для π взять $3,14$, то решение будет неверным, так как в данной задаче должна использоваться оценка сверху.

О т в е т. $\pi < \sqrt{10}$.

Задача 10. (У)

Сравнить числа $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1/6}$ и $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/5}$.

И д е я. Составить формальное неравенство и преобразованиями, не меняющими его знака, привести его к очевидному неравенству.
У к а з а н и е. Возвести обе части неравенства в степень 30.

Р е ш е н и е. После возведения обеих частей неравенства в степень 30 получим:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{6^5} & \vee & \dfrac{1}{5^6} \\ 5^6 & \vee & 6^5 \\ 15625 & \vee & 7776. \end{array}$$

Из очевидности последнего неравенства следует, что первое число больше второго.

О т в е т. $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1/6} > \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/5}$.

1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем

Задача 1. (Хим-00.1)

Решить уравнение $|x| = 2 - x$.

Идея. Раскрыть модуль по определению и решить уравнение на соответствующих промежутках.
Указание. Точкой смены знака подмодульного выражения является $x = 0$.

Решение. Раскрываем модуль:
1) при $x \geq 0$ получаем уравнение $x = 2 - x$; значит, $x = 1$;
2) при $x < 0$ получаем $-x = 2 - x$ – неверно.

Ответ. 1.

Задача 2. (Геол.ОГ-79.1)

Решить уравнение $|2x - 3| = 3 - 2x$.

Идея. Использовать тот факт, что уравнение имеет вид $|f(x)| = -f(x)$.
Указание. Если $|f(x)| = -f(x)$, то $f(x) \leq 0$.

Решение. $|2x - 3| = -(2x - 3) \iff 2x - 3 \leq 0 \iff x \leq \dfrac{3}{2}$.

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right]$.

Задача 3. (Геогр-77.1)

Решить неравенство $2|x + 1| > x + 4$.

Идея. Раскрыть модуль по определению и решить уравнение на соответствующих промежутках.
Указание. Точкой смены знака подмодульной функции является $x = -1$, то есть для раскрытия модуля придётся рассмотреть два промежутка: $x < -1$ или $x \geq -1$.

Решение. Раскрываем модуль по определению.

1) $\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ 2(x + 1) > x + 4; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x > 2; \end{cases} \iff x > 2.$

2) $\begin{cases} x + 1 < 0, \\ -2(x + 1) > x + 4; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1, \\ x < -2; \end{cases} \iff x < -2.$

Объединяем найденные промежутки: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

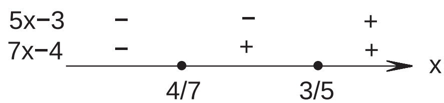
Ответ. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Задача 4. (Геогр-96(1).1)

Решить уравнение $|5x-3|-|7x-4|=2x-1$.

И д е я. Раскрыть модули по определению и решить уравнение на соответствующих промежутках.
У к а з а н и е. Точками смены знака подмодульных функций являются значения $x=\dfrac{3}{5}$ и $x=\dfrac{4}{7}$.

Р е ш е н и е. Раскрываем модули через определение:



1) При $x<\dfrac{4}{7}$ уравнение принимает вид $3-5x+7x-4=2x-1 \iff x\in\mathbb{R}$; значит, $x<\dfrac{4}{7}$;
2) при $\dfrac{4}{7}\le x\le\dfrac{3}{5}$ получаем $3-5x-7x+4=2x-1 \iff x=\dfrac{4}{7}$; значит, $x=\dfrac{4}{7}$ – решение;
3) при $x>\dfrac{3}{5}$ получаем $5x-3-7x+4=2x-1 \iff x=\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{5}$ – нет решений.

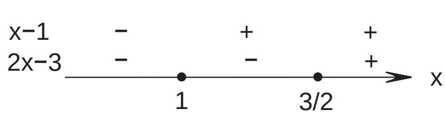
О т в е т. $\left(-\infty;\dfrac{4}{7}\right]$.

Задача 5. (Биол-95.2)

Решить уравнение $|x-1|+|2x-3|=2$.

И д е я. Раскрыть модули по определению, вычислив точки смены знака подмодульных функций, и рассмотреть уравнение на соответствующих промежутках.
У к а з а н и е. Точками смены знака подмодульных функций являются $x=1$ и $x=3/2$, поэтому надо рассмотреть три случая: $x<1$, $1\le x<3/2$ и $x\ge 3/2$, решив соответствующие уравнения на каждом из них.
У к а з а н и е. Например, при $1\le x<\dfrac{3}{2}$ уравнение принимает вид $(x-1)-(2x-3)=2$.

Р е ш е н и е. Раскроем модули по определению, через точки смены знаков подмодульных функций. Исследуем три промежутка: $x<1$, $1\le x<\dfrac{3}{2}$ и $x\ge\dfrac{3}{2}$.



1) $\begin{cases} x < 1, \\ 1 - x - 2x + 3 = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1, \\ x = \dfrac{2}{3}; \end{cases} \iff x = \dfrac{2}{3}.$

2) $\begin{cases} 1 \le x < \dfrac{3}{2}, \\ x - 1 - 2x + 3 = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \le x < \dfrac{3}{2}, \\ x = 0; \end{cases}$ нет решений.

3) $\begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2}, \\ x - 1 + 2x - 3 = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2}, \\ x = 2; \end{cases} \iff x = 2.$

О т в е т. $\dfrac{2}{3}$; 2.

Задача 6. (Геогр-00.2)

Решить уравнение $|2x + 8| - |x - 5| = 12$.

И д е я. Раскрыть модули по определению, вычислив точки смены знака подмодульных функций, и рассмотреть уравнение на соответствующих промежутках.
У к а з а н и е. Точками смены знака подмодульных функций являются $x = -4$ и $x = 5$, то есть требуется рассмотреть три промежутка: $x < -4$, $-4 \le x < 5$, $x \ge 5$.
У к а з а н и е. На промежутке, например, $x < -4$, уравнение принимает вид $-2x - 8 + x - 5 = 12$.

Р е ш е н и е. Раскрываем модули через точки смены знака.

1) $\begin{cases} x < -4, \\ -2x - 8 + x - 5 = 12; \end{cases} \iff x = -25.$

2) $\begin{cases} -4 \le x < 5, \\ 2x + 8 + x - 5 = 12; \end{cases} \iff x = 3.$

3) $\begin{cases} x \ge 5, \\ 2x + 8 - x + 5 = 12; \end{cases}$ нет решений.

О т в е т. -25; 3.

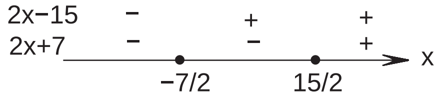
Задача 7. (Псих-95.1)

Решить уравнение $|2x - 15| = 22 - |2x + 7|$.

И д е я. Раскрыть модули по определению, вычислив точки смены знака подмодульных функций, и рассмотреть уравнение на соответствующих промежутках.
У к а з а н и е. Точками смены знака подмодульных функций являются $x = -7/2$ и $x = 15/2$, поэтому требуется рассмотреть три случая: $x < -7/2$, $-7/2 \le x < 15/2$ и $x \ge 15/2$.

У к а з а н и е. На промежутке, например, $x < -\dfrac{7}{2}$, уравнение принимает вид $-(2x - 15) = 22 + (2x + 7)$.

Решение. Точками смены знака подмодульных функций являются $x=-\dfrac{7}{2}$ и $x=\dfrac{15}{2}$, поэтому требуется рассмотреть три промежутка.



1) $\begin{cases} x<-\dfrac{7}{2}, \\ 15-2x=22+2x+7; \end{cases} \iff \begin{cases} x<-\dfrac{7}{2}, \\ x=-\dfrac{7}{2}; \end{cases}$ нет решений.

2) $\begin{cases} -\dfrac{7}{2}\le x<\dfrac{15}{2}, \\ 15-2x=22-2x-7; \end{cases} \iff -\dfrac{7}{2}\le x<\dfrac{15}{2}.$

3) $\begin{cases} x\ge\dfrac{15}{2}, \\ 2x-15=22-2x-7; \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge\dfrac{15}{2}, \\ x=\dfrac{15}{2}; \end{cases} \iff x=\dfrac{15}{2}.$

Ответ. $\left[-\dfrac{7}{2};\ \dfrac{15}{2}\right]$.

Задача 8. (Псих-98.1)

Решить уравнение $|4x-|x-2|+3|=16$.

Идея. Раскрыть внешний модуль через геометрический смысл, а внутренний – по определению модуля через рассмотрение двух промежутков.
Указание. Если $|f(x)|=a$, где $a>0$, то $f(x)=\pm a$.
Указание. Удобно решать задачу единой совокупностью с рассмотрением соответствующих условий.

Решение. Раскроем внешний модуль через его геометрический смысл:

$$\left[\begin{array}{l} 4x-|x-2|+3=-16; \\ 4x-|x-2|+3=16; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} |x-2|=4x+19; \\ |x-2|=4x-13. \end{array}\right.$$

По определению модуля нужно рассмотреть два промежутка:

1) при $x\ge 2$ совокупность принимает вид $\left[\begin{array}{l} x-2=4x+19; \\ x-2=4x-13; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=-7; \\ x=\dfrac{11}{3}; \end{array}\right.$

значит, $x=\dfrac{11}{3}$;

2) при $x<2$ получаем $\left[\begin{array}{l} 2-x=4x+19; \\ 2-x=4x-13; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{17}{5}; \\ x=3; \end{array}\right. \iff x=-\dfrac{17}{5}.$

Ответ. $-\dfrac{17}{5};\ \dfrac{11}{3}$.

Задача 9. (Геогр-97.1)

Решить неравенство $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3} > 2$.

Идея. Используя положительность знаменателя, перейти к линейному неравенству с модулем, которое решить через геометрический смысл последнего.
Указание. Так как знаменатель дроби положителен, то на него можно умножить обе части неравенства без дополнительных ограничений:

$$|x-1|+10 > 8|x-1|+6, \quad \text{то есть} \quad 7|x-1| < 4.$$

Замечание. Как видно из контекста, замена $t = |x-1| \geq 0$ при используемом способе решения совершенно неактуальна.

Решение. Заметив, что знаменатель дроби всегда положителен, получаем после умножения на него обеих частей неравенства

$$|x-1|+10 > 8|x-1|+6 \quad \Longleftrightarrow \quad 7|x-1| < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| < \frac{4}{7};$$

раскрывая модуль через геометрический смысл, получаем

$$-\frac{4}{7} < x-1 < \frac{4}{7}, \quad \text{то есть} \quad \frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}.$$

Ответ. $\left(\dfrac{3}{7}; \dfrac{11}{7}\right)$.

Задача 10. (Хим-96(1).3)

Решить неравенство $|x+|1-x|| > 3$.

Идея. Раскрыть внутренний модуль по определению.
Указание. Точкой смены знака внутреннего модуля является значение $x = 1$.

Решение. Раскрывая внутренний модуль по определению, получаем два случая:

1) $\begin{cases} x \geq 1, \\ |x+x-1| > 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ |2x-1| > 3; \end{cases}$

заметим, что при $x \geq 1$ $|2x-1| = 2x-1$. Поэтому получаем

$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x-1 > 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x > 2;$

2) $\begin{cases} x < 1, \\ |x-x+1| > 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x < 1, \\ 1 > 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \emptyset.$

Ответ. $(2; +\infty)$.

Задача 11. (Геол-91.6)

а) При всех значениях параметра a решить уравнение $|x+2|+a|x-4|=6$.

Идея. Раскрыть модули по определению.
Указание. Точками смены знака подмодульных выражений являются $x=-2$ и $x=4$.

Решение. Раскрываем модули по определению:
1) при $x \le -2$ получаем уравнение $-x-2-ax+4a=6 \iff x(a+1)=4(a-2)$;

- если $a=-1$, то $0=-12$, нет решений;
- если $a \ne -1$, то $x=\dfrac{4(a-2)}{a+1}$. Проверим условие $x \le -2$:

$$\frac{4(a-2)}{a+1} \le -2 \iff \frac{a-1}{a+1} \le 0 \iff -1 < a \le 1.$$

Значит, при $a \in (-1;1]$ $x=\dfrac{4(a-2)}{a+1}$.

2) при $-2 \le x \le 4$ получаем $x+2-ax+4a=6 \iff x(a-1)=4(a-1)$;

- если $a=1$, то $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow -2 \le x \le 4$;
- если $a \ne 1$, то $x=4$;

3) при $x \ge 4$ получаем $x+2+ax-4a=6 \iff x(a+1)=4(a+1)$;

- если $a=-1$, то $x \in \mathbb{R}$, то есть $x \ge 4$;
- если $a \ne -1$, то $x=4$;

объединив три случая в совокупность, находим ответ.

Ответ. Если $a<-1$ или $a>1$, то $x=4$; если $a=-1$, то $x \ge 4$; если $a=1$, то $-2 \le x \le 4$; если $-1<a<1$, то $x=4$ или $x=\dfrac{4(a-2)}{a+1}$.

Задача 12. (Физ-84.4)

Найти все значения параметра a, при которых все решения уравнения
$2|x-a|+a-4+x=0$ принадлежат отрезку $[0;4]$.

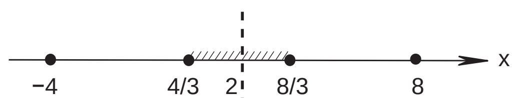
Идея. Раскрыть модуль по определению и на каждом из промежутков найти решения уравнения. Затем объединить полученные решения в совокупность в зависимости от промежутков, диктуемых контрольными значениями параметра, и проверить их принадлежность отрезку из условия задачи.
Указание. Точка смены знака подмодульной функции разбивает числовую ось на два промежутка, на каждом из которых можно снять модуль с конкретным знаком и выразить аргумент через параметр. Каждое решение требуется проверить на принадлежность рассматриваемому промежутку и отрезку, заявленному в условии. Удобнее будет решить уравнение для всех значений параметра, а затем рассмотреть соответствие решений отрезку из условия.

Р е ш е н и е. Точкой смены знака подмодульной функции является $x = a$; раскрываем модуль по определению.
1) Если $x \le a$, то уравнение принимает вид $x = 3a - 4$; проверяем выполнение условия $3a-4 \le a \iff a \le 2$, то есть при $a \le 2$ значение $x = 3a-4$ является решением исходного уравнения.
2) Если $x \ge a$, то уравнение принимает вид $3x = a + 4$, из которого $x = \dfrac{a+4}{3}$; проверяем на принадлежность промежутку $\dfrac{a+4}{3} \ge a \iff a \le 2$, то есть при $a \le 2$ значение $x = \dfrac{a+4}{3}$ является решением исходного уравнения.
Таким образом,

- если $a > 2$, то решений нет;
- если $a < 2$, то уравнение имеет два решения $x = \dfrac{a+4}{3}$ и $x = 3a - 4$; по условию задачи оба корня должны лежать в отрезке $[0; 4]$:

$$\begin{cases} 0 \le \dfrac{a+4}{3} \le 4, \\ 0 \le 3a - 4 \le 4; \end{cases} \iff \begin{cases} -4 \le a \le 8, \\ \dfrac{4}{3} \le a \le \dfrac{8}{3}; \end{cases} \iff \frac{4}{3} \le a \le \frac{8}{3};$$

  значит, $\dfrac{4}{3} \le a < 2$;



- если $a = 2$, то $x = \dfrac{a+4}{3}$ и $x = 3a - 4$ совпадают и принимают значение, равное 2; найденное решение принадлежит отрезку $[0; 4]$.

О т в е т. $\left[\dfrac{4}{3}; 2\right]$.

1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета

Задача 1. (Физ-83.2)

Решить уравнение $|5x^2 - 3| = 2$.

И д е я. Использовать геометрический смысл модуля числа для его раскрытия.
У к а з а н и е. Геометрический смысл модуля: $|f(x)| = a$, где $a > 0$, означает, что $f(x) = \pm a$; в данном случае это значительно выгоднее раскрытия модуля по определению.

У к а з а н и е. Уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} 5x^2 - 3 = -2; \\ 5x^2 - 3 = 2. \end{array}\right.$

Р е ш е н и е. Используем геометрический смысл модуля:

$$\left[\begin{aligned}&5x^2-3=-2;\\&5x^2-3=2;\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&5x^2=1;\\&5x^2=5;\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}};\\&x=\pm 1.\end{aligned}\right.$$

О т в е т. ± 1; $\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Задача 2. (Соц-00.1)

Решить уравнение $|x^2-3x|=2x-4$.

И д е я. Удобнее раскрыть модуль через геометрический смысл.
У к а з а н и е. Наложить ограничение на правую часть о неотрицательности и раскрыть модуль через геометрический смысл.

Р е ш е н и е. Раскрываем модуль через геометрический смысл:

$$\left\{\begin{aligned}&2x-4\ge 0,\\&\left[\begin{aligned}&x^2-3x=2x-4;\\&x^2-3x=-(2x-4);\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned}&x\ge 2,\\&\left[\begin{aligned}&x^2-5x+4=0;\\&x^2-x-4=0;\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{aligned}&x\ge 2,\\&\left[\begin{aligned}&x=\frac{5\pm 3}{2};\\&x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2};\end{aligned}\right.\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&x=4;\\&x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}.\end{aligned}\right.$$

О т в е т. 4; $\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}$.

Задача 3. (Геол-81.1)

Решить уравнение $x^2-4x+|x-3|+3=0$.

И д е я. Раскрыть модуль по определению.
У к а з а н и е. Точка смены знака подмодульной функции делит область определения исходного выражения на два промежутка, на каждом из которых можно снять модуль с конкретным знаком и решить два соответствующих уравнения с отбором корней по соответствующим промежуткам.

Р е ш е н и е. Точкой смены знака подмодульной функции является значение $x=3$;
1) если $x\ge 3$, то уравнение принимает вид $x(x-3)=0$, решением которого на рассматриваемом промежутке является $x=3$;
2) если $x<3$, то уравнение примет вид $x^2-5x+6=0$, решение которого $x=2$ из рассматриваемого промежутка добавляется к ранее полученному.

О т в е т. $2; 3$.

Задача 4. (Биол-96.2)

Решить уравнение $(x-7)^2 - |x-7| = 30$.

Идея. Ввести переменную $z = |x-7| \geq 0$ и решить уравнение, после чего вернуться к переменной x и раскрыть модуль через геометрический смысл.
Указание. Использовать факт того, что $|f(x)|^2 = (f(x))^2$, и ввести новую переменную $z = |x-7| \geq 0$, после чего решить относительно неё квадратное уравнение, отобрать неотрицательные корни и раскрыть модуль через его геометрический смысл.

Решение. Введём новую переменную $z = |x-7| \geq 0$:

$$\begin{cases} z \geq 0, \\ z^2 - z - 30 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} z \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} z = -5; \\ z = 6; \end{array} \right. \end{cases} \iff z = 6 \iff$$

$$\iff |x-7| = 6 \iff x - 7 = \pm 6 \iff \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = 13. \end{array} \right.$$

Ответ. 1; 13.

Задача 5. (Геол-95.2)

Решить неравенство $x^2 - 6 \geq |x|$.

Идея. Неравенство является квадратным относительно $|x|$.
Указание. Воспользоваться тем, что $|x|^2 = x^2$, и решить данное неравенство относительно модуля, раскрыв его позже через геометрический смысл.

Решение. Рассмотрим неравенство как квадратное относительно $t = |x| \geq 0$: $t^2 - t - 6 \geq 0$. Корнями квадратного трёхчлена являются значения -2 и 3. Поэтому исходное неравенство перепишем в виде:

$$(|x|+2)(|x|-3) \geq 0 \iff |x| - 3 \geq 0 \iff |x| \geq 3 \iff \left[\begin{array}{l} x \leq -3; \\ x \geq 3. \end{array} \right.$$

Ответ. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Задача 6. (Геол-77.2)

Решить неравенство $x^2 - |5x-3| - x < 2$.

Идея. Раскрыть модуль по определению (через точку смены знака).
Указание. Точка смены знака подмодульной функции делит область определения на два промежутка, на каждом из которых можно снять модуль с конкретным знаком и получить совокупность двух неравенств с условиями отбора промежутков. Полученные результаты объединяются.

Р е ш е н и е. Точкой смены знака подмодульной функции является $x = \dfrac{3}{5}$. Раскроем модуль по определению.

1) Если $x \geq \dfrac{3}{5}$, то неравенство принимает вид $x^2 - 6x + 1 < 0$. Решаем его через чётный дискриминант, находим интервал $3 - \sqrt{8} < x < 3 + \sqrt{8}$. Сравним числа $3 - \sqrt{8}$ и $\dfrac{3}{5}$:

$$\begin{array}{rcl} 3 - \sqrt{8} & \vee & \dfrac{3}{5} \\ 12 & \vee & 10\sqrt{2} \\ 6 & \vee & 5\sqrt{2} \\ 36 & < & 50. \end{array}$$

Значит, $3 - \sqrt{8} < \dfrac{3}{5}$, поэтому решением в этом случае будут $x \in \left[\dfrac{3}{5}; 3 + \sqrt{8}\right)$.

2) Если $x < \dfrac{3}{5}$, то неравенство принимает вид $x^2 + 4x - 5 < 0$, решением которого будет промежуток $-5 < x < 1$; значит, $-5 < x < \dfrac{3}{5}$.

Объединяя результаты в совокупность, получим $-5 < x < 3 + \sqrt{8}$.

О т в е т. $(-5; 3 + \sqrt{8})$.

Задача 7. (Хим-95.1)

Решить неравенство $\dfrac{3x}{x^2 + 2} \geq 1$.

И д е я. Учитывая положительность знаменателя, умножить на него левую и правую части и решить получившееся квадратное неравенство.
У к а з а н и е. Знаменатель дроби всегда положителен, поэтому умножение на него обеих частей неравенства является равносильным переходом.

Р е ш е н и е. В силу положительности знаменателя можем умножить на него обе части неравенства:

$$3x \geq x^2 + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 2.$$

О т в е т. $[1; 2]$

Задача 8. (ВМК-87.2)

Существуют ли действительные значения a, для которых $a^2 - 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}$? Если да, то сколько их?

Идея. Требуемые значения a существуют при наличии решений у заданного квадратного уравнения, то есть при его неотрицательном дискриминанте.
Указание. Вычислить дискриминант данного уравнения и проверить его неотрицательность.

Решение. Перепишем условие в виде квадратного уравнения

$$a^2 - a(4-\sqrt{2}) + \sqrt{3} = 0;$$

требуемые a существуют, если у данного уравнения есть решения; решения у квадратного уравнения имеются при неотрицательном дискриминанте

$$D = (4-\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{3} = 16 + 2 - 8\sqrt{2} - 4\sqrt{3} = 2(9 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}).$$

Сравним дискриминант с нулём:

$$\begin{array}{rcl} 2(9-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}) & \vee & 0 \\ 9 & \vee & 4\sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ 81 & \vee & 32+12+16\sqrt{6} \\ 37 & \vee & 16\sqrt{6} \\ 1369 & < & 1536. \end{array}$$

Значит, $D < 0$ и решений нет, поэтому требуемых в условии значений параметра a не существует.

Ответ. Нет.

Задача 9. (Почв-96.2)

Решить неравенство $3x^4 + 4 < 13x^2$.

Идея. Решить неравенство как квадратное относительно x^2.
Указание. Неравенство является биквадратным и решается относительно x^2.

Решение. Неравенство является биквадратным. Решим его относительно x^2:

$$3x^4 - 13x^2 + 4 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3} < x^2 < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < |x| < 2.$$

Раскрывая модуль через геометрический смысл, получаем ответ.

Ответ. $\left(-2; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \bigcup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 2\right)$.

Задача 10. (Геол-98.2)

Решить уравнение $||4 - x^2| - x^2| = 1$.

Идея. Уравнение является линейным относительно $t = x^2$.
Указание. Раскрыть внешний модуль через геометрический смысл, а внутренний – по определению.

Р е ш е н и е. Заменив $t = x^2$, получим $||4-t|-t| = 1 \iff |t-4|-t = \pm 1$; раскрываем модуль по определению.

1) $\begin{cases} t \geq 4, \\ t-4-t = \pm 1 \quad - \quad \text{нет решений;} \end{cases}$

2) $\begin{cases} t < 4, \\ \left[\begin{array}{l} 4-t = t-1; \\ 4-t = t+1; \end{array} \right. \end{cases} \iff \begin{cases} t < 4, \\ \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{2}; \\ t = \dfrac{3}{2}; \end{array} \right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{2}; \\ t = \dfrac{3}{2}; \end{array} \right.$

значит, $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ и $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

О т в е т. $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Задача 11. (Филол-98.1)

Решить неравенство $\dfrac{x^2+4x+3}{|1+x|} \leq 0$.

И д е я. Исходное неравенство равносильно неположительности числителя при ненулевом знаменателе.
У к а з а н и е. Знаменатель дроби на области допустимых значений заведомо положителен, поэтому от него можно избавиться, оставив только числитель, сохранив знак неравенства на области определения.

Р е ш е н и е. Знаменатель дроби на области допустимых значений всегда положителен, поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+4x+3 \leq 0, \\ x \neq -1; \end{cases} \iff \begin{cases} -3 \leq x \leq -1, \\ x \neq -1; \end{cases} \iff -3 \leq x < -1.$$

О т в е т. $[-3;-1)$.

Задача 12. (Экон.К-83.1)

Решить уравнение $x^2+11+\sqrt{x^2+11} = 42$.

И д е я. Уравнение является квадратным относительно радикала.
У к а з а н и е. При $t = \sqrt{x^2+11} \geq 0$ уравнение примет вид $t^2+t-42 = 0$.

Р е ш е н и е. Обозначим $t = \sqrt{x^2+11} \geq 0$, тогда получаем

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2+t-42 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} t \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} t = -7; \\ t = 6; \end{array} \right. \end{cases} \iff t = 6.$$

Возвращаемся к исходной переменной: $x^2+11 = 36 \iff x^2 = 25 \iff x = \pm 5$.

О т в е т. ± 5.

Задача 13. (У)

Решить уравнение $x^2 + px + 35 = 0$ при условии, что сумма квадратов корней равна 74.

Идея. Использовать теорему Виета.
Указание. С помощью теоремы Виета найти p, а потом решить квадратное уравнение.

Решение. По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = 35. \end{cases}$ Выразим $x_1^2 + x_2^2$ через p:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 70;$$

следовательно, $p^2 - 70 = 74$, откуда $p = \pm 12$. При $p = -12$ корни $x_1 = 5$, $x_2 = 7$; при $p = 12$ корни $x_1 = -5$, $x_2 = -7$.

Ответ. $x_1 = 5$, $x_2 = 7$ или $x_1 = -5$, $x_2 = -7$.

Задача 14. (У)

Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.

Идея. Воспользоваться теоремой Виета.
Указание. Выразить сумму четвёртых степеней через сумму и произведение корней с помощью выделения полного квадрата.

Решение. По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = -q. \end{cases}$ Выразим $x_1^4 + x_2^4$ через p и q:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \Big((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\Big)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (p^2 + 2q)^2 - 2q^2.$$

Ответ. $(p^2 + 2q)^2 - 2q^2$.

Задача 15. (Геогр-92.2)

Найти три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение $x = 2$.

Идея. Квадратное уравнение имеет единственный корень при нулевом дискриминанте; при $a = 0$ уравнение не является квадратным.
Указание. В условии задачи говорится о квадратном уравнении; значит, $a \neq 0$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение имеет единственный корень либо при нулевом старшем коэффициенте, либо при нулевом дискриминанте. В условии задачи говорится о квадратном уравнении; следовательно, $a \neq 0$ и $D = b^2 - 4ac = 0$. Получаем:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac = 0, \\ a + b + c = 2, \\ 4a + 2b + c = 0; \end{cases}$$

из двух последних уравнений $\begin{cases} c = 2 - a - b, \\ 4a + 2b + 2 - a - b = 0; \end{cases}$

$b = -3a - 2$, тогда с $= 2 - a - (-3a - 2) = 2a + 4$; подставляем в первое:

$$(-3a-2)^2 - 4a(2a+4) = 0 \iff a^2 - 4a + 4 = 0 \iff (a-2)^2 = 0,$$

то есть $a = 2$, $b = -8$, $c = 8$.

О т в е т. $(2; -8; 8)$.

З а м е ч а н и е. Вместо уравнения, полученного из условия равенства нулю дискриминанта, можно было использовать теорему Виета с $x_1 = x_2 = 2$.

Задача 16. (ВМК-80.4)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет два различных корня.

И д е я. Квадратное уравнение имеет два различных корня при положительном дискриминанте.
У к а з а н и е. Уравнение является квадратным при ненулевом старшем коэффициенте.

Р е ш е н и е. Квадратное уравнение имеет два различных корня при положительном дискриминанте и ненулевом старшем коэффициенте:

$$\begin{cases} 3a - 1 \neq 0, \\ D_1 = a^2 - (3a-2)(3a-1) > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq \dfrac{1}{3}, \\ 8a^2 - 9a + 2 < 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \neq \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{9-\sqrt{17}}{16} < a < \dfrac{9+\sqrt{17}}{16}. \end{cases}$$

Сравним число $\dfrac{1}{3}$ с числами $\dfrac{9-\sqrt{17}}{16}$ и $\dfrac{9+\sqrt{17}}{16}$:

$$\frac{9-\sqrt{17}}{16} < \frac{9-4}{16} = \frac{5}{16} < \frac{1}{3} < \frac{9}{16} < \frac{9+\sqrt{17}}{16};$$

значит, из найденного интервала следует исключить значение $a = \dfrac{1}{3}$.

О т в е т. $\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{16}; \dfrac{1}{3}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, простейшие системы уравнений

2.1. Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов

Задача 1. (ЕГЭ)

Решить неравенство $\dfrac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \ge 0$.

Идея. Решить неравенство методом интервалов.
Указание. Отметить на прямой нули числителя и знаменателя и решить неравенство методом интервалов.

Решение. Неравенство решается методом интервалов; нули числителя $x = -\dfrac{3}{4}$ и $x = 2$; нуль знаменателя $x = -4$; решением является объединение двух промежутков $x \in \left(-4; -\dfrac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$.

Ответ. $\left(-4; -\dfrac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Решить неравенство $\dfrac{2}{x} - 10 \ge 0$.

Идея. Привести левую часть к общему знаменателю и решить неравенство методом интервалов.
Указание. Неравенство переписывается в виде $\dfrac{5x-1}{x} \ge 0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{2}{x} - 10 \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2-10x}{x} \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5x-1}{x} \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left(0; \frac{1}{5}\right].$$

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{5}\right]$.

Задача 3. (ЕГЭ)

Решить неравенство $\dfrac{3x^2+3x}{x-5} \le 0$.

Идея. Разложить числитель на множители и решить неравенство методом интервалов.
Указание. Неравенство переписывается в виде $\dfrac{3x(x+1)}{x-5} \le 0$.

Р е ш е н и е. Разложим числитель на множители и решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{3x(x+1)}{x-5} \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cup [0; 5).$$

О т в е т. $(-\infty; -1] \cup [0; 5)$.

Задача 4. (М/м-77.1)

Решить неравенство $x \le 3 - \dfrac{1}{x-1}$.

И д е я. Решить неравенство методом интервалов.
У к а з а н и е. Перенести все слагаемые в одну сторону и привести к общему знаменателю.

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{x-1} + x - 3 \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1+(x-3)(x-1)}{x-1} \le 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-4x+4}{x-1} \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{x-1} \le 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ.

О т в е т. $(-\infty; 1) \cup \{2\}$.

Задача 5. (Псих-82.1)

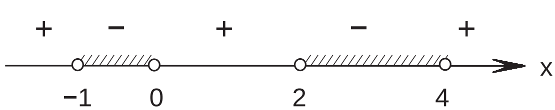
Решить неравенство $\dfrac{2x-3}{4-x} > \dfrac{1}{x}$.

И д е я. Решить неравенство методом интервалов.
У к а з а н и е. Перенести все слагаемые в одну сторону и привести к общему знаменателю.

Р е ш е н и е. Перенесём все слагаемые влево и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{2x-3}{4-x} - \frac{1}{x} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x(2x-3)-(4-x)}{x(4-x)} > 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2x^2-3x-4+x}{x(x-4)} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-x-2}{x(x-4)} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-4)} < 0;$$



значит, $-1 < x < 0$ или $2 < x < 4$.

О т в е т. $(-1; 0) \cup (2; 4)$.

Задача 6. (Почв-00(1).1)

Решить неравенство $\dfrac{1}{3-2x} \le 1$.

Идея. Решить неравенство методом интервалов.
Указание. Перенести все слагаемые в одну сторону и привести к общему знаменателю.

Решение. Перенесём все слагаемые влево и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{1}{3-2x} - 1 \le 0 \iff \frac{1-3+2x}{3-2x} \le 0 \iff \frac{x-1}{2x-3} \ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{3}{2}; \\ x \le 1. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty; 1] \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

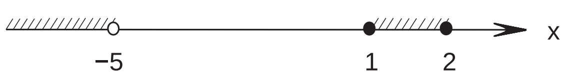
Задача 7. (Геогр-00(1).1)

Решить неравенство $x \le \dfrac{8x-2}{x+5}$.

Идея. Решить неравенство методом интервалов.
Указание. Перенести все слагаемые в одну сторону и привести к общему знаменателю.

Решение. Перенесём дробь в левую часть и приведём к общему знаменателю

$$\frac{x^2+5x-8x+2}{x+5} \le 0 \iff \frac{x^2-3x+2}{x+5} \le 0 \iff \frac{(x-1)(x-2)}{x+5} \le 0;$$



значит, $x < -5$ или $1 \le x \le 2$.

Ответ. $(-\infty; -5) \cup [1; 2]$.

Задача 8. (ИСАА-00.1)

Решить неравенство $|2x-1| > \dfrac{1}{x-2}$.

Идея. Рассмотреть правую часть неравенства. Определить промежутки знакопостоянства.
Указание. При $x < 2$ правая часть отрицательна и основное неравенство выполнено, так как модуль по определению неотрицателен.

Решение. Рассмотрим промежутки знакопостоянства правой части.

- При $x < 2$ правая часть отрицательна и основное неравенство выполнено, так как модуль по определению неотрицателен.

- При $x > 2$ подмодульная функция положительна и неравенство принимает вид $2x-1 > \dfrac{1}{x-2}$. Пользуясь положительностью знаменателя правой части, умножим на него обе части неравенства, получим

  $$(2x-1)(x-2) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 2 > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 1 > 0.$$

  Решаем неравенство методом интервалов: $x < \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ или $x > \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$. Учитывая, что $x > 2$, окончательно получаем $x > \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$.

Объединяя результаты рассмотрения двух случаев, приходим к ответу.

О т в е т. $(-\infty; 2) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$.

Задача 9. (Геол-82.2)

Решить неравенство $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \geq 1$.

И д е я. Домножить неравенство на $|x+1|$.
У к а з а н и е. Учитывая ОДЗ, домножить неравенство на $|x+1|$ и раскрыть модуль по определению.

Р е ш е н и е. $\begin{cases} x \neq -1, \\ |x+1| \leq 2x+5; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1, \\ x+1 \leq 2x+5; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ -x-1 \leq 2x+5; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -1, \\ x \geq -4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x \geq -2; \end{cases} \end{array}\right.$

значит, $x > -1$ или $-2 \leq x < -1$.

О т в е т. $[-2; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Задача 10. (Биол-99.2)

Решить неравенство $\dfrac{3}{|x-1|} \geq 2x+5$.

И д е я. Домножить неравенство на $|x-1|$, раскрыть модуль по определению и решить методом интервалов.
У к а з а н и е. Учитывая ОДЗ, домножить неравенство на $|x-1|$ и раскрыть модуль по определению.

Р е ш е н и е. Так как на области определения $|x-1| > 0$, то умножим неравенство на $|x-1|$, получим $(2x+5)|x-1| \leq 3$. Далее раскрываем модуль по определению.

1) $\begin{cases} x > 1, \\ (2x+5)(x-1) \leq 3; \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ 2x^2 + 3x - 8 \leq 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{-3-\sqrt{73}}{4} \le x \le \dfrac{-3+\sqrt{73}}{4}; \end{cases} \iff 1 < x \le \dfrac{\sqrt{73}-3}{4}.$$

2) $\begin{cases} x < 1, \\ (2x+5)(1-x) \le 3; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1, \\ 2x^2+3x-2 \ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -2; \\ x \ge \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x \le -2; \\ \dfrac{1}{2} \le x < 1. \end{array}\right.$$

О т в е т. $(-\infty;-2] \cup \left[\dfrac{1}{2};1\right) \cup \left(1;\dfrac{\sqrt{73}-3}{4}\right]$.

Задача 11. (Геол-96(1).1)

Решить неравенство $\dfrac{1}{x-1996} \le \dfrac{x}{x-1996}$.

И д е я. Решить неравенство методом интервалов.
У к а з а н и е. Перенести все слагаемые в одну сторону и привести к общему знаменателю.

Р е ш е н и е. Перенесём все слагаемые вправо и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x-1996} \le \frac{x}{x-1996} \iff \frac{x-1}{x-1996} \ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} x \le 1; \\ x > 1996. \end{array}\right.$$

О т в е т. $(-\infty;1] \cup (1996;+\infty)$.

Задача 12. (Филол-99.2)

Решить неравенство $\dfrac{1}{x^2+8x-9} \ge \dfrac{1}{3x^2-5x+2}$.

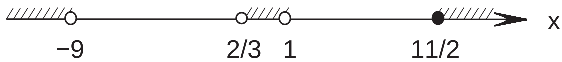
И д е я. Решить неравенство методом интервалов.
У к а з а н и е. Заметив, что квадратные трёхчлены в знаменателях дробей имеют общий корень, разложить знаменатели на множители $x^2+8x-9 = (x-1)(x+9)$, $3x^2-5x+2 = (x-1)(3x-2)$, с последующим вынесением за скобки для упрощения вычислений.
У к а з а н и е. Переписать неравенство в виде $\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{x+9} - \dfrac{1}{3x-2}\right) \ge 0$.

Р е ш е н и е. Разложим знаменатели на множители:

$$\frac{1}{(x-1)(x+9)} \ge \frac{1}{(x-1)(3x-2)} \iff \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x+9} - \frac{1}{3x-2}\right) \ge 0 \iff$$

$$\iff \frac{3x-2-x-9}{(x+9)(x-1)(3x-2)} \ge 0 \iff \frac{2x-11}{(x+9)(x-1)(3x-2)} \ge 0;$$

решая неравенство методом интервалов, получаем ответ.



О т в е т. $(-\infty;-9)\bigcup\left(\dfrac{2}{3};1\right)\bigcup\left[\dfrac{11}{2};+\infty\right)$.

Задача 13. (Геол-98(1).1)

Решить неравенство $(x^2+5x-6)|x+4|^{-1}<0$.

И д е я. Исходное неравенство равносильно отрицательности числителя при ненулевом знаменателе.
У к а з а н и е. На области допустимых значений знаменатель дроби заведомо положителен, поэтому неравенство выполняется при отрицательности числителя и ненулевом знаменателе.

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в виде $\dfrac{x^2+5x-6}{|x+4|}<0$; на области допустимых значений знаменатель заведомо положителен, поэтому неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+5x-6<0, \\ x\neq-4; \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)(x+6)<0, \\ x\neq-4; \end{cases} \iff \begin{cases} -6<x<1, \\ x\neq-4. \end{cases}$$

О т в е т. $(-6;-4)\cup(-4;1)$.

Задача 14. (ВМК-98.1)

Решить неравенство $2x>\dfrac{5x+3}{|x+2|}$.

И д е я. Избавиться от дроби, воспользовавшись положительностью знаменателя на области допустимых значений, после чего раскрыть модуль через точку смены знака.
У к а з а н и е. На области допустимых значений знаменатель дроби положителен, поэтому на него можно умножить обе части неравенства, раскрыв затем модуль по определению.

Р е ш е н и е. На области допустимых значений знаменатель всегда положителен, поэтому $2x|x+2|>5x+3$, $x\neq-2$. Далее раскрываем модуль по определению.

$$1)\ \begin{cases} x>-2, \\ 2x^2-x-3>0; \end{cases} \iff \begin{cases} x>-2, \\ \left[\begin{array}{l} x<-1; \\ x>\dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{значит,}\ \ x\in(-2;-1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right).$$

$$2)\ \begin{cases} x<-2, \\ 2x^2+9x+3<0; \end{cases} \iff \begin{cases} x<-2, \\ \dfrac{-9-\sqrt{57}}{4}<x<\dfrac{-9+\sqrt{57}}{4}. \end{cases}$$

Сравниваем числа:

$$\frac{-9-\sqrt{57}}{4} < \frac{-9-\sqrt{49}}{4} = \frac{-9-7}{4} < -2; \qquad \frac{-9+\sqrt{57}}{4} > \frac{-9+\sqrt{49}}{4} > -2;$$

значит, из второго случая $\dfrac{-9-\sqrt{57}}{4} < x < -2$.

Объединяя оба случая, получаем ответ.

Ответ. $\left(\dfrac{-9-\sqrt{57}}{4}; -2\right) \cup (-2;-1) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Задача 15. (М/м-85.2)

Решить неравенство $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{|x|-1} \geq \dfrac{2}{x-1}$.

Идея. Раскрыть модуль по определению и решить соответствующие неравенства методом интервалов.

Указание. Точкой смены знака для подмодульного выражения является $x = 0$. Удобно рассмотреть два случая снятия модуля, а только потом приводить дроби к общему знаменателю.

Решение. Раскроем модуль по определению:

$$1)\ \left\{\begin{array}{l} x \geq 0, \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} \geq \dfrac{2}{x-1}; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \geq 0, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{1}{x+1} \geq 0; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \geq 0, \\ x \neq 1. \end{array}\right.$$

$$2)\ \left\{\begin{array}{l} x \leq 0, \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{-x-1} \geq \dfrac{2}{x-1}; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \leq 0, \\ \dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)} \leq 0; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \leq 0, \\ \dfrac{3x+1}{x+1} \geq 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x < -1; \\ -\dfrac{1}{3} \leq x \leq 0. \end{array}\right.$$

Объединяя оба случая, получаем ответ.

Ответ. $(-\infty;-1) \cup \left[-\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Замечание. Идея с раскрытием модулей после приведения дробей к общему знаменателю в подобных примерах нерациональна, так как ведёт к формальному повторению одинаковых по технологии действий.

Задача 16. (Геол-97.3)

Решить неравенство $\dfrac{x}{20-\sqrt{x}} < 10$.

Идея. Рассмотреть неравенство относительно $z = \sqrt{x}$, решив его методом интервалов.

Указание. Ввести новую переменную $z = \sqrt{x} \geq 0$, привести разность левой и правой частей неравенства к общему знаменателю и решить методом интервалов.

Решение. Введём новую переменную $z = \sqrt{x} \geq 0$:

$$\frac{z^2}{20-z} < 10 \iff \frac{z^2+10z-200}{20-z} < 0 \iff \frac{(z-10)(z+20)}{z-20} > 0;$$

так как $z \geq 0$, то $z+20>0$ всегда; сократим неравенство на $(z+20)$:

$$\frac{z-10}{z-20} > 0 \iff \left[\begin{array}{l} z<10; \\ z>20; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}<10; \\ \sqrt{x}>20; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 0\leq x<100; \\ x>400. \end{array}\right.$$

Ответ. $[0;100)\cup(400;+\infty)$.

Задача 17. (Физ-93.5)

Решить неравенство $\dfrac{|x+3|+x}{x+2} > 1$.

Идея. Сначала перенести единицу влево и привести к общему знаменателю. Затем раскрыть модуль по определению, рассмотрев соответствующие промежутки знакопостоянства подмодульной функции.

Указание. Перенести единицу влево и привести к общему знаменателю.

Указание. Точкой смены знака подмодульной функции является $x=-3$, поэтому необходимо рассмотреть два промежутка $x<-3$ и $x\geq-3$, на каждом из которых решить получившееся неравенство методом интервалов.

Решение. Сначала перенесём единицу влево и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{|x+3|+x}{x+2} - 1 > 0 \iff \frac{|x+3|-2}{x+2} > 0.$$

Точкой смены знака подмодульной функции является значение $x=-3$, поэтому рассмотрим два промежутка.

$$1)\ \begin{cases} x\geq-3, \\ \dfrac{x+3-2}{x+2} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq-3, \\ \dfrac{x+1}{x+2} > 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} -3\leq x<-2; \\ x>-1. \end{array}\right.$$

$$2)\ \begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{-x-3-2}{x+2} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{x+5}{x+2} < 0; \end{cases} \iff -5<x<-3.$$

Объединяя оба случая, получаем ответ.

Ответ. $(-5;-2)\cup(-1;+\infty)$.

Задача 18. (Почв-00(1).1)

Решить уравнение $\dfrac{x^{17}-1}{1-x^{15}}=\dfrac{1-x^{15}}{x^{13}-1}$.

Идея. Преобразовать уравнение по правилу пропорции, перемножив соответствующие выражения, не забывая при этом про область определения.
Указание. Уравнение равносильно тому, что $(x^{17}-1)(x^{13}-1)=(1-x^{15})^2$ при $x\neq 1$.

Решение. Раскрывая по правилу пропорции, с учётом области определения получаем:

$$\begin{cases} x\neq 1, \\ (x^{17}-1)(x^{13}-1)=(1-x^{15})^2. \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$x^{30}-x^{13}-x^{17}+1=1-2x^{15}+x^{30} \iff x^{17}-2x^{15}+x^{13}=0 \iff$$
$$\iff x^{13}(x^4-2x^2+1)=0 \iff x^{13}(x^2-1)^2=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=\pm 1; \end{array}\right.$$

с учётом области определения получаем, что $x=-1$ или $x=0$.

Ответ. -1; 0.

Задача 19. (Соц-00.3)

Решить неравенство $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}>\dfrac{1}{2x+3}$.

Идея. Перенести все слагаемые в левую часть, привести к общему знаменателю и решить неравенство методом интервалов.
Указание. После приведения к общему знаменателю неравенство принимает вид $\dfrac{5x^2+14x+11}{(x-1)(x+2)(2x+3)}>0$.

Решение. Переносим все дроби в левую часть и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2x+4+x-1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{2x+3}>0 \iff \frac{(3x+3)(2x+3)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(2x+3)}>0 \iff$$
$$\iff \frac{6x^2+6x+9+9x-x^2+x+2-2x}{(x-1)(x+2)(2x+3)}>0 \iff \frac{5x^2+14x+11}{(x-1)(x+2)(2x+3)}>0.$$

Так как дискриминант числителя $D_1=49-55<0$, то числитель всегда положителен, поэтому переходим к следующему эквивалентному неравенству:

$$(x-1)(x+2)(2x+3)>0 \iff \left[\begin{array}{l} -2<x<-\dfrac{3}{2}; \\ x>1. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Задача 20. (Экон-87.3)

Решить неравенство $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \le 2$.

Идея. Раскрыть модули по определению и решить неравенство методом интервалов.
Указание. После раскрытия модулей перенести все слагаемые в одну сторону и привести все дроби к общему знаменателю.

Решение. Раскрываем модули через точки смены знака по интервалам:

$$1)\ \begin{cases} x < 2, \\ \dfrac{2-2x}{2-x} \le 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 2, \\ \dfrac{1}{x-2} \le 0; \end{cases} \iff x < 2.$$

$$2)\ \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ \dfrac{x-3}{x-2} \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2; \\ x \ge 3; \end{array} \right. \end{cases} \iff x = 3.$$

$$3)\ \begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{x-3}{x-4} \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x > 3, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 3; \\ x > 4; \end{array} \right. \end{cases} \iff x > 4.$$

Объединяя все три случая, получаем ответ.

Ответ. $(-\infty; 2) \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$.

Задача 21. (Соц-99.5)

Решить неравенство $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \le 0$.

Идея. Разложить левую часть неравенства на множители и решить полученное неравенство методом интервалов.
Указание. Вынести за скобку общий множитель $|x-2|$.

Решение. Вынесем за скобку общий множитель $|x-2|$:

$$|x-2|\left(\frac{4}{4-|x|} - 1\right) \le 0 \iff \frac{|x||x-2|}{|x|-4} \ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 2; \\ |x| > 4. \end{array} \right.$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ. $(-\infty; -4) \cup \{0\} \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$.

Задача 22. (Физ-82.2)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых решение уравнения $10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$ больше 2.

Идея. Уравнение является линейным относительно переменной, поэтому можно вычислить его корень в явном виде и проверить требуемое условие.
Указание. Уравнение преобразуется к виду $5x(a+2) = 17a + 13$, то есть решением будет $x = \dfrac{17a+13}{5(a+2)}$ при $a \neq -2$.
Указание. Найденное решение проверить на выполнение условия $x > 2$.

Решение. Исходное уравнение является линейным по переменной x, перепишем его в виде $5x(a+2) = 17a + 13$. Тогда получаем два случая:

1)если $a = -2$, то $5x \cdot 0 = -21$, то есть решений нет;

2) если $a \neq -2$, то $x = \dfrac{17a+13}{5(a+2)}$ – корень уравнения; проверим его на выполнение условия $x > 2$:

$$\frac{17a+13}{5(a+2)} > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a-1}{a+2} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a < -2; \\ a > 1. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Задача 23. (Геол-79.1)

Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие равенству $\dfrac{a}{2a-x} = 3$.

Идея. Решить уравнение относительно переменной и проверить найденные корни в области определения дроби.
Указание. Уравнение равносильно $3(2a-x) = a$, где $2a - x \neq 0$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3(2a-x) = a, \\ 2a - x \neq 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x = 5a, \\ x \neq 2a; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{5}{3}a, \\ x \neq 2a; \end{cases}$$

проверим, когда найденный корень выпадает из области определения: $\dfrac{5}{3}a \neq 2a$, то есть если $a = 0$, то решений нет.

Ответ. Если $a = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{5a}{3}$.

2.2. Простейшие системы уравнений. Подстановка и исключение переменных при решении систем уравнений

Задача 1. (Псих-80.2)

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2u+v=7, \\ |u-v|=2. \end{cases}$

Идея. Раскрыть модуль через геометрический смысл, получить совокупность двух систем, каждую из которых решить, сложив уравнения для исключения неизвестной.

Указание. Второе уравнение системы равносильно совокупности двух уравнений, что позволит переписать систему в виде совокупности двух систем. В каждой из новых систем, после сложения уравнений, выражается одна из переменных. Вторую удобно находить подстановкой.

Решение. Раскрывая модуль через геометрический смысл, получаем два случая:

1) $\begin{cases} 2u+v=7, \\ u-v=-2; \end{cases} \iff \begin{cases} 3u=5, \\ v=u+2; \end{cases} \iff u=\dfrac{5}{3},\ v=\dfrac{11}{3}.$

2) $\begin{cases} 2u+v=7, \\ u-v=2; \end{cases} \iff \begin{cases} 3u=9, \\ v=u-2; \end{cases} \iff u=3,\ v=1.$

Ответ. $(3;1),\ \left(\dfrac{5}{3};\dfrac{11}{3}\right)$.

Задача 2. (ВМК-87.1)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}+3y=9, \\ x-1=y(\sqrt{x}+1). \end{cases}$

Идея. Разложить левую часть второго уравнения на множители и упростить тем самым само уравнение.

Указание. Левая часть второго уравнения раскладывается на множители как разность квадратов относительно $\sqrt{x}\geq 0$, в результате чего в обеих частях будет общий положительный множитель, на который можно сократить само уравнение. Получившуюся после этого систему можно решить вычитанием одного уравнения из другого.

Решение. Область определения $x\geq 0$. Разложим второе уравнение на множители

$$\begin{cases} \sqrt{x}+3y=9, \\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=y(\sqrt{x}+1); \end{cases}$$

выражение $\sqrt{x}+1$ всегда положительно, поэтому сокращаем на него второе уравнение

$$\begin{cases} \sqrt{x}+3y=9, \\ \sqrt{x}-1=y; \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x}+3y=9, \\ \sqrt{x}-y=1; \end{cases}$$

вычитаем одно из другого: $4y = 8 \iff y = 2$; подставляем y во второе уравнение: $\sqrt{x} = 3$, $x = 9$.

Ответ. $(9; 2)$.

Замечание. Проводить замену переменной $z = \sqrt{x} \geq 0$ нецелесообразно, так как большого выигрыша это не приносит.

Задача 3. (М/м-79.3)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$

Идея. Решить систему методом исключения неизвестных относительно $\dfrac{2}{2x-y}$ и $\dfrac{1}{x-2y}$. В целях упрощения записи можно произвести соответствующую замену переменных.

Указание. Умножить второе уравнение на три и сложить с первым для получения значения $2x - y$. Вычесть одно уравнение из другого в исходной системе для получения значения $x - 2y$. В полученной системе двух уравнений с двумя переменными воспользоваться методом исключения неизвестных или подстановкой.

Решение. Вычитаем второе уравнение исходной системы из первого, получим

$$\frac{4}{x-2y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \iff \frac{4}{x-2y} = \frac{8}{18} \iff x - 2y = 9;$$

$x - 2y \neq 0$ – выполнено. Умножив второе уравнение на три и сложив с первым, получим

$$\frac{8}{2x-y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \iff \frac{4}{2x-y} = \frac{1}{3} \iff 2x - y = 12;$$

знаменатель первой дроби также не равен нулю. Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} x - 2y = 9, \\ 2x - y = 12; \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y = 18, \\ 2x - y = 12; \end{cases} \iff \begin{cases} -3y = 6, \\ 2x + 2 = 12; \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2, \\ x = 5. \end{cases}$$

Ответ. $(5; -2)$.

Замечание. Выполнимость условий области определения в данной задаче не вызывает сомнений в силу получившейся после преобразований линейной системы, однако указать этот факт в решении нужно обязательно.

Задача 4. (Псих-94.2)

Известно, что $x = 1$, $y = -1$ – одно из решений системы $\begin{cases} 2ax + by = 1, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$ Найти все её решения.

И д е я. За счёт известного решения можно вычислить значения параметров, при которых имеющаяся пара переменных является решением системы. Затем получившаяся система решается заново и находятся все её решения.
У к а з а н и е. Подставить заданное в условии решение системы и найти значения параметров, при которых данное решение у системы существует.
У к а з а н и е. После получения значений параметров подставить их в исходную систему, которую затем решить.

Р е ш е н и е. Подставим заданное в условии решение $x = 1$, $y = -1$; получаем систему для параметров $\begin{cases} 2a - b = 1, \\ a + b = 2; \end{cases}$ сложив уравнения, находим $a = 1$; из второго уравнения получаем $b = 2 - a = 1$. Найденные значения параметров $a = 1$, $b = 1$ подставим в исходную систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - 2x, \\ x^2 + (1 - 2x)^2 = 2; \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 - 2x, \\ 5x^2 - 4x - 1 = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = 1 - 2x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = -\dfrac{1}{5}; \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 1, \quad y = -1 \text{ – задано в условии;} \\ x = -\dfrac{1}{5}, \quad y = \dfrac{7}{5} \text{ – второе решение системы.} \end{array}\right.$$

О т в е т. $(1; -1), \left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$.

З а м е ч а н и е. Одной из типичных ошибок при решении подобных задач является забывчивость при выписывании всех требуемых решений: решение, заданное в условии, также должно быть выписано в ответ.

Задача 5. (Физ-81.2)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$ имеет единственное решение.

И д е я. Выразить одну из переменных из второго уравнения системы и подставить в первое. Полученное в результате этого уравнение имеет столько же решений, сколько их у исходной системы.
У к а з а н и е. Выразить одну из переменных из второго уравнения системы и подставить в первое.

Указание. В силу линейности второго уравнения система имеет столько же решений, сколько и получившееся квадратное уравнение, то есть для единственности решения системы квадратное уравнение должно иметь нулевой дискриминант.

Решение. Выразим из второго уравнения $y = a - x$, подставим в первое:

$$x^2 + (a-x)^2 = 1 \iff 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0;$$

количество решений этого уравнения равно числу решений исходной системы, так как y выражен через x линейно. Для единственности решения квадратного уравнения необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был равен нулю:

$$D_1 = a^2 - 2(a^2-1) = 0 \iff a^2 = 2 \iff a = \pm\sqrt{2}.$$

Так как все преобразования равносильны, то дополнительных проверок не требуется.

Ответ. $\pm\sqrt{2}$.

Замечание. Дополнение про эквивалентность переходов при решении актуально практически во всех задачах с параметрами, так как часто они решаются лишь на уровне необходимости в условиях, что может привести к появлению лишних или ложных результатов.

Задача 6. **(Почв-70.2)**

При каких значениях параметра α система уравнений $\begin{cases} \alpha x - 4y = \alpha + 1, \\ 2x + (\alpha+6)y = \alpha + 3 \end{cases}$ не имеет решений?

Идея. Исключив из системы x, перейти к одному уравнению с одной неизвестной.
Указание. Выразить из второго уравнения $2x$ и подставить в первое уравнение, умноженное на 2.
Указание. При решении получившегося уравнения отобрать те α, при которых нет решений.

Решение. Выразим из второго уравнения $2x = \alpha + 3 - (\alpha+6)y$ и подставим в первое уравнение, умноженное на 2. После приведения подобных получим

$$\left(\alpha^2 + 6\alpha + 8\right) y = \alpha^2 + \alpha - 2 \iff (\alpha+4)(\alpha+2)\,y = (\alpha+2)(\alpha-1)\,.$$

Если последнее уравнение имеет решение y, то и исходная система имеет решение, так как x выражается линейно через y. Будем искать y из последнего уравнения и отберём те α, при которых не будет решений:

1) если $\alpha = -2$, то $y \in \mathbb{R}$, решения есть $\Longrightarrow$ не подходит;

2) если $\alpha = -4$, то $0 \cdot y = 10$, решений нет $\Longrightarrow$ подходит;

3) при всех остальных $\alpha \neq -2,\ \alpha \neq -4$ $y = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 4}$. Значит, решение есть $\Longrightarrow$ не подходит.

Ответ. -4.

Задача 7. (Экон-78.3)

Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b+1)y = 2b + 4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Идея. Решить систему для каждого значения параметра и выбрать случаи, в которых есть решение.
Указание. Выразить из первого уравнения $2y$ и подставить во второе уравнение, умноженное на 2.
Указание. При решении получившегося уравнения отобрать те b, при которых есть решения.

Решение. Выразим из первого уравнения $2y = b+2-bx$ и подставим во второе, умноженное на два. После приведения подобных получим

$$(b^2 - 3b)x = b^2 - b - 6 \quad \Longleftrightarrow \quad b(b-3)x = (b+2)(b-3).$$

Если последнее уравнение имеет решение x, то и исходная система имеет решение, так как y выражается линейно через x. Будем искать x из последнего уравнения и отберём те значения b, при которых есть решение:

1) если $b = 3$, то $x \in \mathbb{R}$, то есть бесконечное число решений $\Longrightarrow$ подходит;

2) если $b = 0$, то $0 \cdot x = -6$, решений нет $\Longrightarrow$ не подходит;

3) если $b \neq 0, b \neq 3$, то $x = \dfrac{b+2}{b}$, то есть решение есть $\Longrightarrow$ подходит.

Ответ. $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Задача 8. (Филол-00.5)

Найти все значения a, при каждом из которых уравнения
$(2a-1)x^2 + 6ax + 1 = 0$ и $ax^2 - x + 1 = 0$ имеют общий корень.

Идея. Найти a, при которых система из этих двух уравнений имеет решения.
Указание. Если вычесть одно уравнение из другого, то полученное уравнение разложится на множители.

Решение. Два уравнения имеют общий корень, если имеет решение система, составленная из этих уравнений:

$$\begin{cases} (2a-1)x^2 + 6ax + 1 = 0, \\ ax^2 - x + 1 = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (a-1)x^2 + (6a+1)x = 0, \\ ax^2 - x + 1 = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x\left((a-1)x + 6a + 1\right) = 0, \\ ax^2 - x + 1 = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ (a-1)x + 6a + 1 = 0; \end{array} \right. \\ ax^2 - x + 1 = 0; \end{array} \right.$$

1) $\begin{cases} x = 0, \\ ax^2 - x + 1 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ 1 = 0; \end{cases} \implies$ решений нет.

2) $\begin{cases} (a-1)x + 6a + 1 = 0, \\ ax^2 - x + 1 = 0; \end{cases}$

а) если $a = 1$, то из первого уравнения получаем $0 \cdot x + 7 = 0$, нет решений;

б) при $a \neq 1$ из первого уравнения $x = -\dfrac{6a+1}{a-1}$ подставляем во второе:

$$a\left(-\frac{6a+1}{a-1}\right)^2 + \frac{6a+1}{a-1} + 1 = 0 \iff 36a^3 + 19a^2 - 6a = 0 \iff$$

$$\iff a\left(a - \frac{2}{9}\right)\left(a + \frac{3}{4}\right) = 0,$$

откуда $a = 0$ или $a = \dfrac{2}{9}$ или $a = -\dfrac{3}{4}$ – искомые значения. Так как все преобразования равносильны, то проверка не требуется.

Ответ. $-\dfrac{3}{4}$; 0; $\dfrac{2}{9}$.

2.3. Радикалы. Иррациональные уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Задача 1. (Экон-89.1)

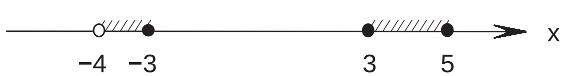
Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{-x^2 + x + 20}}$.

Идея. Составить систему неравенств, выражающую неотрицательность подкоренных выражений и отсутствие нулей в знаменателе, после чего решить её.

Указание. В область определения функции входят те значения переменной, при которых знаменатель не обращается в нуль, а подкоренные выражения неотрицательны.

Решение. Область определения функции задаётся системой

$$\begin{cases} -x^2 + x + 20 > 0, \\ x^2 - 9 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x - 20 < 0, \\ |x| \geq 3; \end{cases} \iff \begin{cases} -4 < x < 5, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -3; \\ x \geq 3; \end{array}\right. \end{cases}$$



значит, $-4 < x \leq -3$ или $3 \leq x < 5$.

Ответ. $(-4; -3] \cup [3; 5)$.

Задача 2. (Геол-94.5)

Решить неравенство $\sqrt{4z-3-z^2} \neq 0$.

Идея. Учитывая неотрицательность радикала, неравенство справедливо во всех точках области допустимых значений за исключением тех, где радикал обращается в нуль.
Указание. Так как $\sqrt{4z-3-z^2} \geq 0$ при всех z из области допустимых значений, то неравенство справедливо при $4z-3-z^2 > 0$.

Решение. Учитывая, что всегда на области допустимых значений радикал неотрицателен, можно говорить о справедливости неравенства при всех z из области определения без нулей левой части:

$$4z-3-z^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2-4z+3 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < z < 3.$$

Ответ. $(1;3)$.

Задача 3. (Экон-94.2)

Найти область значений функции $y = -\sqrt{-3x^2+12x-3}$.

Идея. Рассмотреть область значений квадратного трёхчлена.
Указание. Выделить полный квадрат в выражении под радикалом и учесть неотрицательность последнего.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, выделив полный квадрат:

$$y = -\sqrt{-3x^2+12x-3} = -\sqrt{9-3(x-2)^2};$$

учитывая область определения радикала и неотрицательность полного квадрата, получаем, что выражение $9-3(x-2)^2$ принимает все значения из отрезка $[0;9]$; тогда корень из него принимает все значения из отрезка $[0;3]$. Возвращаясь к исходной функции, получаем, что $E(y) = [-3;0]$.

Ответ. $[-3;0]$.

Задача 4. (ЕГЭ)

Решите уравнение $\sqrt{4x^2-27} = -x$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Решение.

$$\sqrt{4x^2-27} = -x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^2-27 = (-x)^2, \\ -x \geq 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 9, \\ x \leq 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -3.$$

Ответ. -3.

Задача 5. (Геол-96.1)

Решить уравнение $\sqrt{3x-5} = x - 11$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение.

$$\sqrt{3x-5} = x - 11 \iff \begin{cases} 3x - 5 = (x-11)^2, \\ x - 11 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 25x + 126 = 0, \\ x \ge 11. \end{cases}$$

Корень $x = 18$ подходит, а корень $x = 7$ – нет.

Ответ. 18.

Задача 6. (Георг-00.1)

Решите уравнение $\sqrt{3x+2} = 2x - 4$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение. $\sqrt{3x+2} = 2x - 4 \iff \begin{cases} 3x + 2 = 4x^2 + 16 - 16x, \\ 2x - 4 \ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} 4x^2 - 19x + 14 = 0, \\ x \ge 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{19 \pm \sqrt{137}}{8}, \\ x \ge 2; \end{cases} \iff x = \frac{19 + \sqrt{137}}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{19 + \sqrt{137}}{8}$.

Задача 7. (Соц-99.1)

Решить уравнение $\sqrt{y-1} = 6 - y$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение. $\sqrt{y-1}=6-y \iff \begin{cases} y-1=36+y^2-12y, \\ 6-y\geq 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} y^2-13y+37=0, \\ y\leq 6; \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{13\pm\sqrt{21}}{2}, \\ y\leq 6; \end{cases} \iff y=\frac{13-\sqrt{21}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{13-\sqrt{21}}{2}$.

Задача 8. (Физ-98(1).2)

Решить уравнение $\sqrt{3x-x^2-2}=2x-3$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

Решение. $\sqrt{3x-x^2-2}=2x-3 \iff$

$$\iff \begin{cases} 3x-x^2-2=(2x-3)^2, \\ 2x-3\geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2-15x+11=0, \\ x\geq \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Корень $x=\dfrac{15+\sqrt{5}}{10}$ подходит, а корень $x=\dfrac{15-\sqrt{5}}{10}$ – нет.

Ответ. $\dfrac{15+\sqrt{5}}{10}$.

Задача 9. (ВМК-91.1)

Решить уравнение $\sqrt{x+4}+x-2=0$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

Решение.

$$\sqrt{x+4}=2-x \iff \begin{cases} x+4=4-4x+x^2, \\ 2-x\geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-5x=0, \\ x\leq 2; \end{cases} \iff x=0.$$

Ответ. 0.

Задача 10. (Геол-95.1)

Решить уравнение $\sqrt{5x-6}+x=4$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

Решение. $\sqrt{5x-6}=4-x \iff \begin{cases} 5x-6=16-8x+x^2, \\ 4-x\ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x^2-13x+22=0, \\ x\le 4; \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)(x-11)=0, \\ x\le 4; \end{cases} \iff x=2.$$

Ответ. 2.

Задача 11. (Хим-98(1).1)

Решить уравнение $7-x=3\sqrt{5-x}$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

Решение. Перепишем уравнение в стандартном виде $3\sqrt{5-x}=7-x$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} 9(5-x)=(7-x)^2, \\ 7-x\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-5x+4=0, \\ x\le 7; \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)(x-4)=0, \\ x\le 7; \end{cases}$$

подходят оба решения $x=1$ и $x=4$.

Ответ. $1; 4$.

Задача 12. (Геогр-99.2)

Решить уравнение $\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. $\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2 \iff \begin{cases} 2x^2-8x+5=(x-2)^2, \\ x-2\ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x^2-4x+1=0, \\ x\ge 2; \end{cases} \iff \begin{cases} x=2\pm\sqrt{3}, \\ x\ge 2; \end{cases} \iff x=2+\sqrt{3}.$$

О т в е т. $2+\sqrt{3}$.

Задача 13. (Биол-77.1)

Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

И д е я. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

У к а з а н и е. $\sqrt{f(x)}=g(x) \iff \begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4 \iff \begin{cases} 6-4x-x^2=(x+4)^2, \\ x+4\ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x^2+6x+5=0, \\ x\ge -4; \end{cases} \iff \begin{cases} (x+1)(x+5)=0, \\ x\ge -4; \end{cases} \iff x=-1.$$

О т в е т. -1.

Задача 14. (Почв-87.2)

Решить неравенство $\sqrt{2x+3}\ge x$.

И д е я. Перейти к равносильной совокупности двух систем.

У к а з а н и е. Неравенство вида $\sqrt{f(x)}\ge g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x)\ge g^2(x), \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)<0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Переходим к равносильной совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} 2x+3\ge x^2, \\ x\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-2x-3\le 0, \\ x\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -1\le x\le 3, \\ x\ge 0; \end{cases} \iff 0\le x\le 3.$

2) $\begin{cases} 2x+3\ge 0, \\ x<0; \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{2}, \\ x<0; \end{cases} \iff -\dfrac{3}{2}\le x<0.$

Ответ содержит объединение найденных промежутков.

О т в е т. $\left[-\dfrac{3}{2};3\right]$.

Задача 15. (Хим-96.2)

Решить неравенство $\sqrt{x+5} > 7 - x$.

Идея. Перейти к равносильной совокупности двух систем.
Указание. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Решение. Переходим к равносильной совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} x+5 > (7-x)^2, \\ 7-x \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 15x + 44 < 0, \\ x \leq 7; \end{cases} \iff \begin{cases} 4 < x < 11, \\ x \leq 7; \end{cases} \iff 4 < x \leq 7.$

2) $\begin{cases} x \geq -5, \\ 7-x < 0; \end{cases} \iff x > 7.$

Объединяем: $x > 4$.

Ответ. $(4; +\infty)$.

Задача 16. (Экон-95.1)

Решить неравенство $2x - 5 < \sqrt{x^2 - x - 6}$.

Идея. Перейти к равносильной совокупности двух систем.
Указание. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Решение. Перепишем неравенство в стандартном виде

$$\sqrt{x^2 - x - 6} > 2x - 5\,.$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 > (2x-5)^2, \\ 2x - 5 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 19x + 31 < 0, \\ x \geq \dfrac{5}{2}; \end{cases}$

$D = 361 - 12 \cdot 31 < 0 \implies$ неравенство не имеет решений; значит, и система не имеет решений;

2) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ 2x - 5 < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} (x+2)(x-3) \geq 0, \\ x < \dfrac{5}{2}; \end{cases} \iff x \leq -2.$

Ответ. $(-\infty; -2]$.

Задача 17. (Псих-97.2)

Решить неравенство $\sqrt{t+3} > 5-2t$.

Идея. Перейти к равносильной совокупности двух систем.
Указание. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} t+3 > (5-2t)^2, \\ 5-2t \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 4t^2-21t+22 < 0, \\ t \leq \dfrac{5}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{21-\sqrt{89}}{8} < t < \dfrac{21+\sqrt{89}}{8}, \\ t \leq \dfrac{5}{2}; \end{cases}$

сравниваем числа:

$$\frac{21-\sqrt{89}}{8} < \frac{21-\sqrt{81}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} < \frac{5}{2}; \qquad \frac{21+\sqrt{89}}{8} > \frac{21+\sqrt{81}}{8} > \frac{30}{8} > \frac{5}{2};$$

значит, $\dfrac{21-\sqrt{89}}{8} < t \leq \dfrac{5}{2}$;

2) $\begin{cases} t+3 \geq 0, \\ 5-2t < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} t \geq -3, \\ t > \dfrac{5}{2}; \end{cases} \iff t > \dfrac{5}{2}.$

Окончательно получаем, что $t > \dfrac{21-\sqrt{89}}{8}$.

Ответ. $\left(\dfrac{21-\sqrt{89}}{8}; +\infty\right)$.

Задача 18. (Псих-88.3)

Решить неравенство $2x-11 < 2\sqrt{36-x^2}$.

Идея. Перейти к равносильной совокупности двух систем.
Указание. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Решение. Перепишем сначала неравенство в стандартном виде

$$2\sqrt{36-x^2} > 2x-11.$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} 4(36-x^2) > (2x-11)^2, \\ 2x-11 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 8x^2-44x-23<0, \\ x \ge \dfrac{11}{2}; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{11-\sqrt{167}}{4} < x < \dfrac{11+\sqrt{167}}{4}, \\ x \ge \dfrac{11}{2}; \end{cases}$$

сравниваем числа: $\dfrac{11+\sqrt{167}}{4} > \dfrac{11+11}{4} = \dfrac{11}{2}$; значит, $\dfrac{11}{2} \le x < \dfrac{11+\sqrt{167}}{4}$.

2) $\begin{cases} 36-x^2 \ge 0, \\ 2x-11<0; \end{cases} \iff \begin{cases} -6 \le x \le 6, \\ x < \dfrac{11}{2}; \end{cases} \iff -6 \le x < \dfrac{11}{2}$.

Объединяя оба случая, получаем ответ.

О т в е т. $\left[-6; \dfrac{11+\sqrt{167}}{4}\right)$.

Задача 19. (ВМК-75.1)

Решить неравенство $\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3>0$.

И д е я. Перейти к равносильной совокупности двух систем.
У к а з а н и е. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в стандартном виде

$$\sqrt{x^2+4x-5} > 2x-3\,.$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} x^2+4x-5 > (2x-3)^2, \\ 2x-3 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2-16x+14<0, \\ x \ge \dfrac{3}{2}; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{8-\sqrt{22}}{3} < x < \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}, \\ x \ge \dfrac{3}{2}; \end{cases} \iff \dfrac{3}{2} \le x < \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}.$$

2) $\begin{cases} x^2+4x-5 \ge 0, \\ 2x-3<0; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty;-5] \cup [1;+\infty), \\ x < \dfrac{3}{2}; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x \le -5; \\ 1 \le x < \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Объединяя найденные промежутки, получаем ответ.

О т в е т. $(-\infty;-5] \cup \left[1; \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$.

Задача 20. (Геол-04.3)

Решить неравенство $\sqrt{441-x^2} \le x+21$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение. $\sqrt{441-x^2} \le x+21 \iff \begin{cases} 441-x^2 \le (x+21)^2, \\ 441-x^2 \ge 0, \\ x+21 \ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x(x+21) \ge 0, \\ (x-21)(x+21) \le 0, \\ x \ge -21; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty;-21] \cup [0;+\infty), \\ x \in [-21;21], \\ x \ge -21; \end{cases} \iff x \in \{-21\} \cup [0;21].$$

Ответ. $\{-21\} \cup [0;21]$.

Задача 21. (Геол.ОГ-84.2)

Решить неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} \le 3x-3$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение. $\sqrt{x^2-3x+2} \le 3x-3 \iff \begin{cases} x^2-3x+2 \le (3x-3)^2, \\ x^2-3x+2 \ge 0, \\ 3x-3 \ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} 8x^2-15x+7 \ge 0, \\ x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty), \\ x \ge 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty;7/8] \cup [1;+\infty), \\ x \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty), \\ x \ge 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x \in \{1\} \cup [2;+\infty).$$

Ответ. $\{1\} \cup [2;+\infty)$.

Задача 22. (Экон-03.1)

Решить неравенство $\sqrt{8+2x-x^2} \le 2x+1$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение. $\sqrt{8+2x-x^2} \le 2x+1 \iff \begin{cases} 8+2x-x^2 \le (2x+1)^2, \\ 8+2x-x^2 \ge 0, \\ 2x+1 \ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} (x-1)\left(x+\dfrac{7}{5}\right) \ge 0, \\ (x-4)(x+2) \le 0, \\ x \ge -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\dfrac{7}{5}\right] \cup [1;+\infty), \\ x \in [-2;4], \\ x \ge -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff x \in [1;4].$$

Ответ. $[1;4]$.

Задача 23. (Физ-05.2)

Решить неравенство $\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6}-x$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение. $\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6}-x \iff \begin{cases} 5x-x^2+6 < (\sqrt{6}-x)^2, \\ 5x-x^2+6 \ge 0, \\ \sqrt{6}-x \ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x\left(x-\left(\sqrt{6}+\dfrac{5}{2}\right)\right) > 0, \\ (x+1)(x-6) \le 0, \\ x \le \sqrt{6}; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty;0) \cup \left(\sqrt{6}+\dfrac{5}{2};+\infty\right), \\ x \in [-1;6], \\ x \le \sqrt{6}; \end{cases} \iff x \in [-1;0].$$

Ответ. $[-1;0)$.

Задача 24. (Физ-85.2)

Решить уравнение $\sqrt{x^4-2x-5} = 1-x$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^4 - 2x - 5 = (1-x)^2, \\ 1 - x \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 - x^2 - 6 = 0, \\ x \leq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = -2; \\ x^2 = 3; \end{array} \right. \\ x \leq 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x = -\sqrt{3}.$$

О т в е т. $-\sqrt{3}$.

Задача 25. (Физ-99(2).2)

Решить уравнение $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2x+1} = x + 4$.

И д е я. Возвести обе части уравнения в квадрат, записав систему с условиями равносильности.

У к а з а н и е. В систему должны быть включены условия неотрицательности подкоренных выражений.

Р е ш е н и е. $\begin{cases} (x+2)(2x+1) = (x+4)^2, \\ x + 2 \geq 0, \\ x + \dfrac{1}{2} \geq 0, \\ x + 4 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 3x - 14 = 0, \\ x \geq -2, \\ x \geq -\dfrac{1}{2}, \\ x \geq -4; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{65}}{2}, \\ x \geq -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \quad x = \frac{3 + \sqrt{65}}{2}.$$

О т в е т. $\dfrac{3+\sqrt{65}}{2}$.

Задача 26. (Экон-00.1)

Решить уравнение $3\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4 - x = \left(\sqrt{-x^2 + x + 2}\right)^2$.

И д е я. Заметив, что от радикалов в данном выражении можно сразу избавиться, перейти к рациональному уравнению.

У к а з а н и е. Уравнение преобразуется к виду $3|x-2| - 4 - x = -x^2 + x + 2$ при условии $-x^2 + x + 2 \geq 0$.

У к а з а н и е. Полученное уравнение с модулем логичнее решать через определение последнего, рассматривая два промежутка.

Р е ш е н и е. Так как $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3|x-2| - x - 4 = -x^2 + x + 2, \\ -x^2 + x + 2 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3|x-2| = -x^2 + 2x + 6, \\ -1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Из второго условия системы следует, что подмодульное выражение в первом уравнении системы всегда неположительно, поэтому модуль снимается со знаком минус:

$$\begin{cases} -3(x-2) = -x^2 + 2x + 6, \\ -1 \le x \le 2. \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 5x = 0, \\ -1 \le x \le 2; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 5; \end{array}\right. \\ -1 \le x \le 2; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x = 0.$$

Ответ. 0.

Задача 27. (ИСАА-91.1)

Решить уравнение $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$.

Идея. Перенеся второй радикал в правую часть, возвести обе части уравнения в квадрат.
Указание. После перенесения второго радикала вправо обе части уравнения будут неотрицательными и можно возводить уравнение в квадрат.

Решение. Перенесём второй радикал в правую часть:

$$\sqrt{3x-5} = \sqrt{4-x} + 1.$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то можно возводить уравнение в квадрат. При этом условие $3x - 5 \ge 0$ писать нет необходимости, так как в получающемся уравнении $(3x-5)$ равно квадрату положительной величины:

$$3x-5 = (\sqrt{4-x}+1)^2 \iff 3x-5 = 4-x+2\sqrt{4-x}+1 \iff \sqrt{4-x} = 2x-5.$$

Полученное уравнение с одним радикалом решаем стандартным способом:

$$\begin{cases} (2x-5)^2 = 4-x, \\ 2x-5 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 - 19x + 21 = 0, \\ x \ge \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Корень $x = 3$ подходит, а корень $x = \dfrac{7}{4}$ – нет.

Ответ. 3.

Задача 28. (Почв-98.1)

Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$.

Идея. Перенеся второй радикал в правую часть, возвести обе части уравнения в квадрат.
Указание. После перенесения второго радикала вправо обе части уравнения будут неотрицательными и можно возводить уравнение в квадрат.

Р е ш е н и е. Перенесём второй радикал в правую часть:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{4x-3} + 1.$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то можно возводить уравнение в квадрат. При этом условие $x+1 \geq 0$ писать нет необходимости, так как в получающемся уравнении $(x+1)$ равно квадрату положительной величины:

$$x+1 = (\sqrt{4x-3}+1)^2 \iff x+1 = 4x-3+1+2\sqrt{4x-3} \iff 2\sqrt{4x-3} = 3-3x\,.$$

Полученное уравнение решаем стандартным способом:

$$\begin{cases} 4(4x-3) = 9+9x^2-18x, \\ 3-3x \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 9x^2-34x+21=0, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Корень $x = \dfrac{7}{9}$ – подходит, а корень $x = 3$ – нет.

О т в е т. $\dfrac{7}{9}$.

Задача 29. (Псих-93.2)

Решить неравенство $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

И д е я. Перенеся второй радикал в правую часть, возвести обе части неравенства в квадрат.

У к а з а н и е. После перенесения второго радикала вправо обе части неравенства будут неотрицательными, и можно возводить неравенство в квадрат.

Р е ш е н и е. Перенесём второй радикал в правую часть:

$$\sqrt{1-x} > \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

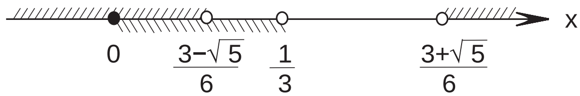
Так как обе части неравенства неотрицательны, то можно возводить его в квадрат. При этом условие $1-x \geq 0$ писать нет необходимости, так как в получающемся неравенстве $(1-x)$ больше квадрата положительной величины:

$$1-x > \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \iff 1-x > x + 2\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{1}{3} \iff \sqrt{\frac{x}{3}} < \frac{1}{3} - x.$$

Получившееся неравенство решаем стандартным способом:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} < \dfrac{1}{9} + x^2 - \dfrac{2x}{3}, \\ \dfrac{1}{3} - x > 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3x + \dfrac{1}{3} > 0, \\ 0 \leq x < \dfrac{1}{3}; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}; \\ x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{6}; \end{array} \right. \\ 0 \leq x < \dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\iff 0 \leq x < \frac{3-\sqrt{5}}{6}.$$



О т в е т. $\left[0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.

Задача 30. (Геол.ОГ-82.2)

Решить уравнение $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

И д е я. Перенеся второй радикал в правую часть, возвести обе части уравнения в квадрат.

У к а з а н и е. Для уверенности в положительности обеих частей уравнения перенести радикал $\sqrt{2x-1}$ в правую часть, после чего уравнение можно возводить в квадрат, не забывая про область определения.

Р е ш е н и е. Перенесём радикал $\sqrt{2x-1}$ в правую часть:

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}\,.$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то можно возводить в квадрат. Условие $x+3\geq 0$ можно при этом не писать, так как в получающемся уравнении $(x+3)$ равно квадрату неотрицательной величины, а вот одно из условий $2x-1\geq 0$ или $3x-2\geq 0$ написать надо. Достаточно учесть одно из этих условий, так как наличие радикала в уравнении при выполнении одного условия гарантирует выполнение и второго условия.

$$\begin{cases} x+3=2x-1+3x-2+2\sqrt{(2x-1)(3x-2)}, \\ 3x-2\geq 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} \sqrt{6x^2-7x+2}=3-2x, \\ x\geq \dfrac{2}{3}; \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2-7x+2=(3-2x)^2, \\ 3-2x\geq 0, \\ x\geq \dfrac{2}{3}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} 2x^2+5x-7=0, \\ \dfrac{2}{3}\leq x\leq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=-\dfrac{7}{2}; \end{array}\right. \\ \dfrac{2}{3}\leq x\leq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \iff \quad x=1.$$

О т в е т. 1.

2.4. Смешанные задачи

Задача 1. (ЕГЭ)

Пусть $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-1} - y = 0, \\ y - |x-5| = 2. \end{cases}$

Найти разность $x_0 - y_0$.

И д е я. Исключив из системы переменную y, получить уравнение для переменной x, которое решать как уравнение с радикалом.

У к а з а н и е. Выразить переменную y из первого уравнения системы и подставить во второе.

У к а з а н и е. В полученном уравнении $\sqrt{x-1} = |x-5| + 2$ обе части неотрицательны, поэтому можно возвести уравнение в квадрат.

У к а з а н и е. В получившемся уравнении модуль раскрыть по определению.

Р е ш е н и е. Выразим переменную $y = \sqrt{x-1}$ из первого уравнения системы и подставим во второе. В полученном уравнении

$$\sqrt{x-1} = |x-5| + 2$$

обе части неотрицательны, поэтому можно возвести уравнение в квадрат. При этом область определения гарантируется тем, что $(x-1)$ равно квадрату величины.

$$x - 1 = x^2 - 10x + 25 + 4 + 4|x-5| \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 11x + 30 + 4|x-5| = 0\,.$$

Раскроем модуль по определению, рассматривая два случая.

1) $\begin{cases} x < 5, \\ x^2 - 15x + 50 = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x < 5, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5; \\ x = 10; \end{array} \right. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \emptyset.$

2) $\begin{cases} x \ge 5, \\ x^2 - 7x + 10 = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge 5, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = 5; \end{array} \right. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5.$

Значит, $x_0 = 5$. Тогда из первого уравнения исходной системы находим $y_0 = 2$. Таким образом, $x_0 - y_0 = 5 - 2 = 3$.

О т в е т. 3.

Задача 2. (ЕГЭ)

Решите уравнение $\sqrt{4 - 7x|x+2|} = 3x + 2$.

И д е я. Использовать соответствующий равносильный переход.

У к а з а н и е. $\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

У к а з а н и е. Учесть, что при неотрицательной правой части уравнения подмодульная функция положительна.

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 4-7x|x+2|=(3x+2)^2, \\ 3x+2 \geq 0. \end{cases}$

Заметим, что из второго неравенства системы следует положительность подмодульной функции в первом уравнении системы, поэтому модуль можно снять без рассмотрения случаев:

$$\begin{cases} 4-7x(x+2)=9x^2+12x+4, \\ x \geq -\dfrac{2}{3}; \end{cases} \iff \begin{cases} 16x^2+26x=0, \\ x \geq -\dfrac{2}{3}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{13}{8}; \\ x=0; \end{array} \right. \\ x \geq -\dfrac{2}{3}; \end{cases} \iff x=0.$$

О т в е т. 0.

Задача 3. (Геогр-95.3)

Решить уравнение $\sqrt{2-x^2}=|x|-1$.

И д е я. Перейти к равносильной системе; решить квадратное уравнение относительно модуля с последующим отбором решений.

У к а з а н и е. Исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2-x^2=x^2-2|x|+1, \\ |x| \geq 1; \end{cases}$ в которой уравнение является квадратным относительно $|x|$.

Р е ш е н и е. Избавляемся от радикала стандартным способом:

$$\begin{cases} 2-x^2=x^2-2|x|+1, \\ |x| \geq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} 2|x|^2-2|x|-1=0, \\ |x| \geq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} |x|=\dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \\ |x| \geq 1; \end{cases}$$

значит, $|x|=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \iff x=\pm\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

О т в е т. $\pm\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Задача 4. (Псих-99.1)

Решить неравенство $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1$.

И д е я. Домножив неравенство на знаменатель, решить его как стандартное неравенство с радикалом.

У к а з а н и е. Учесть, что знаменатель не должен обращаться в нуль.

Р е ш е н и е. Поскольку в знаменателе стоит радикал, то знаменатель всегда положителен на области определения. Домножим неравенство на знаменатель при условии, что он не равен нулю, и получим стандартное неравенство с радикалом:

$$\begin{cases}\sqrt{7x-4} > 5x-3,\\ 7x-4 \neq 0;\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}7x-4 > (5x-3)^2,\\ 5x-3 \geq 0,\\ x \neq \dfrac{4}{7};\end{cases}\\ \begin{cases}7x-4 > 0,\\ 5x-3 < 0;\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}25x^2-37x+13 < 0,\\ x \geq \dfrac{3}{5};\end{cases}\\ \dfrac{4}{7} < x < \dfrac{3}{5};\end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{37-\sqrt{69}}{50} < x < \dfrac{37+\sqrt{69}}{50},\\ x \geq \dfrac{3}{5};\end{cases}\\ \dfrac{4}{7} < x < \dfrac{3}{5};\end{array}\right. \iff \frac{4}{7} < x < \frac{37+\sqrt{69}}{50}.$$

О т в е т. $\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$.

Задача 5. (Физ-99.5)

Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{4}{x-2}+1} = \dfrac{1}{x-2}$.

И д е я. Сделав замену, решить уравнение как стандартное с радикалом.

У к а з а н и е. Замена $z = \dfrac{1}{x-2}$.

Р е ш е н и е. Обозначим $z = \dfrac{1}{x-2}$. Тогда уравнение принимает вид $\sqrt{4z+1} = z$. Далее решаем стандартным способом:

$$\begin{cases}z^2-4z-1=0,\\ z \geq 0;\end{cases} \iff \begin{cases}z = 2 \pm \sqrt{5},\\ z \geq 0;\end{cases} \iff z = \sqrt{5}+2.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{x-2} = \sqrt{5}+2 \iff x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}+2} = 2+\sqrt{5}-2 = \sqrt{5}$.

О т в е т. $\sqrt{5}$.

Задача 6. (Физ-00.2)

Решить уравнение $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}$.

Идея. Домножить уравнение на знаменатель.
Указание. При умножении уравнения на знаменатель дроби учесть условия неотрицательности подкоренных выражений и неравенство нулю знаменателя.

Решение. Умножим уравнение на знаменатель дроби, учитывая при этом область определения:

$$\begin{cases} \sqrt{(3x+1)(x+2)} = x+3, \\ x \ge -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2+7x+2 = x^2+6x+9, \\ x \ge -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x^2+x-7=0, \\ x \ge -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{-1\pm\sqrt{57}}{4}, \\ x \ge -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \iff x = \dfrac{-1+\sqrt{57}}{4}.$$

Ответ. $\dfrac{-1+\sqrt{57}}{4}$.

Задача 7. (М/м-94(1).2)

Решить уравнение $3\sqrt{x+4} = 5-2|x+2|$.

Идея. Раскрыть модуль по определению и использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение. Раскрываем модуль по определению.

1) $\begin{cases} x \ge -2, \\ 3\sqrt{x+4} = 1-2x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge -2, \\ 9x+36 = 1-4x+4x^2, \\ 1-2x \ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} -2 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 4x^2-13x-35=0; \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ (4x+7)(x-5)=0; \end{cases} \iff x = -\dfrac{7}{4}.$$

2) $\begin{cases} x \le -2, \\ 3\sqrt{x+4} = 2x+9; \end{cases} \iff \begin{cases} x \le -2, \\ 9x+36 = 4x^2+36x+81, \\ 2x+9 \ge 0; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} -\dfrac{9}{2} \le x \le -2, \\ 4x^2+27x+45=0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{15}{4}; \\ x = -3. \end{array} \right.$$

Ответ. $-\dfrac{15}{4}$; $-\dfrac{7}{4}$; -3.

Задача 8. (Физ-00(2).2)

Решить неравенство $\sqrt{x^2+|x-4|-18} > x-4$.

Идея. Раскрыть модуль по определению и использовать соответствующий эквивалентный переход.
Указание. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Решение. Раскрываем модуль по определению. Так как подмодульная функция совпадает с функцией, стоящей в правой части, то в каждом случае нам надо рассматривать только одну из систем совокупности.

1) $\begin{cases} x \ge 4, \\ \sqrt{x^2+x-22} > x-4; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 4, \\ x^2+x-22 > x^2+16-8x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 4, \\ x > \dfrac{38}{9}; \end{cases}$

значит, $x > \dfrac{38}{9}$;

2) $\begin{cases} x < 4, \\ \sqrt{x^2-x-14} > x-4; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 4, \\ x^2-x-14 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{1-\sqrt{57}}{2}; \\ x \ge \dfrac{1+\sqrt{57}}{2}; \end{array} \right. \end{cases}$

значит, $x \le \dfrac{1-\sqrt{57}}{2}$.

Ответ. $\left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{57}}{2}\right] \cup \left(\dfrac{38}{9}; +\infty\right)$.

Задача 9. (М/м-98.1)

Решить неравенство $3\sqrt{|x+1|-3} \ge \sqrt{x^2-2x-3}$.

Идея. Заменить неравенство равносильной системой без радикалов.
Указание. Возвести неравенство в квадрат. При этом необходимо выписать условие неотрицательности подкоренной функции для правого радикала.
Указание. Раскрыть модуль на каждом из отрезков, получившихся из условия неотрицательности подкоренной функции для правого радикала.

Решение. Возведём неравенство в квадрат. При этом достаточно выписать условие неотрицательности выражения, стоящего под правым радикалом, так как получившееся неравенство гарантирует неотрицательность выражения, стоящего под левым радикалом.

$$\begin{cases} 9(|x+1|-3) \ge x^2-2x-3, \\ x^2-2x-3 \ge 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства системы следует, что $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

1) На первом промежутке $(-\infty;-1]$ первое неравенство (модуль раскрывается со знаком минус) имеет вид $x^2+7x+33\le 0$. Так как дискриминант меньше нуля, то в этом случае решений нет.
2) На промежутке $[3;+\infty)$ модуль раскрывается со знаком плюс, поэтому получаем

$$\begin{cases} x\ge 3,\\ x^2-11x+15\le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge 3,\\ \dfrac{11-\sqrt{61}}{2}\le x\le\dfrac{11+\sqrt{61}}{2}; \end{cases} \iff x\in\left[3;\frac{11+\sqrt{61}}{2}\right].$$

Ответ. $\left[3;\dfrac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$.

Задача 10. (ВМК-94.2)

Решить неравенство $\sqrt{x-3}\le 3-|x-6|$.

Идея. Раскрыв модуль по определению, решить два получившихся иррациональных неравенства по стандартной схеме.
Указание. Решение неравенства разбивается на два случая

$$\begin{cases} x\ge 6,\\ \sqrt{x-3}\le 9-x \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} x<6,\\ \sqrt{x-3}\le x-3; \end{cases}$$

в каждом из которых применяется схема равносильных преобразований.
Указание. Неравенство $\sqrt{f(x)}\le g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)\le g^2(x),\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

Решение. Раскрываем модуль по определению.

1) $$\begin{cases} x\ge 6,\\ \sqrt{x-3}\le 9-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge 6,\\ x-3\ge 0,\\ 9-x\ge 0,\\ x-3\le 81+x^2-18x; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 6\le x\le 9,\\ x^2-19x+84\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 6\le x\le 9,\\ \left[\begin{array}{l} x\le 7;\\ x\ge 12; \end{array}\right. \end{cases} \iff 6\le x\le 7.$$

2) $$\begin{cases} x<6,\\ \sqrt{x-3}\le x-3; \end{cases} \iff \begin{cases} x<6,\\ x\ge 3,\\ x-3\le (x-3)^2; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3\le x<6,\\ (x-3)(x-4)\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3\le x<6,\\ \left[\begin{array}{l} x\le 3;\\ x\ge 4; \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=3;\\ 4\le x<6. \end{array}\right.$$

Ответ. $\{3\}\cup[4;7]$.

Задача 11. (Физ-97(2).3)

Решить неравенство $\sqrt{x^2+x+4} \le 2x + |3x-2|$.

И д е я. Раскрыв модуль по определению, решить два получившихся иррациональных неравенства по стандартной схеме.
У к а з а н и е. Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 3x-2 \ge 0, \\ \sqrt{x^2+x+4} \le 5x-2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x-2 < 0, \\ \sqrt{x^2+x+4} \le 2-x; \end{cases}$$

в каждом случае иррациональное неравенство решается по стандартной схеме.

У к а з а н и е. Неравенство $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Раскрываем модуль по определению.

1) $\begin{cases} 3x-2 \ge 0, \\ \sqrt{x^2+x+4} \le 5x-2; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x^2+x+4 \le 25x^2-20x+4, \\ x^2+x+4 \ge 0, \\ 5x-2 \ge 0; \end{cases}$

неравенство $x^2+x+4 \ge 0$ выполнено $\forall x \in \mathbb{R}$, так как $D = 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$; значит,

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ 24x^2 - 21x \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3}, \\ x(8x-7) \ge 0; \end{cases} \iff x \ge \frac{7}{8}.$$

2) $\begin{cases} 3x-2 < 0, \\ \sqrt{x^2+x+4} \le 2-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x < \dfrac{2}{3}, \\ x^2+x+4 \le 4-4x+x^2, \\ 2-x \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x < \dfrac{2}{3}, \\ x \le 0, \\ x \le 2; \end{cases} \iff$

$\iff x \le 0$.

О т в е т. $(-\infty; 0] \cup \left[\dfrac{7}{8}; +\infty\right)$.

Задача 12. (Экон.В-98.1)

Решить неравенство $\sqrt{x^2+3x+2} < 1 + \sqrt{x^2-x+1}$.

И д е я. Учитывая неотрицательность обеих частей неравенства, возвести обе его части в квадрат, не забывая при этом про область определения.
У к а з а н и е. В силу неотрицательности обеих частей неравенства оно равносильно системе $\begin{cases} x^2+3x+2 < 1+x^2-x+1+2\sqrt{x^2-x+1}, \\ x^2+3x+2 \ge 0. \end{cases}$

У к а з а н и е. Неравенство с радикалом сводится к простейшему неравенству $\sqrt{x^2-x+1}>2x$, которое решается стандартно: $\sqrt{f(x)}>g(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x)>g^2(x), \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)<0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Учитывая неотрицательность обеих частей неравенства, возведём обе его части в квадрат, не забывая при этом про область определения:

$$\begin{cases} x^2+3x+2<1+x^2-x+1+2\sqrt{x^2-x+1}, \\ x^2+3x+2\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x^2-x+1}>2x, \\ x^2+3x+2\ge 0. \end{cases}$$

Неравенство с радикалом решаем по стандартной схеме через совокупность двух систем. Итак, рассматриваем два случая.

$$1)\ \begin{cases} x\ge 0, \\ x^2-x+1>4x^2, \\ x^2+3x+2\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge 0, \\ 3x^2+x-1<0, \\ \left[\begin{array}{l} x\le -2; \\ x\ge -1; \end{array}\right. \end{cases} \iff 0\le x<\frac{\sqrt{13}-1}{6}.$$

$$2)\ \begin{cases} x<0, \\ x^2-x+1\ge 0, \\ x^2+3x+2\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x\le -2; \\ x\ge -1; \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x\le -2; \\ -1\le x<0. \end{array}\right.$$

О т в е т. $(-\infty;-2]\cup\left[-1;\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$.

Задача 13. (Экон.К-74.1)

Решить уравнение $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

И д е я. Возвести обе части в квадрат, не забывая при этом проанализировать область определений.
У к а з а н и е. После возведения в квадрат получим $\sqrt{x^4-1}=-2x$. Условия неотрицательности подкоренных выражений выполняются автоматически.
У к а з а н и е. Уравнение $\sqrt{x^4-1}=-2x$ решить стандартным способом.

Р е ш е н и е. Возведём обе части уравнения в квадрат. При этом условия неотрицательности подкоренных выражений автоматически выполняются, так как $x^2+1>0$ для любых x, выражение $(2x^2-4x)$ равно квадрату положительной величины, а неотрицательность выражения (x^2-1) гарантирует наличие радикала в получающемся уравнении.

$$2x^2-4x=x^2+1+x^2-1+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-1)} \iff \sqrt{x^4-1}=-2x \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^4-1=4x^2, \\ x\le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=2\pm\sqrt{5}, \\ x\le 0; \end{cases} \iff x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}.$$

З а м е ч а н и е. Делать эквивалентные (равносильные) переходы очень выгодно. При этом часто удается избежать решения большого количества лишних неравенств. Но такой подход требует большой концентрации внимания при решении: при каждом переходе надо внимательно следить за областью допустимых значений (областью определения).

О т в е т. $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Задача 14. (Биол-97.3)

Решить неравенство $\sqrt{|1-8x|-2} \le x+1$.

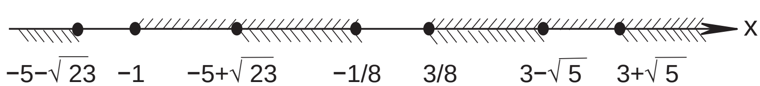
И д е я. Раскрыть модуль по определению и использовать соответствующий эквивалентный переход.

У к а з а н и е. $\sqrt{f(x)} \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Раскрываем модуль по определению.

$$1)\ \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{8}, \\ \sqrt{8x-3} \le x+1; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{8}, \\ 8x-3 \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \\ 8x-3 \le (x+1)^2; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{8}, \\ x^2-6x+4 \ge 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{8}, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 3-\sqrt{5}; \\ x \ge 3+\sqrt{5}; \end{array} \right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{8} \le x \le 3-\sqrt{5}; \\ x \ge 3+\sqrt{5}. \end{array} \right.$$



$$2)\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{8}, \\ \sqrt{-8x-1} \le x+1; \end{cases} \iff \begin{cases} x < \dfrac{1}{8}, \\ -8x-1 \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \\ -8x-1 \le x^2+2x+1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -1 \le x \le -\dfrac{1}{8}, \\ x^2+10x+2 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \le x \le -\dfrac{1}{8}, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -5-\sqrt{23}; \\ x \ge -5+\sqrt{23}; \end{array} \right. \end{cases} \iff -5+\sqrt{23} \le x \le -\frac{1}{8}.$$

О т в е т. $\left[-5+\sqrt{23}; -\dfrac{1}{8}\right] \cup \left[\dfrac{3}{8}; 3-\sqrt{5}\right] \cup [3+\sqrt{5}; +\infty)$.

Задача 15. (Экон-93.3)

Решить неравенство $3\sqrt{x+2} \le 6 - |x-2|$.

Идея. Раскрыть модуль по определению и использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $\sqrt{f(x)} \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Решение. Раскрываем модуль по определению. При снятии радикалов учитываем информацию из других условий системы.

1) $\begin{cases} x \ge 2, \\ 3\sqrt{x+2} \le 8 - x; \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \le x \le 8, \\ 9x + 18 \le 64 - 16x + x^2; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} 2 \le x \le 8, \\ x^2 - 25x + 46 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \le x \le 8, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 2; \\ x \ge 23; \end{array}\right. \end{cases} \iff x = 2.$$

2) $\begin{cases} x < 2, \\ 3\sqrt{x+2} \le x + 4; \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \le x < 2, \\ 9x + 18 \le x^2 + 16 + 8x; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} -2 \le x < 2, \\ x^2 - x - 2 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \le x < 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1; \\ x \ge 2; \end{array}\right. \end{cases} \iff -2 \le x \le -1.$$

Ответ. $[-2; -1] \cup \{2\}$.

Задача 16. (ИСАА-93.1)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 8}}{3 - x} \ge 1$.

Идея. Домножить неравенство на знаменатель, наложив на него условие положительности.

Указание. Полученное в результате неравенство решить стандартным образом.

Решение. Из неотрицательности числителя и знака неравенства следует положительность знаменателя, поэтому на него можно домножить обе части неравенства:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 5x + 8} \ge 3 - x, \\ 3 - x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 5x + 8 \ge 9 + x^2 - 6x, \\ x < 3; \end{cases} \iff 1 \le x < 3.$$

Ответ. $[1; 3)$.

Задача 17. (М/м-95(2).1)

Решить неравенство $\dfrac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x} \geq 0$.

Идея. Разложить числитель дробь на множители как разность квадратов.
Указание. Сократив общий множитель, учесть то, что он не должен обращаться в нуль.

Решение. Разложим числитель на множители по формуле разности квадратов:

$$\frac{(\sqrt{4x+15}-2x)(\sqrt{4x+15}+2x)}{\sqrt{4x+15}+2x} \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \sqrt{4x+15} \geq 2x, \\ \sqrt{4x+15}+2x \neq 0. \end{cases}$$

Найдём предварительно нули знаменателя:

$$\sqrt{4x+15} = -2x \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x \leq 0, \\ 4x^2-4x-15=0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2}; \\ x = \dfrac{5}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad x = -\frac{3}{2}.$$

Решаем неравенство с радикалом по стандартной схеме при $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

1) $\begin{cases} x \geq 0, \\ 4x+15 \geq 4x^2; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2-4x-15 \leq 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x \geq 0, \\ -\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{5}{2}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \dfrac{5}{2}.$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ 4x+15 \geq 0, \\ x \neq -\dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -\dfrac{15}{4}, \\ x \neq -\dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} -\dfrac{15}{4} \leq x < -\dfrac{3}{2}; \\ -\dfrac{3}{2} < x < 0. \end{array}\right.$

Ответ. $\left[-\dfrac{15}{4}; -\dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$.

Задача 18. (Биол-93.3)

Решить неравенство $5\sqrt{1-\dfrac{1}{z}} > \dfrac{7z-1}{z}$.

Идея. Разделив в дроби правой части неравенства числитель на знаменатель почленно, решить стандартным способом иррациональное неравенство.

Указание. Сделать замену $t = \dfrac{1}{z}$ и решить получившееся неравенство стандартным способом.

Р е ш е н и е. Неравенство преобразуется к виду $5\sqrt{1-t} > 7-t$, где $t = \dfrac{1}{z}$. Это неравенство решаем стандартным способом.

1) $\begin{cases} 25(1-t) > (7-t)^2, \\ 7-t \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} t^2+11t+24 < 0, \\ t \leq 7; \end{cases} \iff \begin{cases} -8 < t < -3, \\ t \leq 7; \end{cases}$

значит, $-8 < \dfrac{1}{z} < -3 \iff -\dfrac{1}{3} < z < -\dfrac{1}{8}$.

2) $\begin{cases} 1-t \geq 0, \\ 7-t < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} t \leq 1, \\ t > 7; \end{cases}$ нет решений.

О т в е т. $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{8}\right)$.

И д е я. *Второй способ.* Разделив в дроби правой части неравенства числитель на знаменатель почленно, заменить радикал в левой части на новую переменную и решить квадратное неравенство.

У к а з а н и е. Неравенство $5\sqrt{1-\dfrac{1}{z}} > \dfrac{7z-1}{z}$ при $t = \sqrt{1-\dfrac{1}{z}}$ принимает вид $5t > t^2+6$.

У к а з а н и е. После решения квадратного неравенства и возврата к переменной z получается неравенство $-8 < \dfrac{1}{z} < -3$.

Р е ш е н и е. Неравенство преобразуется к виду $5\sqrt{1-\dfrac{1}{z}} > 7 - \dfrac{1}{z}$; обозначив $t = \sqrt{1-\dfrac{1}{z}}$, получаем $5t > t^2+6$, откуда $2 < t < 3$, то есть

$$4 < 1 - \frac{1}{z} < 9 \iff -8 < \frac{1}{z} < -3 \iff -\frac{1}{3} < z < -\frac{1}{8}.$$

О т в е т. $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{8}\right)$.

Задача 19. (Псих-83.2)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$.

И д е я. Рассмотреть случаи: знаменатель больше нуля и знаменатель меньше нуля. Домножить неравенство на знаменатель, учитывая при этом знак знаменателя.

У к а з а н и е. Рассмотреть два случая знака знаменателя и домножить неравенство на знаменатель. Получившиеся неравенства с радикалом решать стандартным способом.

Р е ш е н и е. Можно привести неравенство к виду: дробь меньше нуля. Затем придётся рассмотреть случаи – числитель больше нуля, знаменатель – меньше нуля, и наоборот. Поэтому удобнее сразу рассмотреть случаи: знаменатель больше нуля и знаменатель меньше нуля, и домножить неравенство на знаменатель, учитывая при этом знак выражения, на которое происходит домножение.

$$1)\ \begin{cases}\sqrt{51-2x-x^2} > 1-x,\\ 1-x<0;\end{cases} \iff \begin{cases}51-2x-x^2 \ge 0,\\ x>1;\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}-1-2\sqrt{13} \le x \le -1+2\sqrt{13},\\ x>1;\end{cases} \iff 1 < x \le 2\sqrt{13}-1.$$

$$2)\ \begin{cases}\sqrt{51-2x-x^2} < 1-x,\\ 1-x>0;\end{cases} \iff \begin{cases}51-2x-x^2 < (1-x)^2,\\ 51-2x-x^2 \ge 0,\\ x<1;\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x^2>25,\\ x^2+2x-51 \le 0,\\ x<1;\end{cases} \iff \begin{cases}x<-5,\\ -1-2\sqrt{13} \le x \le -1+2\sqrt{13};\end{cases} \iff$$

$$\iff -1-2\sqrt{13} \le x < -5\,.$$

О т в е т. $[-1-2\sqrt{13}; -5) \cup (1; 2\sqrt{13}-1]$.

Задача 20. (Экон.К-88.3)

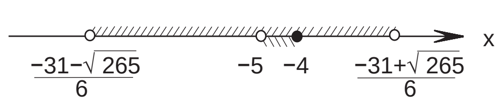
Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+3x+13}{x+5} > 1\,.$

И д е я. Перенести всё в одну сторону и привести к общему знаменателю. Рассмотреть два случая знаков числителя и знаменателя.

У к а з а н и е. Привести неравенство к виду: дробь больше нуля. Затем рассмотреть случаи – числитель и знаменатель больше нуля, числитель и знаменатель меньше нуля.

Р е ш е н и е. Перенесём единицу в левую часть неравенства и приведём к общему знаменателю. Получим неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x+6}+2x+8}{x+5} > 0$. Дробь больше нуля, если числитель и знаменатель одного знака. Получаем два случая.

$$1)\ \begin{cases}\sqrt{x^2+x+6} > -2x-8,\\ x+5>0;\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x+6 > 4x^2+64+32x,\\ -5<x\le -4;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x+6 \ge 0,\\ x>-4;\end{cases}\end{array}\right. \iff$$



$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2+31x+58<0, \\ -5<x\le -4; \end{cases} \\ x>-4; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{-31-\sqrt{265}}{6}<x<\dfrac{-31+\sqrt{265}}{6}, \\ -5<x\le -4; \end{cases} \\ x>-4; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x>-5.$$

2) $$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+6}<-2x-8, \\ x+5<0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+x+6<4x^2+32x+64, \\ x<-4, \\ x^2+x+6\ge 0, \\ x<-5; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2+31x+58>0, \\ x<-5; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{-31-\sqrt{265}}{6}; \\ x>\dfrac{-31+\sqrt{265}}{6}; \end{array}\right. \\ x<-5; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad x<\frac{-31-\sqrt{265}}{6}.$$

О т в е т. $\left(-\infty;\dfrac{-31-\sqrt{265}}{6}\right)\cup(-5;+\infty)$.

Задача 21. (Экон-98.3)

Решить неравенство $\sqrt{x+4(2-\sqrt{4+x})}<\dfrac{x+12}{8-5\sqrt{4+x}}$.

И д е я. Выделить под внешним радикалом в левой части неравенства полный квадрат.

У к а з а н и е. Сделать замену $z=\sqrt{4+x}\ge 0$.

У к а з а н и е. Под радикалом в левой части выделяется полный квадрат $(z-2)^2$, поэтому исходное неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$$|z-2|<\frac{z^2+8}{8-5z}.$$

У к а з а н и е. В силу неотрицательности левой части и числителя правой части следует, что $8-5z>0$, то есть $z<\dfrac{8}{5}<2$, поэтому можем снять модуль и умножить неравенство на знаменатель.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $z=\sqrt{4+x}\ge 0$. Тогда под радикалом в левой части выделяется полный квадрат $(z-2)^2$, поэтому исходное неравенство эквивалентно следующему неравенству: $|z-2|<\dfrac{z^2+8}{8-5z}$. В силу неотрицательности левой части и числителя правой части следует, что $8-5z>0$, то есть $z<\dfrac{8}{5}<2$, поэтому можем снять модуль и умножить неравенство на знаменатель:

$$\begin{cases} (2-z)(8-5z)<z^2+8, \\ z<\dfrac{8}{5}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2z^2-9z+4<0, \\ z<\dfrac{8}{5}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}<z<4, \\ z<\dfrac{8}{5}; \end{cases}$$

значит, $\dfrac{1}{2} < z < \dfrac{8}{5}$, то есть

$$\frac{1}{2} < \sqrt{x+4} < \frac{8}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4} - 4 < x < \frac{64}{25} - 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{15}{4} < x < -\frac{36}{25}.$$

О т в е т. $\left(-\dfrac{15}{4}; -\dfrac{36}{25}\right)$.

Задача 22. (Геол-99(1).2)

Решить систему уравнений $\begin{cases} 5y + 4x = \sqrt{16x^2 - 25y^2}, \\ x^2 + 6x - 7 = 0. \end{cases}$

И д е я. Сначала упростить первое уравнение, а затем решить отдельно второе уравнение и результат подставить в первое.
У к а з а н и е. Упростить первое уравнение, решая его как стандартное уравнение с радикалом. Затем подставить по очереди решения второго уравнения.

Р е ш е н и е. Для решения первого уравнения переходим к равносильной системе:

$$\sqrt{16x^2 - 25y^2} = 5y + 4x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 16x^2 - 25y^2 = 16x^2 + 25y^2 + 40xy, \\ 5y + 4x \ge 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y(5y + 4x) = 0, \\ 5y + 4x \ge 0. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ 5y + 4x \ge 0; \end{cases} \\ 5y + 4x = 0; \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x \ge 0; \end{cases} \\ 5y + 4x = 0; \end{array} \right.$$

Корни второго уравнения исходной системы $x = 1$ и $x = -7$. Получаем два случая:

1) если $x = 1$, то $\left[\begin{array}{l} y = 0; \\ y = -\dfrac{4}{5}; \end{array} \right.$

2) если $x = -7$, то $y = \dfrac{28}{5}$.

О т в е т. $\left(-7; \dfrac{28}{5}\right)$, $\left(1; -\dfrac{4}{5}\right)$, $(1; 0)$.

Задача 23. (Геол-72.3)

Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{3 - x}} > \dfrac{1}{x - 2}$.

И д е я. Рассмотрев два варианта знака правой части неравенства, избавиться от знаменателей и свести к простейшему виду с радикалами.
У к а з а н и е. Если правая часть отрицательна, то неравенство верно на области определения. Если же правая часть положительна, то оно равносильно неравенству $x - 2 > \sqrt{3 - x}$ при $3 - x \ne 0$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем для положительной и отрицательной правой части.

$$1)\ \begin{cases} x-2>0, \\ \sqrt{3-x}<x-2, \\ 3-x\neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x>2, \\ 3-x<(x-2)^2, \\ 3-x>0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2<x<3, \\ x^2-3x+1>0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2<x<3, \\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \\ x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \iff \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3.$$

$$2)\ \begin{cases} x-2<0, \\ 3-x>0; \end{cases} \iff \begin{cases} x<2, \\ x<3; \end{cases} \iff x<2.$$

Ответ. $(-\infty;2)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$.

Задача 24. (Филол-76.2)

Найти все целочисленные решения неравенства $\sqrt[6]{z+1}<\sqrt[8]{6-z}$.

Идея. Найдя область допустимых значений переменной, организовать перебор возможных целочисленных вариантов.
Указание. Область определения $z+1\geq 0$ и $6-z\geq 0$, то есть $-1\leq z\leq 6$; учитывая, что $z\in\mathbb{Z}$, получаем всего восемь возможных вариантов.
Указание. Заметить, что функция в левой части возрастает, а в правой убывает.

Решение. Область определения:

$$\begin{cases} z+1\geq 0, \\ 6-z\geq 0; \end{cases} \iff -1\leq z\leq 6\,.$$

В силу целочисленности $z=-1,0,1,2,...,6$; организуем перебор вариантов:

- $z=-1,\quad 0<\sqrt[8]{7}$ – верно, подходит;
- $z=0,\quad 1<\sqrt[8]{6}$ – верно, подходит;
- $z=1,\quad \sqrt[6]{2}<\sqrt[8]{5},\ 2^4<5^3$ – верно, подходит;
- $z=2,\quad \sqrt[6]{3}<\sqrt[8]{4},\ 3^4<4^3$ – неверно, не подходит;

функция в левой части неравенства возрастает, а в правой убывает $\implies$ больше решений нет.

Ответ. 0; ± 1.

Задача 25. (М/м-90.3)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \leq x$.

И д е я. Рассмотрев два случая знака знаменателя, перейти к иррациональному неравенству и применить формулу сокращённого умножения для выражения под радикалом.

У к а з а н и е. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 1+x<0, \\ \sqrt{1-x^3} \geq x^2+x+1; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 1+x>0, \\ \sqrt{1-x^3} \leq x^2+x+1. \end{cases}$$

У к а з а н и е. $1-x^3=(1-x)(x^2+x+1)$, причём квадратный трёхчлен всегда положителен, так как отрицателен его дискриминант.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая знака знаменателя дроби. При решении учтём равенство $1-x^3=(1-x)(x^2+x+1)$ и положительность квадратного трёхчлена в скобках.

$$1)\ \begin{cases} 1+x<0, \\ \sqrt{1-x^3} \geq x^2+x+1; \end{cases} \iff \begin{cases} x<-1, \\ \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x^2+x+1} \geq x^2+x+1; \end{cases}$$

сократим обе части неравенства на второй радикал и возведём в квадрат:

$$\begin{cases} x<-1, \\ 1-x \geq x^2+x+1; \end{cases} \iff \begin{cases} x<-1, \\ x(x+2) \leq 0; \end{cases} \iff -2 \leq x < -1.$$

$$2)\ \begin{cases} 1+x>0, \\ \sqrt{1-x^3} \leq x^2+x+1; \end{cases} \iff \begin{cases} x>-1, \\ \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x^2+x+1} \leq x^2+x+1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -1<x \leq 1, \\ 1-x \leq x^2+x+1; \end{cases} \iff \begin{cases} -1<x \leq 1, \\ x(x+2) \geq 0; \end{cases} \iff 0 \leq x \leq 1.$$

О т в е т. $[-2;-1) \cup [0;1]$.

Задача 26. (М/м-96(1).2)

Решить неравенство $\dfrac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \leq \sqrt{4x-3}$.

И д е я. Используя формулу сокращённого умножения для числителя дроби и положительность знаменателя, привести неравенство к одинаковым степеням в обеих частях.

У к а з а н и е. Умножив обе части неравенства на положительный знаменатель и свернув числитель дроби по формуле куба разности, получаем неравенство $(x-2)^3 \leq \left(\sqrt{4x-3}\right)^3$ при условии $x \neq 3/4$.

У к а з а н и е. Неравенство приводится к виду $\sqrt{4x-3} \geq x-2$ при $x \neq 3/4$, после чего решается стандартным алгоритмом для иррационального неравенства.

Р е ш е н и е. Неравенство при $x \neq \dfrac{3}{4}$ преобразуется к виду

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \leq |4x-3|\sqrt{4x-3} \iff (x-2)^3 \leq \left(\sqrt{4x-3}\right)^3 \iff$$

$$\iff \sqrt{4x-3} \geq x-2.$$

Не забывая про $x \neq \dfrac{3}{4}$, переходим к равносильной совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} 4x-3 \geq (x-2)^2, \\ x-2 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-8x+7 \leq 0, \\ x \geq 2; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leq x \leq 7, \\ x \geq 2; \end{cases} \iff$

$\iff \quad 2 \leq x \leq 7.$

2) $\begin{cases} 4x-3 > 0, \\ x-2 < 0; \end{cases} \iff \dfrac{3}{4} < x < 2.$

О т в е т. $\left(\dfrac{3}{4}; 7\right]$.

Задача 27. (Почв-97.6)

а) Для каждого значения параметра a решить неравенство $\sqrt{a^2-x^2} \geq a+1$.

И д е я. Перейти к равносильной совокупности двух систем.
У к а з а н и е. Неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ равносильно совокупности двух систем
$\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} a^2-x^2 \geq a^2+2a+1, \\ a+1 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \leq -2a-1, \\ a \geq -1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a^2-x^2 \geq 0, \\ a+1 < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 \leq a^2, \\ a < -1. \end{cases}$

Объединим результаты:

- если $a = -1$, то $x^2 \leq 1$, то есть при $a=-1$ $x \in [-1;1]$;
- если $a > -1$, то $x^2 \leq -2a-1$. Так как $x^2 \geq 0$, то получаем три случая:

  а) при $a = -\dfrac{1}{2}$ $x = 0$;

  б) при $a > -\dfrac{1}{2}$ $-2a-1 < 0 \implies$ нет решений;

  в) при $-1 < a < -\dfrac{1}{2}$ $-2a-1 > 0 \implies x \in \left[-\sqrt{-2a-1}; \sqrt{-2a-1}\right]$;

- если $a < -1$, то $x^2 \le a^2 \implies -|a| \le x \le |a|$, то есть $a \le x \le -a$.

Ответ. При $a \le -1$ $x \in [a; -a]$; при $a \in \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$ $x \in \left[-\sqrt{-2a-1}; \sqrt{-2a-1}\right]$; при $a = -\dfrac{1}{2}$ $x = 0$; при $a > -\dfrac{1}{2}$ решений нет.

Задача 28. (Псих-89.5)

а) Для каждого значения параметра a решить неравенство $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2} > 0$.

Идея. Использовать соответствующий эквивалентный переход.

Указание. $$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Неравенство $2\sqrt{a^2+3ax} < x+2a$ равносильно системе

$$\begin{cases} 4a^2 + 12ax < 4a^2 + x^2 + 4ax, \\ a^2 + 3ax \ge 0, \\ x + 2a \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-8a) > 0, \\ a(3x+a) \ge 0, \\ x \ge -2a. \end{cases}$$

Чтобы решить задачу нам надо знать знак a.

1) Если $a = 0$, то $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x \ge 0; \end{cases} \iff x > 0;$

2) если $a > 0$, то $-2a < -\dfrac{a}{3} < 0 < 8a \implies \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 8a, \end{array}\right. \\ x \ge -\dfrac{a}{3}, \\ x \ge -2a; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} -\dfrac{a}{3} \le x < 0, \\ x > 8a; \end{array}\right.$

3) если $a < 0$, то $-2a > -\dfrac{a}{3} > 0 > 8a \implies \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 0; \\ x < 8a; \end{array}\right. \\ x \le -\dfrac{a}{3}, \\ x \ge -2a; \end{cases}$

из последних двух неравенств следует, что решений нет.

Ответ. Если $a < 0$, то решений нет; если $a = 0$, то $x > 0$; если $a > 0$, то $x \in \left[-\dfrac{a}{3}; 0\right) \cup (8a; +\infty)$.

Задача 29. (Почв-99.7)

Для каждого $b \le 0$ решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \ge b$.

Идея. Домножив на знаменатель, привести неравенство к стандартному виду.
Указание. Из неотрицательности подкоренного выражения следует, что либо $x \geq 1$, либо $x \leq -1$. Удобно решать неравенство на каждом из этих промежутков отдельно.

Решение. Область определения $|x| \geq 1$. Учитывая условие $b \leq 0$, получаем:
1) если $x \geq 1$, то левая часть неравенства всегда неотрицательна, а правая всегда неположительна, поэтому при $b \leq 0$ $x \geq 1$;
2) если $x \leq -1$, то $\sqrt{x^2-1} \leq bx$, где $bx \geq 0$;

- при $b = 0$ получаем $\begin{cases} x \leq -1, \\ \sqrt{x^2-1} \leq 0; \end{cases} \iff x = -1;$

- при $b < 0$ получаем $\begin{cases} x \leq -1, \\ x^2 - 1 \leq b^2x^2; \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1, \\ x^2(1-b^2) \leq 1; \end{cases}$

  а) если $b = -1$, то $x \leq -1$;

  б) если $b \in (-1;0)$, то $1 - b^2 > 0 \implies \begin{cases} x \leq -1, \\ x^2 \leq \dfrac{1}{1-b^2}; \end{cases} \iff$

  $$\iff -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \leq x \leq -1;$$

  в) если $b < -1$, то $1 - b^2 < 0$ и $x^2(1-b^2) \leq 0 < 1$ – верно для $\forall x \in \mathbb{R}$ $\implies x \leq -1$.

Ответ. Если $b \leq -1$, то $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
если $-1 < b < 0$, то $x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{1-b^2}}; -1\right] \cup [1; +\infty)$;
если $b = 0$, то $x \in \{-1\} \cup [1; +\infty)$.

3. Преобразование тригонометрических выражений, стандартные тригонометрические уравнения

3.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента, формулы двойного и половинного аргументов

Задача 1. (ЕГЭ)

Упростите выражение $\dfrac{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Идея. Разложить числитель на множители и применить основное тригонометрическое тождество.
Указание. Основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Р е ш е н и е. Разложим числитель на множители и применим основное тригонометрическое тождество:

$$\frac{\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha \cdot 1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

О т в е т. $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Найдите значение выражения $2 - \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0,2$.

И д е я. Упростить выражение, воспользовавшись определением тангенса угла.
У к а з а н и е. $2 - \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x = 2 - \sin^2 x$.

Р е ш е н и е. Упростим выражение, воспользовавшись определением тангенса:

$$2 - \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x = 2 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = 2 - \sin^2 x;$$

при $\sin x = 0,2$ получаем $2 - \sin^2 x = 2 - (0,2)^2 = 1,96$.

О т в е т. $1,96$.

Задача 3. (ЕГЭ)

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$, $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

И д е я. Вычислить синус угла через основное тригонометрическое тождество и воспользоваться определением тангенса угла.
У к а з а н и е. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; при $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ $\sin\alpha > 0$.

Р е ш е н и е. Из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{2\sqrt{7}}\right)^2 = 1 - \frac{9}{28} = \frac{19}{28}.$$

При $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ получаем $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{19}}{2\sqrt{7}} > 0$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\sqrt{19}}{3}$.

О т в е т. $-\dfrac{\sqrt{19}}{3}$.

Задача 4. (ЕГЭ)

Упростите выражение $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

Идея. Воспользоваться формулами косинуса двойного аргумента и определением котангенса угла.

Указание. В числителе применить формулу $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; в знаменателе использовать соотношение $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулами косинуса двойного аргумента и определением котангенса угла:

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \frac{1+(2\cos^2\alpha - 1)}{1-(1-2\sin^2\alpha)} = \frac{2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Ответ. $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Задача 5. (ЕГЭ)

Найдите значение выражения $3\sqrt{2}\sin 2x$, если $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

Идея. Вычислить косинус угла через основное тригонометрическое тождество и воспользоваться формулой для синуса двойного аргумента.

Указание. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; при $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ $\cos x < 0$; $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$\text{при} \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \quad \cos x = -\sqrt{\frac{2}{3}} < 0;$$

$$3\sqrt{2}\sin 2x = 3\sqrt{2}\cdot 2\sin x\cos x = 6\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{6\cdot 2}{3} = 4.$$

Ответ. 4.

Задача 6. (ВМК-80.1)

Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Идея. Применить формулу косинуса двойного угла и вычислить его значение.

Указание. Формула косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Решение. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

Ответ. $\dfrac{7}{9}$.

Задача 7. (Хим-95(1).2)

Найти $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Идея. Вычислив косинус угла через основное тригонометрическое тождество, найти синус двойного угла по соответствующей формуле.

Указание. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$; $\cos\alpha > 0$ при $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10},$$

$\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}} > 0$, так как угол α в I четверти; по формуле синуса двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}.$$

Ответ. $\dfrac{3}{5}$.

Задача 8. (Геол-00.2)

Вычислить $\operatorname{tg} 2x$, если $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{5}$.

Идея. Дважды применить формулу тангенса двойного угла.

Указание. $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$; $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Решение. Используем формулу тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\cdot 25}{5\cdot 24} = \frac{5}{12};$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{10\cdot 144}{12\cdot 119} = \frac{120}{119}.$$

Ответ. $\dfrac{120}{119}$.

Задача 9. (Физ-87.3)

Известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi < \alpha < \dfrac{4\pi}{3}$. Найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Идея. Воспользоваться основным тригонометрическим тождеством и формулой тангенса половинного аргумента.

Указание. Основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Формула тангенса половинного аргумента $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Указание. Найдя из основного тригонометрического тождества модуль косинуса, учесть условие принадлежности угла к заданному интервалу и однозначно определить знак раскрытия модуля.

Решение. $|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{2}{3}$, но в III четверти $\cos\alpha < 0$; значит,

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{1-\frac{2}{3}} = -\sqrt{5}.$$

Ответ. $-\dfrac{2}{3}; -\sqrt{5}$.

Задача 10. (Почв-98.2)

Найти $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ и что $\pi < \alpha < 2\pi$. Установить без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$ или $\dfrac{2}{7}$?

Идея. Использовать формулы связи тригонометрических функций одного аргумента и формулы связи функций двойного или половинного аргумента.
Указание. При известном тангенсе можно вычислить $\cos\alpha$ с достоверным знаком, после чего найти $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ с учётом принадлежности тригонометрическому кругу угла $\dfrac{\alpha}{2}$.
Указание. $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; сравнение этого значения с числом $\dfrac{2}{7}$ проводится стандартным алгоритмом через формальное неравенство.

Решение. Вычислим $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longleftrightarrow |\cos\alpha| = \frac{4}{5};$$

по условию $\alpha \in (\pi; 2\pi)$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4} > 0$; значит, угол α лежит в III четверти, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$; $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$, то есть $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; но $\dfrac{\alpha}{2} \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$, поэтому $\cos\dfrac{\alpha}{2} < 0$; значит, $\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Для сравнения чисел $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$ и $\dfrac{2}{7}$ составим формальное неравенство:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{\sqrt{10}} & \vee & \dfrac{2}{7} \\ 7 & \vee & 2\sqrt{10} \\ 49 & > & 40; \end{array}$$

значит, $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{10}} > \dfrac{2}{7}$.

Ответ. $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$.

3.2. Простейшие тригонометрические уравнения. Разложение на множители, сведение к квадратному уравнению

Задача 1. (ЕГЭ)

Решить уравнение $\sin 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Идея. Найти $4x$, а потом найти x.

Указание. $4x = (-1)^m \dfrac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Решение. $\sin 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff 4x = (-1)^m \dfrac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z} \iff$

$$\iff x = (-1)^m \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $(-1)^m \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{4}m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin \pi x \cdot (\cos x - 2) = 0$.

Идея. Произведение двух сомножителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю.

Указание. Исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \sin \pi x = 0; \\ \cos x = 2; \end{array}\right.$ второе уравнение которой решения не имеет.

Решение. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin \pi x = 0; \\ \cos x = 2 \text{ – нет решений}; \end{array}\right. \iff \pi x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff x = n,\ n \in \mathbb{Z};$$

наименьший положительный корень $x = 1$ при $n = 1$.

Ответ. 1.

Задача 3. (ЕГЭ)

Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x + \cos 2x = 2$.

Идея. Используя формулу косинуса двойного угла, свести уравнение к квадратному.

Указание. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Решение. Используем формулу косинуса двойного угла:

$$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 2 \iff 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 1; \\ \cos x = -\dfrac{3}{2} < -1; \end{array}\right.$$

Значит, $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Наибольший отрицательный корень $x = -2\pi$ при $n = -1$.

Ответ. -2π.

Задача 4. (Почв-99.2)

Решить уравнение $\cos 2x = \sin x$.

Идея. Используя формулу косинуса двойного угла, свести уравнение к квадратному.
Указание. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Решение. Используем формулу косинуса двойного угла:

$$1 - 2\sin^2 x = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = -1; \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

получаем три серии: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m$; $n, k, m \in \mathbb{Z}$; их можно объединить в одну серию $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (Экон-87.1)

Решить уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$.

Идея. Применив формулу косинуса двойного угла, свести уравнение к квадратному.
Указание. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Решение. Применив формулу косинуса двойного угла, получим

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 \iff 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2} > 1; \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right.$$

значит, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. (Хим-96(1).2)

Решить уравнение $5 + \cos 2x = 6\cos x$.

Идея. Применить формулу косинуса двойного угла и свести уравнение к квадратному.
Указание. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Р е ш е н и е. Применив формулу косинуса двойного угла, получим

$$5+2\cos^2 x-1-6\cos x=0 \iff \cos^2 x-3\cos x+2=0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos x=1;\\ \cos x=2>1;\end{array}\right.$$

следовательно, $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

О т в е т. $2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 7. (Георг-89.1)

Решить уравнение $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

И д е я. Применив формулу косинуса двойного угла, свести уравнение к квадратному.

У к а з а н и е. $\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Р е ш е н и е. Используя формулу косинуса двойного угла, получаем

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \iff 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1;\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi m;\end{array}\right.$$

перечисленные серии можно объединить в одну $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$.

О т в е т. $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 8. (Биол-99.1)

Решить уравнение $8\cos 6x-12\sin 3x=3$.

И д е я. Применить формулу косинуса двойного угла и свести уравнение к квадратному с последующим отбором решений.

У к а з а н и е. Формула косинуса двойного угла $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$.

У к а з а н и е. Квадратное уравнение имеет вид $16\sin^2 3x+12\sin 3x-5=0$.

Р е ш е н и е. Применим формулу косинуса двойного угла и сведём уравнение к квадратному:

$$16\sin^2 3x+12\sin 3x-5=0 \iff \left[\begin{array}{l}\sin 3x=\dfrac{-3+\sqrt{29}}{8};\\ \sin 3x=\dfrac{-3-\sqrt{29}}{8}<-1;\end{array}\right. \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \frac{(-1)^n}{3}\arcsin\frac{\sqrt{29}-3}{8} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\dfrac{(-1)^n}{3}\arcsin\dfrac{\sqrt{29}-3}{8} + \dfrac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Задача 9. (Биол-00.2)

Решить уравнение $3\cos 2x + 4 + 11\sin x = 0$.

И д е я. Применить формулу косинуса двойного угла и свести уравнение к квадратному.
У к а з а н и е. Формула косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.
У к а з а н и е. Квадратное уравнение имеет вид $6\sin^2 x - 11\sin x - 7 = 0$.

Р е ш е н и е. Применим формулу косинуса двойного угла и сведём уравнение к квадратному:

$$6\sin^2 x - 11\sin x - 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2}; \\ \sin x = \dfrac{7}{3} > 1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 10. (Геогр-99(1).1)

Решить уравнение $2\cos 4x - 4\sin 2x = -1$.

И д е я. Применить формулу косинуса двойного угла и свести уравнение к квадратному.
У к а з а н и е. Формула косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.
У к а з а н и е. Квадратное уравнение имеет вид $4\sin^2 2x + 4\sin 2x - 3 = 0$.

Р е ш е н и е. Применим формулу косинуса двойного угла и сведём уравнение к квадратному $4\sin^2 2x + 4\sin 2x - 3 = 0$, решением которого является совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = \dfrac{1}{2}; \\ \sin 2x = -\dfrac{3}{2} < -1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $(-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 11. (ВКНМ-99(1).1)

Решить уравнение $(7\sin x - 4\sqrt{3})(7\sin x - 5\sqrt{2}) = 0$.

Идея. Произведение двух сомножителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю.

Указание. Исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}; \\ \sin x = \dfrac{5\sqrt{2}}{7}; \end{array}\right.$ второе уравнение которой решения не имеет.

Решение. Произведение двух сомножителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}; \\ \sin x = \dfrac{5\sqrt{2}}{7} > 1; \end{array}\right. \iff x = (-1)^n \arcsin\frac{4\sqrt{3}}{7} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $(-1)^n \arcsin\dfrac{4\sqrt{3}}{7} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. (Экон-85.2)

Решить уравнение $2\sin x = 3\operatorname{ctg} x$.

Идея. Используя определение котангенса и основное тригонометрическое тождество, свести уравнение к квадратному относительно косинуса.
Указание. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Решение. Преобразуем уравнение: $2\sin x = \dfrac{3\cos x}{\sin x} \iff$

$$\iff \begin{cases} 2\left(1 - \cos^2 x\right) = 3\cos x, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -2 < -1; \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Задача 13. (Физ-76.1)

Решить уравнение $\cos 2x + 4\sin^3 x = 1$.

И д е я. Применить формулу косинуса двойного угла и разложить уравнение на множители.
У к а з а н и е. Формула косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Р е ш е н и е. Применим формулу косинуса двойного угла и разложим получившееся уравнение на множители:

$$1 - 2\sin^2 x + 4\sin^3 x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0; \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^m \dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\pi n,\ (-1)^m \dfrac{\pi}{6} + \pi m;\quad n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 14. (Экон-76.2)

Решить уравнение $3\,\mathrm{tg}\, x = 2\sqrt{5}\cos\dfrac{x}{2}$.

И д е я. Используя определение тангенса и формулу синуса двойного угла, разложить уравнение на множители, одним из которых после применения формулы косинуса двойного угла будет квадратный трёхчлен.
У к а з а н и е. $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; $\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$.
У к а з а н и е. Уравнение преобразуется к виду $\cos\dfrac{x}{2}\left(3\sin\dfrac{x}{2} + 2\sqrt{5}\sin^2\dfrac{x}{2} - \sqrt{5}\right) = 0$, $\cos x \neq 0$.

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение: $\dfrac{3\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{5}\cos\dfrac{x}{2} \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 6\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\sqrt{5}\cos x\cos\dfrac{x}{2}, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{2} = 0; \\ 2\sqrt{5}\sin^2\dfrac{x}{2} + 3\sin\dfrac{x}{2} - \sqrt{5} = 0; \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Из квадратного уравнения получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} < -1; \\ \sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}; \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad x = 2(-1)^m \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\pi + 2\pi n,\ 2(-1)^m \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m;\quad n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 15. (Геол-00(1).2)

Решить уравнение $5\sin\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}$.

Идея. Применив формулу синуса двойного угла, разложить уравнение на множители, один из которых после применения формулы косинуса двойного угла становится квадратным трёхчленом.

Указание. $\sin\dfrac{x}{2} = 2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}$; $\quad \cos\dfrac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{4}$.

Решение. Применяем формулы двойных углов:

$$10\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{4} = 0; \\ 10\sin\dfrac{x}{4} = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{4}; \end{array}\right.$$

1) из первого уравнения $\dfrac{x}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z} \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2\pi + 4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

2) из второго уравнения

$$2\sin^2\frac{x}{4} + 10\sin\frac{x}{4} - 1 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{4} = \dfrac{-5+3\sqrt{3}}{2}; \\ \sin\dfrac{x}{4} = \dfrac{-5-3\sqrt{3}}{2} < -1; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad x = 4(-1)^k\arcsin\frac{3\sqrt{3}-5}{2} + 4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Окончательно, объединив обе серии, получим ответ.

Ответ. $2\pi + 4\pi n,\ 4(-1)^k\arcsin\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2} + 4\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}$.

Задача 16. (Геол-98.3)

Найти все решения уравнения $5 + \dfrac{1}{\sin^2 3x} = 7\operatorname{ctg} 3x$.

Идея. Применить следствие из основного тригонометрического тождества и свести уравнение к квадратному.

Указание. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Указание. В результате получим квадратное уравнение $\operatorname{ctg}^2 3x - 7\operatorname{ctg} 3x + 6 = 0$.

Решение. Применив следствие из основного тригонометрического тождества, сводим уравнение к квадратному:

$$\operatorname{ctg}^2 3x - 7\operatorname{ctg} 3x + 6 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} 3x = 1; \\ \operatorname{ctg} 3x = 6; \end{array}\right. \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg} 6 + \dfrac{\pi m}{3},\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3},\ \dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg} 6 + \dfrac{\pi m}{3};\ n,m\in\mathbb{Z}$.

Задача 17. (Экон.К-84.3)

Найти все решения уравнения $3-12\sin^2 x-2\cos 4x=-\dfrac{5}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Идея. Применить следствие из основного тригонометрического тождества и формулу косинуса двойного угла, после чего использовать формулу понижения степени. В результате этих действий привести уравнение к квадратному относительно $\cos 2x$.

Указание. Следствие из основного тригонометрического тождества $1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; формула косинуса двойного угла $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$; формулы понижения степени $2\sin^2 x=1-\cos 2x,\ 2\cos^2 x=1+\cos 2x$.

Указание. После применения приведённых формул уравнение сводится к квадратному $8\cos^2 2x-17\cos 2x-3=0$.

Решение. $3-12\sin^2 x-2(2\cos^2 2x-1)=-5\cos^2 x \quad\Longleftrightarrow$

$$6-12(1-\cos 2x)-8\cos^2 2x+4=-5(1+\cos 2x) \quad\Longleftrightarrow\quad 8\cos^2 2x-17\cos 2x-3=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\cos 2x=\dfrac{17-\sqrt{385}}{16};\\ \cos 2x=\dfrac{17+\sqrt{385}}{16}>1;\end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{17-\sqrt{385}}{16}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{17-\sqrt{385}}{16}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 18. (Экон.В-98.3)

Решить уравнение $\cos\left(2x^2\right)-\sqrt{3}\cos\left(x^2\right)-2=0$.

Идея. Применив формулу косинуса двойного угла, решить уравнение как квадратное с последующим отбором неотрицательных значений для нахождения корней.

Указание. С учётом того, что $\cos\left(2x^2\right)=2\cos^2\left(x^2\right)-1$, уравнение переписывается в виде $2\cos^2\left(x^2\right)-\sqrt{3}\cos\left(x^2\right)-3=0$.

Указание. Серии решений $x^2=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\geq 0,\ n\in\mathbb{Z}$ разбить на две

$$x^2=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\quad\text{или}\quad x^2=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

для последующего анализа их неотрицательности.

Решение. Используя формулу косинуса двойного угла, получаем

$$2\cos^2\left(x^2\right)-\sqrt{3}\cos\left(x^2\right)-3=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\cos\left(x^2\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\\ \cos\left(x^2\right)=\sqrt{3}>1;\end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad x^2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $x^2 \geq 0$, то, анализируя неотрицательность получившихся решений, получаем две серии:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{N}; \\ x^2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}_0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k},\ k \in \mathbb{N}; \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n},\ n \in \mathbb{N}_0. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\pm\sqrt{-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k},\ \pm\sqrt{\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n};\ k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0$.

Задача 19. (ВМК-85.3)

Решить уравнение $4 - \cos\left(2\pi(13x+9)^2\right) = 5\sin\left(\pi(13x+9)^2\right)$.

И д е я. Применив формулу косинуса двойного угла, свести уравнение к квадратному с последующим отбором неотрицательных значений для вычисления корней уравнения.
У к а з а н и е. Учитывая, что $\cos\left(2\pi(13x+9)^2\right) = 1 - 2\sin^2\left(\pi(13x+9)^2\right)$, получаем уравнение $2\sin^2\left(\pi(13x+9)^2\right) - 5\sin\left(\pi(13x+9)^2\right) + 3 = 0$.
У к а з а н и е. Найдя $(13x+9)^2$, учесть его неотрицательность.

Р е ш е н и е. Применив формулу косинуса двойного угла, получаем

$$4 - \left(1 - 2\sin^2\left(\pi(13x+9)^2\right)\right) = 5\sin\left(\pi(13x+9)^2\right) \quad \iff$$

$$\iff \quad 2\sin^2\left(\pi(13x+9)^2\right) - 5\sin\left(\pi(13x+9)^2\right) + 3 = 0 \quad \iff$$

$$\iff \quad \left[\begin{array}{l} \sin\left(\pi(13x+9)^2\right) = 1; \\ \sin\left(\pi(13x+9)^2\right) = \dfrac{3}{2} > 1; \end{array}\right. \iff \quad (13x+9)^2 = 2n + \frac{1}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $(13x+9)^2 \geq 0$, то $n \geq 0$, поэтому $13x + 9 = \pm\sqrt{2n + \dfrac{1}{2}},\ n \in \mathbb{N}_0$. Окончательно получаем $\quad x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{2n + \dfrac{1}{2}}}{13},\ n \in \mathbb{N}_0$.

О т в е т. $\dfrac{-9 \pm \sqrt{2n + \dfrac{1}{2}}}{13},\ n \in \mathbb{N}_0$.

3.3. Применение тригонометрических формул для сведения уравнений к простейшим

Задача 1. (ЕГЭ)

Решите уравнение $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 1$.

Идея. Применить формулу косинуса суммы.
Указание. Формула косинуса суммы $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Решение. Применим к левой части уравнения формулу косинуса суммы:

$$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 1 \iff \cos(2x+x) = 1 \iff$$

$$\iff 3x = 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \iff x = \frac{2\pi m}{3},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\frac{2\pi}{3}m,\ m\in\mathbb{Z}$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Решите уравнение $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$.

Идея. Воспользоваться формулами приведения.
Указание. $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$.

Решение. Применяя формулы приведения, получаем

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1 \iff 2\sin x = -1 \iff \sin x = -\frac{1}{2} \iff$$

$$\iff x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. (Хим-00.2)

Решить уравнение $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$.

Идея. Заметить, что $3x = x + 2x$, и применить формулу косинуса суммы.
Указание. Формула косинуса суммы $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Решение. Заметим, что $3x = x + 2x$, и применим формулу косинуса суммы:

$$\cos(x+2x) + \sin x \sin 2x = 0 \iff \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x + \sin x \sin 2x = 0 \iff$$

$$\iff \cos x \cos 2x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \cos 2x = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n\in\mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2};\quad n, m\in\mathbb{Z}$.

Задача 4. (Физ-98(1).1)

Решить уравнение $\sin 3x - \sin 2x \cos x = 0$.

Идея. Заметив, что $3x = 2x + x$, применить формулу синуса суммы.
Указание. Формула синуса суммы $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Решение. Заметив, что $3x = 2x + x$, применим формулу синуса суммы:

$$\sin(2x+x) - \sin 2x \cos x = 0 \iff \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x - \sin 2x \cos x = 0 \iff$$

$$\iff \cos 2x \sin x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos 2x = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2},\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\pi n,\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2};\quad n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (Физ-97(2).1)

Решить уравнение $\cos 9x - \cos 7x = \sqrt{2}\sin x$.

Идея. Применить формулы преобразования разности косинусов и разложить уравнение на множители.
Указание. Формула разности косинусов $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
Указание. После разложения на множители уравнение принимает вид $\sin x(\sqrt{2}\sin 8x + 1) = 0$.

Решение. Применим формулу преобразования разности косинусов в произведение и затем разложим уравнение на множители:

$$-2\sin x \sin 8x = \sqrt{2}\sin x \iff \sin x(\sqrt{2}\sin 8x + 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \sin 8x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 8x = (-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{32} + \dfrac{\pi m}{8}, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\pi n,\ (-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{32} + \dfrac{\pi m}{8};\quad n,\ m \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. (Физ-94(1).1)

Решить уравнение $\sin x \sin 3x = \dfrac{1}{2}$.

Идея. Применить формулу преобразования произведения синусов в разность косинусов, после чего использовать формулу косинуса двойного угла и разложить уравнение на множители.
Указание. Формула преобразования произведения синусов в разность косинусов

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right).$$

Формула косинуса двойного угла $\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.
Указание. После разложения на множители уравнение принимает вид
$\cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0$.

Решение. Применим формулу преобразования произведения синусов в разность косинусов, а затем используем формулу косинуса двойного угла:

$$2\sin 3x\sin x = 1 \iff \cos 2x - \cos 4x = 1 \iff \cos 2x - 2\cos^2 2x = 0 \iff$$

$$\iff \cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0 \iff \left[\begin{aligned} &\cos 2x = 0;\\ &\cos 2x = \frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z};\\ &x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Ответ. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2};\ \ n, m\in\mathbb{Z}$.

Задача 7. (Хим-78.1)

Решить уравнение $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos^2 2x$.

Идея. Применив формулу суммы синусов и формулу синуса двойного угла, свести уравнение к тригонометрическому уравнению относительно $2x$.
Указание. Формула преобразования суммы синусов в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Формула синуса двойного угла $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
Указание. После разложения на множители уравнение принимает вид
$\cos^2 3x(4\sin 2x - 3) = 0$.

Решение. Применив формулу суммы синусов и формулу синуса двойного угла, сведём уравнение к тригонометрическому уравнению относительно $2x$:

$$2\sin 4x\cos 2x = 3\cos^2 2x \iff 4\sin 2x\cos^2 2x = 3\cos^2 2x \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} &\cos^2 2x = 0;\\ &\sin 2x = \frac{3}{4}; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z};\\ &x = \frac{1}{2}(-1)^m\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi m}{2},\ m\in\mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \frac{1}{2}(-1)^m\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi m}{2};\quad n,\ m\in\mathbb{Z}$.

Задача 8. (Физ-99(1).1)

Решить уравнение $\sin 14x = \cos 4x - \sin 6x$.

Идея. Применив формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, разложить уравнение на множители.
Указание. Перенести все синусы в левую часть, применить формулу преобразования суммы синусов в произведение и разложить на множители.
Указание. После применения формулы и разложения на множители уравнение принимает вид $\cos 4x(2\sin 10x - 1) = 0$.

Решение. Перенесём все синусы в левую часть и применим формулу преобразования суммы синусов в произведение:

$$\sin 14x + \sin 6x = \cos 4x \iff 2\sin 10x \cos 4x = \cos 4x \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0; \\ \sin 10x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ 10x = (-1)^m \dfrac{\pi}{6} + \pi m; \ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}, \ (-1)^m \dfrac{\pi}{60} + \dfrac{\pi m}{10}; \quad n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 9. (Физ-00(1).1)

Решить уравнение $\sin 5x + \sin 2x = \sin 7x$.

Идея. Перенести $\sin 5x$ в правую часть, применить формулу преобразования разности синусов и формулу двойного угла, разложить на множители.
Указание. Формула преобразования разности синусов

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Формула синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
Указание. После преобразований и разложения на множители получается уравнение $\sin x(\cos 6x - \cos x) = 0$. Далее применить формулу разности косинусов $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Решение. Перенесём $\sin 5x$ в правую часть, применим формулу преобразования разности синусов справа и формулу синуса двойного угла слева. После проделанных преобразований разложим на множители:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos 6x \iff 2\sin x\cos x = 2\sin x\cos 6x \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \cos 6x - \cos x = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \sin\dfrac{7x}{2}\sin\dfrac{5x}{2} = 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{2\pi n}{7}, \ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{2\pi m}{5}, \ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{2\pi n}{7}, \ \dfrac{2\pi m}{5}, \ \pi k; \quad n, m, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. (Физ-99(2).1)

Решить уравнение $\sin x - \sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0$.

Идея. Применить формулу преобразования произведения тригонометрических функций, после чего разложить уравнение на множители.

Указание. Формула преобразования произведения тригонометрических функций $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$.

Указание. После применения формулы преобразования произведения тригонометрических функций и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $\sin x - \sin 2x = 0$; далее воспользоваться формулой синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Решение. Преобразуем произведение тригонометрических функций, приведём подобные слагаемые и разложим на множители, применив формулу синуса двойного угла:

$$2\sin x - \sin 2x - \sin x = 0 \iff \sin x - \sin 2x = 0 \iff \sin x(1 - 2\cos x) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m;\quad n, m\in\mathbb{Z}$.

Задача 11. (Физ-96.1)

Найти все решения уравнения $\cos 3x - \sin\left(7x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos 5x$.

Идея. Применить в левой части уравнения формулу приведения и формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, после чего разложить на множители.

Указание. Формула приведения $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$, формула преобразования суммы косинусов в произведение $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Указание. В результате разложения на множители уравнение принимает вид $\cos 5x\,(2\cos 2x - 1) = 0$.

Решение. Преобразуем выражение в левой части, применив для вычитаемого формулу приведения и преобразовав сумму косинусов в произведение:

$$\cos 3x + \cos 7x = \cos 5x \iff 2\cos 2x\cos 5x = \cos 5x \iff$$

$$\iff \cos 5x\,(2\cos 2x - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0; \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}; \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5},\ \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi m;\quad n, m\in\mathbb{Z}$.

Задача 12. (Геогр-74.2)

Решить уравнение $\sin x + \cos\left(5x - \dfrac{9\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\sin(3x+\pi)$.

Идея. Применив формулы приведения и формулу преобразования суммы синусов в произведение, разложить уравнение на множители.
Указание. Формулы приведения $\cos\left(\alpha - \dfrac{9\pi}{2}\right) = \sin\alpha$; $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$;
формула преобразования суммы синусов $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
Указание. После разложения на множители уравнение принимает вид
$\sin 3x\left(2\cos 2x + \sqrt{3}\right) = 0$.

Решение. Применим для второго слагаемого в левой части и для функции в правой части формулы приведения, затем преобразуем сумму синусов в произведение:

$$\sin x + \sin 5x + \sqrt{3}\sin 3x = 0 \iff 2\sin 3x\cos 2x + \sqrt{3}\sin 3x = 0 \iff$$

$$\iff \sin 3x\left(2\cos 2x + \sqrt{3}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0; \\ \cos 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}; \\ 2x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi n}{3}, \pm\dfrac{5\pi}{12} + \pi m;\quad n, m\in\mathbb{Z}$.

Задача 13. (Хим-83.1)

Решить уравнение $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$.

Идея. Применив формулу преобразования суммы косинусов в произведение и формулу косинуса суммы двойного угла, свести уравнение к квадратному.
Указание. Формула суммы косинусов $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;
формула косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.
Указание. После применения формул уравнение принимает вид
$2\sin^2 x - \left(1+\sqrt{2}\right)\sin x + \sqrt{2} = 0$.

Решение. Преобразуем сумму косинусов в произведение и применим формулу косинуса суммы двойного угла:

$$2\cos 2x\cos\frac{\pi}{4} + 4\sin x = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sin x \iff$$

$$\iff \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 x) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sin x \iff$$

$$\iff 2\sin^2 x - (1 + 2\sqrt{2})\sin x + \sqrt{2} = 0.$$

Особого внимания заслуживает вычисление дискриминанта:

$$D = (1 + 2\sqrt{2})^2 - 8\sqrt{2} = 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 8\sqrt{2} = 1 - 4\sqrt{2} + 8 = (1 - 2\sqrt{2})^2.$$

Корни квадратного уравнения: $\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}; \\ \sin x = \sqrt{2} > 1; \end{array}\right. \iff x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Ответ. $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 14. (Псих-90.1)

Решить уравнение $4\sin^2\left(2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) - 2\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\cos(2x - \pi) + \sqrt{15} - 4 = 0.$

Идея. Применив формулы приведения и основное тригонометрическое тождество, свести уравнение к квадратному и решить его стандартным способом.
Указание. $\sin\left(2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(2x + \pi) = -\sin 2x;\quad \cos(2x - \pi) = -\cos(2x);$ $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1\,.$
Указание. Исходное уравнение приводится к квадратному
$4\cos^2 2x - 2\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\cos 2x - \sqrt{15} = 0.$

Решение. Используя формулы приведения

$$\cos(2x - \pi) = -\cos(2x), \quad \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(2x + \pi) = -\sin 2x$$

и основное тригонометрическое тождество, получаем квадратное уравнение

$$4\cos^2 2x - 2\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\cos 2x - \sqrt{15} = 0.$$

Особого внимания заслуживает вычисление дискриминанта:

$$D_1 = \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 + 4\sqrt{15} = 5 + 3 - 2\sqrt{15} + 4\sqrt{15} = 5 + 3 + 2\sqrt{15} = \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2.$$

Квадратное уравнение имеет два решения:

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos 2x = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1; \end{array}\right. \iff 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\pm\dfrac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 15. (Биол-81.2)

Решить уравнение $\cos\left(2x - \dfrac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$.

Идея. Применить формулы приведения, формулу синуса двойного угла и разложить получившееся уравнение на множители.

Указание. Формулы приведения $\cos\left(\alpha - \dfrac{7\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$; $\sin(\alpha+3\pi) = -\sin\alpha$.

Указание. После применения формул приведения получается уравнение $\sin 4x = \sin 2x$, в котором целесообразно воспользоваться формулой синуса двойного угла.

Решение. Применим формулы приведения:

$$\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(2x - \frac{8\pi - \pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x;$$

$$\sin(4x + 3\pi) = \sin(4x + \pi) = -\sin 4x;$$

полученное уравнение разложим на множители, воспользовавшись формулой синуса двойного угла:

$$\sin 4x = \sin 2x \iff 2\sin 2x\cos 2x - \sin 2x = 0 \iff \sin 2x(2\cos 2x - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0; \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 16. (Экон.К-80.4)

Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

Идея. Применив формулы синуса разности углов и косинуса разности углов, приведя подобные слагаемые, свести уравнение к простейшему тригонометрическому.

Указание. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha$;
$\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha + \sin\dfrac{\pi}{6}\sin\alpha$.

Решение. Используем формулы синуса и косинуса разности углов:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \sqrt{3} \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \sqrt{3} \iff$$

$$\iff \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3} \iff \cos x = 1 \iff x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 17. (Почв-96(1).1)

Найдите $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$, если известно, что $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha>0$.

Идея. Применить формулу косинуса суммы углов, предварительно использовав основное тригонометрическое тождество.
Указание. Формула косинуса суммы углов $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, основное тригонометрическое тождество $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.
Указание. Найдя из основного тригонометрического тождества модуль косинуса, по знакам синуса и тангенса угла α однозначно определить знак косинуса.

Решение. Значение $|\cos\alpha|$ найдём из основного тригонометрического тождества:

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}.$$

По условию $\sin\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>0$; значит, $\cos\alpha<0$, то есть $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$.
Осталось найти косинус суммы углов:

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}.$$

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

Задача 18. (Геол-94(1).4)

Найти все решения уравнения $\sin 5x=\sin 5$.

Идея. Применить формулу разности синусов для разложения уравнения на множители.
Указание. Формула разности синусов $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой разности синусов:

$$\sin 5x-\sin 5=0 \iff \sin\frac{5x-5}{2}\cos\frac{5x+5}{2}=0 \iff \left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{5}{2}\right)=0;\\[2mm] \cos\left(\dfrac{5x}{2}+\dfrac{5}{2}\right)=0;\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}5x=5+2\pi n;\\ 5x=\pi-5+2\pi m;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=1+\dfrac{2\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z};\\[2mm] x=\dfrac{\pi}{5}-1+\dfrac{2\pi m}{5},\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ. $1+\dfrac{2\pi n}{5}$, $\dfrac{\pi}{5}-1+\dfrac{2\pi m}{5}$; $\quad n,m\in\mathbb{Z}$.

И д е я. *Второй способ.* Решить уравнение как простейшее тригонометрическое и воспользоваться определением функции $\arcsin x$.

У к а з а н и е. Определение функции $\arcsin x$: $\quad y = \arcsin x$, если $\begin{cases} \sin y = x, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Решим уравнение как простейшее тригонометрическое:

$$\sin 5x = \sin 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 5x = (-1)^n \arcsin(\sin 5) + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Используя определение функции $\arcsin x$, вычислим $t = \arcsin(\sin 5)$:

$$t = \arcsin(\sin 5) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin t = \sin 5, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 5 + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ t = \pi - 5 + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \\ -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Подставив в границы, получим $n = -1$, и другого решения нет. Значит, $t = 5 - 2\pi$, то есть $5x = (-1)^k(5 - 2\pi) + \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad x = (-1)^k \left(1 - \dfrac{2\pi}{5}\right) + \dfrac{\pi k}{5}, \ k \in \mathbb{Z}.$

О т в е т. $(-1)^k \left(1 - \dfrac{2\pi}{5}\right) + \dfrac{\pi k}{5}, \ k \in \mathbb{Z}.$

Задача 19. (Физ-93.2)

Решить уравнение $\cos 5x = \cos(5 + x)$.

И д е я. Применить формулу преобразования разности косинусов в произведение.
У к а з а н и е. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2} \sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}$.

Р е ш е н и е. Применим формулу разности косинусов:

$$\cos 5x - \cos(5 + x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2\sin\left(2x - \frac{5}{2}\right)\sin\left(3x + \frac{5}{2}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin\left(2x - \dfrac{5}{2}\right) = 0; \\ \sin\left(3x + \dfrac{5}{2}\right) = 0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\dfrac{5}{6} + \dfrac{\pi m}{3}, \ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $-\dfrac{5}{6} + \dfrac{\pi m}{3}, \ \dfrac{5}{4} + \dfrac{\pi n}{2}; \quad m, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 20. (ИСАА-00.3)

Решить уравнение $3\sin 2x - \dfrac{1}{2} = 4\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Идея. Заменив косинус в правой части уравнения на новую переменную, выразить через её квадрат синус двойного угла и перейти к квадратному уравнению.
Указание. Введём новую переменную $t = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, тогда

$$t^2 = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2x\right),$$

то есть $\sin 2x = 2t^2 - 1$.
Указание. Полученное в ходе замены переменной уравнение $12t^2 - 8t - 7 = 0$ имеет решения $t = -\frac{1}{2}$ и $t = \frac{7}{6}$.

Решение. Обозначим $t = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1]$, тогда

$$t^2 = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2x\right),$$

то есть $\sin 2x = 2t^2 - 1$; подставляем в исходное уравнение:

$$3\left(2t^2 - 1\right) - \frac{1}{2} = 4t \quad\Longleftrightarrow\quad 6t^2 - 4t - \frac{7}{2} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{2}; \\ t = \dfrac{7}{6} > 1. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{11\pi}{12} + 2\pi m;\quad n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 21. (М/м-00(2).4)

Найти $\dfrac{\sin(\alpha + \gamma)\sin(\beta + \gamma)}{\cos\gamma\cos(\alpha + \beta + \gamma)}$, если $\dfrac{\sin(\alpha + \gamma)\sin(\beta + \gamma)}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{4}{9}$.

Идея. Применить в уравнении формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность, после чего выразить одно из слагаемых через остальные и подставить в искомое выражение.
Указание. Формулы преобразования произведения синусов в разность и произведения косинусов в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)); \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

Указание. Удобно ввести обозначения $A = \cos(\alpha - \beta)$, $B = \cos(\alpha + \beta)$, $C = \cos(\alpha + \beta + 2\gamma)$; тогда равенство примет вид $\dfrac{A - C}{A + B} = \dfrac{4}{9}$.

Указание. Выразив из равенства, например, $C = \dfrac{5A-4B}{9}$ и подставив в искомое выражение, получим, что оно равно $\dfrac{4}{5}$.

Решение. Воспользуемся в левой части равенства формулами преобразования произведения синусов в разность и произведения косинусов в сумму:

$$\frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+2\gamma)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}.$$

Обозначим $A=\cos(\alpha-\beta)$, $B=\cos(\alpha+\beta)$, $A\neq -B$, $C=\cos(\alpha+\beta+2\gamma)$; тогда

$$\frac{A-C}{A+B}=\frac{4}{9} \quad\Longleftrightarrow\quad C=\frac{5A-4B}{9}.$$

Преобразуем искомое выражение:

$$\frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+2\gamma)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta+2\gamma)} =$$

$$= \frac{A-C}{B+C} = \frac{9A-9C}{9B+9C} = \frac{9A-5A+4B}{9B+5A-4B} = \frac{4(A+B)}{5(A+B)} = \frac{4}{5};$$

все преобразования равносильны.

Ответ. $\dfrac{4}{5}$.

3.4. Различные задачи на отбор корней

Задача 1. (ЕГЭ)

Укажите те корни уравнения $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, которые лежат в промежутке $[0;2\pi]$.

Идея. Найти x, удовлетворяющие уравнению, и отобрать значения целочисленной переменной в соответствии с условием задачи.

Указание. Для каждой из серий решения $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m$ и $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$ отобрать значения $m,k\in\mathbb{Z}$ такие, что $x\in[0;2\pi]$.

Решение. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Выполним отбор в серии $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$:

- при $m=0$ $\quad x=\dfrac{5\pi}{6}\in[0;2\pi]$;
- при $m=-1$ $\quad x=\dfrac{5\pi}{6}-2\pi<0$; все $m\le -1$ не подходят;
- при $m=1$ $\quad x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi>2\pi$; все $m\ge 1$ не подходят.

Выполним отбор в серии $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$:

- при $k = 0$ $x = -\dfrac{5\pi}{6} < 0$; все $k \leq 0$ не подходят;
- при $k = 1$ $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{6} \in [0; 2\pi]$;
- при $k = 2$ $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 4\pi > 2\pi$; все $k \geq 2$ не подходят.

Таким образом, $x = \dfrac{5\pi}{6}$ или $x = \dfrac{7\pi}{6}$.

Ответ. $\dfrac{5\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{6}$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Укажите те корни уравнения $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, для которых $\cos x > 0$.

Идея. Найти x, удовлетворяющие уравнению, и произвести отбор в соответствии с условием задачи.

Указание. Из двух серий решения $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ и $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ выбрать ту, для которой $\cos x > 0$.

Решение. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Для первой серии $\cos x = \dfrac{1}{2} > 0$; для второй серии $\cos x = -\dfrac{1}{2} < 0$; значит, $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. (ЕГЭ)

Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 2} + 2$ на промежутке $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

Идея. Упростить выражение в правой части.

Указание. $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 2} + 2 = -\sqrt{3}$.

Решение. Упростим выражение в правой части равенства:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - 2} + 2 = \frac{2\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 2} = -\sqrt{3}.$$

Уравнение принимает вид

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Отберём корни из указанного промежутка:

$$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + \pi n \le \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \le \frac{2}{3} + n \le \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{5}{3} \le n \le -\frac{1}{6};$$

значит, $n = -1$, то есть промежутку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только один корень уравнения.

Ответ. Один.

Задача 4. (Филол-85.1)

Найти все решения уравнения $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x$, удовлетворяющие условию $-5 < x < -3$.

Идея. Перенести всё в одну сторону и разложить на множители.
Указание. Разложить уравнение на множители, решить простейшие тригонометрические уравнения и произвести отбор по условию.

Решение. Разложим уравнение на множители:

$$\sin x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \\ x_3 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Выполним отбор в серии $x_1 = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$:

- если $n \ge 0$, то $x_1 \ge 0$; все $n \ge 0$ не подходят;
- если $n = -1$, то $-5 < -\pi < -3 \quad \Longrightarrow \quad x = -\pi$;
- если $n = -2$, то $-2\pi < -5$; все $n \le -2$ не подходят.

Выполним отбор в серии $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$:

- если $m = -1$, то $-\dfrac{5\pi}{3} < -5$; все $m \le -1$ не подходят;
- при $m \ge 0$ значения x_2 положительны; нет решения.

Выполним отбор в серии $x_3 = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$:

- при $k \ge 0$ все значения x_3 положительны; все $k \ge 0$ не подходят;
- если $k = -1$, то $-5 < -\dfrac{4\pi}{3} < -3 \quad \Longrightarrow \quad x = -\dfrac{4\pi}{3}$;

- если $k=-2$, то $-\dfrac{10\pi}{3}<-5$; все $k\le -2$ не подходят.

О т в е т. $-\dfrac{4\pi}{3}; -\pi$.

Задача 5. (М/м-89.1)

Решить уравнение $4|\cos x|+3=4\sin^2 x$.

И д е я. Использовать основное тригонометрическое тождество и свести уравнение к квадратному.
У к а з а н и е. Основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
У к а з а н и е. Уравнение сводится к квадратному $4\cos^2 x+4|\cos x|-1=0$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, сведём уравнение к квадратному относительно переменной $|\cos x|$:

$$4\cos^2 x+4|\cos x|-1=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} |\cos x|=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}<0; \\ |\cos x|=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

З а м е ч а н и е. Если не решать уравнение относительно $|\cos x|$, а раскрывать модуль по определению, то пришлось бы проводить отбор. И хотя он в этом случае не очень трудоемкий, приведённое выше решение оптимальнее.

Задача 6. (Геол-82.3)

Решить уравнение $\sqrt{1-\cos^2 x}+6\cos 2x=0$.

И д е я. Используя основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса двойного угла, свести уравнение к квадратному.
У к а з а н и е. Основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
У к а з а н и е. Уравнение сводится к квадратному $12\sin^2 x-|\sin x|-6=0$.

Р е ш е н и е. Из основного тригонометрического тождества получаем $\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$; далее воспользуемся формулой косинуса двойного угла и сведём уравнение к квадратному относительно переменной $|\sin x|$:

$$12\sin^2 x-|\sin x|-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} |\sin x|=-\dfrac{2}{3}<0; \\ |\sin x|=\dfrac{3}{4}; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad \sin x = \pm\frac{3}{4} \quad \iff \quad x = \pm\arcsin\frac{3}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\pm\arcsin\dfrac{3}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 7. (М/м-79.1)

Найти все решения уравнения $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.

И д е я. Используя основное тригонометрическое тождество, свести уравнение к квадратному относительно синуса; найти корни; сделать отбор.
У к а з а н и е. Воспользовавшись соотношением $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, свести уравнение к квадратному $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$.
У к а з а н и е. Решениями полученного квадратного уравнения являются серии $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}.$

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение, используя основное тригонометрическое тождество:

$$1 - 5\sin x + 2\left(1 - \sin^2 x\right) = 0 \quad \iff \quad 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \quad \iff$$

$$\iff \quad \left[\begin{aligned} &\sin x = -3 < -1; \\ &\sin x = \frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \quad \iff \quad \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ &x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Условию $\cos x \geq 0$ удовлетворяет только первая серия.

О т в е т. $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 8. (Физ-84.1)

Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{2 - \sin x} = 0.$

И д е я. Воспользовавшись определением тангенса и избавившись от знаменателя, привести уравнение к квадратному.
У к а з а н и е. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, где $\cos\alpha \neq 0.$
У к а з а н и е. Уравнение сводится к квадратному $2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0.$

Р е ш е н и е. Воспользуемся определением тангенса и основным тригонометрическим тождеством:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{2 - \sin x} = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \iff$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}; \\ \sin x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} > 1; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad x = (-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $(-1)^{n+1} \arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 9. (Геол.ОГ-78.1)

Решить уравнение $\sqrt{2}\sin x + \operatorname{ctg} x = 0$.

И д е я. Используя определения котангенса и основное тригонометрическое тождество, преобразовать уравнение к квадратному.
У к а з а н и е. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, где $\sin\alpha \neq 0$.
У к а з а н и е. Свести уравнение к квадратному $2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся определением котангенса и сведём уравнение к квадратному:

$$\sqrt{2}\sin x + \frac{\cos x}{\sin x} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 2 = 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ \cos x = \sqrt{2} > 1; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 10. (Псих-77.1)

Решить уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$.

И д е я. Воспользовавшись следствием из основного тригонометрического тождества и избавившись от знаменателя, свести уравнение к биквадратному.
У к а з а н и е. Следствие из основного тригонометрического тождества
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
У к а з а н и е. Уравнение сводится к биквадратному $8\cos^4 x + 2\cos^2 x - 3 = 0$.

Р е ш е н и е. По следствию из основного тригонометрического тождества выразим $\operatorname{tg}^2 x$ через $\cos^2 x$ и избавимся от знаменателя:

$$3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - 8\cos^2 x + 1 = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad \begin{cases} 8\cos^4 x + 2\cos^2 x - 3 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \iff \quad \left[\begin{aligned} &\cos^2 x = -\frac{3}{4} < 0; \\ &\cos^2 x = \frac{1}{2}. \end{aligned} \right.$$

Для удобства записи ответа, зная $\cos^2 x$, найдём $\cos 2x$:

$$\cos 2x = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Задача 11. (Физ-00.1)

Решить уравнение $3\cos 3x + \dfrac{2}{\cos x} = 3\cos x$.

И д е я. Перенести все слагаемые в левую часть и привести к общему знаменателю. Применить формулу преобразования произведения косинусов и формулу понижения степени.

У к а з а н и е. Формула преобразования произведения косинусов в сумму

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)).$$

Формула понижения степени $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$.

У к а з а н и е. После преобразований уравнение сводится к системе $\begin{cases} \cos 4x = -\dfrac{1}{3}, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Перенесём все слагаемые в левую часть и приведём к общему знаменателю, полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3\cos 3x\cos x + 2 - 3\cos^2 x = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$$

преобразуем произведение косинусов в сумму и воспользуемся формулой понижения степени:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 2 - \dfrac{3}{2}(1 + \cos 2x) = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \iff \quad \cos 4x = -\frac{1}{3} \quad \iff$$

$$\iff \quad 4x = \pi \pm \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n \quad \iff \quad x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. (Биол-85.2)

Найти все корни уравнения $5\cos 2x + 7\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+1=0$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Идея. Применив формулу приведения и формулу косинуса двойного угла, свести уравнение к квадратному с последующим отбором решений.
Указание. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x;\quad \cos 2x = 1-2\sin^2 x$.
Указание. После преобразований получаем квадратное уравнение

$$10\sin^2 x + 7\sin x - 6 = 0.$$

Решение. Применим формулу приведения и формулу косинуса двойного угла:

$$5\left(1-2\sin^2 x\right) - 7\sin x + 1 = 0 \iff 10\sin^2 x + 7\sin x - 6 = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{6}{5} < -1; \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ принадлежит единственное решение $x=\dfrac{5\pi}{6}$.

Ответ. $\dfrac{5\pi}{6}$.

Задача 13. (Геол-80.2)

Решить уравнение $\dfrac{2-3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$.

Идея. Перейти к равносильной системе, применить формулу косинуса двойного угла для сведения уравнения к квадратному с последующим отбором решений.
Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2-3\sin x - \cos 2x = 0, \\ 6x^2 - \pi x - \pi^2 \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0, \\ 6x^2 - \pi x - \pi^2 \neq 0. \end{cases}$$

Указание. Решениями квадратного уравнения являются серии $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$ и $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$; $n,k\in\mathbb{Z}$; из неравенства следует, что $x\neq-\dfrac{\pi}{3}$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 2-3\sin x-\cos 2x=0, \\ 6x^2-\pi x-\pi^2\neq 0; \end{cases}$ воспользуемся формулой косинуса двойного угла и сведём уравнение к квадратному:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x-3\sin x+1=0, \\ 6x^2-\pi x-\pi^2\neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\sin x=1; \\ &\sin x=\frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \\ x\neq -\dfrac{\pi}{3}, \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \\ &x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}; \end{aligned}\right. \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \iff \left[\begin{aligned} &x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}; \\ &x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

О т в е т. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\quad n,k\in\mathbb{Z},\ n\neq 0.$

Задача 14. (Филол-75.3)

Решить уравнение $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}=\dfrac{2\operatorname{ctg}x+3}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$

И д е я. Перейти к равносильной системе, применить формулу тангенса суммы (с учётом ограничений), после чего свести уравнение к простейшему тригонометрическому.

У к а з а н и е. $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}=\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}.$

У к а з а н и е. Воспользоваться формулой тангенса суммы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, где $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 1$; провести исследование возникших вследствие этого дополнительных ограничений на аргументы.

У к а з а н и е. Уравнение приводится к виду $-\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\operatorname{ctg}x+3$, где $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\neq 0.$

Р е ш е н и е. Сначала вычислим значение выражения в левой части уравнения:

$$\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}=\operatorname{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3};$$

затем перейдём от уравнения к равносильной системе:

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\operatorname{ctg}x+3, \\ \operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0. \end{cases}$$

Перед применением формулы тангенса суммы $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$ проверяем отдельно серии решений:

$$\cos x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=1 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Первая серия обращает уравнение в тождество, то есть входит в ответ; вторая серия не входит в область определения $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, то есть решением не является. После применения формулы тангенса суммы при $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ x\neq\pi m,\ x\neq\dfrac{\pi}{3}+\pi k$, $n,m,k\in\mathbb{Z}$ получаем уравнение

$$-\sqrt{3}\frac{\operatorname{tg}x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}x}=2\operatorname{ctg}x+3 \quad\Longleftrightarrow\quad -\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=2\operatorname{ctg}x+3-\frac{2}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\operatorname{tg}x \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \operatorname{ctg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}-2 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-2\right)+\pi l,\ \ l\in\mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-2\right)+\pi l;\ n,l\in\mathbb{Z}.$

Задача 15. **(Геол-99(1).1)**

Решить уравнение $\cos(6\sin x)=-1$.

И д е я. Решая уравнение как простейшее, произвести отбор значений синуса в соответствии с его областью значений, после чего решить полученные уравнения.
У к а з а н и е. $\cos\alpha=-1 \iff \alpha=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
У к а з а н и е. Областью значения синуса является отрезок $[-1;1]$.
У к а з а н и е. В полученном уравнении $6\sin x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ правая часть должна принимать значения из отрезка $[-6;6]$; значит, $n=-1$ или $n=0$.

Р е ш е н и е. Решим уравнение как простейшее тригонометрическое:

$$\cos(6\sin x)=-1 \quad\Longleftrightarrow\quad 6\sin x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку областью значений функции $\sin x$ является отрезок $[-1;1]$, требуется отобрать такие целочисленные значения n, при которых $-1\le\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}\le 1$, то есть $-\dfrac{6+\pi}{2\pi}\le n\le\dfrac{6-\pi}{2\pi}$.

Так как $-2<-\dfrac{6+\pi}{2\pi}<-1$ и $0<\dfrac{6-\pi}{2\pi}<1$, то подходят $n=-1$ и $n=0$.

Значит, $\sin x=\pm\dfrac{\pi}{6} \quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm\arcsin\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$

О т в е т. $\pm\arcsin\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$

Задача 16. (ВМК-83.2)

Решить уравнение $\dfrac{1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1\,.$

И д е я. Умножив левую и правую части на знаменатель, свести уравнение к квадратному с последующим отбором корней, принадлежащих области определения.
У к а з а н и е. При условии $2\sin x\cos x = \sin 2x \neq 1$ квадратное уравнение примет вид $2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0\,.$

У к а з а н и е. Решением квадратного уравнения является значение $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; учитывая условие $\sin 2x \neq 1$, получим серию $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Р е ш е н и е. Область определения содержит условие неравенства нулю знаменателя:

$$2\sin x\cos x \neq 1 \iff \sin 2x \neq 1 \iff x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Преобразуем уравнение, умножив левую и правую части на знаменатель:

$$1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = \sin 2x - 1 \iff 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2} > 1; \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Области определения принадлежит только вторая серия $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

О т в е т. $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Задача 17. (ВМК-91.2)

Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) = 1\,.$

И д е я. Решить уравнение как простейшее с последующим отбором, обусловленным ограниченностью области значений синуса.

У к а з а н и е. Применить формулу приведения $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$, решить уравнение как простейшее для котангенса и выразить синус переменной.

У к а з а н и е. В получившемся уравнении $\sin x = \dfrac{4n-1}{\sqrt{2}},\quad n \in \mathbb{Z}$ выполнить отбор значений функции в правой части с учётом области значений синуса $E(\sin x) = [-1;1]\,.$

Р е ш е н и е. Решим уравнение как простейшее тригонометрическое и произведём отбор значений функции $\sin x$ в соответствии с её областью значений:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right)=1 \iff \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right)=-1 \iff$$

$$\iff \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \iff \sin x=\frac{4n-1}{\sqrt{2}}.$$

Так как $-1\le\sin x\le 1$, то найдем подходящие n:

$$-1\le\frac{4n-1}{\sqrt{2}}\le 1 \iff \frac{1-\sqrt{2}}{4}\le n\le\frac{1+\sqrt{2}}{4};$$

неравенствам удовлетворяет единственное значение $n=0$; значит,

$$\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \iff x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$$

О т в е т. $(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

Задача 18. (Физ-00(2).1)

Решить уравнение $\dfrac{\cos 6x}{\cos 2x}+6\sin 2x+1=0$.

И д е я. Привести левую часть к общему знаменателю, применить формулу преобразования суммы косинусов, разложить на множители и свести уравнение к квадратному.

У к а з а н и е. Формула преобразования суммы косинусов в произведение $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

У к а з а н и е. После приведения к общему знаменателю и преобразования в числителе суммы косинусов получается уравнение $\dfrac{\cos 2x(2\sin^2 2x-3\sin 2x-1)}{\cos 2x}=0$.

У к а з а н и е. После решения уравнения необходимо отобрать корни.

Р е ш е н и е. Приведём выражение в левой части к общему знаменателю и преобразуем сумму косинусов:

$$\frac{\cos 6x+6\sin 2x\cos 2x+\cos 2x}{\cos 2x}=0 \iff \frac{2\cos 4x\cos 2x+6\sin 2x\cos 2x}{\cos 2x}=0 \iff$$

$$\iff \frac{\cos 2x(\cos 4x+3\sin 2x)}{\cos 2x}=0 \iff \begin{cases}\cos 4x+3\sin 2x=0,\\ \cos 2x\ne 0;\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}2\sin^2 2x-3\sin 2x-1=0,\\ \cos 2x\ne 0;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{aligned}&\sin 2x=\frac{3-\sqrt{17}}{4};\\ &\sin 2x=\frac{3+\sqrt{17}}{4}>1;\end{aligned}\right.\\ \cos 2x\ne 0;\end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{17}-3}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{17}-3}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Задача 19. (Псих-82.3)

Решить уравнение $2\sin x - \sqrt[4]{3} = (\sqrt{2} - \sqrt[4]{12})\sqrt{\sin x}$.

Идея. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно $\sqrt{\sin x}$ и решить его стандартным способом с последующим отбором решений.
Указание. Квадратное уравнение $2\sin x - \left(\sqrt{2} - \sqrt[4]{12}\right)\sqrt{\sin x} - \sqrt[4]{3} = 0$ имеет решение $\sqrt{\sin x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Уравнение является квадратным относительно $\sqrt{\sin x} \geq 0$:

$$2\sin x - \left(\sqrt{2} - \sqrt[4]{12}\right)\sqrt{\sin x} - \sqrt[4]{3} = 0;$$

вычислим дискриминант:

$$D = 2 + \sqrt{12} - 2\sqrt{2}\sqrt[4]{12} + 8\sqrt[4]{3} = 2 + \sqrt{12} - 4\sqrt[4]{3} + 8\sqrt[4]{3} = \left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{12}\right)^2;$$

корни уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\sin x} = -\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2} < 0; \\ \sqrt{\sin x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{array}\right. \iff \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \iff \quad x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $(-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 20. (Экон-89.4)

Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

Идея. Рассмотреть уравнение как простейшее относительно тангенса, выразить синус и произвести отбор значений в соответствии с областью значений синуса, после чего дополнительно отобрать решения в заданном интервале.
Указание. Из уравнения получаем $\sin x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{4} \in [-1;1]$, $n \in \mathbb{Z}$. Этому условию соответствует лишь $n = 0$ и $n = -1$.
Указание. Отбор решений $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ из уравнений $\sin x = \dfrac{\pi}{12}$ и $\sin x = -\dfrac{\pi}{6}$ удобнее всего делать с привлечением тригонометрической окружности без непосредственного решения самих уравнений.

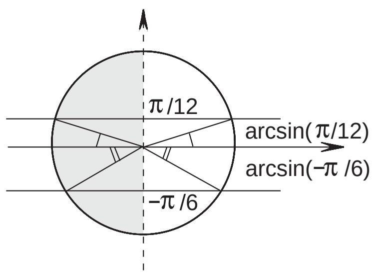
Р е ш е н и е. Решая уравнение как простейшее тригонометрическое относительно тангенса, получаем

$$4\sin x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Так как $-1 \le \sin x \le 1$, то найдем подходящие n:

$$-1 \le \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4} \le 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{12+\pi}{3\pi} \le n \le \frac{12-\pi}{3\pi}.$$

Так как $-2 < -\dfrac{12+\pi}{3\pi} < -1$ и $0 < \dfrac{12-\pi}{3\pi} < 1$, то подходят $n = -1$ и $n = 0$, значит, $\sin x = \dfrac{\pi}{12}$ или $\sin x = -\dfrac{\pi}{6}$.



Изобразив решения этих уравнений на тригонометрической окружности и отобрав $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, получаем $x = \pi - \arcsin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ или $x = \pi + \arcsin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

О т в е т. $\pi - \arcsin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$; $\pi + \arcsin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. Стандартные текстовые задачи

4.1. Пропорциональные величины

Задача 1. (ЕГЭ)

На склад привезли 126 тонн яблок, груш и слив. Яблок оказалось в 4 раза больше, чем груш. Слив на 18 тонн меньше, чем груш. Сколько тонн яблок привезли на склад?

И д е я. Обозначить за неизвестную величину массу груш, выразить через неё массу яблок и слив.

У к а з а н и е. Пусть x тонн – масса привезённых на склад груш; тогда яблок привезли $4x$ тонн, слив $x - 18$ тонн.

У к а з а н и е. Уравнение задачи $x + 4x + x - 18 = 126$.

Р е ш е н и е. Пусть x тонн груш привезли на склад, тогда яблок привезено $4x$ тонн, слив $x - 18$ тонн;

$$x + 4x + x - 18 = 126 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x = 144 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 24;$$

яблок привезено $4x = 96$ тонн.

О т в е т. 96 тонн.

Задача 2. (Почв-84.1)

Площади участков земли относятся как $4:3:5$. Средняя урожайность всех трёх участков одинакова и составляет 28 ц зерна с гектара. Известно, что с третьего участка собрано на 84 ц зерна больше, чем с первого. Определить, какова площадь каждого из трёх участков.

И д е я. Обозначить за неизвестную величину одну часть площади.
У к а з а н и е. Пусть x га – одна часть площади, тогда $S_1 : S_2 : S_3 = 4x : 3x : 5x$.
У к а з а н и е. Средняя урожайность равна отношению всего собранного урожая к занимаемой площади.
У к а з а н и е. Уравнение задачи $28 \cdot 5x = 28 \cdot 4x + 84$, откуда $x = 3$.

Р е ш е н и е. Пусть x га – одна часть площади, тогда $S_1 = 4x$, $S_2 = 3x$, $S_3 = 5x$. Тогда из условия получаем уравнение:

$$28 \cdot 5x = 28 \cdot 4x + 84 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3 \quad \Longrightarrow \quad S_1 = 12 \text{ га}, \quad S_2 = 9 \text{ га}, \quad S_3 = 15 \text{ га}.$$

О т в е т. 12 га; 9 га; 15 га.

Задача 3. (Почв-93.1)

Представить число 128 в виде суммы четырёх слагаемых так, чтобы первое слагаемое относилось ко второму как $2:3$, второе к третьему как $3:5$, а третье к четвёртому – как $5:6$.

И д е я. Обозначить за неизвестную величину одну часть каждого из чисел.
У к а з а н и е. Из попарных соотношений для чисел получается, что они относятся как $2:3:5:6$. Если обозначить через x одну часть каждого из чисел, то уравнение задачи принимает вид $2x + 3x + 5x + 6x = 128$.

Р е ш е н и е. Из попарных соотношений получаем, что четыре числа относятся как $2:3:5:6$. Пусть x единиц – одна часть. Тогда числа будут равны, соответственно, $2x, 3x, 5x$ и $6x$. Из условия получаем уравнение:

$$2x + 3x + 5x + 6x = 128 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 8.$$

Значит, искомые числа есть 16; 24; 40; 48.

О т в е т. $16 + 24 + 40 + 48$.

Задача 4. (Почв-94(1).1)

С двух полей, первое из которых по площади вдвое меньше второго, собрали урожай свёклы. Средняя урожайность составила 150 ц/га, в то время как на первом поле собрали по 156 ц/га. Какова урожайность свёклы на втором поле?

Идея. Обозначить за неизвестные величины площадь первого поля и урожайность второго поля. Выразить через них среднюю урожайность, равную 150 ц/га.
Указание. Средняя урожайность есть отношение всего урожая к общей площади полей.

Решение. Пусть x га – площадь первого поля; k ц/га – урожайность второго поля, тогда площадь второго поля равна $2x$ га и

$$\frac{156x + 2kx}{x + 2x} = 150 \quad \Longleftrightarrow \quad 2k + 156 = 450 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 147.$$

Ответ. 147 ц/га.

Задача 5. (Почв-92.2)

Самолёт, осуществляя полёт по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях А, Б или В с одной и той же скоростью, но по-разному расходуя горючее. В первый раз самолёт находился в метеоусловиях А половину полётного времени, в метеоусловиях Б – треть времени, в метеоусловиях В – 1/6 полётного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях А и 3/4 – в метеоусловиях В. В третий раз – по четверти полётного времени в метеоусловиях А и Б, а половину времени – в метеоусловиях В. На сколько процентов израсходует самолёт полётный норматив горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях В, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\,\%$, во второй раз – на 92,5 %, а в третий – на 97,5 %?

Идея. Обозначить за неизвестные величины расход горючего по нормативу и расход горючего при движении в каждом из метеоусловий всё полётное время. Составить систему из трёх уравнений с четырьмя неизвестными.
Указание. С помощью подходящей замены свести систему из трёх уравнений с четырьмя неизвестными к системе из трёх уравнений с тремя неизвестными.

Решение. Пусть k л – полётный норматив горючего на всё время полёта. Пусть x, y и z л горючего расходует самолёт, двигаясь всё время полёта, находясь в метеоусловиях А, Б и В соответственно. Наша цель – найти $\frac{z}{k} \cdot 100\,\%$. Согласно условию задачи

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = \dfrac{101\frac{2}{3}}{100} \cdot k, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{3z}{4} = \dfrac{92,5}{100} \cdot k, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{97,5}{100} \cdot k. \end{cases}$$

Обозначив $a = \dfrac{100x}{k}$, $b = \dfrac{100y}{k}$, $c = \dfrac{100z}{k}$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{6} = \dfrac{305}{3}, \\ \dfrac{a}{4} + \dfrac{3c}{4} = 92,5, \\ \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{2} = 97,5; \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 2b + c = 610, \\ a + 3c = 370, \\ a + b + 2c = 390. \end{cases}$$

Теперь вычтем из первого уравнения третье, умноженное на два:

$$\begin{cases} a - 3c = -170, \\ a + 3c = 370; \end{cases}$$

вычтем из второго первое: $6c = 540 \iff c = 90.$

Ответ. 90 %.

Задача 6. (Соц-98.3)

В городе N 9 % коренного населения в зимний период заняты народным промыслом. Летом 36 % коренного населения уезжает из города, но общая численность за счёт приезжающих туристов составляет $4/5$ от численности населения в зимний период. Определить, какая часть от общей численности населения в летний период занята народным промыслом, если среди коренного населения доля занятых народным промыслом осталась такой же, как в зимний период.

Идея. Обозначить за переменную количество коренного населения.
Указание. Если x человек – коренное население, то промыслом зимой заняты $0,09x$ человек, а летом $0,09 \cdot 0,64x$ человек.

Решение. Пусть x человек – коренное население; $0,09x$ человек заняты промыслом зимой; $\dfrac{4}{5}x$ человек остаётся летом, среди которых $0,09 \cdot 0,64x$ заняты промыслом; доля их от общего числа:

$$\lambda = \frac{0,09 \cdot 0,64x}{\frac{4}{5}x} = \frac{5 \cdot 0,09 \cdot 0,64}{4} = 0,8 \cdot 0,09 = 0,072.$$

Таким образом, получается 7,2 %.

Ответ. 7,2 %.

4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Задача 1. (ЕГЭ)

Сумма второго, девятого и десятого члена арифметической прогрессии равна 60. Найдите седьмой член этой прогрессии.

Идея. Используя формулу общего члена арифметической прогрессии, свести условие задачи к уравнению относительно первого члена и разности прогрессии.
Указание. Если a_1 и d – первый член и разность прогрессии соответственно, то $a_2 = a_1 + d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_9 = a_1 + 8d$, $a_{10} = a_1 + 9d$.

Решение. Если a_1 и d – первый член и разность прогрессии соответственно, то $a_2 = a_1 + d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_9 = a_1 + 8d$, $a_{10} = a_1 + 9d$. Тогда из условия получаем:

$$a_2 + a_9 + a_{10} = 3a_1 + 18d = 3(a_1 + 6d) = 3a_7 = 60 \quad \Longleftrightarrow \quad a_7 = 20.$$

Ответ. 20.

Задача 2. (ЕГЭ)

В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $S_6 = 63$, $q = -0,5$. Найдите b_1.

Идея. Используя формулу суммы конечной геометрической прогрессии, свести условие задачи к уравнению относительно первого члена прогрессии.
Указание. Если b_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии ($q \neq 1$), то $S_n = b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Решение. Пусть b_1 – первый член геометрической прогрессии, $q = -0,5$ – знаменатель. Тогда сумма первых шести её членов вычисляется по формуле:

$$S_6 = b_1 \frac{1-q^6}{1-q}.$$

Значит,

$$b_1 \frac{1-(-0,5)^6}{1+0,5} = 63 \quad \Longleftrightarrow \quad b_1 = \frac{63 \cdot 1,5 \cdot 2^6}{2^6 - 1} = \frac{63 \cdot 3 \cdot 64}{2 \cdot 63} = 96.$$

Ответ. 96.

Задача 3. (ЕГЭ)

В арифметической прогрессии (a_n) $a_{87} = -36$, $a_{89} = 142$. Найдите a_{88}.

Идея. Используя свойства арифметической прогрессии, выразить a_{88} через a_{87} и a_{89}.
Указание. По свойству арифметической прогрессии $a_{88} = \dfrac{a_{87} + a_{89}}{2}$.

Решение. По свойству арифметической прогрессии получаем:

$$a_{88} = \frac{a_{87} + a_{89}}{2} = \frac{-36 + 142}{2} = 53.$$

Ответ. 53.

Задача 4. (ЕГЭ)

В геометрической прогрессии $(a_k > 0)$ известно, что $a_{n+m} = 27$, $a_{m-n} = 12$. Найдите a_m.

И д е я. Используя формулу общего члена геометрической, свести условие задачи к уравнению относительно m-го члена прогрессии.
У к а з а н и е. Если a_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии соответственно, то $a_{n+m} = a_1 \cdot q^{n+m-1} = a_m \cdot q^n$, $a_{m-n} = a_1 \cdot q^{m-n-1} = a_m \cdot q^{-n}$, $a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_m^2$.

Р е ш е н и е. Пусть a_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $a_{n+m} = a_1 \cdot q^{n+m-1} = a_m \cdot q^n$, $a_{m-n} = a_1 \cdot q^{m-n-1} = a_m \cdot q^{-n}$. Поэтому получаем:

$$a_{n+m} \cdot a_{n-m} = a_m^2 = 27 \cdot 12 = 18^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |a_m| = 18.$$

По условию все члены прогрессии положительны, поэтому $a_m = 18$.

О т в е т. 18.

Задача 5. (ЕГЭ)

Вычислите $\dfrac{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{13}}{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^6}$.

И д е я. Использовать формулы суммы геометрической прогрессии для преобразования выражений в числителе и знаменателе дроби и формулы сокращённого умножения.
У к а з а н и е. Выражение в числителе есть сумма 14-ти членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 2$; в знаменателе дроби – сумма семи членов той же прогрессии.
У к а з а н и е. Пусть b_1 и $q \neq 1$ – первый член и знаменатель геометрической прогрессии; тогда $S_n = b_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Р е ш е н и е. В числителе дроби – сумма 14-ти членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 2$; в знаменателе дроби – сумма семи членов той же прогрессии. Для преобразования выражения воспользуемся формулой суммы конечного числа членов геометрической прогрессии:

$$\frac{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{13}}{1 + 2 + 2^2 + ... + 2^6} = \frac{1 \cdot \dfrac{1 - 2^{14}}{1 - 2}}{1 \cdot \dfrac{1 - 2^7}{1 - 2}} = \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2^7} = \frac{2^{14} - 1}{2^7 - 1}.$$

Разложим выражение в числителе на множители по формуле разности квадратов:

$$\frac{2^{14} - 1}{2^7 - 1} = \frac{\left(2^7 - 1\right)\left(2^7 + 1\right)}{2^7 - 1} = 2^7 + 1 = 129.$$

О т в е т. 129.

Задача 6. (ЕГЭ)

Вычислите $180 \cdot 1,3(4)$.

И д е я. Представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде рационального числа, воспользовавшись формулой суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.
У к а з а н и е. Представить число $1,3(4)$ в виде

$$1,3(4) = 1,3 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + ... = 1,3 + S,$$

где через S обозначена сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 0,04$ и знаменателем $q = 0,1$.
У к а з а н и е. Сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем $|q| < 1$ вычисляется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Р е ш е н и е. Представим второй сомножитель в виде рационального числа, воспользовавшись формулой суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 0,04$ и знаменателем $q = 0,1$:

$$180 \cdot 1,3(4) = 180 \cdot (1,3 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + ...) = 180 \cdot \left(1,3 + \frac{0,04}{1-0,1}\right) =$$

$$= 180 \cdot \left(\frac{13}{10} + \frac{4}{90}\right) = 180 \cdot \frac{13 \cdot 9 + 4}{90} = 2 \cdot (117 + 4) = 2 \cdot 121 = 242.$$

О т в е т. 242.

Задача 7. (ЕГЭ)

Вычислите сумму геометрической прогрессии $S = 1 + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{36} + ...$.

И д е я. Воспользоваться формулой суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.
У к а з а н и е. Сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем $|q| < 1$ вычисляется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \dfrac{1}{6}$:

$$S = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}.$$

О т в е т. 1,2.

Задача 8. (Физ-79.2)

Седьмой член арифметической прогрессии равен 21, а сумма первых семи членов этой прогрессии равна 105. Найти первый член и разность этой прогрессии.

Идея. Используя формулы общего члена и суммы арифметической прогрессии, свести условие задачи к решению системы уравнений относительно первого члена и разности прогрессии.
Указание. Если a_1 и d – первый член и разность арифметической прогрессии соответственно, то $a_7 = a_1 + 6d$ и $S_7 = \dfrac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7$.

Решение. Если a_1 и d – первый член и разность арифметической прогрессии соответственно, то $a_7 = a_1 + 6d$ и $S_7 = \dfrac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7$. Тогда из условия получаем систему:

$$\begin{cases} a_1 + 6d = 21, \\ (a_1 + 3d) \cdot 7 = 105; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + 6d = 21, \\ a_1 + 3d = 15; \end{cases} \iff \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = 9. \end{cases}$$

Ответ. $a_1 = 9$; $d = 2$.

Задача 9. (Экон-87.2)

В магазине продано 12 тонн орехов трёх сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

Идея. Обозначить за неизвестные величины массу проданных орехов второго сорта и разность арифметической прогрессии, после чего составить уравнения относительно массы и общей суммы.
Указание. Если a тонн орехов второго сорта продали и d тонн – разность арифметической прогрессии, то первого сорта продано $a-d$ тонн, а третьего $a+d$ тонн.

Решение. Пусть продали a тонн орехов второго сорта и d – разность арифметической прогрессии, то первого сорта продано $a - d$ тонн, а третьего $a + d$ тонн.

Всего продано 12 тонн орехов. Значит, $a-d+a+a+d = 12 \implies a = 4$ тонны.

Общая сумма – 42 тыс. руб. Значит,

$$2 \cdot (a - d) \cdot 1000 + 4 \cdot a \cdot 1000 + 6(a + d) \cdot 1000 = 42000,$$

так как в одной тонне 1000 кг. С учётом $a = 4$ получаем:

$$2(4 - d) + 16 + 6(4 + d) = 42 \iff 4d + 48 = 42 \iff d = -1,5.$$

Следовательно, $a + d = 2,5$ тонны, $a - d = 5,5$ тонны.

Ответ. 5,5 тонны; 4 тонны; 2,5 тонны.

Задача 10. (ВМК-88.1)

Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

Идея. Применить формулы общего члена и суммы арифметической прогрессии.
Указание. Если a_1 и d – первый член и разность прогрессии, то

$$a_n = a_1+(n-1)d,\ S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n \implies S_{20} = \frac{2a_1+19d}{2}\cdot 20 = 10(2a_1+19d).$$

Решение. Пусть a_1 и d – первый член арифметической прогрессии и её разность соответственно. Тогда надо найти

$$S_{20} = \frac{2a_1+19d}{2}\cdot 20 = 10(2a_1+19d).$$

Из условия получаем

$$10 = a_3+a_7+a_{14}+a_{18} = a_1+2d+a_1+6d+a_1+13d+a_1+17d = 2(2a_1+19d),$$

то есть $2a_1+19d = 5$. Поэтому

$$S_{20} = 10(2a_1+19d) = 10\cdot 5 = 50.$$

Ответ. 50.

Задача 11. (ИСАА-93.2)

Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи членов этой прогрессии.

Идея. Применить формулы общего члена и суммы арифметической прогрессии.
Указание. Формула n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1+(n-1)d$, формула суммы первых n членов $S_n = \dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$, где a_1 и d – первый член и разность прогрессии соответственно.

Решение. Если a_1 и d – первый член и разность прогрессии соответственно, то надо найти:

$$S_7 = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7.$$

Из условия получаем:

$$a_3+a_5 = a_1+2d+a_1+4d = 2a_1+6d = 8.$$

Поэтому $S_7 = \dfrac{8}{2}\cdot 7 = 28$.

Ответ. 28.

Задача 12. (ВМК-96.1)

Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a+d=10$, $a\cdot d=7$. Найти b^3+c^3.

Идея. Обозначить за неизвестные величины первый член и знаменатель прогрессии, после чего выразить через них искомую сумму и использовать условия задачи.
Указание. Пусть p и q – первый член и знаменатель прогрессии, тогда $b^3+c^3=(pq)^3+(pq^2)^3=p^3q^3(1+q^3)$.
Указание. Из того, что $a+d=p+pq^3=p(1+q^3)=10$ и $ad=p\cdot pq^3=p^2q^3=7$, получаем ответ.

Решение. Пусть p и q – первый член и знаменатель прогрессии, тогда

$$a+d=p+pq^3=p(1+q^3)=10 \quad \text{и} \quad ad=p\cdot pq^3=p^2q^3=7;$$

отсюда $b^3+c^3=(pq)^3+(pq^2)^3=p^3q^3(1+q^3)=p(1+q^3)\cdot p^2q^3=10\cdot 7=70.$

Ответ. 70.

Задача 13. (Геогр-91.3)

Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел (в том же порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1+a_2+a_3=21$.

Идея. Удобно выразить a_1 и a_3 через a_2 и разность арифметической прогрессии d и составить уравнения с этими неизвестными.
Указание. Из условия $a_1+a_2+a_3=21$ можно найти a_2.

Решение. Поскольку $a_1=a_2-d$ и $a_3=a_2+d$, из условия $a_1+a_2+a_3=21$ следует, что $a_2=7$.

Так как числа a_1^2, a_2^2, a_3^2 образуют геометрическую прогрессию, то

$$a_2^4=a_1^2\cdot a_3^2 \iff 7^4=(7-d)^2(7+d)^2 \iff 7^2=|(7-d)(7+d)| \iff 49=|49-d^2|,$$

откуда $d=0$ или $d=\pm 7\sqrt{2}$. В результате получаем ответ.

Ответ. $a_1=a_2=a_3=7$; $a_1=7\left(1-\sqrt{2}\right)$, $a_2=7$, $a_3=7\left(1+\sqrt{2}\right)$; $a_1=7\left(1+\sqrt{2}\right)$, $a_2=7$, $a_3=7\left(1-\sqrt{2}\right)$.

Задача 14. (Физ-92.5)

Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

И д е я. Используя формулы общего члена арифметической прогрессии, свести решение задачи к системе уравнений относительно первого члена и разности прогрессии.
У к а з а н и е. Если a_1 и d – первый член и разность прогрессии соответственно, то по формуле $a_n = a_1+(n-1)d$ получаем $a_5+a_9 = 2a_1+12d$, $a_7+a_{13} = 2a_1+18d$.

Р е ш е н и е. Пусть a_1 и d – первый член и разность арифметической прогрессии соответственно, тогда из формулы общего члена получаем

$$\begin{cases} a_5 + a_9 = 40, \\ a_7 + a_{13} = 58; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + 4d + a_1 + 8d = 40, \\ a_1 + 6d + a_1 + 12d = 58; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + 6d = 20, \\ a_1 + 9d = 29; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3d = 9, \\ a_1 + 18 = 20; \end{cases} \iff \begin{cases} d = 3, \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

О т в е т. $a_1 = 2$; $d = 3$.

Задача 15. (ВМК-95(1).1)

В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четвёртого по четырнадцатый включительно равна 77. Найти номер того члена прогрессии, который равен 7.

И д е я. Использовать формулы общего члена и суммы первых членов арифметической прогрессии в сравнительном анализе.
У к а з а н и е. Сумму членов арифметической прогрессии с четвёртого по четырнадцатый удобнее искать как разность $S_{14}-S_3$, где $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ – сумма первых n членов, a_1 и d - первый член прогрессии и её разность соответственно.

Р е ш е н и е. Пусть a_1 и d – первый член и разность прогрессии соответственно. Сумму членов арифметической прогрессии с четвёртого по четырнадцатый будем искать как разность $S_{14} - S_3$:

$$S_{14} - S_3 = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 - \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 7(2a_1 + 13d) - 3(a_1 + d) =$$

$$= 11a_1 + 88d = 11(a_1 + 8d) = 77.$$

Следовательно, $a_1 + 8d = 7$, то есть $a_9 = 7$ – искомый член прогрессии, поэтому его номер равен 9.

О т в е т. 9.

Задача 16. (Хим-89.2)

Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

Идея. Использовать формулу общего члена арифметической прогрессии для поиска требуемой суммы через первый член и разность прогрессии.
Указание. Формула n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$, где a_1 и d – первый член и разность соответственно; тогда

$$a_1 + a_5 + a_{15} = a_1 + a_1 + 4d + a_1 + 14d = 3a_1 + 18d = 3(a_1 + 6d).$$

Решение. Пусть a_1 и d – первый член прогрессии и её разность соответственно. Найти надо:

$$a_5 + a_9 = a_1 + 4d + a_1 + 8d = 2(a_1 + 6d).$$

Из условия задачи получаем:

$$3 = a_1 + a_5 + a_{15} = 3a_1 + 18d = 3(a_1 + 6d),$$

то есть $a_1 + 6d = 1$. Значит, $a_5 + a_9 = 2(a_1 + 6d) = 2$.

Ответ. 2.

Задача 17. (Почв-95.1)

Первый член арифметической прогрессии в два раза больше первого члена геометрической прогрессии и в пять раз больше второго члена геометрической прогрессии. Четвёртый член арифметической прогрессии составляет 50 % от второго члена арифметической прогрессии. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно, что второй её член больше третьего члена геометрической прогрессии на 36.

Идея. Составить систему уравнений для первых членов прогрессий, разности и знаменателя соответственно через формулы общего члена каждой из прогрессий.
Указание. Если a_1 и d – первый член и разность арифметической прогрессии, то

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad a_4 = a_1 + 3d;$$

если b_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии, то

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \quad b_3 = b_1 q^2.$$

Решение. Пусть a_1 и d – первый член и разность арифметической прогрессии, и b_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии, тогда

$$\begin{cases} a_1 = 2b_1 = 5b_1 q, \\ a_1 + 3d = 0,5(a_1 + d), \\ a_1 + d = b_1 q^2 + 36; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 = \dfrac{a_1}{2}, \\ q = \dfrac{2}{5}, \\ a_1 + 5d = 0, \\ a_1 + d = b_1 q^2 + 36; \end{cases}$$

из третьего уравнения системы выражаем $d = -\dfrac{a_1}{5}$ и подставляем в последнее уравнение b_1, q и d:

$$a_1 - \frac{a_1}{5} = \frac{a_1}{2} \cdot \frac{4}{25} + 36 \iff 18a_1 = 25 \cdot 36 \iff a_1 = 50.$$

Ответ. 50.

Задача 18. (М/м-95(1).1)

Найти первый член геометрической прогрессии, если известно, что третий член этой прогрессии равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом даёт утроенный пятый член.

Идея. Используя формулу общего члена геометрической прогрессии, составить уравнение для первого члена и знаменателя прогрессии.
Указание. Если b_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии соответственно, то $b_n = b_1q^{n-1}$, $b_3 = b_1q^2$, $b_7 = b_1q^6$.

Решение. Пусть b_1 и q – первый член и знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_3 = b_1q^2$, $b_3^2 + b_7 = (b_1q^2)^2 + b_1q^6 = b_1^2q^4 + b_1q^6$, $b_5 = b_1q^4$. Поэтому из условия получаем:

$$\begin{cases} b_1q^2 = -10, \\ b_1^2q^4 + b_1q^6 = 3b_1q^4; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1q^2 = -10, \\ b_1^2 + b_1q^2 = 3b_1; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1q^2 = -10, \\ b_1^2 - 3b_1 - 10 = 0; \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $b_1 = 5$ или $b_1 = -2$, а из первого уравнения системы следует, что $b_1 < 0$. Поэтому $b_1 = -2$.

Ответ. -2.

Задача 19. (Псих-97.3)

В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего её членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найти последний член прогрессии.

Идея. Обозначив за неизвестные величины первый и последний члены прогрессии, выразить через них второй и предпоследний члены прогрессии.
Указание. Если b_1 и b_n – первый и последний члены геометрической прогрессии со знаменателем q, то $b_2 = b_1q$, $b_{n-1} = \dfrac{b_n}{q}$.

Решение. Пусть b_1 и b_n – первый и последний члены геометрической прогрессии со знаменателем $q > 1$ (так как прогрессия возрастает). Тогда из условия задачи получаем:

$$\begin{cases} b_1 + b_n = 164, \\ b_2 \cdot b_{n-1} = 324; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 + b_n = 164, \\ b_1 \cdot q \cdot \dfrac{b_n}{q} = 324; \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 + b_n = 164, \\ b_1 \cdot b_n = 324. \end{cases}$$

Выразим b_1 из первого уравнения и подставим во второе. Получаем

$$(164 - b_n)b_n = 324 \iff b_n^2 - 164b_n + 324 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} b_n = 2; \\ b_n = 162. \end{array} \right.$$

При $b_n = 2$ $b_1 = 162$, то есть прогрессия не является возрастающей. При $b_n = 162$ $b_1 = 2$, то есть прогрессия является возрастающей.

Ответ. 162.

Задача 20. (ВМК-79.1)

Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 3, разность равна 6. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Выяснить, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессии или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии?

Идея. Вычислить требуемые суммы по соответствующим формулам для прогрессии и сравнить получившиеся числа.

Указание. Если a_1 и d – первый член и разность арифметической прогрессии, то сумма первых n членов будет $S_n = a_1 + \cdots + a_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, а в геометрической прогрессии при первом члене b_1 и знаменателе q сумма $S_n = b_1 + \cdots + b_n = b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Решение. В арифметической прогрессии $a_1 = 3,\ d = 6$; в геометрической прогрессии $b_1 = 3,\ q = \sqrt{2}$; тогда

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 3(6+30) = 108;$$

$$S_8 = \frac{b_1(q^8-1)}{q-1} = \frac{3(16-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{45}{\sqrt{2}-1} = 45(\sqrt{2}+1);$$

сравниваем:

$$\begin{array}{rcl} S_6 = 108 & \vee & S_8 = 45(\sqrt{2}+1) \\ 12 & \vee & 5(\sqrt{2}+1) \\ 7 & \vee & 5\sqrt{2} \\ 49 & < & 50, \end{array}$$

то есть $S_6 < S_8$.

Ответ. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии больше суммы первых шести членов арифметической прогрессии.

Задача 21. (М/м-93(1).2)

Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна её первому члену, умноженному на 5, а сумма первых пятнадцати членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.

Идея. Выразить все величины через первый член и знаменатель прогрессии и составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

Указание. Для составления уравнений использовать формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии, а для вычисления искомой величины – формулы сокращённого умножения.

Решение. Пусть b_1 – первый член геометрической прогрессии, q – её знаменатель. Если $q=1$, то $S_{15}=15b_1=100 \Rightarrow b_1=20/3 \Rightarrow b_1+b_6+b_{11}=3b_1=20$.

Если $q\neq 1$, то $S_n=b_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ и согласно условию задачи

$$\begin{cases} b_1\dfrac{1-q^5}{1-q}=5b_1,\\ b_1\dfrac{1-q^{15}}{1-q}=100.\end{cases}$$

Искомая величина равна $b_1+b_6+b_{11}=b_1(1+q^5+q^{10})$. Во втором уравнении системы заменим $1-q^{15}$ на $(1-q^5)(1+q^5+q^{10})$ (воспользовались формулой разности кубов) и поделим второе уравнение на первое, получим

$$b_1(1+q^5+q^{10})=20.$$

Ответ. 20.

Задача 22. (Филол-75.4)

Найти сумму корней уравнения $\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1-3\cos^3 x}{\cos^2 x}$, принадлежащих отрезку $1\le x\le 50$.

Идея. Переписав дробь в виде разности и использовав следствие из основного тригонометрического тождества, свести уравнение к квадратному. Сумму корней в заданном отрезке резонно находить по формуле суммы членов арифметической прогрессии.

Указание. Воспользовавшись следствием из основного тригонометрического тождества $\operatorname{tg}^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, привести уравнение к виду $2\cos^2 x+3\cos x-2=0$.

Указание. Решениями являются серии $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ и $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; после отбора значений в отрезок $[1;50]$ получаем $n=1,2,...,8$; $m=0,1,...,7$.

Указание. Серия $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n=1,2,...,8$ задаёт арифметическую прогрессию с $a_1=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi$, $d=2\pi$; серия $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi m$, $m=0,1,...,7$ задаёт арифметическую прогрессию с $a_1=\dfrac{\pi}{3}$, $d=2\pi$.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n.$$

Решение. Преобразуем дробь в правой части:

$$\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-3\cos x.$$

Учитывая, что по следствию из основного тригонометрического тождества

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1,$$

и используя формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, получаем:

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -2 < -1; \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Подставляем серии решений в требуемый отрезок:

1) $-1 \le -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \le 50,\ n \in \mathbb{Z} \iff \dfrac{\pi - 3}{6\pi} \le n \le \dfrac{\pi + 150}{6\pi},\ n \in \mathbb{Z}.$

Так как $0 < \dfrac{\pi - 3}{6\pi} < 1$ и $8 < \dfrac{\pi + 150}{6\pi} < 9$, то $n = 1, 2, ..., 8$. Эта серия задаёт арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi$ и разностью $d = 2\pi$. По формуле суммы первых восьми членов арифметической прогрессии получаем:

$$A = S_8 = \frac{2\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\right) + 7 \cdot 2\pi}{2} \cdot 8 = 4\left(18\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = 72\pi - \frac{8\pi}{3};$$

2) $1 \le \dfrac{\pi}{3} + 2\pi m \le 50,\quad m \in \mathbb{Z} \iff \dfrac{3 - \pi}{6\pi} \le m \le \dfrac{150 - \pi}{6\pi},\ m \in \mathbb{Z}.$

Так как $-1 < \dfrac{3 - \pi}{6\pi} < 0$ и $7 < \dfrac{150 - \pi}{6\pi} < 8$, то $m = 0, 2, ..., 7$. Эта серия задаёт арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = \dfrac{\pi}{3}$ и разностью $d = 2\pi$. По формуле суммы первых восьми её членов получаем:

$$B = S_8 = \frac{2 \cdot \dfrac{\pi}{3} + 7 \cdot 2\pi}{2} \cdot 8 = 4\left(14\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 56\pi + \frac{8\pi}{3}.$$

Искомая сумма всех решений исходного уравнения:

$$A + B = 72\pi - \frac{8\pi}{3} + 56\pi + \frac{8\pi}{3} = 128\pi.$$

Ответ. 128π.

4.3. Скорость, движение и время

Задача 1. (ЕГЭ)

Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

Идея. Обозначить за неизвестную величину скорость мотоциклиста, выраженную в км/ч, и составить уравнение.

Указание. Пусть x км/ч – скорость мотоциклиста, тогда скорость велосипедиста равна: $x - 60 \cdot 0,8 = x - 48$ км/ч.

Указание. Уравнение задачи имеет вид $\dfrac{30}{x} + 2 = \dfrac{30}{x-48}$.

Решение. Если x км/ч – скорость мотоциклиста, то скорость велосипедиста будет равна $x - 0,8 \cdot 60 = x - 48$ км/ч. Тогда из условия получаем уравнение:

$$\frac{30}{x} + 2 = \frac{30}{x-48} \iff \frac{2x+30}{x} = \frac{30}{x-48} \iff$$

$$\iff (x+15)(x-48) = 15x \iff x^2 - 48x - 720 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 60; \\ x = -12 < 0; \end{array}\right.$$

значит, скорость мотоциклиста равна 60 км/ч.

Ответ. 60 км/ч.

Задача 2. (ЕГЭ)

Моторная лодка прошла 10 км по озеру и 4 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Идея. Обозначить за неизвестную величину собственную скорость лодки и составить соответствующее уравнение.

Указание. При движении по озеру скорость лодки равна её собственной скорости, при движении против течения реки скорости лодки и течения вычитаются.

Решение. Пусть x км/ч – собственная скорость лодки, тогда время движения по озеру равно $\dfrac{10}{x}$, а время движения против течения реки равно $\dfrac{4}{x-3}$. Составим уравнение:

$$\frac{10}{x} + \frac{4}{x-3} = 1 \iff x^2 - 17x + 30 = 0.$$

Корни этого уравнения равны 15 и 2. При собственной скорости 2 км/ч лодка не сможет двигаться против течения реки. Значит, $x = 15$ км/ч.

Ответ. 15 км/ч.

Задача 3. (ЕГЭ)

Два пешехода отправляются одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 50 км, и встречаются через 5 ч. Определите скорость первого пешехода, если его скорость на 2 км/ч больше, чем у другого.

Идея. Обозначить за неизвестную величину скорость первого пешехода.

Указание. При движении навстречу скорость сближения пешеходов равна сумме их скоростей.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч – скорость первого пешехода, тогда $x-2$ км/ч – скорость второго пешехода. Так как пешеходы встретились через 5 часов, пройдя 50 км, то

$$(x+x-2)\cdot 5 = 50 \quad \Longleftrightarrow \quad x=6.$$

О т в е т. 6 км/ч.

Задача 4. (Почв-82.1)

Из пункта А в пункт В отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из В в А вышел товарный поезд, который встретился со скорым через 2/3 часа после отправления. Расстояние между пунктами А и В равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он шёл на 3/8 часа дольше, чем товарный поезд шёл 5 км?

И д е я. Обозначить за неизвестные величины скорости поездов и составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.
У к а з а н и е. При движении навстречу скорости складываются.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч – скорость скорого поезда, а y км/ч – скорость товарного. Так как поезда встретились через 2/3 часа, пройдя 80 км, то

$$(x+y)\cdot\frac{2}{3} = 80.$$

Поскольку скорый поезд шёл 40 км на 3/8 часа дольше, чем товарный поезд шёл 5 км, то

$$\frac{40}{x} = \frac{5}{y} + \frac{3}{8}.$$

Выразим из первого уравнения $y = 120 - x$ и подставим во второе уравнение:

$$\frac{40}{x} = \frac{5}{120-x} + \frac{3}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 240x + 12800 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=160; \\ x=80. \end{array}\right.$$

При $x=160$ $y=120-180<0$, при $x=80$ $y=120-80=40$ – подходит.

О т в е т. 80 км/ч.

Задача 5. (Геогр-78.1)

Пароход, отчалив от пристани А, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани В. Весь путь от А до В пароход прошёл за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода. (Собственная скорость – скорость в неподвижной воде.)

И д е я. Обозначить за неизвестную величину собственную скорость парохода и составить соответствующее уравнение.
У к а з а н и е. При движении по течению реки скорости складываются, при движении против течения скорости вычитаются.

Решение. Пусть v км/ч – собственная скорость парохода, тогда время движения по течению равно $\dfrac{60}{v+1}$, а время движения против течения по притоку равно $\dfrac{20}{v-1}$. Так как на весь путь ушло 7 часов, то

$$\frac{60}{v+1}+\frac{20}{v-1}=7 \quad \Longleftrightarrow \quad 7v^2-80v+33=0.$$

Корни этого уравнения равны 11 и 3/7. Так как скорость парохода должна быть больше скорости течения, то значение 3/7 не подходит.

Ответ. 11 км/ч.

Задача 6. (Филол-99.1)

Расстояние в 160 км между пунктами А и Б автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, со скоростью 20 км/ч. Какое расстояние автомобиль проехал по ровной дороге?

Идея. Вычислить время, за которое автомобиль проехал весь путь. Обозначить за неизвестную величину длину участка с ровной дорогой, выразить время движения по каждому из участков через эту неизвестную и приравнять сумму времён общему времени движения.
Указание. Средняя скорость есть отношение всего пути ко всему времени движения.

Решение. Средняя скорость $V_{\text{ср}}=\dfrac{S}{t} \quad \Longrightarrow \quad t=\dfrac{160}{40}=4$ ч – время в пути; пусть a км – часть пути с ровной дорогой, тогда

$$\frac{a}{80}+\frac{160-a}{20}=4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a}{20}-\frac{a}{80}=4 \quad \Longleftrightarrow \quad a=\frac{320}{3}=106\frac{2}{3} \text{ км.}$$

Ответ. $106\frac{2}{3}$ км.

Задача 7. (Геогр-95.2)

Теплоход затратил 5 часов на путь вниз по течению реки от пункта А до пункта В. На обратный путь против течения он затратил 8 часов 20 минут. Найти скорость теплохода, если путь от А до В равен 100 километрам.

Идея. Составить уравнения с учётом влияния на скорость теплохода течения реки.
Указание. Если x км/ч и y км/ч – скорости теплохода и течения реки соответственно, то при движении по течению общая скорость равна $x+y$ км/ч, тогда как против течения $x-y$ км/ч.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч и y км/ч – скорости теплохода и течения реки соответственно. Тогда время при движении вниз по течению $\dfrac{100}{x+y} = 5$, а вверх по течению $\dfrac{100}{x-y} = 8 + \dfrac{20}{60}$. В результате получаем систему:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 12; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 2x = 32 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 16 \text{ км/ч}.$$

О т в е т. 16 км/ч.

Задача 8. (ВМК-97.1)

Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению реки. Расстояние между A и B равно 4 км, а между B и C – 14 км. В 12^{00} из пункта B отплыла лодка и отправилась в A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула и в 14^{00} того же дня прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде.

И д е я. Обозначить скорость лодки в стоячей воде за неизвестную величину. При движении вниз по реке скорость лодки в стоячей воде суммируется со скоростью реки, а при движении против течения берётся разность скоростей.
У к а з а н и е. Если x км/ч – скорость лодки, то на пути из пункта B в пункт A общая скорость $x - 5$ км/ч, тогда как обратно $x + 5$ км/ч.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч – скорость лодки в стоячей воде. Так как весь маршрут занял два часа, то

$$\frac{4}{x-5} + \frac{4+14}{x+5} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 25 = 2x + 10 + 9x - 45 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 11x + 10 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 10; \\ x = 1 < 5 \text{ – не подходит по смыслу задачи.} \end{array} \right.$$

О т в е т. 10 км/ч.

Задача 9. (Хим-78.2)

Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провёл в пути от A до B грузовой автомобиль?

И д е я. Обозначить за неизвестные величины скорости автомобилей и весь путь, после чего составить уравнение об одновременных событиях.

Указание. Если x км/ч и y км/ч – скорости грузового и легкового автомобилей соответственно, то на пути в S км при одновременном выезде навстречу друг другу время до встречи равно $\dfrac{S}{x+y}$ часов.

Решение. Пусть x км/ч – скорость грузовика, y км/ч – скорость легкового автомобиля, S км – весь путь. Из условия одновременного прибытия в пункт В получаем $\dfrac{S}{x}=\dfrac{S}{y}+1$, а из условия движения навстречу друг другу получаем $\dfrac{S}{x+y}=1\dfrac{12}{60}$. Найти надо $\dfrac{S}{x}$ ч. Введём новые переменные $t=\dfrac{S}{x}$ и $u=\dfrac{S}{y}$. Тогда получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{S}{x}=\dfrac{S}{y}+1,\\ \dfrac{x+y}{S}=\dfrac{5}{6};\end{cases} \iff \begin{cases}t=u+1,\\ \dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{5}{6};\end{cases} \iff \begin{cases}u=t-1,\\ 6(u+t)=5ut.\end{cases}$$

Подставим u во второе уравнение:

$$6(2t-1)=5t(t-1) \iff 5t^2-17t+6=0 \iff t=\frac{17\pm 13}{10} \iff \left[\begin{array}{l}t=0,4;\\ t=3.\end{array}\right.$$

Если $t=0,4$ ч, то $u=t-1<0$, что не подходит по смыслу $\Longrightarrow$ $t=3$ ч.

Ответ. 3 часа.

Задача 10. (Экон.К-77.2)

Из пункта А в пункт В выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал 1/4 пути между А и В, из В в А выехал мотоциклист, который, прибыв в А, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в В. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из А в В. Считая скорости мотоциклиста при движении из А в В и из В в А различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из А в В больше скорости велосипедиста.

Идея. Обозначить за неизвестные величины весь путь, скорость велосипедиста и две скорости мотоциклиста, после чего составить систему из двух уравнений.
Указание. Свести задачу к системе из двух уравнений с двумя неизвестными с помощью подходящей замены.

Решение. Пусть u км/ч – скорость велосипедиста, v_1 км/ч – скорость мотоциклиста из В в А, v_2 км/ч – скорость мотоциклиста из А в В, S км – весь путь. В тот момент, когда велосипедист проехал 1/4 пути между А и В, из В в А выехал мотоциклист, который, прибыв в А, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в В. Следовательно,

$$\frac{\frac{3}{4}S}{u}=\frac{S}{v_1}+\frac{S}{v_2}.$$

Так как время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из А в В, то

$$\frac{\frac{3}{4}S}{u+v_1} = \frac{S}{v_2}.$$

Обозначим $a = v_1/u$, $b = v_2/u$. Тогда, сократив на S, получим

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{3}{4(1+a)} = \dfrac{1}{b}. \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения a через b и подставив в первое, получим уравнение для b:

$$9b^2 - 40b + 16 = 0.$$

Корень $b = 4/9$ не подходит, так как отношение скорости мотоциклиста к скорости велосипедиста должно быть больше 1. Второй корень $b = 4$ годится.

О т в е т. В 4 раза.

Задача 11. (Геогр-99.3)

По реке из пункта А в пункт В выплыл катер. Одновременно из пункта В в пункт А выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от В к А, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта В, повернул обратно и прибыл в пункт А одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

И д е я. Обозначить за неизвестные величины скорости катера, лодки и течения, а также весь путь. Предположить любое из возможных направлений течения, используя при необходимости противоположный знак его скорости.
У к а з а н и е. Если x км/ч, y км/ч, u км/ч – скорости лодки, катера и течения соответственно, причём $x > 0$, $y > 0$, $u \neq 0$, то предположив, что u направлена от А к В, получаем уравнение встречи $\dfrac{\frac{3}{4}S}{y+u} = \dfrac{\frac{1}{4}S}{x-u}$, где S км – путь АВ.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч, y км/ч, u км/ч – скорости лодки, катера и течения соответственно, причём считаем, что река течёт от А к В (если получим $u < 0$, то это значит, что течение направлено от В к А); S км – путь АВ. Запишем условие встречи:

$$\frac{\frac{3}{4}S}{y+u} = \frac{\frac{1}{4}S}{x-u}$$

и условие прибытия:

$$\frac{S}{y+u} + \frac{S}{y-u} = \frac{S}{x-u}.$$

Требуется найти отношение скорости катера к скорости лодки y/x;

$$\begin{cases}\dfrac{3}{y+u}=\dfrac{1}{x-u},\\ \dfrac{1}{y+u}+\dfrac{1}{y-u}=\dfrac{1}{x-u};\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{3}{y+u}=\dfrac{1}{x-u},\\ \dfrac{1}{y+u}+\dfrac{1}{y-u}=\dfrac{3}{y+u};\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{3}{y+u}=\dfrac{1}{x-u},\\ \dfrac{1}{y-u}=\dfrac{2}{y+u};\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}3x-3u=y+u,\\ y+u=2y-2u;\end{cases} \iff \begin{cases}3x-y=4u,\\ y=3u.\end{cases}$$

Выразив u из второго уравнения и подставив $u=y/3$ в первое, получим

$$3x-y=\frac{4}{3}y \quad\iff\quad 3x=\frac{7}{3}y \quad\iff\quad \frac{y}{x}=\frac{9}{7}.$$

О т в е т. В $\dfrac{9}{7}$ раза.

Задача 12. (Биол-86.3)

Из пункта А по одному и тому же маршруту одновременно выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкового автомобиля постоянна и составляет $6/5$ скорости грузовика. Через 30 минут вслед за ними из того же пункта выехал мотоциклист со скоростью 90 км/час. Найти скорость легкового автомобиля, если известно, что мотоциклист догнал грузовик на один час раньше, чем легковой автомобиль.

И д е я. Обозначить за неизвестные величины скорость легкового автомобиля и расстояние от начального пункта до точек встречи мотоциклиста с грузовиком, после чего составить уравнения по равенству времён.

У к а з а н и е. Так как встреча мотоциклиста с грузовиком случилась на час раньше встречи мотоциклиста с легковым автомобилем, расстояние между этими двумя точками равно 90 км.

У к а з а н и е. Пусть x км/ч – скорость легкового автомобиля, S км – расстояние от точки А до места встречи мотоцикла и грузовика. Тогда уравнения для встреч примут вид

$$\frac{S}{\frac{5}{6}x}=\frac{S}{90}+\frac{1}{2},\qquad \frac{S+90}{x}=\frac{S+90}{90}+\frac{1}{2},$$

где $\dfrac{5}{6}x$ км/ч – скорость грузовика.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч – скорость легкового автомобиля, S км – расстояние от точки А до места встречи мотоцикла и грузовика. Из условия следует, что $\frac{5}{6}x$ км/ч – скорость грузовика. Так как встреча мотоцикла с автомобилем произошла спустя час от встречи с грузовиком, то за это время мотоцикл проехал 90 км. Поэтому $S+90$ км – расстояние от точки А до места встречи мотоцикла и легкового автомобиля. Тогда согласно условию получаем систему

$$\begin{cases}\dfrac{S}{\frac{5}{6}x}=\dfrac{S}{90}+\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{S+90}{x}=\dfrac{S+90}{90}+\dfrac{1}{2};\end{cases} \iff \begin{cases}S\left(\dfrac{6}{5x}-\dfrac{1}{90}\right)=\dfrac{1}{2},\\ (S+90)\cdot(90-x)=45x.\end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $S = \dfrac{45x}{108-x}$ и подставим во второе:

$$\left(\frac{45x}{108-x}+90\right)(90-x) = 45x \quad\Longleftrightarrow\quad (45x+90(108-x))\cdot(90-x) = 45x(108-x),$$

$$\Longleftrightarrow\quad x^2-207x+90\cdot 108 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=72; \\ x=135>90; \end{array}\right.$$

второе решение не подходит по смыслу задачи.

Ответ. 72 км/ч.

Задача 13. (Хим-79.3)

От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 часов и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянна, скорость плота равна скорости течения реки, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.

Идея. Ввести переменные: скорость пароходов и скорость течения. Составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.
Указание. Обозначить через v км/ч скорость пароходов, через w км/ч – скорость течения. Тогда из условия получаем уравнения:

$$\frac{144}{v+w}+40 = \frac{144}{w}, \qquad \frac{324}{v+w}+18+\frac{324-180}{v-w} = \frac{144}{w}.$$

Указание. Сократить первое уравнение на 8, второе на 18 и ввести новые переменные $a = 18/w$, $b = 18/(v+w)$. Система запишется в виде

$$\begin{cases} b+5 = a, \\ b+1+\dfrac{8}{18}\cdot\dfrac{ab}{a-2b} = \dfrac{8}{18}\cdot a. \end{cases}$$

Решение. Обозначим через v км/ч скорость пароходов, через w км/ч – скорость течения. Так как второй пароход, отплывший из A на 40 часов позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км, то

$$\frac{144}{v+w}+40 = \frac{144}{w}.$$

Первый пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 часов и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Следовательно,

$$\frac{324}{v+w}+18+\frac{324-180}{v-w} = \frac{144}{w}.$$

Сократив первое уравнение на 8, второе на 18, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{18}{v+w} + 5 = \dfrac{18}{w}, \\ \dfrac{18}{v+w} + 1 + \dfrac{8}{v-w} = \dfrac{8}{w}. \end{cases}$$

Введём новые переменные $a = 18/w$, $b = 18/(v+w)$. Система запишется в виде

$$\begin{cases} b + 5 = a, \\ b + 1 + \dfrac{8}{18} \cdot \dfrac{ab}{a-2b} = \dfrac{8}{18} \cdot a; \end{cases}$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{v-w} = \frac{1}{(v+w)-2w} = \frac{1}{\frac{18}{b} - 2\cdot\frac{18}{a}} = \frac{ab}{18(a-2b)}.$$

Из первого уравнения системы выразим $a = b + 5$ и подставим во второе:

$$b + 1 + \frac{4}{9}\cdot\frac{(b+5)b}{5-b} = \frac{4}{9}\cdot(b+5) \quad\Longleftrightarrow\quad b^2 - 56b + 55 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} b = 55, \\ b = 1. \end{array}\right.$$

Корень $b = 55$ не подходит, так как в этом случае скорость пароходов $v = 3/110$ меньше скорости течения $w = 3/10$. При втором корне $b = 1$ скорость пароходов 15 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч.

О т в е т. Скорость пароходов 15 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч.

Задача 14. (Геол-79.4)

Расстояние между двумя городами скорый поезд проходит на 4 часа быстрее товарного и на 1 час быстрее пассажирского. Известно, что скорость товарного поезда составляет 5/8 скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости скорого. Найти скорости товарного и скорого поездов.

И д е я. Ввести переменные: скорость товарного поезда и длина пути. Составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

У к а з а н и е. Если x км/ч – скорость товарного поезда, S м – весь путь, то $\dfrac{8}{5}x$ – скорость пассажирского поезда, а $x + 50$ – скорость скорого поезда.
У к а з а н и е. Исходя из условия, получить два уравнения:

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{x+50} = 4, \qquad \frac{S}{\frac{8}{5}x} - \frac{S}{x+50} = 1.$$

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч – скорость товарного поезда, S км – весь путь, тогда $\dfrac{8}{5}x$ – скорость пассажирского поезда, а $x + 50$ – скорость скорого поезда.

Исходя из условия, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x} - \dfrac{S}{x+50} = 4, \\ \dfrac{S}{\frac{8}{5}x} - \dfrac{S}{x+50} = 1. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение системы на 4 и вычтем из полученного уравнения первое уравнение системы:

$$\frac{5S}{2x} - \frac{4S}{x+50} - \frac{S}{x} + \frac{S}{x+50} = 0.$$

После сокращения на S и приведения подобных получим:

$$\frac{3}{2x} - \frac{3}{x+50} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = x + 50 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 50.$$

Отсюда получаем ответ.

О т в е т. 50 км/ч, 100 км/ч.

4.4. Работа и производительность

Задача 1. (ЕГЭ)

Для распечатки 302 страниц были использованы две копировальные машины. Первая работала 8 минут, вторая 10 минут. Сколько страниц в минуту печатает первая машина, если первая печатает в минуту на 4 страницы больше, чем вторая?

И д е я. Обозначить за неизвестную величину производительность первой копировальной машины.
У к а з а н и е. Если p стр/мин – производительность первой копировальной машины, то уравнение задачи примет вид $8p + 10(p-4) = 302$.

Р е ш е н и е. Пусть p стр/мин – производительность первой копировальной машины, тогда производительность второй машины $p-4$ стр/мин. Составим уравнение:

$$8p + 10(p-4) = 302 \quad \Longleftrightarrow \quad 18p = 342 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 19 \text{ страниц в минуту.}$$

О т в е т. 19.

Задача 2. (ЕГЭ)

Двое рабочих изготавливают по одинаковому количеству деталей. Первый выполнил эту работу за 6 ч, второй за 4 ч, так как изготовлял в час на 14 деталей больше первого. Сколько деталей изготовил второй рабочий?

И д е я. Обозначить за неизвестную величину производительность второго рабочего.
У к а з а н и е. Если p деталей/ч – производительность второго рабочего, то уравнение задачи примет вид $6(p-14) = 4p$.

Р е ш е н и е. Пусть p деталей/ч – производительность второго рабочего, тогда производительность первого рабочего $p-14$ деталей/ч. Составим уравнение:

$$6(p-14)=4p \quad \Longleftrightarrow \quad p=42 \text{ деталей в час.}$$

Значит, за 4 часа второй рабочий изготовил $4\cdot 42=168$ деталей.

О т в е т. 168.

Задача 3. (ЕГЭ)

На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй, и они вместе закончили работу через 4 дня. Известно, что первому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму. За сколько дней может выстроить эту стену первый каменщик, работая один?

И д е я. Обозначить за неизвестные величины производительности каменщиков и весь объём работы.
У к а з а н и е. Если через p и q м^3/день обозначить производительности первого и второго каменщиков соответственно, S м^3 – весь объём работ, то условие задачи соответствует системе $\begin{cases} S=5p+4(p+q), \\ \dfrac{S}{p}=\dfrac{S}{q}+5. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Пусть p и q м^3/день – производительности первого и второго каменщиков соответственно, S м^3 – весь объём работ. Тогда искомая величина $\dfrac{S}{p}$.
Составим систему: $\begin{cases} S=5p+4(p+q), \\ \dfrac{S}{p}=\dfrac{S}{q}+5; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} S=9p+4q, \\ \dfrac{S}{p}=\dfrac{S}{q}+5; \end{cases}$ введём новые переменные $x=\dfrac{S}{p}$, $y=\dfrac{S}{q}$; тогда система примет вид $\begin{cases} 1=\dfrac{9}{x}+\dfrac{4}{y}, \\ x=y+5; \end{cases}$ из второго уравнения $y=x-5$ подставляем в первое:

$$1=\frac{9}{x}+\frac{4}{x-5} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-18x+45=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=15; \end{array}\right.$$

при $x=3$ $\quad y=3-5=-2<0$; значит, $x=15$ дней.

О т в е т. 15.

Задача 4. (ЕГЭ)

За определённое время на заводе собирают 90 автомобилей. Первые 3 часа на заводе выполняли установленную норму, а затем стали собирать на 1 автомобиль в час больше. Поэтому за час до срока уже было собрано 95 автомобилей. Сколько автомобилей в час должны были собирать на заводе?

Идея. Обозначить за неизвестную величину производительность завода.
Указание. Пусть p авт./ч – производительность завода; уравнение задачи $\dfrac{90}{p} - 1 = 3 + \dfrac{95-3p}{p+1}$.

Решение. Пусть p авт./ч – производительность завода. Составим уравнение:

$$\frac{90}{p} - 1 = 3 + \frac{95-3p}{p+1} \iff p^2 + 9p - 90 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} p = -15 < 0; \\ p = 6; \end{array}\right.$$

значит, на заводе должны были собирать 6 автомобилей в час.

Ответ. 6.

Задача 5. (Геол-93.3)

Для рытья котлована выделили два экскаватора. После того как первый проработал 2 ч, его сменил второй, который за 3 ч закончил работу. Всю работу один второй экскаватор выполнил бы на 4 ч быстрее, чем один первый экскаватор. За какое время выроют котлован оба экскаватора, работая вместе?

Идея. Обозначить за неизвестные величины производительности экскаваторов, приняв всю работу за единицу.
Указание. Если всю работу принять за единицу и обозначить через p_1 и p_2 – производительности экскаваторов (всей работы в час), то искомое время совместного выполнения работы равно $\dfrac{1}{p_1+p_2}$ часов.

Указание. Первым уравнением станет $2p_1 + 3p_2 = 1$, а вторым $\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} = 4$.

Решение. Пусть весь объём работ равен единице, а p_1 и p_2 (всей работы в час) – производительности экскаваторов, тогда искомое время $t = \dfrac{1}{p_1+p_2}$. Из условия задачи составляем систему

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_2 = 1, \\ \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} = 4; \end{cases} \iff \begin{cases} p_2 = \dfrac{1-2p_1}{3}, \\ p_2 - p_1 = 4p_1p_2; \end{cases}$$

подставляем p_2 из первого уравнения во второе:

$$\frac{1-2p_1}{3} - p_1 = 4p_1 \cdot \frac{1-2p_1}{3} \iff 1 - 5p_1 = 4p_1 - 8p_1^2 \iff 8p_1^2 - 9p_1 + 1 = 0;$$

значит, $p_1 = 1$ или $p_1 = \dfrac{1}{8}$. Если $p_1 = 1$, то $p_2 = -\dfrac{1}{3} < 0$ – не подходит по смыслу задачи; если $p_1 = \dfrac{1}{8}$, то $p_2 = \dfrac{1}{4}$; значит, $t = \dfrac{1}{p_1+p_2} = \dfrac{1}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = \dfrac{8}{3}$ часа.

Ответ. $\dfrac{8}{3}$ часа.

Задача 6. (Фил-79.4)

Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трёх одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

Идея. Обозначить за неизвестные величины производительности каждой из трёх линий, приняв за единицу сменное задание, после чего составить уравнения для разницы по времени выполнения работы.

Указание. Если x, y, z ед.прод./ч – производительности линий соответственно, то по условию $x+y+z=1,5(x+y)$, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y+z}+4\dfrac{48}{60}$, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+2$.

Решение. Если x, y, z ед.прод./ч – производительности первой, второй и третьей линий соответственно, то из условия получаем

$$\begin{cases} x+y+z=1,5(x+y), \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y+z}+4\dfrac{48}{60}, \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+2; \end{cases} \iff \begin{cases} z=0,5(x+y), \\ \dfrac{y+z-x}{x(y+z)}=4\dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{y-x}{xy}=2; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} z=0,5(x+y), \\ 5\left(y+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}-x\right)=24x\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{2}\right), \\ y-x=2xy; \end{cases}$$

из двух последних уравнений находим

$$\begin{cases} 5\left(\dfrac{3y}{2}-\dfrac{x}{2}\right)=24x\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{2}\right), \\ y(1-2x)=x; \end{cases} \iff \begin{cases} 5(3y-x)=24x(3y+x), \\ y=\dfrac{x}{1-2x}; \end{cases}$$

подставляем в первое уравнение:

$$5\left(\frac{3x}{1-2x}-x\right)=24x\left(\frac{3x}{1-2x}+x\right) \iff$$

$$\iff 5(3-1+2x)=24x(3+1-2x) \iff 10+10x=96x-48x^2 \iff$$

$$\iff 24x^2-43x+5=0 \iff \left[\begin{aligned} x&=\frac{1}{8}; \\ x&=\frac{5}{3}>\frac{1}{2}; \end{aligned}\right.$$

второе значение не подходит, так как из условия следует, что $\dfrac{1}{x} > 2$, то есть x должен быть меньше $\dfrac{1}{2}$. Остаётся $x = \dfrac{1}{8}$, то есть $t = \dfrac{1}{x} = 8$ часов.

Ответ. 8 часов.

Задача 7. (Геол-98(1).4)

Первая бригада выполняет работу на 2 часа быстрее второй бригады и на 7 часов медленнее, чем обе бригады, работающие одновременно. Выполнят ли бригады, работающие одновременно, эту работу быстрее, чем за 7 часов 57 минут?

Идея. Обозначить за неизвестную величину время выполнения задания при совместной работе, выразить производительности бригад через эту неизвестную и составить соответствующее уравнение, приняв всю работу за единицу.
Указание. Если t – время выполнения задания при совместной работе (ч), то $\dfrac{1}{t+7}$ – производительность первой бригады, $\dfrac{1}{t+9}$ – производительность второй бригады (1/ч).

Решение. Обозначим через t время выполнения задания при совместной работе (ч), объём работы примем за единицу. Тогда $t+7$ – время, за которое выполняет работу первая бригада, $\dfrac{1}{t+7}$ – производительность первой бригады, $t+9$ – время, за которое выполняет работу вторая бригада, $\dfrac{1}{t+9}$ – производительность второй бригады (1/ч). Составляем уравнение:

$$t\left(\frac{1}{t+7} + \frac{1}{t+9}\right) = 1 \implies t(t+9+t+7) = (t+7)(t+9) \implies t^2 = 63 \implies t = \sqrt{63}.$$

Сравним:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{63} & \vee & 7\dfrac{57}{60} \\ \sqrt{63} & \vee & \dfrac{159}{20} \\ 63 \cdot 400 & \vee & 159^2 \\ 25200 & < & 25281, \end{array}$$

то есть $t < 7\dfrac{57}{60}$.

Ответ. Да.

4.5. Проценты, формула сложного процента

Задача 1. (ЕГЭ)

Некоторое число уменьшили на $20\,\%$. На сколько процентов надо увеличить результат, чтобы получить первоначальное число?

Идея. Сперва найти коэффициент уменьшения, затем коэффициент увеличения.
Указание. Пусть x – исходное число. После уменьшения на $20\,\%$ останется $80\,\%$ от исходного числа, то есть коэффициент уменьшения равен $0,8$. Число стало равняться $0,8x$.
Указание. Найти число, на которое надо умножить $0,8x$, чтобы получить x.

Решение. Пусть x – исходное число. После уменьшения его на $20\,\%$ останется $80\,\%$ от x, то есть получим число $0,8x$. Обозначим через k число, на которое требуется умножить $0,8x$, чтобы получить x. Тогда

$$0,8x\cdot k = x \quad\Longleftrightarrow\quad k=\frac{x}{0,8x} \quad\Longleftrightarrow\quad k=1,25.$$

Значит, надо увеличить на $25\,\%$ результат, чтобы получить первоначальное число.

Ответ. На $25\,\%$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Цену товара повысили на $50\,\%$, а затем снизили на $50\,\%$. Как изменится цена товара?

Идея. Найти коэффициенты увеличения и уменьшения.
Указание. Пусть x – исходная цена товара. После увеличения на $50\,\%$ станет $150\,\%$ от исходной цены, то есть коэффициент увеличения равен $1,5$. Цена стала равняться $1,5x$.
Указание. После снижения на $50\,\%$ останется $50\,\%$ от промежуточной цены, то есть коэффициент уменьшения равен $0,5$. Цена стала равняться $0,5\cdot 1,5x$.

Решение. Пусть x – исходная цена товара. После увеличения цены на $50\,\%$ станет $150\,\%$, то есть коэффициент увеличения равен $1,5$. Цена стала равняться $1,5x$. После снижения на $50\,\%$ останется $50\,\%$ от промежуточной цены, то есть коэффициент уменьшения равен $0,5$. Цена стала равняться $0,5\cdot 1,5x = 0,75x$, то есть первоначальная цена товара снизилась на $25\,\%$.

Ответ. Снизится на четверть.

Задача 3. (ЕГЭ)

Магазин в первый день продал $40\,\%$ имеющихся овощей. За второй день он продал $80\,\%$ овощей, проданных в первый день. В третий день – оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

Идея. Найти коэффициенты проданных овощей (от исходного количества) в первый и второй день.

Указание. Пусть первоначально в магазине было x кг овощей. Магазин в первый день продал 40 % имеющихся овощей. Значит, за первый день было продано $0,4x$ кг овощей, в конце дня осталось $0,6x$ кг.
Указание. За второй день магазин продал 80 % овощей, проданных в первый день. Значит, за второй день было продано $0,8 \cdot 0,4x = 0,32$ кг овощей, в конце дня осталось $0,6x - 0,32x = 0,28x$ кг.
Указание. Составить уравнение на количество овощей, проданных в третий день.

Решение. Пусть первоначально в магазине было x кг овощей. За первый день было продано $0,4x$ кг овощей, в конце дня осталось $0,6x$ кг. За второй день было продано $0,8 \cdot 0,4x = 0,32x$ кг, осталось $0,6x - 0,32x = 0,28x$ кг. По условию задачи $0,28x = 28 \iff x = 100$ кг.

Ответ. 100 кг.

Задача 4. (ЕГЭ)

Цена изделия составляла 1000 рублей и была снижена сначала на 10 %, а затем еще на 20 %. Какова окончательная цена товара?

Идея. Найти коэффициенты первого и второго уменьшения цены.
Указание. Коэффициент первого уменьшения равен $0,9$. Цена стала равняться $0,9 \cdot 1000 = 900$ рублей.
Указание. Коэффициент второго уменьшения равен $0,8$. Цена стала равняться $0,8 \cdot 900 = 720$ рублей.

Решение. После первого снижения цена будет составлять $1000 \cdot 0,9 = 900$ рублей. После второго снижения цены товар будет стоить $900 \cdot 0,8 = 720$ рублей.

Ответ. 720 руб.

Задача 5. (ЕГЭ)

Цену товара повысили на 25 %, затем новую цену повысили ещё на 10 % и, наконец, после перерасчёта произвели повышение цены ещё на 12 %. На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

Идея. Найти коэффициенты каждого увеличения цены.
Указание. Пусть x – исходная цена товара. Коэффициент первого увеличения равен $1,25$. Цена стала равняться $1,25x$.
Указание. Коэффициент второго увеличения равен $1,1$. Цена стала равняться $1,1 \cdot 1,25x = 1,375x$.
Указание. Коэффициент третьего увеличения равен $1,12$. Цена стала равняться $1,12 \cdot 1,375x = 1,54x$.

Решение. Пусть x – исходная цена товара. После увеличения цены на 25 % получим новую цену $1,25x$. После второго увеличения цены на 10 % получим $1,1 \cdot 1,25x = 1,375x$. После третьего повышения цены на 12 % товар будет стоить $1,12 \cdot 1,375x = 1,54x$, то есть первоначальная цена товара увеличится на 54 %.

Ответ. На 54 %.

Задача 6. (ЕГЭ)

Сумма двух чисел равна 1100. Найдите наибольшее из них, если 6 % одного из них равны 5 % другого.

Идея. Составить систему уравнений на два неизвестных числа.
Указание. Обозначим за x, y – эти два числа. Тогда из условия задачи следует:

$$\begin{cases} x+y=1100, \\ 0,06x=0,05y. \end{cases}$$

Решение. Обозначим за x, y – эти два числа. Тогда из условия задачи получаем:

$$\begin{cases} x+y=1100, \\ 0,06x=0,05y; \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=1100, \\ 6x=5y; \end{cases} \iff \begin{cases} x=500, \\ y=600. \end{cases}$$

Значит, наибольшее число равно 600.

Ответ. 600.

Задача 7. (ЕГЭ)

Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения трёх лет она выросла на 765,1 рубля при 2 % годовых.

Идея. Найти коэффициент ежегодного увеличения. Затем найти коэффициент увеличения за все три года.
Указание. Пусть x руб. – первоначальная сумма вклада. Тогда по истечении первого года на счету стало $1,02x$ руб.
Указание. По истечении третьего года на счету станет $(1,02)^3x = 1,061208x$ руб.
Указание. Так как вклад возрос на 765,1 рубля, то $1,061208x - x = 765,1$.

Решение. Пусть x руб. – первоначальная сумма вклада.
1) По истечении первого года на счету стало $1,02x$ руб.
2) В конце второго года вклад составил $1,02 \cdot 1,02x = 1,0404x$ руб.
3) По завершении третьего года на счету будет $1,02 \cdot 1,0404x = 1,061208x$ руб., при этом вклад возрастёт на 765,1 руб.:

$$1,061208x - x = 765,1 \iff 0,061208x = 765,1 \iff$$

$$\iff x = \frac{765,1}{0,061208} = \frac{100000 \cdot 7651}{61208} = \frac{100000 \cdot 7651}{2^3 \cdot 7651} = 12500 \text{ руб.}$$

Ответ. 12500 руб.

Задача 8. (Соц-00.2)

В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

Идея. Обозначить за неизвестную величину процент роста числа жителей в первом году и составить соответствующее уравнение.
Указание. Если в городе было A жителей и за первый год население увеличилось на $x\,\%$, то число жителей стало равным $A\cdot\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$.
Указание. За второй год население увеличилось на $x+1\,\%$, следовательно, стало равным $A\cdot\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x+1}{100}\right)$.

Решение. Обозначим через A число жителей города N в начале первого года. Пусть за первый год население увеличилось на $x\,\%$, тогда за второй год – на $x+1\,\%$, а за два года увеличение достигло $x+5,2\,\%$. Составляем уравнение:

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{x+1}{100}\right)=A\left(1+\frac{x+5,2}{100}\right)\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad (x+100)(x+101)=100(x+105,2)\quad\Longleftrightarrow\quad x^2+101x-420=0;$$

откуда $x=-105<0$ или $x=4$.

Ответ. $4\,\%$.

Задача 9. (Геол-98.4)

Из цистерны в бассейн сначала перелили $50\,\%$ имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 литров, затем еще $5\,\%$ от остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на $31\,\%$. Сколько литров воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 литров воды?

Идея. Обозначить за неизвестную величину начальный объём воды в цистерне.
Указание. Если x литров воды вначале было в цистерне, то вылили из неё всего $0,31\cdot 2000=620$ литров. Далее составить уравнение относительно вылитой из цистерны воды и решить его.

Решение. Если x литров воды вначале было в цистерне, тогда из неё вылито $0,31\cdot 2000=620$ литров:

$$0,5x+100+0,05(0,5x-100)=620;$$

таким образом, $0,525x=525 \quad\Longleftrightarrow\quad x=1000$ литров.

Ответ. 1000 л.

Задача 10. (Экон.М-95.4)

В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. тонн железной руды. В течение нескольких последующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25 % по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объём добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. тонн. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

Идея. Используя формулу сложного процента, составить уравнение для суммы добычи руды по всем годам, обозначив их число за неизвестную величину.
Указание. Если в течение n лет число S увеличивалось на 25 % ежегодно, то через n лет оно станет равным $\left(1+\dfrac{25}{100}\right)^n \cdot S = 1,25^n \cdot S$.

Решение. Во второй год добыли $1,25 \cdot 100$ тыс. тонн, в третий год $1,25^2 \cdot 100$ тыс. тонн и т. д.; значит, через n лет добыча вышла на уровень $1,25^{n-1} \cdot 100$ тыс. тонн и ещё три года не менялась;

$$100 + 1,25 \cdot 100 + 1,25^2 \cdot 100 + \dots + 1,25^{n-1} \cdot 100 + 3 \cdot 1,25^{n-1} \cdot 100 = 850 \iff$$

$$\iff \frac{100(1,25^n - 1)}{1,25 - 1} + \frac{3}{1,25} \cdot 1,25^n \cdot 100 = 850;$$

(применена формула суммы членов геометрической прогрессии с первым членом 100 и знаменателем 1,25);

$$400 \cdot 1,25^n - 400 + 240 \cdot 1,25^n = 850 \iff 640 \cdot 1,25^n = 1250 \iff$$

$$\iff \left(\frac{5}{4}\right)^n = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \iff n = 3.$$

Значит, искомое число лет равно шести.

Ответ. 6 лет.

Задача 11. (Геол-96.6)

В двух банках в конце года на каждый счёт начисляется прибыль: в первом банке – 60 % к текущей сумме на счёте, во втором – 40 % к текущей сумме на счёте. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги – во второй банк, с таким расчётом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

Идея. Обозначить за неизвестную величину долю вклада в один из банков и составить уравнение, вычислив изменение суммы в каждом из банков.
Указание. Если от всей суммы S руб. в первый банк вложена доля p, то во втором банке окажется сумма $(1-p)S$ руб.
Указание. Через два года в первом банке окажется сумма $1,6^2 pS$ руб., а во втором $1,4^2(1-p)S$ руб.

Р е ш е н и е. Пусть от всей суммы S руб. в первый банк вложена доля p, тогда в нём через два года станет $1,6^2pS$ руб. Во второй банк автоматически попадает $(1-p)S$ руб., и через два года в нём станет $1,4^2(1-p)S$ руб. С учётом удвоения общей суммы получаем уравнение:

$$2,56pS + 1,96(1-p)S = 2S \quad \Longleftrightarrow \quad 0,6p = 0,04 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{1}{15}.$$

О т в е т. $\frac{1}{15}$.

5. Стандартные показательные и логарифмические уравнения и неравенства

5.1. Преобразование логарифмических выражений. Сравнение логарифмических и показательных значений

Задача 1. (ЕГЭ)

Вычислите $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$.

И д е я. Использовать формулу преобразования логарифма степени.
У к а з а н и е. Использовать формулу преобразования логарифма степени:

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$$

Р е ш е н и е. Используем формулу преобразования логарифма степени:

$$\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2} = \log_2 \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2.$$

О т в е т. -2.

Задача 2. (ЕГЭ)

Вычислите $\log_6 8 - \log_6 2 + \log_6 9$.

И д е я. Преобразовать искомое выражение, воспользовавшись формулами перехода от разности или суммы логарифмов к логарифмам частного или произведения.
У к а з а н и е. Использовать формулы:
1) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$;
2) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$;
3) $\log_a x^y = y \log_a x$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}$.

Р е ш е н и е. $\log_6 8 - \log_6 2 + \log_6 9 = \log_6 \frac{8 \cdot 9}{2} = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2.$

О т в е т. 2.

Задача 3. (ЕГЭ)

Укажите значение выражения $\left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{\log_9 6}}$.

Идея. В показателе степени воспользоваться формулой перехода к новому основанию.

Указание. Формула: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, где $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$.

Решение. В показателе степени воспользуемся формулой перехода к новому основанию:

$$\left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{\log_9 6}} = \left(6^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_6 9} = 6^{\log_6 9} = 9.$$

Ответ. 9.

Задача 4. (ЕГЭ)

Укажите значение выражения $\log_6 \dfrac{36}{a}$, если $\log_6 a = -6$.

Идея. Преобразовать искомое выражение, воспользовавшись формулами для логарифмов частного и степени.

Указание. Формулы:

1) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$;

2) $\log_a x^y = y \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Решение. Используем формулы для логарифмов частного и степени:

$$\log_6 \frac{36}{a} = \log_6 36 - \log_6 a = \log_6 6^2 - \log_6 a = 2 - (-6) = 8.$$

Ответ. 8.

Задача 5. (ЕГЭ)

Укажите значение выражения $\lg 15$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

Идея. Преобразовать искомое выражение, воспользовавшись формулами перехода от логарифма произведения или частного к сумме или разности логарифмов.

Указание. Формулы:

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$;

2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$.

Решение. Используем формулы перехода от логарифма произведения или частного к сумме или разности логарифмов:

$$\lg 15 = \lg \frac{3 \cdot 10}{2} = \lg 3 + \lg 10 - \lg 2 = b + 1 - a.$$

Ответ. $b + 1 - a$.

Задача 6. (ЕГЭ)

Упростить $6^{-0{,}5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0{,}5+\log_2 0{,}5}$.

Идея. Воспользоваться свойствами степеней и основным логарифмическим тождеством.
Указание. Формулы:
1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, где $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$;
2) $b^{\log_b a} = a$, $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Решение. Воспользуемся свойствами степеней и основным логарифмическим тождеством:

$$6^{-0{,}5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0{,}5+\log_2 0{,}5} = 6^{-0{,}5} \cdot 6^{\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0{,}5} \cdot 6^{\log_2 0{,}5} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Ответ. 0.

Задача 7. (ЕГЭ)

Найдите значение выражения $\dfrac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - (\log_3 2)\log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18}$.

Идея. Искомое выражение путём преобразований свести к функции переменной $\log_3 2$ и привести подобные слагаемые.
Указание. Использовать формулу:
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$.
Указание. Ввести обозначение $x = \log_3 2$. Тогда $\log_3 18 = \log_3(2 \cdot 9) = x + 2$.

Решение. Введём обозначение $x = \log_3 2$. Тогда $\log_3 18 = \log_3(2 \cdot 9) = x + 2$. Поэтому

$$\frac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - (\log_3 2)\log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18} = \frac{2x^2 - (x+2)^2 - x(x+2)}{2x + x + 2} =$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 - 4x - 4 - x^2 - 2x}{3x + 2} = \frac{-6x - 4}{3x + 2} = -2.$$

Ответ. -2.

Задача 8. (ЕГЭ)

Вычислите $\log_{3\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$, если $\log_9 6 = a$.

Идея. Воспользоваться формулами перехода к новому основанию.

Указание. Формулы:
1) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1$;
2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, где $a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y>0$;
3) $\log_a x^y = y\log_a x$, где $a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y\in\mathbb{R}$.

Решение. Перейдём к логарифмам по основанию 3:

$$a=\log_9 6=\frac{\log_3 6}{\log_3 9}=\frac{1+\log_3 2}{2},\quad \text{откуда}\quad \log_3 2 = 2a-1;$$

$$\log_{3\sqrt{2}}\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}=\frac{\log_3\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}}{\log_3 3\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{3}(2+\log_3 2)-\frac{1}{2}(1+2\log_3 2)}{1+\frac{1}{2}\log_3 2}=$$
$$=\frac{1-4\log_3 2}{6+3\log_3 2}=\frac{1-4(2a-1)}{6+3(2a-1)}=\frac{5-8a}{6a+3}.$$

Ответ. $\dfrac{5-8a}{6a+3}$.

Задача 9. (ВМК-84.1)

Известно, что $\log_a b = 7$. Найти $\log_b(a^2 b)$.

Идея. Искомое выражение путём преобразований привести к выражению, данному в условии.
Указание. Формулы:
1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, где $a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y>0$;
2) $\log_a x^y = y\log_a x$, где $a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y\in\mathbb{R}$;
3) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, где $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1$.

Решение. $b\neq 1$, то есть $\log_a b\neq 0$;

$$\log_b(a^2 b)=2\log_b a+\log_b b=\frac{2}{\log_a b}+1=\frac{2}{7}+1=\frac{9}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{9}{7}$.

Задача 10. (Экон-90.1)

Имеют ли общие точки область значений функции $y=\sqrt{3}+2\sqrt{2}x-2x^2$ и промежуток $[\log_3 15;+\infty)$? Ответ обоснуйте.

Идея. Вычислив область значений квадратичной функции, сравнить её границы с промежутком, заданным в условии задачи.
Указание. График функции $y=-2x^2+2\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ является параболой с ветвями, направленными вниз. Область значений параболы задается промежутком $(-\infty;y_0]$, где y_0 – ордината вершины параболы.

Указание. Координаты вершины заданной параболы $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y_0 = \sqrt{3} + 1$. Для ответа на вопрос задачи требуется провести сравнение чисел $\log_3 15$ и $\sqrt{3}+1$.
Указание. Составить формальное неравенство $\log_3 15 \vee \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow \log_3 5 \vee \sqrt{3}$; провести сравнение методом промежуточной числовой границы – найти такое число a, что верно одно из двойных неравенств:

$$\log_3 5 < a < \sqrt{3} \quad \text{или} \quad \sqrt{3} < a < \log_3 5.$$

Указание. В качестве a, например, подходит число $\dfrac{3}{2}$; нетрудно показать, что $\log_3 5 < \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2} < \sqrt{3}$, то есть $\log_3 5 < \sqrt{3}$.

Решение. $y = -2x^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}$ – парабола, ветви вниз. Координаты вершины $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y_0 = \sqrt{3} + 1$, а область значений $E[y] = (-\infty; \sqrt{3} + 1]$. Сравниваем:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3} + 1 & \vee & \log_3 15 = 1 + \log_3 5 \\ \sqrt{3} & \vee & \log_3 5; \end{array}$$

оба числа лежат в интервале $(1; 2)$. Сравним их со значением $\dfrac{3}{2}$ (середина интервала):

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{3}{2} & \vee & \log_3 5 \\ 3 & \vee & 2\log_3 5 \\ \log_3 27 & > & \log_3 25. \end{array}$$

Значит, $\sqrt{3} > \dfrac{3}{2} > \log_3 5$,то есть $\sqrt{3}+1 > \log_3 15$. Следовательно, область значений функции $y = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}x - 2x^2$ и промежуток $[\log_3 15; +\infty)$ имеют общие точки.

Ответ. Имеют.

Задача 11. (ВМК-83.1)

Найти область определения функции $y = \sqrt{16 - x^2} \log_2 (x^2 - 5x + 6)$.

Идея. Область определения данной функции складывается из неотрицательности подкоренной функции и положительности подлогарифменной функции.

Указание. Область определения задается системой $\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2; \\ x > 3; \end{array} \right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} -4 \leq x < 2, \\ \quad 3 < x \leq 4. \end{array} \right.$

Ответ. $[-4; 2) \cup (3; 4]$.

Задача 12. (Геол-89.1)

Определить, какое из чисел больше: $2\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{5}$ или $3\log_8 26$? Ответ должен быть обоснован.

Идея. Привести оба логарифма к одному основанию и воспользоваться монотонностью логарифмической функции.
Указание. Удобно привести оба логарифма к основанию 2 и использовать возрастание функции $y=\log_2 x$.

Решение. Преобразуем числа: $2\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{5}=\log_2 25$; $3\log_8 26=\log_2 26$; значит, $\log_2 25<\log_2 26$.

Ответ. $3\log_8 26$.

Задача 13. (ВМК-82.1)

Какое из чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9}$?

Идея. Преобразовать второе число и составить формальное неравенство для сравнения.
Указание. Использовать формулы преобразования логарифмов и основное логарифмическое тождество.

Решение. Преобразуем второе число:

$$2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9}=2^{2\log_2 5-2\log_2 3}=2^{2\log_2 \frac{5}{3}}=\frac{25}{9}.$$

Возведём сравниваемые числа в квадрат: $8>\left(\dfrac{25}{9}\right)^2=\dfrac{625}{81}$. Значит, $\sqrt{8}>\dfrac{25}{9}$.

Ответ. $\sqrt{8}$.

Задача 14. (Геол.ОГ-85.1)

Определить, какое из чисел больше: $2^{\log_3 5}-0,1$ или $5^{\log_3 2}$? Результат обосновать.

Идея. Привести обе степени к одному основанию, применив основное логарифмическое тождество.
Указание. Основное логарифмическое тождество имеет вид:

$$a^{\log_a b}=b,\quad \text{где}\quad a>0,\ a\neq 1,\quad b>0,$$

откуда можно получить $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ при $c>0,\ c\neq 1,\ a>0,\ b>0$.

Замечание. Если выведенная таким образом формула известна заранее, её можно применять сразу.

Указание. Поскольку $2^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$, первое число меньше.

Р е ш е н и е. Приведём обе степени к одному основанию и сравним:

$$2^{\log_3 5} = 5^{\log_5 2^{\log_3 5}} = 5^{\log_3 5 \cdot \log_5 2} = 5^{\frac{\log_5 2}{\log_5 3}} = 5^{\log_3 2};$$

$$\begin{aligned} 2^{\log_3 5} - 0,1 &\quad \vee \quad 5^{\log_3 2} \\ 5^{\log_3 2} - 0,1 &\quad \vee \quad 5^{\log_3 2} \\ -0,1 &\quad < \quad 0. \end{aligned}$$

Значит, второе число больше.

О т в е т. Второе.

Задача 15. (Физ-82.3)

Известно, что $\log_b a = \sqrt{3}$. Вычислить $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

И д е я. Перейти к основанию b.
У к а з а н и е. В преобразованиях полезно помнить:
1) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$;
2) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0$;
3) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$;
4) $\log_a a^x = x$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
У к а з а н и е. Полезно сразу применить формулу перехода к новому основанию, после чего преобразовывать логарифмы по соответствующим формулам.

Р е ш е н и е. Область определения $a > 0,\ 0 < b \neq 1,\ \sqrt{a} \neq b$.

Воспользуемся формулой перехода к новому основанию и преобразуем логарифмы в числителе и знаменателе:

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\log_b \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}}{\log_b \frac{\sqrt{a}}{b}} = \frac{\log_b \sqrt[3]{a} - \log_b \sqrt{b}}{\log_b \sqrt{a} - \log_b b} = \frac{\frac{1}{3}\log_b a - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\log_b a - 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3\sqrt{3} - 6} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{-\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

О т в е т. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 16. (М/м-92.3)

Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y$, $q = \log_x y$. Найти число $\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3} \sqrt{xyz}$, считая, что оно определено.

И д е я. Искомое выражение путём преобразований привести к комбинации выражений, заданных в условии.

Указание. В преобразованиях полезно помнить:
1) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$;
2) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0$;
3) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$;
4) $\log_a a^x = x$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Указание. Применить формулу перехода к новому основанию z, после чего преобразовывать логарифмы по соответствующим формулам.
Указание. Рассмотреть два случая: $y = 0$ и $y \neq 0$.

Решение. $0 < z \neq 1,\ 0 < x \neq 1,\ y > 0$; кроме того, $xyz > 0,\ \dfrac{xz}{y^2} > 0,\ xz \neq y^2$.
Переходим к новому основанию:

$$\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3} \sqrt{xyz} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\log_z xyz}{\log_z xz - 2\log_z y} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\log_z x + \log_z y + 1}{\log_z x - 2\log_z y + 1}.$$

Рассмотрим два случая:
1) при $y = 1$ $p = q = 0$ и $\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3} \sqrt{xyz} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{\log_z x + 1}{\log_z x + 1} = \dfrac{1}{6}$;
2) при $y \neq 1$ $\log_z x = \dfrac{\log_y x}{\log_y z} = \dfrac{\log_z y}{\log_x y} = \dfrac{p}{q}$, поэтому

$$\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)^3} \sqrt{xyz} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\dfrac{p}{q} + p + 1}{\dfrac{p}{q} + 1 - 2p} = \frac{1}{6} \cdot \frac{p + q + pq}{p + q - 2pq}.$$

Ответ. Если $p = q = 0$, то $\dfrac{1}{6}$; если $p \neq 0$ и $q \neq 0$, то $\dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{p + q + pq}{p + q - 2pq}$.

5.2. Простейшие показательные уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Задача 1. (ЕГЭ)

Решите уравнение $3^x = 27 \cdot \sqrt[4]{9}$.

Идея. Привести правую часть к показательному виду с основанием 3.
Указание. $27 \cdot \sqrt[4]{9} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{3,5}$.

Решение. Приведём правую часть к показательному виду с основанием 3 и воспользуемся монотонностью показательной функции:

$$3^x = 27 \cdot \sqrt[4]{9} \iff 3^x = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \iff 3^x = 3^{3,5} \iff x = 3,5.$$

Ответ. 3,5.

Задача 2. (ЕГЭ)

Решите неравенство $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x+1} < 1$.

Идея. Привести правую часть к показательному виду с основанием $0,4$.
Указание. Переписать неравенство в виде $(0,4)^{x+1} < (0,4)^0$.

Решение. Приведём правую часть к показательному виду с основанием $0,4$ и воспользуемся убыванием показательной функции с основанием $0,4$:

$$(0,4)^{x+1} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (0,4)^{x+1} < (0,4)^0 \quad \Longleftrightarrow \quad x+1>0 \quad \Longleftrightarrow \quad x>-1.$$

Ответ. $(-1;+\infty)$.

Задача 3. (ЕГЭ)

Решите неравенство $7^x - \left(\sqrt{7}\right)^x - 6 > 0$.

Идея. Неравенство является квадратным относительно показательной функции.
Указание. При $z = \left(\sqrt{7}\right)^x > 0$ неравенство принимает вид $z^2 - z - 6 > 0$ и решается стандартным образом.
Указание. С учётом положительности z решением неравенства станет $z > 3$, то есть $\left(\sqrt{7}\right)^x > 3$.

Решение. Пусть $z = \left(\sqrt{7}\right)^x > 0$, тогда

$$z^2 - z - 6 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z < -2; \\ z > 3; \end{array}\right.$$

с учётом положительности z решением неравенства станет $z > 3$, то есть

$$\left(\sqrt{7}\right)^x > 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \log_{\sqrt{7}} 3 = 2\log_7 3.$$

Ответ. $(2\log_7 3;+\infty)$.

Задача 4. (ЕГЭ)

Решите неравенство $(0,1)^{4x^2-2x-2} \geq (0,1)^{2x-3}$.

Идея. Воспользоваться убыванием показательной функции с основанием $0,1$.
Указание. Так как показательная функция с основанием $0,1$ убывает, то исходное неравенство эквивалентно неравенству $4x^2 - 2x - 2 \leq 2x - 3$.

Решение. Воспользуемся убыванием показательной функции с основанием $0,1$:

$$(0,1)^{4x^2-2x-2} \geq (0,1)^{2x-3} \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^2-2x-2 \leq 2x-3 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4x^2-4x+1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2x-1)^2 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,5.$$

Ответ. 0,5.

Задача 5. (Экон-83.1)

Решить уравнение $2^{x+2}\cdot 5^{x+2}=2^{3x}\cdot 5^{3x}$.

Идея. Воспользоваться свойством показательных функций с одинаковыми показателями.
Указание. Формула: $\forall x\in\mathbb{R},\ a>0,\ b>0\quad a^x\cdot b^x=(ab)^x$.

Решение. $10^{x+2}=10^{3x}\quad\iff\quad x+2=3x\quad\iff\quad x=1.$

Ответ. 1.

Задача 6. (Физ-95(2).1)

Решить уравнение $2^{x-1}\cdot 3^x=0,5\cdot 6^{2-x}$.

Идея. Воспользоваться свойством показательных функций с одинаковыми показателями.
Указание. Формулы:
1) $\forall x\in\mathbb{R},\ a>0,\ b>0\quad a^x\cdot b^x=(ab)^x$;
2) $\forall x,y\in\mathbb{R},\ a>0\quad a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$.

Решение. $\dfrac{1}{2}\cdot 6^x=\dfrac{1}{2}\cdot 6^{2-x}\quad\iff\quad x=2-x\quad\iff\quad x=1.$

Ответ. 1.

Задача 7. (Хим-98.1)

Решить уравнение $4^x+2^x-2=0$.

Идея. Уравнение является квадратным относительно показательной функции.
Указание. $4^x=(2^x)^2$, поэтому при $z=2^x>0$ уравнение принимает вид $z^2+z-2=0$ и решается стандартным образом.

Решение. Введём новую переменную $z=2^x>0$, тогда уравнение примет вид

$$z^2+z-2=0\quad\iff\quad\left[\begin{array}{l}z=1;\\ z=-2<0;\end{array}\right.$$

значит, $2^x=1\quad\iff\quad x=0.$

Ответ. 0.

Задача 8. (Геол-84.1)

Решить уравнение $3\cdot 9^{x+1}-6\cdot 3^x-1=0$.

Идея. Уравнение является квадратным относительно показательной функции.
Указание. $9^{x+1}=9\cdot 9^x=9\cdot(3^x)^2$, поэтому при $z=3^x>0$ уравнение преобразуется к виду $27z^2-6z-1=0$ и решается стандартным образом.

Р е ш е н и е. Введём новую переменную $z = 3^x > 0$, тогда получим

$$27z^2 - 6z - 1 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &z = -\frac{1}{9} < 0; \\ &z = \frac{1}{3}; \end{aligned}\right.$$

значит, $3^x = 3^{-1} \iff x = -1$.

О т в е т. -1.

Задача 9. (Хим-90.1)

Решить уравнение $4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64$.

И д е я. Уравнение является квадратным относительно показательной функции.
У к а з а н и е. $4^x = (2^x)^2$; $2^{x+2} = 4 \cdot 2^x$; поэтому при $z = 2^x > 0$ исходное уравнение принимает вид $z^2 + 12z - 64 = 0$ и решается привычным способом.

Р е ш е н и е. Пусть $z = 2^x > 0$, тогда уравнение принимает вид

$$z^2 + 12z - 64 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &z = -16 < 0; \\ &z = 4; \end{aligned}\right.$$

значит, $2^x = 4 \iff x = 2$.

О т в е т. 2.

Задача 10. (Физ-82.4)

Решить неравенство $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$.

И д е я. Воспользоваться свойством показательных функций с одинаковыми показателями.
У к а з а н и е. Привести исходное неравенство к неравенству относительно одной показательной функции, используя следующие формулы:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ a > 0 \quad a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;
2) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ a > 0 \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0 \quad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

У к а з а н и е. Разделить обе части неравенства на 3^x.

Р е ш е н и е. $5^x - 3 \cdot 3^x > \dfrac{2}{5} \cdot 5^x - \dfrac{2}{9} \cdot 3^x \iff \dfrac{3}{5} \cdot 5^x > \dfrac{25}{9} \cdot 3^x$.
Разделим обе части неравенства на $3^x > 0$:

$$\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^x > \frac{25}{9} \iff \left(\frac{5}{3}\right)^x > \left(\frac{5}{3}\right)^3 \iff x > 3.$$

О т в е т. $(3; +\infty)$.

Задача 11. (Геол-80.1)

Решить неравенство $7^{-x} - 3\cdot 7^{1+x} > 4$.

Идея. Неравенство является квадратным относительно показательной функции.

Указание. $7^{-x} = \dfrac{1}{7^x}$, $7^{1+x} = 7\cdot 7^x$; при $z = 7^x > 0$ неравенство принимает вид $21z^2 + 4z - 1 < 0$ и решается стандартным образом.

Указание. С учётом положительности z решением неравенства станет $z < \dfrac{1}{7}$, то есть $7^x < \dfrac{1}{7}$.

Решение. Пусть $z = 7^x > 0$, тогда неравенство принимает вид

$$\frac{1}{z} - 21z > 4 \iff 21z^2 + 4z - 1 < 0 \iff -\frac{1}{3} < z < \frac{1}{7};$$

значит, $z < \dfrac{1}{7} \iff 7^x < 7^{-1} \iff x < -1$.

Ответ. $(-\infty; -1)$.

Задача 12. (ВМК-77.1)

Решить неравенство $2^{2x+1} - 21\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$.

Идея. Неравенство является квадратным относительно показательной функции.

Указание. $2^{2x+1} = 2\cdot 2^{2x} = 2\cdot 4^x$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3} = \dfrac{1}{2^{2x+3}} = \dfrac{1}{8\cdot 4^x}$, поэтому при $z = 4^x > 0$ получаем $2z - \dfrac{21}{8z} + 2 \geq 0$, что равносильно неравенству $16z^2 + 16z - 21 \geq 0$.

Указание. Решая квадратное неравенство, используем положительность z, в результате чего получаем, что $z \geq \dfrac{3}{4}$.

Решение. Пусть $z = 2^{2x} > 0$, тогда неравенство принимает вид

$$2z - \frac{21}{8z} + 2 \geq 0 \iff 16z^2 + 16z - 21 \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} z \leq -\dfrac{7}{4}; \\ z \geq \dfrac{3}{4}; \end{array}\right.$$

значит, $2^{2x} \geq \dfrac{3}{4} \iff 2^{2x+2} \geq 3 \iff 4^{x+1} \geq 3 \iff x \geq \log_4 \dfrac{3}{4}$.

Ответ. $\left[\log_4 \dfrac{3}{4}; +\infty\right)$.

Задача 13. (Физ-80.4)

Решить неравенство $2^{x-1} > \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Идея. Привести обе показательные функции к одному основанию и воспользоваться монотонностью показательной функции.

Указание. Используя равенство $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}} = 2^{-\frac{4}{x}}$, привести неравенство к виду $2^{x-1} > 2^{-\frac{4}{x}}$. В силу возрастания функции $y = 2^x$ это неравенство равносильно $x-1 > -\dfrac{4}{x}$.

Указание. Последнее неравенство решить методом интервалов.

Решение. Заметив, что $(1/16)^{\frac{1}{x}} = 2^{-\frac{4}{x}}$, перепишем неравенство в виде

$$2^{x-1} > 2^{-\frac{4}{x}} \iff x-1 > -\frac{4}{x} \iff \frac{x^2-x+4}{x} > 0;$$

поскольку числитель всегда положителен, остаётся условие $x > 0$.

Ответ. $(0;+\infty)$.

Задача 14. (Физ-97(1).5)

Решить неравенство $2^{x-3} < \dfrac{2}{8^{\frac{1}{x}}}$.

Идея. Привести правую часть неравенства к виду $2^{f(x)}$ и воспользоваться возрастанием показательной функции с основанием 2.

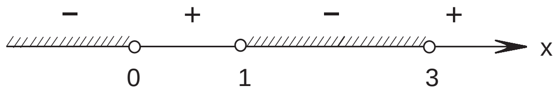
Указание. Поскольку $\dfrac{2}{8^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{2}{2^{\frac{3}{x}}} = 2^{1-\frac{3}{x}}$, неравенство принимает вид $2^{x-3} < 2^{1-\frac{3}{x}}$. В силу возрастания функции $y = 2^x$ оно равносильно $x-3 < 1-\dfrac{3}{x}$.

Указание. Неравенство $x-3 < 1-\dfrac{3}{x}$ приводится к виду $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x} < 0$ и решается методом интервалов.

Решение. Преобразуем выражение в правой части: $\dfrac{2}{8^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{2}{2^{\frac{3}{x}}} = 2^{1-\frac{3}{x}}$; значит,

$$2^{x-3} < 2^{1-\frac{3}{x}} \iff x-3 < 1-\frac{3}{x} \iff \frac{x^2-4x+3}{x} < 0 \iff$$

$$\iff \frac{(x-1)(x-3)}{x} < 0 \iff \left[\begin{array}{l} x < 0; \\ 1 < x < 3. \end{array}\right.$$



Ответ. $(-\infty;0)\cup(1;3)$.

Задача 15. (Геол-97(1).4)

Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2} > 2,25^{x^2-10}$.

Идея. Привести обе части неравенства к одному основанию и воспользоваться монотонностью показательной функции.

Указание. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2} = \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{-x^2}$; $2,25^{x^2-10} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-10}$.

Указание. В силу возрастания функции $y = \left(\frac{9}{4}\right)^{x}$ неравенство равносильно $-x^2 > x^2 - 10$.

Решение. Приведём левую и правую части к одному основанию и воспользуемся монотонностью показательной функции:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-x^2} > \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-10} \iff -x^2 > x^2 - 10 \iff x^2 < 5 \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}.$$

Ответ. $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$.

Задача 16. (ЕГЭ)

Решите неравенство $(1,25)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$.

Идея. Привести обе части неравенства к одному основанию и воспользоваться монотонностью показательной функции.

Указание. $(0,64)^{2(1+\sqrt{x})} = \left(\frac{64}{100}\right)^{2(1+\sqrt{x})} = \left(\frac{16}{25}\right)^{2(1+\sqrt{x})} = \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})}$; $(1,25)^{1-x} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1-x}$.

Указание. В силу возрастания функции $y = \left(\frac{5}{4}\right)^{x}$ неравенство равносильно $1 - x < -4(1+\sqrt{x})$.

Указание. Полученное неравенство $x - 4\sqrt{x} - 5 > 0$ является квадратным относительно переменной $y = \sqrt{x} \geq 0$ и решается стандартным способом.

Р е ш е н и е. Приведём обе части неравенства к одному основанию и воспользуемся монотонностью показательной функции:

$$(1,25)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1-x < -4(1+\sqrt{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad x - 4\sqrt{x} - 5 > 0;$$

введём переменную $y = \sqrt{x} \geq 0$, тогда

$$y^2 - 4y - 5 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y < -1; \\ y > 5; \end{array}\right.$$

поскольку переменная y принимает неотрицательные значения, остаётся $y > 5$, то есть $\sqrt{x} > 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 25$.

О т в е т. $(25; +\infty)$.

Задача 17. **(Физ-96(1).3)**

Решить уравнение $3^{2x} = (0,6^x + 2) \cdot 25^x$.

И д е я. Свести уравнение к квадратному относительно показательной функции.
У к а з а н и е. $25^x = 5^{2x}$, поэтому, разделив обе части уравнения на $25^x > 0$, получаем уравнение $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x + 2$, являющееся квадратным относительно $z = \left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$.

Р е ш е н и е. Разделим обе части уравнения на $25^x > 0$, получим

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x + 2.$$

Уравнение является квадратным относительно $z = \left(\frac{3}{5}\right)^x = (0,6)^x > 0$:

$$z^2 - z - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = -1 < 0; \\ z = 2; \end{array}\right.$$

значит, $x = \log_{0,6} 2$.

О т в е т. $\log_{0,6} 2$.

Задача 18. (Биол-91.1)

Решить уравнение $4^{\sqrt{x}+1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} + 20 = 0$.

Идея. Сократив дробь в показателе функции, привести уравнение к квадратному относительно показательной функции.

Указание. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ при $x \neq 1$; если $z = 2^{\sqrt{x}} > 0$, то уравнение принимает вид $4z^2 - 13z + 10 = 0$.

Решение. Так как

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1,$$

то при замене $2^{\sqrt{x}} = z > 0$ при условии $x \neq 1$ уравнение принимает вид

$$8z^2 - 26z + 20 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4z^2 - 13z + 10 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{5}{4}; \\ z = 2; \end{array}\right.$$

Вернемся к x:

1) $2^{\sqrt{x}} = \dfrac{5}{4} \iff \sqrt{x} = \log_2 \dfrac{5}{4} \iff x = \log_2^2 \dfrac{5}{4}$;

2) $2^{\sqrt{x}} = 2 \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$, это значение переменной не принадлежит области определения.

Ответ. $\log_2^2 \dfrac{5}{4}$.

Задача 19. (Физ-96.3)

Решить уравнение $5^{\frac{x}{2}} - 5^{2-\frac{3x}{2}} = 24 \cdot 5^{-\frac{x}{2}}$.

Идея. Уравнение является квадратным относительно показательной функции.

Указание. Умножив обе части уравнения на $5^{\frac{3x}{2}} > 0$, получаем равенство $5^{2x} - 25 = 24 \cdot 5^x$, то есть $z^2 - 24z - 25 = 0$ при $z = 5^x > 0$.

Решение. Умножим обе части уравнения на $5^{\frac{3x}{2}} > 0$:

$$5^{2x} - 25 = 24 \cdot 5^x.$$

Уравнение является квадратным относительно переменной $z = 5^x > 0$:

$$z^2 - 24z - 25 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = -1 < 0; \\ z = 25; \end{array}\right.$$

значит, $5^x = 25 \iff x = 2$.

Ответ. 2.

Задача 20. (Физ-94(1).3)

Решить уравнение $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$.

Идея. Уравнение является квадратным относительно показательной функции.
Указание. $5^{3-\sqrt{x}} = \dfrac{125}{5^{\sqrt{x}}}$, поэтому, домножив обе части уравнения на $z = 5^{\sqrt{x}}$, получаем уравнение $z^2 - 20z - 125 = 0$.

Решение. Введём новую переменную $z = 5^{\sqrt{x}} > 0$. Умножив обе части уравнения на z, получим квадратное уравнение

$$z^2 - 20z - 125 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = -5 < 0; \\ z = 25; \end{array}\right.$$

значит, $5^{\sqrt{x}} = 25 \iff x = 4$.

Ответ. 4.

Задача 21. (Физ-96(2).5)

Решить неравенство $4^{x-0,5} + 2^{x+1} - 16 < 0$.

Идея. Неравенство является квадратным относительно показательной функции.
Указание. $4^{2x-0,5} = \dfrac{4^x}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{(2^x)^2}{2}$, $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, то есть при $z = 2^x > 0$ неравенство принимает вид $z^2 + 4z - 32 < 0$.

Решение. Введём новую переменную $z = 2^x > 0$, тогда неравенство примет вид

$$z^2 + 4z - 32 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -8 < z < 4.$$

Левое неравенство верно всегда, поэтому получаем $2^x < 4 \iff x < 2$.

Ответ. $(-\infty; 2)$.

Задача 22. (М/м-75.1)

Решить неравенство $98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}$.

Идея. Ввести новую переменную вместо показательной функции с квадратным трёхчленом в показателе и решить полученное квадратное неравенство.
Указание. Обозначить $z = 7^{x^2+5x-48} > 0$, тогда неравенство примет вид
$98 - z \geq \dfrac{z^2}{49}$.

Р е ш е н и е. Пусть $z = 7^{x^2+5x-48} > 0$, тогда неравенство принимает вид

$$z^2 + 49z - 49 \cdot 98 \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -98 \le z \le 49.$$

Поскольку $z > 0$, остаётся неравенство

$$7^{x^2+5x-48} \le 49 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 5x - 50 \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -10 \le x \le 5.$$

О т в е т. $[-10; 5]$.

Задача 23. (Геогр-73.4)

Найти решения уравнения $3^{x^2+4x} = \dfrac{1}{25}$, удовлетворяющие неравенству $x > -3$.

И д е я. Привести правую часть к показательному виду с основанием 3.
У к а з а н и е. Используя основное логарифмическое тождество, привести правую часть к показательному виду: $3^{x^2+4x} = 3^{-2\log_3 5}$.
У к а з а н и е. Используя монотонность показательной функции, перейти к равенству для степеней: $x^2 + 4x = -2\log_3 5$. Один из корней не удовлетворяет неравенству $x > -3$.

Р е ш е н и е. Используя основное логарифмическое тождество, приведём правую часть к показательному виду с основанием 3 и воспользуемся монотонностью показательной функции:

$$3^{x^2+4x} = 3^{-2\log_3 5} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 4x + 2\log_3 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2 \pm \sqrt{4 - 2\log_3 5};$$

проверим выполнение неравенства, заданного в условии задачи:
1) при $x = -2 - \sqrt{4 - 2\log_3 5}$

$$\begin{array}{rcl} -2 - \sqrt{4 - 2\log_3 5} & \vee & -3 \\ 1 & \vee & 4 - 2\log_3 5 \\ \log_3 25 & < & \log_3 27; \end{array}$$

значит, первый корень не подходит;
2) корень $x = -2 + \sqrt{4 - 2\log_3 5}$ очевидно подходит.

О т в е т. $-2 + \sqrt{4 - 2\log_3 5}$.

Задача 24. (Почв-92.3)

Решить уравнение $\dfrac{9^x - 82 \cdot 3^x + 162 - 3^{\frac{x}{2}+2}}{3^{\frac{x}{2}} - 9} = -9$.

И д е я. Избавиться от дроби с учётом области определения и решить получившееся относительно показательной функции квадратное уравнение.
У к а з а н и е. Если принять $z = 3^{\frac{x}{2}} > 0$, то при $z \ne 9$ получим $z^4 - 82z^2 + 81 = 0$.

Решение. Обозначим $z = 3^{\frac{x}{2}} > 0$, область определения для новой переменной $z \neq 9$; в новых обозначениях уравнение принимает вид

$$z^4 - 82z^2 + 162 - 9z = -9z + 81 \quad \Longleftrightarrow \quad z^4 - 82z^2 + 81 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z^2 = 1; \\ z^2 = 81; \end{array}\right.$$

поскольку $z > 0$, остаются значения $z = 1$ или $z = 9$, последнее не принадлежит области определения; значит, $3^{\frac{x}{2}} = 1 \iff x = 0$.

Ответ. 0.

Задача 25. (Хим-97.2)

Решить неравенство $(\sqrt{2}+1)^x + 1 < 2(\sqrt{2}-1)^x$.

Идея. Неравенство является квадратным относительно показательной функции.
Указание. Заметить, что $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2 - 1 = 1$, то есть
$(\sqrt{2}-1)^x = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^x}$.
Указание. При $z = (\sqrt{2}+1)^x > 0$ неравенство принимает вид $z + 1 < \dfrac{2}{z}$, то есть $z^2 + z - 2 < 0$.

Решение. Заметим, что $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2-1 = 1 \iff (\sqrt{2}-1)^x = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^x}$.
Значит, неравенство принимает вид

$$(\sqrt{2}+1)^x + 1 < \frac{2}{(\sqrt{2}+1)^x}.$$

Введём новую переменную $z = (\sqrt{2}+1)^x > 0$, тогда

$$z + 1 < \frac{2}{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 + z - 2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < z < 1.$$

Поскольку $z > 0$, остаётся неравенство $(\sqrt{2}+1)^x < 1 \iff x < 0$.

Ответ. $(-\infty; 0)$.

Задача 26. (Хим-95(1).3)

Решить неравенство $2^{\frac{1-x}{x}} < 2^{\frac{1-2x}{2x}} + 1$.

Идея. Привести неравенство к квадратному относительно показательной функции.
Указание. $2^{\frac{1-x}{x}} = 2^{\frac{1}{x}-1} = \dfrac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{x}}$, $2^{\frac{1-2x}{2x}} = 2^{\frac{1}{2x}-1} = \dfrac{1}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2x}}$, поэтому при $z = 2^{\frac{1}{2x}} > 0$ получаем неравенство $\dfrac{z^2}{2} < \dfrac{z}{2} + 1$, то есть $z^2 - z - 2 < 0$.

Указание. С учётом условия $z > 0$ решением неравенства будет $z < 2$, то есть $2^{\frac{1}{2x}} < 2$, откуда $\dfrac{1}{2x} < 1$.

Решение. Преобразуем показатели степеней:

$$2^{\frac{1}{x}-1} < 2^{\frac{1}{2x}-1} + 1.$$

Пусть $z = 2^{\frac{1}{2x}} > 0$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{z^2}{2} < \frac{z}{2} + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 - z - 2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < z < 2.$$

Поскольку $z > 0$, остаётся неравенство $z < 2$, при решении которого используем метод интервалов:

$$2^{\frac{1}{2x}} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2x} - 1 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x < 0; \\ x > \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Задача 27. (Физ-85.4)

При каждом значении параметра a решить уравнение $4^x - 2a(a+1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0$.

Идея. Уравнение является квадратным относительно показательной функции; при решении рассмотреть все случаи знака дискриминанта в зависимости от значений параметра.

Указание. Выполнив замену $z = 2^x > 0$, получаем $z^2 - a(a+1)z + a^3 = 0$, где $D = a^2(a-1)^2 \geq 0$ при всех возможных значениях параметра.

Указание. Отдельно рассматриваются случаи, когда $D = 0$ и $D > 0$, причём в последнем можно явно вычислить два корня квадратного уравнения.

Указание. В случае положительного дискриминанта, то есть при $a \neq 0$, $a \neq 1$, уравнение имеет два решения $z = a$ и $z = a^2$. Поскольку $z > 0$, далее необходимо рассмотреть отдельно случаи $a > 0$ и $a < 0$.

Указание. Если $a < 0$, то $z = a$ решений по x не даёт, так как $2^x > 0$, а $z = a^2$ позволяет вывести $2^x = a^2 \iff x = 2\log_2|a| = 2\log_2(-a)$.

Решение. Пусть $z = 2^x > 0$, тогда уравнение принимает вид

$$z^2 - a(a+1)z + a^3 = 0;$$

дискриминант $D = a^2(a-1)^2 \geq 0$; сначала рассмотрим случай $D = 0$:
1) если $a = 0$, то $z^2 = 0$, нет решений;
2) если $a = 1$, то $z = 1$, то есть $x = 0$;
затем рассматриваем $D > 0$, то есть $a \neq 0$, $a \neq 1$. В этом случае квадратное уравнение имеет два несовпадающих корня $z_1 = a$ и $z_2 = a^2 > 0$. Рассмотрим два случая в зависимости от знака a:

1) если $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, то $\left[\begin{aligned} &2^x = a; \\ &2^x = a^2; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x = \log_2 a; \\ &x = 2\log_2 a; \end{aligned}\right.$

2) если $a \in (-\infty;0)$, то $2^x = a^2 \iff x = \log_2 a^2 = 2\log_2 |a| = 2\log_2(-a)$.

Ответ. Если $a < 0$, то $x = 2\log_2(-a)$; если $a = 0$, то нет решений; если $a = 1$, то $x = 0$; если $0 < a \neq 1$, то $x = \log_2 a$ или $x = 2\log_2 a$.

5.3. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства, равносильные преобразования

Задача 1. (ЕГЭ)

Найдите произведение корней уравнения $2\log_4^2 x + \log_4 x - 1 = 0$.

Идея. Уравнение является квадратным относительно $\log_4 x$.
Указание. Сделать замену $y = \log_4 x$. Произведение корней проще искать через теорему Виета.

Решение. Уравнение является квадратным относительно $y = \log_4 x$:

$$2y^2 + y - 1 = 0, \quad D = 1 + 8 = 9 > 0.$$

Так как дискриминант положительный, то уравнение имеет два корня. Поэтому исходное уравнение также имеет два корня. Для поиска произведения корней воспользуемся теоремой Виета:

$$-\frac{1}{2} = y_1 + y_2 = \log_4 x_1 + \log_4 x_2 = \log_4(x_1 x_2) \iff x_1 x_2 = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. 0,5.

Задача 2. (ЕГЭ)

Решите неравенство $\log_3 \dfrac{x-7}{2x-5} < 0$.

Идея. Преобразовать правую часть неравенства к логарифму с основанием 3 и воспользоваться возрастанием логарифма по основанию 3.

Указание. Преобразовать правую часть уравнения $\log_3 \dfrac{x-7}{2x-5} < \log_3 1$ и воспользоваться возрастанием логарифма по основанию 3: $0 < \dfrac{x-7}{2x-5} < 1$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения к логарифму с основанием 3 и воспользуемся возрастанием логарифма по основанию 3, не забывая при этом про ОДЗ:

$$\log_3 \frac{x-7}{2x-5} < \log_3 1 \iff 0 < \frac{x-7}{2x-5} < 1 \iff \begin{cases} \dfrac{x-7}{2x-5} > 0, \\ \dfrac{x+2}{2x-5} > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{2}\right) \cup (7; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2) \cup \left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right); \end{cases} \iff x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)\,.$$

Ответ. $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$.

Задача 3. (Соц-98.2)

Решить уравнение $\log_2(x^2-5) = \dfrac{3}{2}\log_{\sqrt{8}}(1-x)$.

Идея. Преобразовать обе части уравнения к логарифмам с одинаковыми основаниями.
Указание. После применения формулы $\log_{a^x} y = \dfrac{1}{x}\log_a y$, где $a>0, a\neq 1$, $y>0$, $x\neq 0$, уравнение принимает вид $\log_2(x^2-5) = \log_2(1-x)$, то есть $x^2-5 = 1-x > 0$.

Решение. Перейдём к логарифмам с основанием, равным 2, получим

$$\log_2(x^2-5) = \log_2(1-x) \iff \begin{cases} x^2-5 = 1-x, \\ 1-x > 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x<1; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3; \\ x=2; \end{array}\right. \\ x<1; \end{cases} \iff x=-3.$$

Ответ. -3.

Задача 4. (Почв-77.2)

Решить уравнение $2\lg\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - \lg(x-1) = \lg\left(x+\dfrac{5}{2}\right) + \lg 2$.

Идея. Привести обе части уравнения к десятичным логарифмам от различных функций.
Указание. Перенести второй логарифм из левой части в правую и применить формулы:
1) $\lg x^\alpha = \alpha\lg x$, где $x>0$;
2) $\lg x + \lg y = \lg xy$, где $x>0,\ y>0$.
Указание. Из равенства логарифмов получится уравнение $x^2+2x-21/4=0$, где $x>1$.

Решение. На области определения входящих в уравнение логарифмов ($x>1$) можно воспользоваться формулами логарифма степени и логарифма суммы:

$$2\lg\left(x+\frac{1}{2}\right) = \lg(2x+5) + \lg(x-1) \iff \lg\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \lg(2x+5)(x-1) \iff$$

$$\iff \quad x^2+x+\frac{1}{4}=2x^2-2x-5+5x \quad \iff \quad x^2+2x-\frac{21}{4}=0 \quad \iff \quad \left[\begin{aligned} &x=-\frac{7}{2};\\ &x=\frac{3}{2}; \end{aligned}\right.$$

области определения принадлежит корень $x=\dfrac{3}{2}$.

Ответ. $\dfrac{3}{2}$.

Задача 5. (Геол-00.1)

Решить неравенство $\log_{\sqrt{2}}(5x-4)\le 8$.

Идея. Преобразовать обе части неравенства к логарифму с основанием 2 и воспользоваться возрастанием логарифма по основанию 2.
Указание. Преобразовать обе части неравенства к логарифму с основанием 2: $\log_2(5x-4)\le\log_2 16$.
Указание. Воспользоваться возрастанием логарифма по основанию 2, не забывая при этом про ОДЗ: $0<5x-4\le 16$.

Решение. Перейдём в правой части неравенства к логарифму по основанию 2 и воспользуемся возрастанием логарифма по основанию 2, не забывая при этом про ОДЗ:

$$\log_2(5x-4)\le\log_2 16 \quad \iff \quad 0<5x-4\le 16 \quad \iff \quad \frac{4}{5}<x\le 4.$$

Ответ. $\left(\dfrac{4}{5};4\right]$.

Задача 6. (Геол.ОГ-83.3)

Решить неравенство $\log_3(5x^2+6x+1)\le 0$.

Идея. Воспользоваться монотонным возрастанием логарифмической функции в условиях задачи при выполнении ограничений области определения.
Указание. Неравенство $\log_a f(x)\le\log_a g(x)$ при $a>1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)\le g(x),\\ f(x)>0; \end{cases}$ то есть для нашей задачи получаем $0<5x^2+6x+1\le 1$.

Решение. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 5x^2+6x+1\le 1,\\ 5x^2+6x+1>0; \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{6}{5}\le x\le 0,\\ \left[\begin{aligned} &x<-1;\\ &x>-\frac{1}{5}; \end{aligned}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{aligned} &-\frac{6}{5}\le x<-1;\\ &-\frac{1}{5}<x\le 0. \end{aligned}\right.$$

Ответ. $\left[-\dfrac{6}{5};-1\right)\bigcup\left(-\dfrac{1}{5};0\right]$.

Задача 7. (Псих-80.4)

Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geq 1$.

Идея. Преобразовать сумму логарифмов в логарифм произведения и использовать равносильный переход, основанный на свойстве монотонности логарифмической функции.

Указание. Учитывая ОДЗ $(x>1)$, левая часть преобразуется к виду

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\geq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\leq\frac{1}{2},$$

так как функция $y=\log_a x$ при $0<a<1$ убывает.

Решение. Учитывая область определения $(x>1)$, в левой части неравенства преобразуем сумму логарифмов в логарифм произведения и воспользуемся монотонным убыванием логарифмической функции с основанием, меньшим единицы:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\leq\frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-\frac{3}{2}x\leq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 0\leq x\leq\frac{3}{2};$$

учитывая область определения, получим $1<x\leq\dfrac{3}{2}$.

Ответ. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Задача 8. (ВМК-86.1)

Решить неравенство $\log_3(x+2)+\log_3(x-4)-1\leq 0$.

Идея. Привести сумму логарифмов к логарифму произведения и использовать равносильный переход на основе монотонности логарифмической функции.

Указание. Неравенство переписывается в виде $\log_3(x+2)(x-4)\leq 1$ при $x>4$ и решается равносильным переходом, основанным на монотонном возрастании функции $y=\log_3 x$.

Указание. После преобразований на области определения исходное неравенство приводится к виду $x^2-2x-11\leq 0$.

Решение. Учитывая область определения $(x>4)$, приведём сумму логарифмов в левой части неравенства к логарифму произведения и воспользуемся монотонным возрастанием логарифмической функции с основанием, равным трём:

$$\begin{cases}\log_3(x+2)(x-4)\leq 1,\\ x>4;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}(x+2)(x-4)\leq 3,\\ x>4;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}x^2-2x-11\leq 0,\\ x>4;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}1-2\sqrt{3}\leq x\leq 1+2\sqrt{3},\\ x>4;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 4<x\leq 2\sqrt{3}+1.$$

Ответ. $(4;2\sqrt{3}+1]$.

Задача 9. (М/м-87.2)

Решить неравенство $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})<2$.

Идея. Воспользоваться монотонным возрастанием логарифмической функции в условиях задачи при выполнении ограничений области определения.
Указание. Поскольку $\sqrt{6}-\sqrt{2}>1$, то функция $y=\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}t$ возрастает и неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+4x+11-4\sqrt{3}<(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2, \\ x^2+4x+11-4\sqrt{3}>0. \end{cases}$$

Решение. Сравним основание логарифма с единицей:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{6}-\sqrt{2} & \vee & 1 \\ 6 & \vee & 2+1+2\sqrt{2} \\ 3 & \vee & 2\sqrt{2} \\ 9 & > & 8; \end{array}$$

значит, логарифмическая функция в левой части исходного неравенства возрастает, поэтому оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+4x+11-4\sqrt{3}<(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2, \\ x^2+4x+11-4\sqrt{3}>0. \end{cases}$$

Решаем первое неравенство системы:

$$x^2+4x+3<0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3<x<-1.$$

Для второго неравенства $D_1=4+4\sqrt{3}-11=4\sqrt{3}-7<0 \quad \Longrightarrow \quad x\in\mathbb{R}$.

Ответ. $(-3;-1)$.

Задача 10. (ВМК-90.1)

Решить неравенство $\log_{x^2+4}8<1$.

Идея. Воспользоваться монотонным возрастанием логарифмической функции в условиях задачи.
Указание. Несмотря на переменное основание логарифмической функции, можно говорить о её возрастании на области определения, так как $x^2+4>1$ для всех x, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $x^2+4>8$ без дополнительных ограничений.

Решение. Поскольку $x^2+4>1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, то логарифмическая функция в левой части неравенства возрастает, поэтому

$$\log_{x^2+4}8<\log_{x^2+4}(x^2+4) \quad \Longleftrightarrow \quad 8<x^2+4 \quad \Longleftrightarrow \quad |x|>2.$$

Ответ. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Задача 11. (Биол-96.3)

Решить неравенство $1 + \log_{\frac{1}{4}} (\log_3 (4 - x)) > 0$.

Идея. Перенеся константу в правую часть, последовательно снять логарифмы, начиная с внешнего, строго следя за равносильностью всех преобразований.
Указание. $\log_4 \log_3 (4 - x) < 1$ равносильно неравенству $0 < \log_3 (4 - x) < 4$, которое, в свою очередь, равносильно $1 < 4 - x < 81$.

Решение. Перенесём константу в правую часть и последовательно снимем логарифмы, начиная с внешнего:

$$\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 (4 - x)) > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_4 (\log_3 (4 - x)) < 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 < \log_3 (4 - x) < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < 4 - x < 81 \quad \Longleftrightarrow \quad -77 < x < 3.$$

Ответ. $(-77; 3)$.

Задача 12. (Геол-00(1).3)

Решить неравенство $\log_2 (x - 3)(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 2)(x - 6) \le 2$.

Идея. Привести оба логарифма к одному основанию и упростить левую часть с учётом области определения, после чего воспользоваться монотонностью логарифмической функции.

Указание. Неравенство может быть переписано в виде $\log_2 \dfrac{(x - 3)(x + 2)}{(x + 2)(x - 6)} \le 2$, где $(x - 3)(x + 2) > 0$ и $(x + 2)(x - 6) > 0$.
Указание. В силу монотонного возрастания функции $y = \log_2 t$ исходное неравенство равносильно $\dfrac{x - 3}{x - 6} \le 4$, где $x < -2$ или $x > 6$.

Решение. Область определения $x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.
Приведём оба логарифма в левой части к основанию 2 и перейдём от разности логарифмов к логарифму частного:

$$\log_2 (x - 3)(x + 2) - \log_2 (x + 2)(x - 6) \le 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2 \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x + 2)(x - 6)} \le 2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x - 3}{x - 6} \le 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x - 7}{x - 6} \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x < 6; \\ x \ge 7. \end{array}\right.$$

С учётом области определения получаем: $x < -2$ или $x \ge 7$.

Ответ. $(-\infty; -2) \cup [7; +\infty)$.

Задача 13. (Филол-98.3)

Решить уравнение $\dfrac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2$.

Идея. В левой части уравнения записано выражение из формулы перехода к новому основанию, после применения которой следует использовать определение логарифма.

Указание. Используя формулу перехода к новому основанию $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ \ b > 0$, записать уравнение в виде $\log_{x+1}(-2x) = 2$.

Указание. По определению логарифма уравнение $\log_{x+1}(-2x) = 2$ равносильно системе $\begin{cases} -2x = (x+1)^2, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1; \end{cases}$ решая которую, получим ответ.

Решение. Воспользуемся в левой части уравнения формулой перехода к новому основанию:

$$\log_{x+1}(-2x) = \log_{x+1}(x+1)^2 \iff \begin{cases} -2x = (x+1)^2, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2+4x+1 = 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2-\sqrt{3}; \\ x = -2+\sqrt{3}; \end{array} \right. \\ x > -1,\ x \neq 0; \end{cases} \iff x = -2+\sqrt{3}.$$

Ответ. $\sqrt{3} - 2$.

Задача 14. (Геол.ОГ-82.3)

Решить неравенство $\log_3((x+2)(x+4)) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7$.

Идея. Перейти к логарифмам по основанию 3 и воспользоваться возрастанием функции $y = \log_3 t$.

Указание. Формулы:

1) $\forall x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0 \quad \log_{a^x} y = \dfrac{1}{x}\log_a y;$

2) $\forall x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1 \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y.$

Решение. На области определения $(x > -2)$ перейдём к логарифмам по основанию 3 и воспользуемся монотонностью логарифмической функции:

$$\log_3(x+2) + \log_3(x+4) - \log_3(x+2) < \log_3 7 \iff x+4 < 7 \iff x < 3;$$

с учётом области определения получаем $x \in (-2; 3)$.

Ответ. $(-2; 3)$.

Задача 15. (Хим-97(1).2)

Решить уравнение $\log_x(3x-2)=2$.

Идея. Применить определение логарифма с условиями равносильности переходов.

Указание. Число b называется логарифмом числа c по основанию a, если $a^b=c,\ c>0, a>0, a\neq 1$. Обозначение: $b=\log_a c$, если $a^b=c$.

Указание. Уравнение $\log_x(3x-2)=2$ равносильно системе $\begin{cases}3x-2=x^2,\\ x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$

Условие $3x-2>0$ не нужно, так как оно выполняется автоматически.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}3x-2=x^2,\\ x>0,\\ x\neq 1;\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-3x+2=0,\\ x>0,\\ x\neq 1;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1;\\ x=2;\end{array}\right.\\ x>0,\\ x\neq 1;\end{cases} \iff x=2.$$

Ответ. 2.

Задача 16. (Физ-97(1).3)

Решить уравнение $\log_9\dfrac{x^2}{4}+\log_3(x+5)=1$.

Идея. Привести логарифмы к одному основанию и применить формулу суммы логарифмов.

Указание. Поскольку $\log_9\dfrac{x^2}{4}=\log_3\dfrac{|x|}{2}$, в левой части получим $\log_3\dfrac{|x|(x+5)}{2}$.

Указание. $\log_3\dfrac{|x|(x+5)}{2}=1 \iff \dfrac{|x|(x+5)}{2}=3$.

ОДЗ при этом выполняется автоматически.

Решение. Приведём логарифмы к одному основанию, применим формулу преобразования суммы логарифмов в логарифм произведения и снимем логарифмы (ОДЗ при этих преобразованиях выполняется автоматически):

$$\log_3\frac{|x|}{2}+\log_3(x+5)=1 \iff \log_3\frac{|x|(x+5)}{2}=1 \iff |x|(x+5)=6.$$

Раскрываем модуль по определению.

1) При $x>0$ $\quad x^2+5x-6=0 \iff x=1$ или $x=-6<0$.

2) При $x<0$ $\quad x^2+5x+6=0 \iff x=-3$ или $x=-2$ – оба подходят.

Ответ. $-3;-2;1$.

Задача 17. (Биол-80.2)

Решить уравнение $2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 \dfrac{x}{4} - 11 = 0$.

И д е я. Уравнение является квадратным относительно $\log_2 x$.

У к а з а н и е. $\log_2 \dfrac{x}{4} = \log_2 x - 2$, поэтому при $z = \log_2 x$ получаем $2z^2 - 3z - 5 = 0$.

Р е ш е н и е. Пусть $z = \log_2 x$, тогда уравнение принимает вид

$$2z^2 - 3z - 5 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} z = -1; \\ z = \dfrac{5}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}; \\ x = 4\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\dfrac{1}{2}; 4\sqrt{2}$.

Задача 18. (Геол.ОГ-76.1)

Найти все решения уравнения $4 + \log_2 x^2 = \log_x 64$.

И д е я. Приведя все логарифмы к одному основанию, ввести новую переменную и получить относительно неё квадратное уравнение.

У к а з а н и е. На области определения $(x > 0,\ x \neq 1)$ $\log_x 64 = 6\log_x 2 = \dfrac{6}{\log_2 x}$, $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$; если $z = \log_2 x$, то уравнение переписывается в виде $4 + 2z = \dfrac{6}{z}$, после чего решается как квадратное.

Р е ш е н и е. Введём новую переменную $z = \log_2 x \neq 0$, тогда

$$4 + 2z = \frac{6}{z} \iff z^2 + 2z - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} z = 1; \\ z = -3; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = \dfrac{1}{8}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\dfrac{1}{8}; 2$.

Задача 19. (Хим-98(1).2)

Решить уравнение $\log_4 x + 2\log_x 4 = 3$.

И д е я. Уравнение является квадратным относительно $\log_4 x$.

У к а з а н и е. $\log_x 4 = \dfrac{1}{\log_4 x}$, поэтому при $z = \log_4 x \neq 0$ после домножения на него обеих частей уравнения получим $z^2 - 3z + 2 = 0$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $\log_x 4 = \dfrac{1}{\log_4 x}$. Пусть $z = \log_4 x \neq 0$, тогда уравнение принимает вид

$$z + \frac{2}{z} - 3 = 0 \iff z^2 - 3z + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} z = 1; \\ z = 2; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 4; \\ x = 16. \end{array}\right.$$

О т в е т. $4; 16$.

Задача 20. (Филол-89.3)

Решить уравнение $\log_{2x+2}(2x^2-8x+6)=2$.

Идея. Использовать определение логарифма для перехода от уравнения к равносильной системе.
Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2-8x+6=(2x+2)^2, \\ 2x+2>0, \\ 2x+2\neq 1; \end{cases}$$

ОДЗ на функцию, стоящую под логарифмом, будет выполнено автоматически.

Решение. Перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} 2x^2-8x+6=(2x+2)^2, \\ 2x+2>0, \\ 2x+2\neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+8x-1=0, \\ x>-1, \\ x\neq -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} x=-4\pm\sqrt{17}; \\ x>-1, \\ x\neq -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\iff \quad x=-4+\sqrt{17}.$$

Ответ. $\sqrt{17}-4$.

Задача 21. (Почв-71.5)

Решить неравенство $2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)\geq 1$.

Идея. Разложив квадратный трёхчлен на множители, привести обе части неравенства к логарифму по одному основанию и воспользоваться монотонностью логарифмической функции.
Указание. На области определения $(x>2)$ преобразовать левую часть
$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.
Указание. Решая неравенство, перенести второй логарифм направо:
$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geq\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+1$.

Решение. Разложим квадратный трёхчлен на множители и на области определения $(x>2)$ заменим логарифм произведения суммой логарифмов:

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)(x+1)\geq 1 \iff \log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geq\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+1 \iff$$

$$\iff \quad x-2\leq\frac{x+1}{2} \quad\iff\quad 2x-4\leq x+1 \quad\iff\quad x\leq 5;$$

осталось учесть область определения, в итоге получим $2<x\leq 5$.

Ответ. $(2;5]$.

Задача 22. (Почв-96(1).2)

Решите уравнение $\log_{4x-x^2} x = \log_{12-3x} x$.

Идея. Используя формулу перехода к новому основанию в логарифмах, перейти к равносильной системе условий.

Указание. Применив формулу перехода к новому основанию, получить уравнение

$$\frac{\log_2 x}{\log_2(4x-x^2)} = \frac{\log_2 x}{\log_2(12-3x)}.$$

Далее рассмотреть два случая: числители равны нулю при выполнении ОДЗ или знаменатели равны друг другу при выполнении ОДЗ.

Решение. Применим формулу перехода к новому основанию:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2(4x-x^2)} = \frac{\log_2 x}{\log_2(12-3x)}.$$

Далее рассмотрим два случая: числители равны нулю при выполнении ОДЗ или знаменатели равны друг другу при выполнении ОДЗ.

$$1)\ \begin{cases} \log_2 x = 0, \\ 4x-x^2>0,\ 4x-x^2\neq 1, \\ 12-3x>0,\ 12-3x\neq 1; \end{cases} \iff \quad x=1.$$

$$2)\ \begin{cases} \log_2(4x-x^2) = \log_2(12-3x), \\ x>0; \end{cases} \iff \begin{cases} 4x-x^2 = 12-3x, \\ 12-3x>0,\ 12-3x\neq 1, \\ x>0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=4; \end{array} \right. \\ 0<x<4, \\ x\neq \dfrac{11}{3}; \end{cases} \iff \quad x=3.$$

Ответ. $1; 3$.

Задача 23. (ВМК-96(1).2)

Решить уравнение $\log_{2x+3}(x-2)^2 = \log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2$.

Идея. Использовать формулу перехода к новому основанию в логарифмах и затем рассмотреть два случая.

Указание. После применения формулы перехода к новому основанию получим уравнение

$$\frac{\log_2(x-2)^2}{\log_2(2x+3)} = \frac{\log_2(x-2)^2}{\log_2\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2}\right)}.$$

Далее рассмотреть два случая: числители равны нулю при выполнении ОДЗ или знаменатели равны друг другу при выполнении ОДЗ.

Р е ш е н и е. Применим формулу перехода к новому основанию:

$$\frac{\log_2(x-2)^2}{\log_2(2x+3)} = \frac{\log_2(x-2)^2}{\log_2\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2}\right)}$$

Далее рассмотрим два случая: числители равны нулю при выполнении ОДЗ или знаменатели равны друг другу при выполнении ОДЗ.

$$1)\ \begin{cases}\log_2(x-2)^2 = 0,\\ 2x+3>0,\quad 2x+3\neq 1,\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2}>0,\quad \dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2}\neq 1;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=1;\\ x=3;\end{array}\right.\\ x>-3/2,\\ x\neq -1,\quad x\neq 3;\end{cases} \iff \quad x=1.$$

$$2)\ \begin{cases}\log_2(2x+3) = \log_2\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2}\right),\\ 2x+3\neq 1,\\ x-2\neq 0;\end{cases} \iff \begin{cases}2x+3=\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2},\\ x\neq 2,\\ 2x+3>0,\\ 2x+3\neq 1;\end{cases} \iff \quad x=-\frac{15}{11}.$$

О т в е т. $-\dfrac{15}{11}; 1$.

Задача 24. (Почв-95(1).3)

Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_x 2} - \log_2\dfrac{1}{x} \leq 2$.

И д е я. Привести оба логарифма к основанию 2.
У к а з а н и е. Формулы:
1) $\forall x>0,\ y>0,\ x\neq 1,\ y\neq 1 \quad \log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$;
2) $\forall x>0,\ y\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1 \quad \log_a x^y = y\log_a x$.

Р е ш е н и е. На области определения ($x>0, x\neq 1$) приведём логарифмы к одному основанию:

$$\frac{1}{\log_x 2} - \log_2 x^{-1} \leq 2 \iff \log_2 x + \log_2 x \leq 2 \iff \log_2 x \leq 1 \iff 0<x\leq 2.$$

Учтём область определения: $x\in(0;1)\cup(1;2]$.

О т в е т. $(0;1)\cup(1;2]$.

Задача 25. (Геогр-72.3)

Найти все значения x, для которых справедливо неравенство $2\log_7 x - \log_x 49 < 3$.

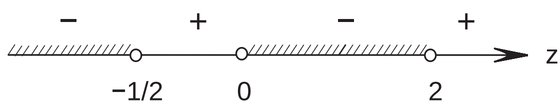
И д е я. Выполнив замену логарифма на новую переменную, привести левую часть к дроби и использовать метод интервалов.

Указание. Если $z = \log_7 x$, то $\log_x 49 = \dfrac{2}{z}$. Неравенство принимает вид $\dfrac{2z^2-3z-2}{z} < 0$ и решается методом интервалов.

Решение. Пусть $z = \log_7 x$, тогда неравенство принимает вид

$$2z - \frac{2}{z} < 3 \iff \frac{2z^2-3z-2}{z} < 0 \iff \frac{(z-2)(2z+1)}{z} < 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} z < -\dfrac{1}{2}; \\ 0 < z < 2; \end{array}\right.$$



возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_7 x < -\dfrac{1}{2}; \\ 0 < \log_7 x < 2; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{7}}; \\ 1 < x < 49. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right) \cup (1; 49)$.

Задача 26. (ЕГЭ)

Решите неравенство $\log_{x-1}(x+2) \le 0$.

Идея. Перейти к равносильной совокупности, используя определение и свойства логарифмической функции.

Указание. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) \le 0$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} a(x) > 1, \\ 0 < f(x) \le 1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) \ge 1. \end{cases}$$

Указание. Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x-1 > 1, \\ 0 < x+2 \le 1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < x-1 < 1, \\ x+2 \ge 1. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим два случая в зависимости от значения основания логарифма:

1) $\begin{cases} x-1 > 1, \\ 0 < x+2 \le 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2, \\ -2 < x \le -1; \end{cases}$ нет решений;

2) $\begin{cases} 0 < x-1 < 1, \\ x+2 \ge 1; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \ge -1; \end{cases} \iff 1 < x < 2.$

Ответ. $(1; 2)$.

Задача 27. (ВМК-73.2)

Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}}\left(5x-\dfrac{3}{10}\right)\le 0.$

И д е я. Перейти к равносильной совокупности на основе свойств логарифмической функции.

У к а з а н и е. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x)\le 0$ равносильно совокупности систем условий $\begin{cases} a(x)>1,\\ 0<f(x)\le 1;\end{cases}$ или $\begin{cases} 0<a(x)<1,\\ f(x)\ge 1.\end{cases}$

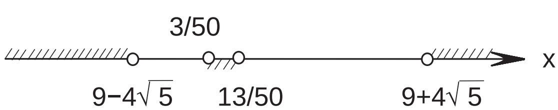
У к а з а н и е. По определению логарифмической функции неравенство равносильно совокупности $\begin{cases} \dfrac{x^2-18x+91}{90}>1,\\ 0<5x-\dfrac{3}{10}\le 1;\end{cases}$ или $\begin{cases} 0<\dfrac{x^2-18x+91}{90}<1,\\ 5x-\dfrac{3}{10}\ge 1.\end{cases}$

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая в зависимости от значения основания логарифма:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{x^2-18x+91}{90}>1,\\ 0<5x-\dfrac{3}{10}\le 1;\end{cases} \iff \begin{cases} x^2-18x+1>0,\\ \dfrac{3}{50}<x\le\dfrac{13}{50};\end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<9-4\sqrt{5};\\ x>9+4\sqrt{5};\end{array}\right.,\\ \dfrac{3}{50}<x\le\dfrac{13}{50}.\end{cases}$$

Сравним числа:

$$\begin{array}{rcl} 9-4\sqrt{5} & \vee & \dfrac{3}{50}\\ 447 & \vee & 200\sqrt{5}\\ 400^2+47^2+2\cdot 47\cdot 400 & \vee & 200^2\cdot 5=500\cdot 400\\ 47^2+47\cdot 800 & \vee & 400\cdot 100\\ 47^2 & \vee & 800\cdot 50-800\cdot 47=3\cdot 800\\ 1600+49+7\cdot 80 & \vee & 2400\\ 49+560 & < & 800 \end{array}$$



значит, $9-4\sqrt{5}<\dfrac{3}{50}<\dfrac{13}{50}<9+4\sqrt{5},$ поэтому в первом случае решений нет.

$$2)\ \begin{cases} 0<\dfrac{x^2-18x+91}{90}<1,\\ 5x-\dfrac{3}{10}\ge 1;\end{cases} \iff \begin{cases} x^2-18x+91>0,\\ x^2-18x+1<0,\\ x\ge\dfrac{13}{50};\end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 9 - 4\sqrt{5} < x < 9 + 4\sqrt{5}, \\ x \ge \dfrac{13}{50}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{13}{50} \le x < 9 + 4\sqrt{5}.$$

О т в е т. $\left[\dfrac{13}{50}; 9 + 4\sqrt{5}\right)$.

Задача 28. (Фил-92.2)

Решить неравенство $\log_x (x^2 - x^3 + 21x) \ge 3$.

И д е я. Перейти к равносильной совокупности, используя определение логарифмической функции и её свойства.
У к а з а н и е. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) \ge \log_{a(x)} g(x)$ равносильно совокупности условий: при $a(x) > 1$ $f(x) \ge g(x) > 0$; при $0 < a(x) < 1$ $0 < f(x) \le g(x)$.
У к а з а н и е. Раскрывая логарифмическую функцию по определению, получаем совокупность условий: при $x > 1$ $x^2 - x^3 + 21x \ge x^3$; при $0 < x < 1$ $0 < x^2 - x^3 + 21x \le x^3$.

Р е ш е н и е. Переходим к равносильной совокупности систем в зависимости от значения основания логарифма.
1) Если основание логарифма больше единицы, то логарифмическая функция возрастает:

$$\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x^3 + 21x \ge x^3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1, \\ x(2x^2 - x - 21) \le 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1, \\ -3 \le x \le \dfrac{7}{2}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 < x \le \frac{7}{2}.$$

2) Если основание логарифма меньше единицы, то логарифмическая функция убывает:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - x^3 + 21x \le x^3, \\ x^2 - x^3 + 21x > 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x(2x^2 - x - 21) \ge 0, \\ x(x^2 - x - 21) < 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -3; \\ x \ge \dfrac{7}{2}; \end{array}\right. \\ x^2 - x - 21 < 0; \end{cases}$$

нет решений, так как два первых неравенства не имеют пересечений. При этом последнее неравенство даже не пришлось решать.

О т в е т. $\left(1; \dfrac{7}{2}\right]$.

Задача 29. (М/м-97(1).2)

Решить неравенство $\log_{x+1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2x - 4} \le 1$.

Идея. Перейти к равносильной совокупности, используя определение и свойства логарифмической функции.

Указание. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) \le \log_{a(x)} g(x)$ равносильно совокупности условий: при $a(x) > 1$ $0 < f(x) \le g(x)$; при $0 < a(x) < 1$ $f(x) \ge g(x) > 0$.

Указание. Раскрывая логарифмическую функцию по определению, получаем: при $x+1>1$ $0 < \dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} \le x+1$; при $0<x<1$ $\dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} \ge x+1$.

Решение. Переходим к равносильной совокупности систем в зависимости от значения основания логарифма.

1) При $x+1>1 \iff x>0$ получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} \le x+1, \\ \dfrac{x^2+3x-4}{2x-4} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x^2-5x}{x-2} \ge 0, \\ \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-2} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x(x-5)}{x-2} \ge 0, \\ \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-2} > 0; \end{cases}$$

значит, с учётом $x>0$ получаем $\left[\begin{array}{l} 0<x<1; \\ x \ge 5. \end{array}\right.$

2) При $0<x+1<1 \iff -1<x<0$ получаем

$$\frac{x^2+3x-4}{2x-4} \ge x+1 \iff \frac{x^2-5x}{x-2} \le 0 \iff \frac{x(x-5)}{x-2} \le 0;$$

остаётся $-1<x<0$.

Ответ. $(-1;0)\cup(0;1)\cup[5;+\infty)$.

Задача 30. (Экон-98.1)

Решить неравенство $\log_{\frac{x^2-x}{5}} \dfrac{x-1}{2} \ge 0$.

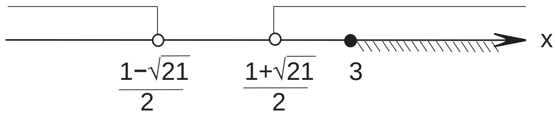
Идея. Перейти к равносильной совокупности, используя определение логарифмической функции и её свойства.

Указание. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) \ge 0$ равносильно совокупности условий: при $a(x)>1$ $f(x)\ge 1$; при $0<a(x)<1$ $0<f(x)\le 1$.

Указание. Раскрывая логарифм по определению, получаем совокупность: при $\dfrac{x^2-x}{5} > 1$ $\dfrac{x-1}{2} \ge 1$; при $0 < \dfrac{x^2-x}{5} < 1$ $0 < \dfrac{x-1}{2} \le 1$.

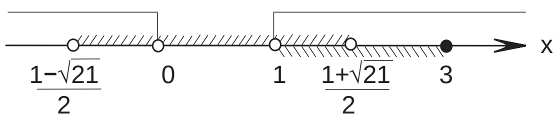
Решение. Переходим к равносильной совокупности систем в зависимости от значения основания логарифма.

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{5} > 1, \\ \dfrac{x-1}{2} \ge 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}; \\ x > \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}; \end{array}\right. \\ x \ge 3; \end{cases} \iff x \ge 3.$$



2) $\begin{cases} 0 < \dfrac{x^2 - x}{5} < 1, \\ 0 < \dfrac{x-1}{2} \le 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-1) > 0, \\ x^2 - x - 5 < 0, \\ 1 < x \le 3; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0; \\ x > 1; \end{array}\right. \\ \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, \\ 1 < x \le 3; \end{cases} \iff 1 < x < \frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$



О т в е т. $\left(1; \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \cup [3; +\infty)$.

Задача 31. (Геол-75.2)

Решить неравенство $\log_{9x^2-6x+1} \dfrac{1}{9x^2 - 18x + 8} < -1$.

И д е я. Перейти к равносильной совокупности на основе определения логарифмической функции.

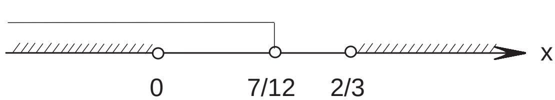
У к а з а н и е. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ равносильно совокупности условий: при $a(x) > 1$ $f(x) > g(x) > 0$; при $0 < a(x) < 1$ $0 < f(x) < g(x)$.

У к а з а н и е. Переписав неравенство в виде $\log_{9x^2-6x+1}\big(9x^2 - 18x + 8\big) > 1$, раскроем его по определению логарифмической функции: при $9x^2 - 6x + 1 > 1$ $9x^2 - 18x + 8 > 9x^2 - 6x + 1$; при $0 < 9x^2 - 6x + 1 < 1$ $0 < 9x^2 - 18x + 8 < 9x^2 - 6x + 1$.

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство в виде $\log_{9x^2-6x+1}\big(9x^2 - 18x + 8\big) > 1$ и рассмотрим два случая в зависимости от значения основания логарифма:

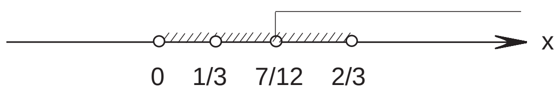
1) $\begin{cases} 9x^2 - 6x + 1 > 1, \\ 9x^2 - 18x + 8 > 9x^2 - 6x + 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x(3x-2) > 0, \\ 12x < 7; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0; \\ x > \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \\ x < \dfrac{7}{12}; \end{cases}$

$\iff \quad x < 0.$



2) $\begin{cases} 0 < 9x^2 - 6x + 1 < 1, \\ 0 < 9x^2 - 18x + 8 < 9x^2 - 6x + 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq \dfrac{1}{3}, \\ x(3x-2) < 0, \\ 9x^2 - 18x + 8 > 0, \\ 12x > 7; \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x \neq \dfrac{1}{3}, \\ 0 < x < \dfrac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2/3; \\ x > 4/3; \end{array} \right. \\ x > \dfrac{7}{12}; \end{cases} \iff \frac{7}{12} < x < \frac{2}{3}.$$



О т в е т. $(-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{7}{12}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Задача 32. (Геол-73.4)

Решить неравенство $\log_{2x-x^2}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^4 > 0$.

И д е я. Перейти к равносильной совокупности на основе определения логарифмической функции.

У к а з а н и е. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) > 0$ равносильно совокупности условий: при $a(x) > 1$ $f(x) > 1$; при $0 < a(x) < 1$ $0 < f(x) < 1$.

У к а з а н и е. Переписав неравенство в виде $\log_{2x-x^2}\left|x - \dfrac{3}{2}\right| > 0$, получаем для него по определению логарифма: при $2x - x^2 > 1$ $\left|x - \dfrac{3}{2}\right| > 1$; при $0 < 2x - x^2 < 1$ $0 < \left|x - \dfrac{3}{2}\right| < 1$.

Р е ш е н и е. $\log_{2x-x^2}\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^4 > 0 \iff \log_{2x-x^2}\left|x - \dfrac{3}{2}\right| > 0$.

Переходим к равносильной совокупности.

1) $\begin{cases} 2x - x^2 > 1, \\ \left|x - \dfrac{3}{2}\right| > 1; \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)^2 < 0, \\ \left|x - \dfrac{3}{2}\right| > 1; \end{cases}$ нет решения.

2) $\begin{cases} 0 < 2x - x^2 < 1, \\ 0 < \left|x - \dfrac{3}{2}\right| < 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-2) < 0, \\ (x-1)^2 > 0, \\ 0 < \left|x - \dfrac{3}{2}\right| < 1; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq 1, \\ \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2}, \\ x \neq \dfrac{3}{2}; \end{cases} \iff$

$\iff \quad x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \bigcup \left(1; \dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{3}{2}; 2\right).$

Ответ. $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \bigcup \left(1; \dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{3}{2}; 2\right).$

5.4. Смешанные задачи

Задача 1. (ЕГЭ)

Решите уравнение $10^{1-\lg x} = 100^{2+\lg x}$.

Идея. Привести показательные функции к одному основанию и воспользоваться свойством монотонности показательной функции.
Указание. Привести правую часть к основанию 10: $10^{1-\lg x} = 10^{4+2\lg x}$.

Решение. Приведём показательные функции к одному основанию и воспользуемся свойством монотонности показательной функции:

$$10^{1-\lg x} = 100^{2+\lg x} \iff 10^{1-\lg x} = 10^{4+2\lg x} \iff 1-\lg x = 4+2\lg x \iff$$

$$\iff \lg x = -1 \iff x = \frac{1}{10}.$$

Ответ. $0,1$.

Задача 2. (ВМК-85.1)

Решить систему уравнений $\begin{cases} 6^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 6^x \cdot 3^y = 12. \end{cases}$

Идея. Ввести новые переменные и решить подстановкой.
Указание. Пусть $6^x = u > 0$, $3^y = z > 0$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u - 2z = 2, \\ uz = 12; \end{cases} \iff \begin{cases} u = 2(z+1), \\ uz = 12. \end{cases}$$

Подставив u из первого во второе, приходим к стандартному квадратному уравнению.
Указание. После подстановки получаем $z^2 + z - 6 = 0$, то есть при условии $z > 0$ решением является $z = 2 \implies u = 6$.

Р е ш е н и е. Пусть $6^x = u > 0,\ 3^y = z > 0$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u - 2z = 2, \\ uz = 12; \end{cases} \iff \begin{cases} u = 2(z+1), \\ uz = 12. \end{cases}$$

Подставим u из первого во второе:

$$z^2 + z - 6 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} z = -3 < 0; \\ z = 2; \end{array}\right.$$

значит,

$$\begin{cases} z = 2, \\ u = 6; \end{cases} \iff \begin{cases} 3^y = 2, \\ 6^x = 6; \end{cases} \iff \begin{cases} y = \log_3 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

О т в е т. $(1; \log_3 2)$.

Задача 3. (Хим-92.1)

Решить уравнение $x + 1 + \log_{\frac{1}{3}}(-2 + 3^{-x}) = 0$.

И д е я. Оставив логарифм в левой части уравнения, воспользоваться его определением на области допустимых значений.
У к а з а н и е. Уравнение преобразуется к виду $\log_3(3^{-x} - 2) = x + 1$, далее по определению логарифма $3^{-x} - 2 = 3^{x+1}$.
У к а з а н и е. Полученное уравнение является квадратным относительно показательной функции $z = 3^x > 0$.

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение:

$$\log_3\left(3^{-x} - 2\right) = x + 1 \iff 3^{-x} - 2 = 3^{x+1}.$$

Обозначим $z = 3^x > 0$, тогда

$$\frac{1}{z} - 2 = 3z \iff 3z^2 + 2z - 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} z = -1 < 0; \\ z = \dfrac{1}{3}; \end{array}\right.$$

значит, $3^x = \dfrac{1}{3} \iff x = -1$.

О т в е т. -1.

Задача 4. (М/м-76.1)

Решить уравнение $\log_{\sin(-x)}\left(\sin\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{3x}{2}\right) = 1$.

И д е я. Используя определение логарифма, заменить уравнение равносильной системой и решить её.

Указание. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{3x}{2} = \sin(-x), \\ 0 < \sin(-x) \neq 1; \end{cases}$ решаемой привычными методами тригонометрических преобразований.

Решение. Перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{3x}{2} = -\sin x, \\ -\sin x > 0, \\ -\sin x \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin x\cos\dfrac{x}{2} + \sin x = 0, \\ \sin x < 0, \\ \sin x \neq -1; \end{cases}$$

Так как $\sin x < 0$, то из первого уравнения $\cos\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2} \iff x = \pm\dfrac{4\pi}{3} + 4\pi n;$ с учётом неравенств остаётся $x = \dfrac{4\pi}{3} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ. $\dfrac{4\pi}{3} + 4\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 5. (ИСАА-99.1)

Решить уравнение $\lg^2(x-2)^2 = 3^{2\log_3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\log_5(2-x)}{\log_5 10}.$

Идея. Преобразовав левую и правую части по соответствующим формулам, получить уравнение относительно логарифма.
Указание. Левая часть $\lg^2(x-2)^2 = 4\lg^2|x-2|;$ в правой части $3^{2\log_3\sqrt{2}} = 3^{\log_3 2} = 2, \quad \dfrac{\log_5(2-x)}{\log_5 10} = \lg(2-x).$ Тогда с учётом условия $2-x > 0$ уравнение переписывается в виде $4\lg^2(2-x) = 2\lg(2-x).$

Решение. Преобразуем выражения в левой и правой частях равенства:

$$4\lg^2|x-2| = 2\lg(2-x) \iff 4\lg^2(2-x) = 2\lg(2-x) \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} &\lg(2-x) = 0; \\ &\lg(2-x) = \frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &2-x = 1; \\ &2-x = \sqrt{10}; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x = 1; \\ &x = 2-\sqrt{10}. \end{aligned}\right.$$

Ответ. $1;\ 2-\sqrt{10}.$

Задача 6. (Экон.К-80.1)

Решить неравенство $\log_5(26-3^x) > 2.$

Идея. Воспользоваться монотонным возрастанием логарифмической функции в условиях задачи при выполнении ограничений области определения.
Указание. Неравенство $\log_5 f(x) > 2$ равносильно неравенству $f(x) > 25$, то есть в нашем случае получим, что $3^x < 1.$

Р е ш е н и е. Используем монотонное возрастание логарифма по основанию 5:

$$26 - 3^x > 25 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^x < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 0.$$

О т в е т. $(-\infty; 0)$.

Задача 7. (Биол-71.1)

Решить уравнение $\log_{\frac{1}{4}} 2x \cdot \log_{\frac{1}{4}} \left(x \cos^5 \dfrac{\pi}{3} \right) = 7 \cos \dfrac{2\pi}{3} \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2$.

И д е я. Вычислив непосредственно значения косинусов, привести обе части к логарифму по одному основанию.
У к а з а н и е. Подставив в уравнение табличные значения тригонометрических функций $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, получим $\log_2 2x \cdot \log_2 \dfrac{x}{32} = 7$.
У к а з а н и е. Последнее уравнение является квадратным относительно $\log_2 x$; после преобразований уравнение принимает вид $\log_2^2 x - 4 \log_2 x - 12 = 0$.

Р е ш е н и е. Подставим в уравнение табличные значения тригонометрических функций и преобразуем выражения, приведя логарифмы к основанию 2:

$$\log_2 2x \cdot \log_2 \frac{x}{32} = 7 \log_2 2.$$

Пусть $z = \log_2 x$, тогда

$$(1+z)(z-5) = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 - 5z - 5 + z = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2 - 4z - 12 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = -2; \\ z = 6; \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -2; \\ \log_2 x = 6; \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}; \\ x = 64. \end{array} \right.$$

О т в е т. $\dfrac{1}{4}$; 64.

Задача 8. (М/м-95.2)

Решить неравенство $\dfrac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3$.

И д е я. Выполнив для удобства замену переменной, решить неравенство методом интервалов.
У к а з а н и е. Пусть $z = \log_2 x$, тогда неравенство примет вид $\dfrac{z-6}{z-2} > 0$, $z \neq 0$.

Р е ш е н и е. Обозначим $z = \log_2 x$. Тогда при условии $z \neq 0$ (то есть $x \neq 1$) уравнение принимает вид

$$\frac{2z}{2-z} + 3 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z-6}{z-2} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z < 2; \\ z > 6; \end{array} \right.$$

то есть $\left[\begin{array}{l}\log_2 x < 2;\\ \log_2 x > 6;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}0 < x < 4;\\ x > 64.\end{array}\right.$
Осталось учесть условие $x \neq 1$: $x \in (0;1) \cup (1;4) \cup (64;+\infty)$.

Ответ. $(0;1) \cup (1;4) \cup (64;+\infty)$.

Задача 9. (М/м-88.2)

Решить неравенство $\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0$.

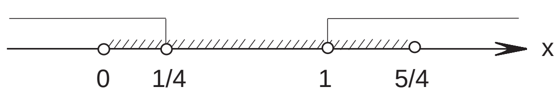
Идея. Решить неравенство путём перехода к равносильной совокупности на основе значения основания логарифма.
Указание. Неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ равносильно совокупности условий: при $a(x) > 1$ $f(x) > g(x) > 0$; при $0 < a(x) < 1$ $0 < f(x) < g(x)$.
Указание. Рассматривая случаи на основе значения основания логарифма, получаем равносильную совокупность: при $5x - 4x^2 > 1$ $4^{-x} > 1$; при $0 < 5x - 4x^2 < 1$ $4^{-x} < 1$.

Решение. Раскрываем логарифм стандартным способом.

$$1)\ \begin{cases}5x - 4x^2 > 1,\\ 4^{-x} > 1;\end{cases} \iff \begin{cases}4x^2 - 5x + 1 < 0,\\ -x > 0;\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{1}{4} < x < 1,\\ x < 0;\end{cases} \iff \emptyset;$$

$$2)\ \begin{cases}5x - 4x^2 < 1,\\ 5x - 4x^2 > 0,\\ 4^{-x} < 1;\end{cases} \iff \begin{cases}4x^2 - 5x + 1 > 0,\\ x(4x-5) < 0,\\ x > 0;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x < \dfrac{1}{4};\\ x > 1;\end{array}\right.\\ 0 < x < \dfrac{5}{4};\end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right).$$



Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{4}\right) \cup \left(1; \dfrac{5}{4}\right)$.

Задача 10. (Физ-87.2)

Решить уравнение $4^{\sin x} + 2^{5 - 2\sin x} = 18$.

Идея. Уравнение является квадратным относительно показательной функции.
Указание. $2^{5-2\sin x} = \dfrac{32}{4^{\sin x}}$, поэтому при $z = 4^{\sin x} > 0$ получаем уравнение $z^2 - 18z + 32 = 0$.
Указание. Решая полученное квадратное уравнение, получаем, что $\sin x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = 2$; вторая возможность исключается.

Решение. Пусть $z = 4^{\sin x} > 0$, тогда

$$z + \frac{32}{z} = 18 \iff z^2 - 18z + 32 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} z = 2; \\ z = 16; \end{array}\right.$$

значит, $\left[\begin{array}{l} 4^{\sin x} = 2; \\ 4^{\sin x} = 16; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}; \\ \sin x = 2 > 1; \end{array}\right. \iff x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ. $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 11. (М/м-94(2).2)

Решить систему $\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$

Идея. Выразить 2^x из первого уравнения и подставить во второе.
Указание. Выразить из первого уравнения $2^x = 1 - 2y > 0$ и подставить во второе.
Указание. Тогда второе уравнение примет вид $12y^2 - 8y + 1 = 0$, то есть $y = \dfrac{1}{6}$ или $y = \dfrac{1}{2}$. Поскольку $1 - 2y > 0$, то корень $y = \dfrac{1}{2}$ не подходит.

Решение. Выразим из первого уравнения $2^x = 1 - 2y > 0$ и подставим во второе:

$$6y - 12y^2 = 1 - 2y \iff 12y^2 - 8y + 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{6}; \\ y = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

1) при $y = \dfrac{1}{6}$ получаем $2^x = 1 - 2y = \dfrac{2}{3} \iff x = \log_2 \dfrac{2}{3} = 1 - \log_2 3$;

2) при $y = \dfrac{1}{2}$ получаем $2^x = 1 - 2y = 0$, следовательно, решений нет.

Ответ. $\left(1 - \log_2 3; \dfrac{1}{6}\right)$.

Задача 12. (Почв-83.3)

Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32. \end{cases}$

Идея. Выполнив замену показательной функции на новую переменную, решить систему подстановкой.

Указание. При $z = 2^y > 0$ система приобретает вид $\begin{cases} x + 2z = 3, \\ 4x + z^2 = 32. \end{cases}$
Выразить из первого уравнения $x = 3 - 2z$ и подставить во второе.

Указание. После подстановки получим $z^2 - 8z - 20 = 0$, то есть $z = -2$ или $z = 10$, причём первое значение отпадает в силу своей отрицательности.

Решение. Пусть $z = 2^y > 0$, тогда система приобретает вид

$$\begin{cases} x + 2z = 3, \\ 4x + z^2 = 32. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $x = 3 - 2z$ и подставляем во второе уравнение:

$$z^2 - 8z - 20 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} & z = -2 < 0; \\ & z = 10; \end{aligned}\right.$$

значит, $2^y = 10 \iff y = \log_2 10 = \log_2 5 + 1$; $x = 3 - 2z = -17$.

Ответ. $(-17; \log_2 5 + 1)$.

Задача 13. (Почв-75.3)

Решить уравнение $x + 27^{\frac{5}{2}|\log_{9\sqrt{3}} \sqrt[3]{x}|} = \dfrac{10}{3}$.

Идея. Преобразовав логарифм, раскрыть модуль по определению.

Указание. Уравнение принимает вид $x + 3^{|\log_3 x|} = \dfrac{10}{3}$.

Указание. Раскрываем модуль по определению: при $\log_3 x \geq 0$ $x + x = \dfrac{10}{3}$; при $\log_3 x < 0$ $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3}$. Дальнейшее решение идёт по стандартной схеме.

Решение. После преобразования подмодульного логарифма получаем уравнение $x + 3^{|\log_3 x|} = \dfrac{10}{3}$. Раскроем модуль по определению.

1) $\begin{cases} \log_3 x > 0, \\ x + x = \dfrac{10}{3}; \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, \\ x = \dfrac{5}{3}; \end{cases} \iff x = \dfrac{5}{3}.$

2) $\begin{cases} \log_3 x \leq 0, \\ x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3}; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ \left[\begin{aligned} & x = \dfrac{1}{3}; \\ & x = 3; \end{aligned}\right. \end{cases} \iff x = \dfrac{1}{3}.$

Ответ. $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{5}{3}$.

Задача 14. (Биол-74.2)

Решить уравнение $5 \cdot \left(\dfrac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} + 4 \cdot 5^{\cos 2x} = 25^{\frac{\sin 2x}{2}}$.

Идея. Используя тригонометрические формулы, привести показатели к функциям одного аргумента, после чего выйти на одинаковые основания показательных функций.

Указание. $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, поэтому $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} = 5^{-2\sin^2 x} = 5^{\cos 2x - 1}$.
Тогда уравнение примет вид $5 \cdot 5^{\cos 2x} = 5^{\sin 2x}$.

Указание. Из уравнения получаем $1+\cos 2x = \sin 2x \iff \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Так как $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} = 5^{-2\sin^2 x} = 5^{\cos 2x - 1}$, то получаем:

$$5 \cdot 5^{\cos 2x} = 5^{\sin 2x} \iff 1 + \cos 2x = \sin 2x \iff \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 15. (Физ-89.3)

Решить уравнение $\log_2(x+4) + 2\log_2\sqrt{x} = 5$.

Идея. Преобразовать левую часть к одному логарифму.
Указание. С учётом формул преобразований логарифмов уравнение приобретает вид $\log_2 x(x+4) = 5$ при $x > 0$.

Решение. Приведём левую часть к одному логарифму, используя формулы логарифма степени и суммы логарифмов:

$$\begin{cases} \log_2 x(x+4) = 5, \\ x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x(x+4) = 32, \\ x > 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = -8 < 0; \\ x = 4; \end{array}\right. \iff x = 4.$$

Ответ. 4.

Задача 16. (Геол-97(1).2)

Решить уравнение $2 - \log_3 x = \log_3\left(\dfrac{5}{3}|x| + 2\right)$.

Идея. Преобразовать обе части уравнения к логарифмам с одинаковыми основаниями.
Указание. С учётом положительности переменной под логарифмом в левой части уравнения получаем, что $|x| = x$ в правой части.
Указание. После приведения к логарифмам с одинаковыми основаниями уравнение имеет вид $\log_3 \dfrac{9}{x} = \log_3\left(\dfrac{5}{3}x + 2\right)$, так как $x > 0$ по ОДЗ.

Р е ш е н и е. Заметив, что на области определения $(x > 0)$ $|x| = x$, перейдём в левой и правой частях к логарифмам по одному основанию:

$$\log_3 \frac{9}{x} = \log_3 \left(\frac{5}{3}x + 2\right) \iff \frac{9}{x} = \frac{5x}{3} + 2 \iff$$

$$\iff 5x^2 + 6x - 27 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = -3 < 0; \\ x = \dfrac{9}{5}; \end{array}\right. \implies x = \frac{9}{5}.$$

О т в е т. $\dfrac{9}{5}$.

Задача 17. (Физ-94(1).2)

Решить уравнение $\dfrac{1}{6}\log_2(x-2) - \dfrac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x-5}$.

И д е я. Преобразовать обе части уравнения к логарифмам с одинаковыми основаниями.

У к а з а н и е. Применив формулы преобразования логарифмов, получим уравнение $\log_2(x-2) - 2 = -\log_2(3x-5)$, откуда $\log_2(3x-5)(x-2) = 2$ при $x > 2$.

Р е ш е н и е. Приведём выражения в левой и правой частях уравнения к логарифмам по одному основанию:

$$\log_2(x-2) - 2 = -\log_2(3x-5) \iff \left\{\begin{array}{l} \log_2(3x-5)(x-2) = \log_2 4, \\ x > 2; \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 3x^2 - 11x + 6 = 0, \\ x > 2; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3}; \\ x = 3; \end{array}\right. \\ x > 2; \end{array}\right. \iff x = 3.$$

О т в е т. 3.

Задача 18. (Физ-83.3)

Решить неравенство $\dfrac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2}\log_2 x > 1$.

И д е я. Преобразовать к неравенству относительно одного логарифма.

У к а з а н и е. Формулы:

1) $\forall x > 0,\ y \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1 \quad \log_a x^y = y \log_a x$;

2) $\forall x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0 \quad \log_{a^x} y = \dfrac{1}{x}\log_a y$.

Р е ш е н и е. Перейдём к логарифмам по основанию 2:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 x > 1 \iff \log_2 x < -4 \iff 0 < x < \frac{1}{16}.$$

О т в е т. $\left(0; \dfrac{1}{16}\right)$.

Задача 19. (Геол-83.3)

Решить неравенство $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}(x^2-3x+2)\ge 2$.

Идея. Воспользоваться убыванием логарифмической функции в условиях задачи при выполнении ограничений области определения.

Указание. Так как $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\in(0;1)$, то функция $y=\log_{\sin\frac{\pi}{3}}t$ убывает, поэтому неравенство равносильно системе $0<x^2-3x+2\le\dfrac{3}{4}$.

Решение. Поскольку основание логарифма меньше единицы $\left(\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x+2\le\dfrac{3}{4}, \\ x^2-3x+2>0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x<1; \\ x>2; \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\le x<1; \\ 2<x\le\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left[\dfrac{1}{2};1\right)\bigcup\left(2;\dfrac{5}{2}\right]$.

Задача 20. (ИСАА-94.2)

Решить уравнение $2^{x\log_2 7}\cdot 7^{x^2+x}=1$.

Идея. Привести обе степени к одному основанию, применив основное логарифмическое тождество.

Указание. Основное логарифмическое тождество имеет вид:

$$a^{\log_a b}=b,\quad \text{где}\quad a>0,\ a\ne 1,\ b>0,$$

откуда получаем, что $2^{x\log_2 7}=7^x$.

Указание. Уравнение принимает вид $7^{x^2+2x}=1$, то есть $x^2+2x=0$.

Решение. Применив основное логарифмическое тождество к первому сомножителю левой части, получим

$$7^x\cdot 7^{x^2+x}=1 \iff 7^{x^2+2x}=7^0 \iff x(x+2)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-2; \\ x=0. \end{array}\right.$$

Ответ. $-2;0$.

Задача 21. (Филол-91.2)

Решить уравнение $\log_2(5\cdot 2^x+3)=2x+1$.

Идея. Воспользоваться определением логарифма.

Указание. Уравнение $\log_2(5\cdot 2^x+3)=2x+1$ равносильно уравнению $5\cdot 2^x+3=2^{2x+1}$.

Указание. Последнее уравнение является квадратным относительно показательной функции $z=2^x>0$: $2z^2-5z-3=0$.

Р е ш е н и е. Из определения логарифма получаем $5 \cdot 2^x + 3 = 2^{2x+1}$. Обозначим $z = 2^x > 0$, тогда уравнение принимает вид

$$2z^2 - 5z - 3 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &z = -\frac{1}{2} < 0; \\ &z = 3. \end{aligned}\right.$$

Значит, $2^x = 3 \iff x = \log_2 3$.

О т в е т. $\log_2 3$.

Задача 22. (Биол-87.3)

Решить неравенство $\dfrac{3\log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2\log_{0,5} x + 1$.

И д е я. Перенеся все слагаемые в левую часть и приведя к одному знаменателю, решить неравенство методом интервалов относительно логарифма.

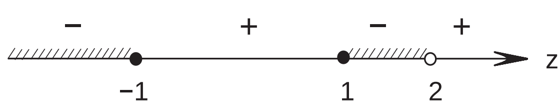
У к а з а н и е. Удобно сделать замену $z = \log_{0,5} x$ и, перенеся все слагаемые в левую часть, привести к общему знаменателю $\dfrac{(z-1)(z+1)}{z-2} \leq 0$.

У к а з а н и е. Решая дробь методом интервалов, получим в итоге $z \leq -1$ или $1 \leq z < 2$, то есть $\dfrac{1}{4} < x \leq \dfrac{1}{2}$ или $x \geq 2$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $z = \log_{0,5} x$, тогда уравнение принимает вид

$$\frac{3z}{2-z} \geq 2z + 1 \iff \frac{3z - (2z+1)(2-z)}{z-2} \leq 0 \iff \frac{2z^2 - 2}{z-2} \leq 0 \iff$$

$$\iff \frac{(z-1)(z+1)}{z-2} \leq 0 \iff \left[\begin{aligned} &z \leq -1; \\ &1 \leq z < 2; \end{aligned}\right.$$



значит, $\left[\begin{aligned} &\log_{\frac{1}{2}} x \leq -1; \\ &1 \leq \log_{\frac{1}{2}} x < 2; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x \geq 2; \\ &\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$

О т в е т. $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Задача 23. (Почв-70.2)

Решить уравнение $\log_8\left(4^{x^2-1} - 1\right) + \dfrac{2}{3} = \log_8\left(2^{x^2+2} - 7\right)$.

Идея. Приведя обе части к логарифму по одному основанию, приравнять подлогарифменные функции на области определения.

Указание. Левая часть приводится к виду $\log_8\left(4^{x^2-1}-1\right)+\dfrac{2}{3}=\log_8\left(4^{x^2}-4\right)$, после чего уравнение принимает вид $4^{x^2}-4=4\cdot 2^{x^2}-7>0$. Это квадратное уравнение относительно показательной функции.

Решение. Преобразуем левую часть к одному логарифму по основанию 8 и приравняем подлогарифменные функции на области определения:

$$\log_8\left(\left(4^{x^2-1}-1\right)\cdot 4\right)=\log_8\left(4\cdot 2^{x^2}-7\right) \iff \begin{cases}4^{x^2}-4=4\cdot 2^{x^2}-7,\\ 4\cdot 2^{x^2}-7>0.\end{cases}$$

Пусть $z=2^{x^2}>0$, тогда

$$\begin{cases}z^2-4=4z-7,\\ 4z-7>0;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}z=1;\\ z=3;\end{array}\right.\\ z>\dfrac{7}{4};\end{cases} \iff z=3;$$

значит, $2^{x^2}=3 \iff x^2=\log_2 3>0 \iff x=\pm\sqrt{\log_2 3}$.

Ответ. $\pm\sqrt{\log_2 3}$.

Задача 24. (ВМК-76.2)

Решить систему уравнений $\begin{cases}3\cdot 2^x-\log_2 y=2,\\ 2^x\cdot\log_2 y=1.\end{cases}$

Идея. Ввести новые переменные вместо показательной функции и логарифма, после чего решить систему стандартной подстановкой.

Указание. Если $u=2^x$, $z=\log_2 y$, то система принимает вид $\begin{cases}3u-z=2,\\ uz=1.\end{cases}$

Указание. Выразить из первого уравнения $z=3u-2$ и подставить во второе.

Решение. Введём новые переменные $u=2^x>0$, $z=\log_2 y$, тогда

$$\begin{cases}3u-z=2,\\ uz=1;\end{cases} \iff \begin{cases}z=3u-2,\\ u(3u-2)=1;\end{cases}$$

рассмотрим второе уравнение:

$$3u^2-2u-1=0 \iff \left[\begin{array}{l}u=1;\\ u=-\dfrac{1}{3}<0;\end{array}\right.$$

значит, $u=1$, $z=1$; то есть $x=0$, $y=2$.

Ответ. $(0;2)$.

Задача 25. (Геол-96(1).3)

Решить уравнение $\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}(x-1)=2$.

Идея. Применить определение логарифма, не забывая про ОДЗ.
Указание. Число b называется логарифмом числа c по основанию a, если $a^b=c$. Обозначение: $b=\log_a c$, если $a^b=c$.

Указание. Исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\left(\dfrac{x-1}{|2x-3|}\right)^2=x-1,\\ \dfrac{x-1}{|2x-3|}>0,\\ x-1\neq|2x-3|;\end{cases}$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x-1}{|2x-3|}\right)^2=x-1,\\ \dfrac{x-1}{|2x-3|}>0,\\ x-1\neq|2x-3|;\end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}x-1=(2x-3)^2,\\ 1<x\neq\dfrac{3}{2},\\ x-1\neq|2x-3|.\end{cases}$$

Рассмотрим квадратное уравнение: $\quad 4x^2-13x+10=0\quad\Longleftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=2;\\ x=\dfrac{5}{4}.\end{array}\right.$

Первый корень не удовлетворяет последнему неравенству системы.

Ответ. $\dfrac{5}{4}$.

Задача 26. (Геол-97.5)

Решить неравенство $11^{\log_{\frac{1}{11}}\log_7 x}<7^{\log_{\frac{1}{7}}\log_{11}x}$.

Идея. Убрав дроби в основаниях логарифмов, применить основное логарифмическое тождество для преобразованных показательных функций.
Указание. Основное логарифмическое тождество имеет вид:

$$a^{\log_a b}=b,\quad \text{где}\quad a>0,\ a\neq1,\ b>0,$$

поэтому в нашем случае получаем:

$$11^{\log_{\frac{1}{11}}\log_7 x}=11^{-\log_{11}\log_7 x}=11^{\log_{11}\log_7^{-1}x}\quad\text{и}\quad 7^{\log_{\frac{1}{7}}\log_{11}x}=7^{\log_7\log_{11}^{-1}x},$$

то есть исходное неравенство равносильно неравенству $\log_7^{-1}x<\log_{11}^{-1}x$, где $\log_7 x>0$, $\log_{11}x>0$.
Указание. Учитывая ограничения на логарифмы, получаем, что неравенство $\dfrac{1}{\log_7 x}<\dfrac{1}{\log_{11}x}$ равносильно при $x>1$ неравенству $\log_{11}x<\log_7 x$, которое решаем переходом к новому основанию, например, в левой части.
Указание. $\log_{11}x=\dfrac{\log_7 x}{\log_7 11}=\log_7 x\cdot\log_{11}7$.

Решение. Избавимся от дробей в основаниях логарифмов и перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} 11^{\log_{11}\frac{1}{\log_7 x}} < 7^{\log_7\frac{1}{\log_{11} x}}, \\ \log_7 x > 0, \\ \log_{11} x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{\log_7 x} < \dfrac{1}{\log_{11} x}, \\ x > 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \log_{11} x < \log_7 x, \\ x > 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \log_7 x\,(\log_{11} 7 - 1) < 0, \\ x > 1; \end{cases} \iff x > 1.$$

Ответ. $(1; +\infty)$.

Задача 27. (Физ-81.4)

Решить неравенство $5^{\log_3\frac{2}{x+2}} < 1$.

Идея. Представив правую часть как показательную функцию, избавиться от степеней.

Указание. Так как $1 = 5^0$, то в силу монотонности функции $y = 5^x$ исходное неравенство равносильно неравенству $\log_3 \dfrac{2}{x+2} < 0$.

Указание. Используя монотонное возрастание функции $y = \log_3 x$, получаем $\dfrac{2}{x+2} < 1$, учитывая область определения $\dfrac{2}{x+2} > 0$.

Решение. Представим правую часть как степень с основанием 5 и перейдём к неравенству для показателей:

$$\log_3 \frac{2}{x+2} < 0 \iff 0 < \frac{2}{x+2} < 1 \iff \begin{cases} \dfrac{2}{x+2} < 1, \\ x+2 > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x+2 > 2, \\ x > -2; \end{cases}$$

$$\iff x > 0.$$

Ответ. $(0; +\infty)$.

Задача 28. (Почв-98.4)

Решить систему $\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$

Идея. Прологарифмировав первое уравнение, свести систему к уравнениям относительно переменной x и логарифма.

Указание. Из второго уравнения следует, что $y > 0, y \neq 1$, то есть в первом уравнении можно получить $x = \log_y 3y$, тогда при $z = \log_3 y$ система принимает вид $\begin{cases} x = \dfrac{1}{z} + 1, \\ 2z + \dfrac{1}{z} = 3x \end{cases}$ и может быть разрешена подстановкой.

Р е ш е н и е. Так как по ОДЗ $y > 0, y \neq 1$, то прологарифмируем первое уравнение системы:

$$y^x = 3y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_y 3y = \log_y 3 + 1$$

и подставим полученную зависимость во второе уравнение:

$$2\log_3 y + \log_y 3 = 3\log_y 3 + 3.$$

Пусть $z = \log_3 y$, тогда уравнение принимает вид

$$2z - \frac{2}{z} - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2z^2 - 3z - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = -\dfrac{1}{2}; \\ z = 2. \end{array}\right.$$

По формулам $x = \dfrac{1}{z} + 1, \quad y = 3^z$ находим $\left[\begin{array}{l} x = -1;\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \\ x = \dfrac{3}{2};\ y = 9. \end{array}\right.$

О т в е т. $\left(-1; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\dfrac{3}{2}; 9\right)$.

6. Линейные и однородные тригонометрические уравнения, системы тригонометрических уравнений, использование ограниченности тригонометрических функций

6.1. Линейные тригонометрические уравнения, метод вспомогательного аргумента

Задача 1. (ЕГЭ)

Найти сумму корней уравнения $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$. Ответ записать в градусах.

И д е я. Найти корни данного уравнения, рассмотрев его как стандартное линейное однородное тригонометрическое уравнение.

У к а з а н и е. Поделить обе части уравнения на $\cos x$ и найти из полученного уравнения значение $\operatorname{tg} x$.

Р е ш е н и е. Пусть x – решение уравнения $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$. Заметим, что $\cos x \neq 0$, поскольку в противном случае из данного уравнения получим $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, мы можем поделить обе части уравнения на $\cos x$:

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 60^\circ + 180^\circ \cdot n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Полученные значения x принадлежат промежутку $[-180^\circ; 180^\circ]$ только при $n = 0$ и $n = -1$. В результате искомая сумма корней равна $60^\circ + (-120^\circ) = -60^\circ$.

О т в е т. -60°.

Задача 2. (Физ-96(1).1)

Решить уравнение $1-\sin 5x=\cos 5x$.

И д е я. Использовать метод вспомогательного аргумента.
У к а з а н и е. Перенести синус в правую часть данного уравнения, поделить обе части полученного уравнения на $\sqrt{2}$ и воспользоваться формулой косинуса суммы.

Р е ш е н и е. Применим метод вспомогательного аргумента:

$$\cos 5x+\sin 5x=1 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5x=\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff 5x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \iff \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{2\pi m}{5},\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi n}{5},\ \dfrac{2\pi m}{5};\ n,m\in\mathbb{Z}$.

Задача 3. (Хим-82.1)

Решить уравнение $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}$.

И д е я. Использовать метод вспомогательного аргумента.
У к а з а н и е. Поделить обе части уравнения на 2 и воспользоваться формулой синуса разности.

Р е ш е н и е. Применим метод вспомогательного аргумента:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ 2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \dfrac{5\pi}{12}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.

Задача 4. (Хим-79.1)

Решить уравнение $\sin 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x$.

И д е я. Разложить на множители, предварительно расписав двойные углы.
У к а з а н и е. Применить формулы $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, перенести всё в одну сторону и вынести общий множитель.

Указание. Приравнять каждый из множителей нулю. При решении полученных уравнений использовать метод вспомогательного аргумента.

Решение. Применив формулы двойных аргументов, получим

$$2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x \iff \cos x(2\sin x - 2\cos x - \sqrt{2}) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 2\sin x - 2\cos x - \sqrt{2} = 0;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Второе уравнение с помощью метода вспомогательного аргумента преобразуется к виду

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l}x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ x = \dfrac{13\pi}{12} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi m,\ \dfrac{13\pi}{12} + 2\pi k;\ n, m, k\in\mathbb{Z}.$

Задача 5. (Физ-94(2).2)

Решить уравнение $5\cos x + 2\sin x = 3$.

Идея. Использовать метод вспомогательного аргумента.
Указание. Поделить обе части уравнения на $\sqrt{5^2+2^2}$, рассмотреть вспомогательный угол φ такой, что $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$ и воспользоваться формулой косинуса разности.

Решение. Применим метод вспомогательного аргумента:

$$\frac{5}{\sqrt{29}}\cos x + \frac{2}{\sqrt{29}}\sin x = \frac{3}{\sqrt{29}} \iff \cos(x-\varphi) = \frac{3}{\sqrt{29}},$$

где угол $\varphi\in[0;2\pi)$ такой, что $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$, $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$. Тогда

$$x - \varphi = \pm\arccos\frac{3}{\sqrt{29}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$$

откуда $x = \arccos\dfrac{5}{\sqrt{29}} \pm \arccos\dfrac{3}{\sqrt{29}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Замечание. В качестве вспомогательного угла φ можно было использовать $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{5}$ или $\operatorname{arcctg}\dfrac{5}{2}$.

Ответ. $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{29}} \pm \arccos\dfrac{3}{\sqrt{29}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

Задача 6. (Физ-98(2).1)

Решить уравнение $\cos 4x - \sin 3x \cos x + \cos 2x = 0$.

Идея. Применив формулу суммы косинусов, разложить левую часть уравнения на множители.

Указание. Преобразовать сумму косинусов $\cos 4x$ и $\cos 2x$ в произведение и разложить на множители левую часть полученного уравнения.

Решение. С помощью формулы суммы косинусов, исходное уравнение приводится к виду

$$2\cos 3x \cos x + \sin 3x \cos x = 0,$$

значит, $\cos x = 0$ или $2\cos 3x = \sin 3x$.

Решением первого уравнения является $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим уравнение $2\cos 3x = \sin 3x$. Заметим, что $\cos 3x \neq 0$, так как иначе $\sin 3x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, мы можем поделить обе части уравнения на $\cos 3x$. Получим

$$2\cos 3x = \sin 3x \quad \iff \quad \operatorname{tg} 3x = 2 \quad \iff \quad x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi m}{3},\ \ m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 2 + \dfrac{\pi m}{3};\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. (Филол-94.1)

Решить уравнение $\dfrac{2}{\pi}\sin x + \cos 19\pi = \cos x$.

Идея. Использовать метод вспомогательного аргумента, предварительно вычислив значение $\cos 19\pi$.

Указание. Умножить обе части на π, подставить $\cos 19\pi = -1$ и решить полученное уравнение методом вспомогательного аргумента.

Указание. Разделить обе части уравнения на $\sqrt{\pi^2+4}$ и ввести вспомогательный угол φ такой, что $\sin\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$.

Решение. Так как $\cos 19\pi = \cos\pi = -1$, то

$$\frac{2}{\pi}\sin x + \cos 19\pi = \cos x \quad \iff \quad \frac{2}{\pi}\sin x - \cos x = 1 \quad \iff \quad 2\sin x - \pi\cos x = \pi.$$

Поделив обе части уравнения на $\sqrt{\pi^2+4}$, получим

$$\sin x\cos\varphi - \cos x\sin\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}},$$

где угол φ такой, что $\sin\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$. Следовательно,

$$\sin(x-\varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x = \varphi + \arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x = \pi + \varphi - \arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Взяв в качестве угла φ значение $\arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}$, получим:

$$x = \pi + 2\pi k,\quad x = 2\arcsin\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}} + 2\pi n;\quad k,n\in\mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\pi + 2\pi k$, $\quad 2\arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}} + 2\pi n$; $k,n\in\mathbb{Z}$.

Задача 8. (Псих-81.3)

Найти все решения уравнения $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$, удовлетворяющие условию $0,4\pi < x < \dfrac{6\pi}{7}$.

И д е я. Для решения уравнения использовать метод вспомогательного аргумента.
У к а з а н и е. Разделить обе части уравнения на минус два и свернуть левую часть в синус разности.
У к а з а н и е. Найти $7x$ из полученного уравнения с помощью метода вспомогательного аргумента и отобрать те значения целочисленной переменной, при которых выполняется неравенство $2,8\pi < 7x < 6\pi$.

Р е ш е н и е. Разделим обе части уравнения на минус два:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x - \frac{1}{2}\cos 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 7x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 7x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 7x = \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 7x = \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Запишем ограничение на решение $0,4\pi < x < \dfrac{6\pi}{7}$ в виде $\dfrac{14\pi}{5} < 7x < 6\pi$ и отберём подходящие значения $n\in\mathbb{Z}$ для первой серии решений:

$$\frac{14\pi}{5} < \frac{5\pi}{12} + 2\pi n < 6\pi \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{143}{120} < n < \frac{67}{24} \quad\Longleftrightarrow\quad n = 2,$$

значит $7x = \dfrac{5\pi}{12} + 4\pi = \dfrac{53\pi}{12}$ и $x = \dfrac{53\pi}{84}$.

Теперь отберём подходящие значения $m\in\mathbb{Z}$ для второй серии решений:

$$\frac{14\pi}{5} < \frac{11\pi}{12} + 2\pi m < 6\pi \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{113}{120} < m < \frac{61}{24} \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} m = 1,\\ m = 2. \end{array}\right.$$

При $m=1$ получим $\quad 7x=\dfrac{11\pi}{12}+2\pi=\dfrac{35\pi}{12}$ и $x=\dfrac{5\pi}{12}$.

При $m=2$ получим $\quad 7x=\dfrac{11\pi}{12}+4\pi=\dfrac{59\pi}{12}$ и $x=\dfrac{59\pi}{84}$.

Ответ. $\dfrac{5\pi}{12};\ \dfrac{53\pi}{84};\ \dfrac{59\pi}{84}$.

Задача 9. (Геол-79.3)

Найти все числа A, при каждом из которых уравнение $5\sin x+2\cos x=A$ имеет решение.

Идея. Использовать метод вспомогательного аргумента.
Указание. Поделить обе части уравнения на $\sqrt{5^2+2^2}$, рассмотреть вспомогательный угол φ такой, что $\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$ и воспользоваться формулой косинуса разности.
Указание. Простейшее тригонометрическое уравнение вида $\cos t=a$ имеет решения в тех и только тех случаях, когда $|a|\le 1$.

Решение. Поделив обе части на $\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$, получим:

$$\frac{2}{\sqrt{29}}\cos x+\frac{5}{\sqrt{29}}\sin x=\frac{A}{\sqrt{29}} \quad\Longleftrightarrow\quad \cos(x-\varphi)=\frac{A}{\sqrt{29}},$$

где $\sin\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$, $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{29}}$. Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением и имеет решения в тех и только тех случаях, когда

$$\left|\frac{A}{\sqrt{29}}\right|\le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad -\sqrt{29}\le A\le\sqrt{29}.$$

Ответ. $\left[-\sqrt{29};\sqrt{29}\right]$.

Задача 10. (Экон-92.1)

Вычислить $\log_{11/25}|\sin 3\beta|+\log_{11/25}|\sin\beta|$, если $\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Идея. Найти $\sin\beta$ из данного уравнения и подставить его значение в искомое выражение.
Указание. С помощью метода вспомогательного аргумента из данного в условии задачи уравнения найти $\sin\beta$.
Указание. Преобразовать сумму логарифмов в логарифм произведения и воспользоваться формулой синуса тройного угла.

Р е ш е н и е. Сначала преобразуем данное в условии равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin\left(\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

откуда $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Теперь преобразуем искомое выражение:

$$\log_{11/25}|\sin 3\beta|+\log_{11/25}|\sin\beta|=\log_{11/25}|\sin 3\beta\sin\beta|=$$

$$=\log_{11/25}\left|\sin^2\beta\left(3-4\sin^2\beta\right)\right|=\log_{11/25}\left|\frac{1}{5}\left(3-\frac{4}{5}\right)\right|=\log_{11/25}\frac{11}{25}=1.$$

О т в е т. 1.

Задача 11. (Геол-90.3)

Решить уравнение $1-(2\cos x+\sqrt{3})\cdot\operatorname{ctg} x=2\sin x$.

И д е я. Используя определение котангенса и основное тригонометрическое тождество, свести данное уравнение к линейному тригонометрическому уравнению.
У к а з а н и е. Преобразовать данное уравнение, используя то, что $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ и $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.
У к а з а н и е. Полученное линейное тригонометрическое уравнение можно решить с помощью метода вспомогательного аргумента.

Р е ш е н и е. Областью допустимых значений переменной являются $x\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Преобразуем исходное уравнение к простейшему виду с помощью равносильных (на области допустимых значений) преобразований:

$$1-\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\frac{\cos x}{\sin x}=2\sin x \quad\Longleftrightarrow\quad \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin^2 x+2\cos^2 x \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \sin x-\sqrt{3}\cos x=2 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1 \quad\Longleftrightarrow\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

откуда $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

О т в е т. $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Задача 12. (Геол.ОГ-79.6)

Найти все значения параметра α, при каждом из которых уравнение $x^2+\dfrac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\dfrac{1}{\cos\alpha}+2\sqrt{2}=0$ имеет единственное решение.

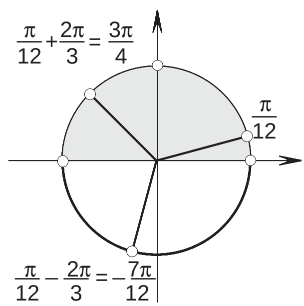
И д е я. Условием единственности решения квадратного уравнения является нулевой дискриминант на области допустимых значений параметра.

Указание. Найти значения параметра, при которых дискриминант квадратного уравнения равен нулю.
Указание. При решении полученного уравнения использовать формулы вспомогательного аргумента и синуса двойного угла.

Решение. Уравнение является квадратным относительно x с параметром α, поэтому при $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha \neq 0$ (область допустимых значений параметра) условием единственности решения является равенство нулю дискриминанта:

$$\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha} - 2\sqrt{2} = 0 \iff \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin 2\alpha \iff \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin 2\alpha$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} - \alpha = 2\alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{\pi}{4} - \alpha = \pi - 2\alpha + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



Условию $\sin\alpha > 0$ с учётом совпадения значений отвечают серии: $x = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m;\ \ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 13. (Геогр-00(1).3)

Решите уравнение $3(\sin x - 1) + 4\cos x + \cos\left(2x + 4\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Идея. Применив формулу косинуса двойного угла (в её варианте с синусом) и метод вспомогательного аргумента (в варианте сведения к синусу суммы углов), преобразовать уравнение к квадратному относительно синуса суммы углов.
Указание. Преобразовать исходное уравнение с учётом того, что

$$\cos\left(2x + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right);$$

$$3\sin x + 4\cos x = 5\sin\left(x + \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}\right).$$

У к а з а н и е. Показать, что $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$ и свести полученное уравнение к квадратному.

Р е ш е н и е. Преобразуем исходное уравнение с помощью формулы косинуса двойного угла и метода вспомогательного аргумента:

$$(3\sin x + 4\cos x) - 3 + \left(1 - 2\sin^2\left(x + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\sin^2\left(x + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) - 5\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + 2 = 0.$$

Покажем, что $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$. Поскольку оба угла лежат в пределах от 0 до π, нам достаточно убедиться в равенстве их тангенсов:

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4}{3} = \frac{4}{3},$$

то есть $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$ и исходное уравнение можно записать в виде

$$2\sin^2\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) - 5\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + 2 = 0, \quad \text{откуда}$$

$$\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} + (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

6.2. Однородные тригонометрические уравнения второй степени, замена тригонометрических выражений

Задача 1. (ЕГЭ)

Укажите число корней уравнения $6\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 2$, принадлежащих промежутку $[-\pi; 0]$.

И д е я. Привести уравнение к однородному тригонометрическому уравнению второй степени.
У к а з а н и е. Получить однородное тригонометрическое уравнение второй степени с помощью основного тригонометрического тождества.

Указание. Поделить обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получить квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, предварительно убедившись, что $\cos x = 0$ не является решением нашего уравнения.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$6\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \iff$$

$$\iff 4\sin^2 x + 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 0.$$

Заметим, что $\cos x \neq 0$, так как иначе из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 x$:

$$4\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x + 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1; \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{4}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Промежутку $[-\pi; 0]$ принадлежат два корня: $x = -\dfrac{\pi}{4}$ при $n = 0$ и $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$ при $m = 0$.

Ответ. 2.

Задача 2. (Физ-91.1)

Решить уравнение $8 - 7\sin 2x = 12\sin^2 x$.

Идея. Привести уравнение к однородному тригонометрическому уравнению второй степени.
Указание. Применив формулу синуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, свести уравнение к однородному уравнению второй степени.
Указание. Поделить обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получить квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, предварительно убедившись, что $\cos x = 0$ не является решением нашего уравнения.

Решение. Применив формулу синуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, получим:

$$8\sin^2 x + 8\cos^2 x - 14\sin x\cos x = 12\sin^2 x \iff 2\sin^2 x + 7\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0.$$

Заметим, что $\cos x \neq 0$, так как иначе из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 x$:

$$2\operatorname{tg}^2 x + 7\operatorname{tg} x - 4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -4; \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $-\operatorname{arctg} 4+\pi n,\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.

З а м е ч а н и е. Исходное уравнение можно было свести к линейному тригонометрическому уравнению с помощью формулы понижения степени:

$$8-7\sin 2x=6(1-\cos 2x)\quad\Longleftrightarrow\quad 7\sin 2x-6\cos 2x=2\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{7}{\sqrt{85}}\sin 2x-\frac{6}{\sqrt{85}}\cos 2x=\frac{2}{\sqrt{85}}\quad\Longleftrightarrow\quad \sin\left(2x-\arcsin\frac{6}{\sqrt{85}}\right)=\frac{2}{\sqrt{85}}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2x-\arcsin\frac{6}{\sqrt{85}}=(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{85}}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{6}{\sqrt{85}}+\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{85}}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Заметим, что ответы, полученные разными способами, могут существенно отличаться по форме записи.

Задача 3. (ИСАА-97.3)

Решить уравнение $1-3\sin x\cos x-5\cos^2 x=0$.

И д е я. Привести уравнение к однородному тригонометрическому уравнению второй степени.
У к а з а н и е. Применив основное тригонометрическое тождество, свести уравнение к однородному уравнению второй степени.
У к а з а н и е. Поделить обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получить квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, предварительно убедившись, что $\cos x=0$ не является решением нашего уравнения.

Р е ш е н и е. Преобразуем исходное уравнение с помощью основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2 x+\cos^2 x-3\sin x\cos x-5\cos^2 x=0\quad\Longleftrightarrow\quad \sin^2 x-3\sin x\cos x-4\cos^2 x=0.$$

Заметим, что $\cos x\neq 0$, так как иначе из уравнения следует, что и $\sin x=0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-4=0\quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1;\\ \operatorname{tg} x=4;\end{array}\right.\quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ x=\operatorname{arctg} 4+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

О т в е т. $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg} 4+\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}$.

Задача 4. (Геол.ОГ-80.1)

Решить уравнение $\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x$.

Идея. Перенести всё в одну сторону и разложить на множители.
Указание. Расписать синус двойного угла, перенести всё в левую часть и вынести общий множитель за скобку.

Решение.

$$\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x \iff 2\sin x\cos x = 2\sqrt{3}\cos^2 x \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ \sin x = \sqrt{3}\cos x; \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi m;\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \dfrac{\pi}{3} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (Хим-94(1).2)

Решить уравнение $\sin 2x + \cos^2 x = 0$.

Идея. Разложить левую часть уравнения на множители.
Указание. Расписать синус двойного угла и вынести общий множитель.

Решение.

$$\sin 2x + \cos^2 x = 0 \iff 2\cos x\sin x + \cos^2 x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0; \\ 2\sin x + \cos x = 0; \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. (Почв-79.3)

Решить уравнение $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1$.

Идея. Привести уравнение к однородному тригонометрическому уравнению второй степени.

Указание. Применив формулу синуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, свести уравнение к однородному уравнению второй степени.
Указание. Поделить обе части уравнения на $\cos^2 x$ и получить квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, предварительно убедившись, что $\cos x = 0$ не является решением нашего уравнения.

Решение. Применив формулу синуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, получим:

$$(\sqrt{3}+1)\sin x\cos x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin^2 x - (\sqrt{3}+1)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0.$$

Заметим, что $\cos x \neq 0$, так как иначе из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3}+1)\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1; \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + \pi m,\ \dfrac{\pi}{3} + \pi n;\ n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 7. (ВМК-98.3)

Решить уравнение $24|\cos^3 x| - 2\sin^3 x + \sin x = 0$.

Идея. Свести исходное уравнение к однородному уравнению третьей степени.
Указание. Свести исходное уравнение к однородному уравнению третьей степени с помощью преобразования: $\sin x = \sin x \cdot 1 = \sin x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$.
Указание. Раскрыть модуль по определению и поделить уравнение на $\cos^3 x$, предварительно показав, что $\cos x \neq 0$.

Решение. Сведём исходное уравнение к однородному уравнению третьей степени с помощью преобразования $\sin x = \sin x \cdot 1 = \sin x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$24|\cos^3 x| - 2\sin^3 x + \sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 24|\cos^3 x| - \sin^3 x + \sin x\cos^2 x = 0.$$

Заметим, что $\cos x \neq 0$, так как иначе из уравнения следует, что $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, обе части уравнения можно разделить на $\cos^3 x$.

1) В случае $\cos x > 0$ получим

$$24 - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x - 24 = 0.$$

Далее находим корни среди делителей свободного члена и раскладываем на множители:

$$(\operatorname{tg} x - 3)\left(\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 8\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$

откуда с учётом условия $\cos x > 0$ следует, что $x = \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

2) В случае $\cos x < 0$ получим

$$-24 - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + 24 = 0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$(\operatorname{tg} x + 3)\left(\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 8\right) = 0 \iff \operatorname{tg} x = -3 \iff x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

откуда с учётом условия $\cos x < 0$ следует, что $x = \pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n,\ \pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 8. (Хим-94.3)

Решить уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$.

Идея. Если в уравнение величины $\sin x$ и $\cos x$ входят только в виде суммы (или разности) и произведения, то с помощью замены $z = \sin x + \cos x$ (или $z = \sin x - \cos x$) исходное уравнение сводится к квадратному относительно z.

Указание. Приравнять подкоренные выражения и выписать условие неотрицательности для одного из них.

Указание. С помощью замены $z = \cos x - \sin x$ свести уравнение к квадратному относительно z.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \sin 2x = \cos x - \sin x - 1, \\ \cos x - \sin x - 1 \ge 0; \end{cases}$$

неотрицательность первого подкоренного выражения следует автоматически из неотрицательности второго и равенства подкоренных выражений.

Положим $z = \cos x - \sin x$, тогда $z^2 = 1 - 2\sin x \cos x$, откуда $\sin 2x = 1 - z^2$. Поэтому система принимает вид:

$$\begin{cases} (1 - z^2) - z + 1 = 0, \\ z \ge 1; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &z = 1; \\ &z = -2; \end{aligned}\right. \\ z \ge 1; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad z = 1.$$

Возвращаемся к x:

$$\cos x - \sin x = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Longleftrightarrow\quad x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

6.3. Системы тригонометрических уравнений

Задача 1. (ЕГЭ)

Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x - \cos y = -\sqrt{2}. \end{cases}$

В ответе запишите значение y в градусах, где $y \in [0; 360°]$.

Идея. Решить систему подстановкой.

Указание. Выразить x из первого уравнения и подставить во второе; воспользоваться формулой приведения и методом дополнительного аргумента.

Решение. Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим:

$$\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \cos y = -\sqrt{2} \iff \sin y + \cos y = \sqrt{2} \iff \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff$$

$$\iff \quad y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \iff \quad y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

При этом $x = y + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, хотя, для записи ответа он и не нужен.

Промежутку $[0; 360°]$ принадлежит корень $y = \dfrac{\pi}{4} = 45°$.

Ответ. $45°$.

Задача 2. (Геол.ОГ-71.1)

Найти все решения системы $\begin{cases} \cos 2x + \sin y = \sqrt{3}\cos 30°, \\ 2\cos 2x - \sin y = \sin 540°. \end{cases}$

Идея. Решить систему с помощью подстановки или сложения уравнений.

Указание. Вычислить значения правых частей уравнений и решить полученную систему относительно $\cos 2x$ и $\sin y$.

Решение. Так как $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 540° = \sin 3\pi = 0$, то

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin y = \dfrac{3}{2}, \\ 2\cos 2x - \sin y = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 2x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin y = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 30° + n \cdot 180°,\ n \in \mathbb{Z}, \\ y = 90° + m \cdot 360°,\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Замечание. Так как в исходной системе числовые значения представлены в градусах, то и ответ должен быть приведён в них, то есть в той же размерности.

Ответ. $(\pm 30° + n \cdot 180°;\ 90° + m \cdot 360°);\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. (Экон.К-76.2)

Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg}^2(x-y) - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(x-y) + 1 = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

удовлетворяющие условиям $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $-\pi \le y \le 0$.

Идея. Найти x из второго уравнения и $\operatorname{tg}(x-y)$ из первого.
Указание. Первое уравнение является квадратным относительно тангенса.

Решение. Решением второго уравнения системы $\sin x = \dfrac{1}{2}$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ является единственное значение $x = \dfrac{\pi}{6}$. Подставив это значение в первое уравнение и решив его как квадратное относительно $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} - y\right)$, получим

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} - y\right) = \sqrt{3}; \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} - y\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} - y = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \dfrac{\pi}{6} - y = \dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{\pi}{6} - \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ y = -\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

С учётом того, что $y \in [-\pi; 0]$, находим: $y = -\dfrac{\pi}{6}$ (при $n = 0$), $y = 0$ (при $m = 0$), $y = -\pi$ (при $m = 1$).

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{6}; 0\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6}; -\pi\right)$.

Задача 4. (Филол-77.2)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Идея. Выразить тангенсы через синусы и косинусы и преобразовать произведения тригонометрических функций в суммы.
Указание. Представить произведение тангенсов в виде

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$$

и вычислить $\cos(x-y)$.
Указание. Зная сумму и разность переменных, найти их значения.

Решение. Преобразуем левую часть первого уравнения следующим образом:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} = \frac{\cos(x-y) - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos(x-y) + \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

здесь мы учли то, что согласно второму уравнению $\cos(x+y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

В результате первое уравнение системы запишется в виде

$$\cos(x-y) - \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\left(\cos(x-y) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \iff$$

$$\iff \cos(x-y)\left(1 - 5 + 2\sqrt{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + 5 - 2\sqrt{6}\right) \iff$$

$$\iff \cos(x-y) = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{6}-2\right)}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и система примет вид: $\begin{cases} x - y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{24} + \pi n, \\ y = \dfrac{5\pi}{24} - \pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{24} + \pi m, \\ y = \dfrac{\pi}{24} - \pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{24} + \pi n;\ \dfrac{5\pi}{24} - \pi n\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{24} + \pi m;\ \dfrac{\pi}{24} - \pi m\right)$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (ВМК-73.1)

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$

Идея. Применив основное тригонометрическое тождество в правой части второго уравнения системы, подставить в него значение косинуса из первого уравнения.
Указание. Преобразовать второе уравнение системы следующим образом:

$$1 + \sin y \cos x = 2(1 - \sin^2 y)\sin x \iff 1 + \sin y(\cos x + 2\sin x \sin y) = 2\sin x,$$

после чего подставить вместо выражения в скобках соответствующее значение из первого уравнения.

Решение. Преобразуем второе уравнение системы:

$$1 + \sin y \cos x = 2(1 - \sin^2 y)\sin x \iff 1 + \sin y(\cos x + 2\sin x \sin y) = 2\sin x \iff$$

$$\iff \sin x = \frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Во втором равносильном переходе мы воспользовались тем, что согласно первому уравнению системы выражение в скобках равно.

Рассмотрим полученные две серии по отдельности.

1) Подставив $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ в первое уравнение исходной системы, получим

$$\sin y + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2) Подставив $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ в первое уравнение исходной системы, получим

$$\sin y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = (-1)^{l}\frac{\pi}{3} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3} + \pi k\right),\ \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m;\ (-1)^{l}\dfrac{\pi}{3} + \pi l\right);\quad n, k, m, l \in \mathbb{Z}.$

Задача 6. (Экон.К-72.2)

Найти $\operatorname{tg} x$, если $\begin{cases} y\sin x + \cos x = 2, \\ -4\sin x + 2y\cos x = -y. \end{cases}$

Идея. Свести систему к тригонометрическому уравнению, исключив переменную y.

Указание. Выразить y в каждом из уравнений и приравнять эти значения.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} y\sin x = 2 - \cos x, \\ y(2\cos x + 1) = 4\sin x. \end{cases}$$

Заметим, что $\sin x \neq 0$ (иначе из первого уравнения получим $\cos x = 2 > 1$). Заметим также, что $\cos x \neq -\dfrac{1}{2}$, так как иначе из второго уравнения получим $\sin x = 0$. Выразим y из первого уравнения системы и приравняем его y, выраженному из второго уравнения:

$$\frac{2 - \cos x}{\sin x} = \frac{4\sin x}{2\cos x + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad 4\sin^2 x = (2 - \cos x)(2\cos x + 1) \quad \Longleftrightarrow$$

$$4\sin^2 x = 3\cos x - 2\cos^2 x + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2},$$

откуда $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ и $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$.

Ответ. $\pm\sqrt{3}$.

Задача 7. (ВМК-75.2)

Решить систему уравнений $\begin{cases}\sin(2x+\sin^2 y)=0,\\ x-3\sin^2 y=-2.\end{cases}$

Идея. Решить систему с помощью подстановки.
Указание. Выразить x из второго уравнения и подставить в первое.
Указание. В полученном уравнении отобрать значение целочисленной переменной с учётом области значения синуса.

Решение. Из второго уравнения следует, что $x = 3\sin^2 y - 2$. Подставив это выражение в первое уравнение, получим

$$\sin(7\sin^2 y - 4) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 7\sin^2 y = \pi n + 4,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что в силу ограниченности синуса уравнение имеет решения только при $n = 0$ и $n = -1$. В этом случае $\sin^2 y = \dfrac{4}{7}$ и $\sin^2 y = \dfrac{4-\pi}{7}$ соответственно, и система примет вид

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^2 y = \dfrac{4}{7},\\ x = 3\sin^2 y - 2;\end{cases}\\ \begin{cases}\sin^2 y = \dfrac{4-\pi}{7},\\ x = 3\sin^2 y - 2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = \pm\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{7}} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z},\\ x = -\dfrac{2}{7};\end{cases}\\ \begin{cases}y = \pm\arcsin\sqrt{\dfrac{4-\pi}{7}} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\ x = -\dfrac{3\pi+2}{7}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ. $\left(-\dfrac{2}{7};\ \pm\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{7}} + \pi m\right)$, $\left(-\dfrac{3\pi+2}{7};\ \pm\arcsin\sqrt{\dfrac{4-\pi}{7}} + \pi k\right)$; $m, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 8. (Филол-00.4)

Решить систему $\begin{cases}x + y = \dfrac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1.\end{cases}$

Идея. Применить во втором уравнении формулу суммы тангенсов и преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму.
Указание. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} = \dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}$.
Указание. Поставить $x + y = \dfrac{\pi}{4}$ в преобразованное второе уравнение.

Решение. Преобразуем второе уравнение системы с учётом того, что $x+y = \dfrac{\pi}{4}$, следующим образом:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \iff \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} = 1 \iff \frac{\sqrt{2}/2}{\cos x\cos y} = 1 \iff \cos x\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff \quad \cos(x+y)+\cos(x-y)=\sqrt{2} \quad \iff \quad \frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(x-y)=\sqrt{2} \quad \iff$$

$$\iff \quad \cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \iff \quad x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

В результате, исходную систему можно записать в виде:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4}, \\ x-y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \iff \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ y=\dfrac{\pi}{4}-\pi n; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}, \\ y=-\pi m. \end{cases} \end{array}\right.$$

О т в е т. $\left(\pi n; \dfrac{\pi}{4}-\pi n\right),\ \left(\dfrac{\pi}{4}+\pi m; -\pi m\right);\ \ n,m\in\mathbb{Z}.$

Задача 9. (Геол-76.2)

Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}\cdot(\sin^2 x+\operatorname{ctg} y-1)=0, \\ \cos^2 x+\dfrac{\operatorname{tg} y}{4}-1=0. \end{cases}$

И д е я. Заменить первое уравнение системы равносильным ему условием: первый множитель определён, второй – равен нулю. Полученную систему решать подстановкой или сложением уравнений.

У к а з а н и е. Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \sin^2 x+\operatorname{ctg} y-1=0, \\ \cos^2 x+\dfrac{\operatorname{tg} y}{4}-1=0, \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)>0. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} y$.

Р е ш е н и е. Первый сомножитель первого уравнения не может обращаться в нуль, но задаёт ограничения на значения переменной. В результате исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \sin^2 x+\operatorname{ctg} y-1=0, \\ \cos^2 x+\dfrac{\operatorname{tg} y}{4}-1=0, \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)>0. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \frac{1}{4}\operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y - 2 = 0 \iff \frac{1}{4}\operatorname{tg} y + \frac{1}{\operatorname{tg} y} - 1 = 0 \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}^2 y - 4\operatorname{tg} y + 4 = 0 \iff \operatorname{tg} y = 2 \iff y = \operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Для того, чтобы найти x, подставим во второе уравнение системы $\operatorname{tg} y = 2$, получим

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь отберём n такие, что $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$.

1) Если $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, то $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0$.

2) Если $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, то $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi n)$. Это значение положительно при $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$, значит, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \operatorname{arctg} 2 + \pi m\right)$; $k, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. (Геол-75.3)

Найти все решения системы $\begin{cases} 5^{\sin x + \operatorname{tg} y} = 1, \\ 7^{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = 7; \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi$.

И д е я. Решить систему относительно синуса и тангенса с помощью подстановки, предварительно избавившись от показательных функций.
У к а з а н и е. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sin x + \operatorname{tg} y = 0, \\ \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 1. \end{cases}$$

Её можно решить подстановкой.

Р е ш е н и е. Согласно свойствам показательных функций, исходная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} \sin x + \operatorname{tg} y = 0, \\ \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} y = -\sin x, \\ \sin^2 x + (-\sin x)^2 = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} y = -\sin x, \\ \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Поскольку $x \in (0; \pi)$, синус положителен, то есть $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. На интервале $(0; \pi)$ решениями этого уравнения являются $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{3\pi}{4}$. Теперь из первого уравнения системы найдём y:

$$\operatorname{tg} y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff y = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

На интервал $(0;\pi)$ из этой серии попадает только $y=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ при $n=1$.

О т в е т. $\left(\dfrac{\pi}{4};\ \pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{4};\ \pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 11. (Псих-99.3)

Решить систему $\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{3}{4},\\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{6}}{4},\\ \cos x\geq 0.\end{cases}$

И д е я. Свести систему данных уравнений к системе относительно $\cos x$ и $\sin y$ с помощью основного тригонометрического тождества.
У к а з а н и е. Заменить в первом уравнении системы $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ и $\cos^2 y$ на $1-\sin^2 y$.
У к а з а н и е. Решить полученную систему с помощью подстановки.

Р е ш е н и е. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(1-\cos^2 x)+(1-\sin^2 y)=\frac{3}{4}\quad\Longleftrightarrow\quad\cos^2 x+\sin^2 y=\frac{5}{4}.$$

Заметим, что согласно второму уравнению $\cos x\neq 0$ и запишем систему в виде

$$\begin{cases}\cos^2 x+\sin^2 y=\dfrac{5}{4},\\ \sin y=\dfrac{\sqrt{6}}{4\cos x},\\ \cos x>0,\end{cases}$$

подставив $\sin y$ из второго уравнения в первое, получим

$$\cos^2 x+\left(\frac{\sqrt{6}}{4\cos x}\right)^2=\frac{5}{4}\quad\Longleftrightarrow\quad 8\cos^4 x-10\cos^2 x+3=0\quad\Longleftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.$$

С учётом того, что $\cos x>0$, получаем два случая.

1) $\begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ y=(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

2) $\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin y=\dfrac{1}{\sqrt{2}};\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z},\\ y=(-1)^q\dfrac{\pi}{4}+\pi q,\ q\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

О т в е т. $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $\left(\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi m;(-1)^q\dfrac{\pi}{4}+\pi q\right)$; $\quad n,k,m,q\in\mathbb{Z}$.

Задача 12. (Геол-83.4)

Решить систему уравнений $\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

Идея. Решить систему подстановкой.
Указание. Выразить y из второго уравнения и подставить в первое.
Указание. Расписать синус тройного угла и полученное кубическое уравнение разложить на множители.

Решение. Выразив из второго уравнения системы $y = \dfrac{3\pi}{2} - x$ и подставив в первое, получим:

$$3\sin 3x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -4 \iff 3\sin 3x - \sin x = -4 \iff$$

$$\iff 3\cdot(3\sin x - 4\sin^3 x) - \sin x = -4 \iff 3\sin^3 x - 2\sin x - 1 = 0.$$

Корень $\sin x = 1$ легко угадывается, далее раскладываем на множители:

$$3\sin^3 x - 3\sin^2 x + 3\sin^2 x - 3\sin x + \sin x - 1 = 0 \iff$$

$$(\sin x - 1)(3\sin^2 x + 3\sin x + 1) = 0 \iff \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$

следовательно, $y = \pi - 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi - 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 13. (Почв-94(1).4)

Найти все решения системы $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{4}; \end{cases}$ удовлетворяющие неравенствам $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

Идея. Найти $\sin(x+y)$ и $\sin(x-y)$.
Указание. Сложить и вычесть уравнения.
Указание. Для того, чтобы сузить перебор целочисленных переменных, удобно произвести предварительную оценку величин $x + y$ и $x - y$.

Решение. Сложив почленно уравнения системы и вычтя их друг из друга, с учётом формул синуса суммы и разности получим:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x - y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Теперь отберём целочисленные переменные таким образом, чтобы выполнялись данные в условии задачи ограничения $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Заметим, что согласно уравнениям исходной системы, $\cos x \ne 0$ и $\cos y \ne 0$, откуда $x \ne \pm\frac{\pi}{2}$ и $y \ne \pm\frac{\pi}{2}$. Следовательно, неравенства в заданных ограничениях на x и y являются строгими.

Оценим величины $x+y$ и $x-y$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} -\pi < x+y < \pi, \\ -\pi < x-y < \pi; \end{cases}$$

значит, подходят только $n=0$, $k=0$ и $k=1$. В первом случае

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=\dfrac{\pi}{6}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{12}, \\ y=-\dfrac{\pi}{12}. \end{cases}$$

Во втором случае

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=\dfrac{5\pi}{6}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x=\dfrac{5\pi}{12}, \\ y=-\dfrac{5\pi}{12}. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{12}; -\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{12}; -\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Задача 14. (Геогр-87.4)

Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} \sin(2x-y)=0, \\ \cos(y-x)=1; \end{cases}$ удовлетворяющие условиям $\pi \le x \le 2\pi$, $-\pi \le y \le \pi$.

Идея. Решить систему подстановкой.
Указание. Выразить y из второго уравнения и подставить в первое.

Решение. Из второго уравнения следует, что $y = x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. При подстановке в первое уравнение получим:

$$\sin(2x - x - 2\pi k) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sin x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $x \in [\pi; 2\pi]$, подходят только $n=1$ и $n=2$.

Если $x=\pi$, то $y = \pi + 2\pi k \in [-\pi; \pi] \ \Rightarrow\ y = \pm\pi$.

Если $x=2\pi$, то $y = 2\pi + 2\pi k \in [-\pi; \pi] \ \Rightarrow\ y = 0$.

Ответ. $(\pi; \pm\pi)$, $(2\pi; 0)$.

Задача 15. (ВМК-77.3)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3-\sqrt{2})\,\mathrm{tg}\,5y = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \mathrm{tg}^2\,5y + (3-\sqrt{2})\sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases}$

Идея. Вычесть одно уравнение из другого и разложить полученное уравнение на множители.
Указание. Разложить уравнение, полученное в результате вычитания второго уравнения из первого на множители, приравнять каждый из множителей нулю и далее решать подстановкой.

Решение. Положим $u = \sin(-2x)$, $z = \mathrm{tg}\,5y$, где $|u| \le 1$ и вычтем второе уравнение из первого, получим

$$u^2 - z^2 - (3-\sqrt{2})z - (3-\sqrt{2})u = 0 \iff (u-z)(u+z) - (3-\sqrt{2})(u+z) = 0$$
$$\iff (u+z)(u-z-3+\sqrt{2}) = 0.$$

Теперь можно приравнять каждый из множителей нулю, выразить z через u и подставить в любое из уравнений исходной системы.

1) Если $z = -u$, то из первого уравнения системы получим

$$u^2 - (3-\sqrt{2})\cdot(-u) = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}.$$

Корень $u = \dfrac{\sqrt{2}-6}{2} < -1$ не подходит, остаётся корень $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$\begin{cases} \sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \mathrm{tg}\,5x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \iff \begin{cases} x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \\ y = -\dfrac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi m}{5},\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2) Если $z = u - (3-\sqrt{2})$, то из первого уравнения системы получим

$$u^2 - (3-\sqrt{2})u + (3-\sqrt{2})^2 = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}.$$

Вычислим дискриминант $D = (3-\sqrt{2})^2 - 2(23-15\sqrt{2}) = 24\sqrt{2} - 35$ и сравним его с нулём:

$$24\sqrt{2} - 35 \ \vee\ 0$$
$$24\sqrt{2} \ \vee\ 35$$
$$576\cdot 2 \ \vee\ 35^2$$
$$1152 < 1225$$

то есть $D < 0$ и в данном случае решений нет.

Ответ. $\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2};\ -\dfrac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi m}{5}\right)$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 16. (Хим-99(1).3)

Найти все значения x из отрезка $[0;\pi]$, удовлетворяющие системе
$\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 2\sin 7x - 2\sin x = \sqrt{2}. \end{cases}$

Идея. Получить систему относительно $\sin 3x$ и $\cos 4x$.
Указание. Во втором уравнении воспользоваться формулой разности синусов.
Указание. Полученную систему решать подстановкой.

Решение. Преобразуем систему следующим образом:

$$\begin{cases} 2\sin 3x + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2}, \\ 4\sin 3x \cos 4x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Заметим, что $\cos 4x \neq 0$; выразим $\sin 3x$ из второго уравнения и подставим в первое:

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\cos 4x} + 2\cos 4x = 1 + \sqrt{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 4\cos^2 4x - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)\cos 4x + \sqrt{2} = 0;$$

$$D_1 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 4\sqrt{2} = \left(1 - \sqrt{2}\right)^2; \quad \cos 4x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Первый случай:

$$\begin{cases} \cos 4x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin 3x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi m}{3}, \ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{cases}$$

С учётом того, что $x \in [0;\pi]$ получим

$$\begin{cases} x \in \left\{ \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{11\pi}{12} \right\}, \\ \left[\begin{array}{l} x \in \left\{ \dfrac{\pi}{12}, \dfrac{3\pi}{4} \right\}, \\ x \in \left\{ \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{12} \right\}; \end{array} \right. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} \cos 4x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin 3x = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi l}{2}, \ l \in \mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi q}{3}, \ q \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi s}{3}, \ s \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{cases}$$

С учётом того, что $x \in [0;\pi]$ получим

$$\begin{cases} x \in \left\{ \frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{15\pi}{16} \right\}, \\ \left[\begin{array}{l} x \in \left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18} \right\}, \\ x \in \left\{ \frac{5\pi}{18}, \frac{17\pi}{18} \right\}; \end{array} \right. \end{cases} \iff x \in \emptyset.$$

О т в е т. $\frac{\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$.

Задача 17. (Биол-80.5)

Найти все те решения уравнения $3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 = 0$, которые являются также решениями уравнения $\cos^2 x + 3\cos x \sin 2x - 8\sin x = 0$.

И д е я. Условие задачи эквивалентно поиску решения системы двух заданных уравнений.
У к а з а н и е. Применяя формулы двойного угла и основное тригонометрическое тождество, привести каждое из уравнений к кубическому относительно $\sin x$, после чего исключить из системы $\sin^3 x$.

Р е ш е н и е. Множество решений первого уравнения, также являющихся решениями второго уравнения, фактически задаёт пересечение областей решений двух уравнений, то есть условие задачи можно трактовать как требование найти решение системы:

$$\begin{cases} 3\sin^3 x - 3\cos^2 x + 7\sin x - \cos 2x + 1 = 0, \\ \cos^2 x + 3\cos x \sin 2x - 8\sin x = 0. \end{cases}$$

Выразим всё через $\sin x$ с помощью основного тригонометрического тождества и формул двойных углов:

$$\begin{cases} 3\sin^3 x - 3(1 - \sin^2 x) + 7\sin x - (1 - 2\sin^2 x) + 1 = 0, \\ 1 - \sin^2 x + 3\sin x \cdot 2 \cdot (1 - \sin^2 x) - 8\sin x = 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3\sin^3 x + 5\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0, \\ -6\sin^3 x - \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0. \end{cases}$$

Сложив второе уравнение с удвоенным первым, получим:

$$\begin{cases} 3\sin^3 x + 5\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0, \\ 9\sin^2 x + 12\sin x - 5 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3\sin^3 x + 5\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0, \\ \sin x = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $\sin x = 1/3$ является решением и первого уравнения, следовательно, условию задачи удовлетворяет серия
$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 18. (Биол-79.5)

Найти все пары чисел x и y, удовлетворяющие условиям
$$\begin{cases} \cos^2 xy - 3\sin xy\cos xy = 2\cos y\cos(2xy-y) - 2\cos^2(xy-y), \\ x^3 - xy + 1 = 0, \\ x^6 + 2xy \le 5. \end{cases}$$

Идея. Свести первое уравнение к однородному тригонометрическому уравнению второй степени и найти из него значение величины xy. Отбор целочисленных переменных произвести с помощью неравенства и второго уравнения системы.

Указание. Преобразовать произведение косинусов в сумму и применить формулу косинуса двойного угла. Из полученного однородного уравнения найти xy.

Указание. Выразив x^3 из второго уравнения системы через xy и подставив в неравенство, получить ограничение на значение xy и отобрать значения целочисленных переменных. Далее, с помощью второго уравнения системы найти сами неизвестные x и y.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:
$$\cos^2 xy - 3\sin xy\cos xy = \cos 2xy + \cos(2y-2xy) - 2\cos^2(xy-y) \iff$$
$$\iff \cos^2 xy - 3\sin xy\cos xy = \cos 2xy + 2\cos^2(xy-y) - 1 - 2\cos^2(xy-y) \iff$$
$$\iff \cos^2 xy - 3\sin xy\cos xy = -2\sin^2 xy.$$

После деления обеих частей уравнения на $\cos^2 xy$ (учитывая, что $\cos^2 xy = 0$ не является решением уравнения), получим:
$$2\,\mathrm{tg}^2\, xy - 3\,\mathrm{tg}\, xy + 1 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &\mathrm{tg}\, xy = 1, \\ &\mathrm{tg}\, xy = \frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &xy = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ &xy = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \pi m,\ m\in\mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Теперь отберём значения целочисленных переменных, при которых справедливо неравенство исходной системы. Для этого выразим x^3 из второго уравнения системы через xy и подставим в неравенство:
$$(xy-1)^2 + 2xy \le 5 \iff (xy)^2 \le 4 \iff |xy| \le 2.$$

1) Для серии $xy = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ неравенство $\left|\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right| \le 2$ выполняется только при $n = 0$, следовательно,
$$\begin{cases} xy = \dfrac{\pi}{4}, \\ x^3 - xy + 1 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} xy = \dfrac{\pi}{4}, \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4} - 1}\,; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4} - 1}\,, \\ y = \dfrac{\pi}{4\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4} - 1}}\,. \end{cases}$$

2) Для серии $xy = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ неравенство $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi m\right| \le 2$ выполняется только при $m = 0$ (так как $0 < \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} < \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$), следовательно,

$$\begin{cases} xy = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}, \\ x^3 - xy + 1 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} xy = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}, \\ x = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - 1}\,; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - 1}\,, \\ y = \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - 1}}\,. \end{cases}$$

О т в е т. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4} - 1};\ \dfrac{\pi}{4\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4} - 1}}\right),\ \left(\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - 1};\ \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - 1}}\right)$.

6.4. Использование ограниченности тригонометрических функций, оценочные неравенства

Задача 1. (ЕГЭ)

Решите уравнение $\sin\left(\dfrac{37\pi}{2} + x\right) = 3x^2 + 1$.

И д е я. Использовать ограниченность синуса и свойства квадратичной функции.

У к а з а н и е. Поскольку $\sin\left(\dfrac{37\pi}{2} + x\right) \le 1$ и $3x^2 + 1 \ge 1$, равенство возможно только в случае, когда функции в левой и правой частях принимают значение, равное единице.

Р е ш е н и е. Так как $\sin\left(\dfrac{37\pi}{2} + x\right) \le 1$ и $3x^2 + 1 \ge 1$, то исходное равенство может выполняться только при условии

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{37\pi}{2} + x\right) = 1, \\ 3x^2 + 1 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x = 0$. Проверкой убеждаемся, что найденное значение переменной является корнем и первого уравнения.

О т в е т. 0.

Задача 2. (У)

Решить уравнение $\sin x + \sin 9x = 2$.

И д е я. Использовать ограниченность синуса.

Указание. Равенство возможно только тогда, когда оба синуса равны 1.

Решение. Так как $-1 \le \sin x \le 1$ и $-1 \le \sin 9x \le 1$, то исходное равенство может выполняться только при условии

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Вычислим $\sin 9x$:

$$\sin 9x = \sin\left(\frac{9\pi}{2} + 18\pi k\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = 1.$$

Следовательно, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ является решением системы и исходного уравнения.

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. (У)

Решить уравнение $\cos x - \sin 3x = -2$.

Идея. Использовать ограниченность синуса и косинуса.
Указание. Равенство возможно тогда и только тогда, когда косинус равен -1, а синус 1.

Решение. Так как $-1 \le \cos x \le 1$ и $-1 \le \sin 3x \le 1$, то исходное равенство может выполняться только при условии

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \sin 3x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Вычислим $\sin 3x$:

$$\sin 3x = \sin(3\pi + 6\pi k) = 0 \ne 1.$$

Следовательно, решений нет.

Ответ. Решений нет.

Задача 4. (ЕГЭ)

Решите уравнение $2\cos^2 2x - \sin 3x = 3$.

Идея. Использовать ограниченность синуса и косинуса.
Указание. Равенство возможно только тогда, когда косинус равен ± 1, а синус равен -1.

Р е ш е н и е. Так как $0 \le \cos^2 2x \le 1$ и $-1 \le \sin 3x \le 1$, то исходное равенство может выполняться только при условии

$$\begin{cases} |\cos 2x| = 1, \\ \sin 3x = -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Подберём k таким образом, чтобы найденный x являлся решением и второго уравнения, то есть

$$\sin 3x = \sin\left(\frac{3\pi k}{2}\right) = -1.$$

Заметим, что если k чётно, то $\sin\left(\dfrac{3\pi k}{2}\right) = 0$, значит $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ и

$$\sin 3x = \sin\left(\frac{3\pi k}{2}\right) = \sin\left(3\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos 3\pi n.$$

А так как $\cos 3\pi n = 1 \iff n = 2m,\ m \in \mathbb{Z}$, то $k = 2n+1 = 4m+1$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (ЕГЭ)

Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^3 x = 1$.

И д е я. Использовать ограниченность синуса и косинуса и основное тригонометрическое тождество.
У к а з а н и е. Использовать то, что $\sin^4 x \le \sin^2 x,\ \cos^3 x \le \cos^2 x$.
У к а з а н и е. Тогда из уравнения и основного тригонометрического тождества получаем $1 = \sin^4 x + \cos^3 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, что возможно только в случае $\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x, \\ \cos^3 x = \cos^2 x. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Используя то, что $\sin^4 x \le \sin^2 x,\ \cos^3 x \le \cos^2 x$, получаем

$$\sin^4 x + \cos^3 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

то есть исходное равенство возможно только при условии

$$\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x, \\ \cos^3 x = \cos^2 x; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ 2\pi m;\ k, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. (У)

Решить уравнение $\sin^3 x - \cos^7 x = 1$.

Идея. Использовать ограниченность синуса и косинуса и основное тригонометрическое тождество.
Указание. Использовать то, что $\sin^3 x \le \sin^2 x,\ -\cos^7 x \le \cos^2 x$.
Указание. Тогда из уравнения и основного тригонометрического тождества получаем $1 = \sin^3 x - \cos^7 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, что возможно только в случае $\begin{cases} \sin^3 x = \sin^2 x, \\ -\cos^7 x = \cos^2 x. \end{cases}$

Решение. Используя то, что $\sin^3 x \le \sin^2 x,\ -\cos^7 x \le \cos^2 x$, получаем

$$\sin^3 x - \cos^7 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

то есть исходное равенство возможно только при условии

$$\begin{cases} \sin^3 x = \sin^2 x, \\ -\cos^7 x = \cos^2 x; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ. $\pi + 2\pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. (У)

Решить уравнение $\sin x + \sqrt{\cos x} = 1$.

Идея. Показать, что синус и косинус могут принимать значения либо 1, либо 0.
Указание. Использовать основное тригонометрическое тождество.

Решение. Заметим, что если $\sin x < 0$, то левая часть уравнения меньше 1 и решений нет, следовательно, $\sin x \ge 0$. Учитывая, что

$$\sin x \ge \sin^2 x, \quad \sqrt{\cos x} \ge \cos^2 x,$$

получаем

$$\sin x + \sqrt{\cos x} \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

то есть исходное равенство возможно только при условии

$$\begin{cases} \sin x = \sin^2 x, \\ \sqrt{\cos x} = \cos^2 x; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ. $2\pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 8. (У)

Решить уравнение $\sin x \cdot \sin 7x = 1$.

И д е я. Использовать ограниченность каждого из множителей.
У к а з а н и е. В силу ограниченности синуса равенство возможно только в случае, когда оба множителя равны либо 1, либо -1.

Р е ш е н и е. Поскольку каждый из множителей по модулю не превосходит 1, возможно только два варианта: оба множителя равны 1, либо оба множителя равны -1.
Первый случай:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 7x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Вычислим $\sin 7x$:

$$\sin 7x = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + 14\pi k\right) = -1.$$

Следовательно, в этом случае решений нет.
Второй случай:

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin 7x = -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Вычислим $\sin 7x$:

$$\sin 7x = \sin\left(-\frac{7\pi}{2} + 14\pi k\right) = 1.$$

Следовательно, решений нет.

О т в е т. Решений нет.

Задача 9. (У)

Решить уравнение $\cos x \cdot \cos 6x = -1$.

И д е я. Использовать ограниченность каждого из множителей.
У к а з а н и е. Равенство возможно только в случае, когда один множитель равен 1, другой -1.

Р е ш е н и е. Поскольку каждый из множителей по модулю не превосходит 1, возможно только два варианта. Первый вариант:

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 6x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Вычислим $\cos 6x$:

$$\cos 6x = \cos 6\pi = 1.$$

Следовательно, $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ входит в ответ.
Второй случай:

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 6x = -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\cos 6x = 1$ и в этом случае решений нет.

Ответ. $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. (У)

Решить уравнение $\sin^5 x \cdot \cos^6 x = \dfrac{1}{31}$.

Идея. Показать, что левая часть равенства меньше $\dfrac{1}{31}$.
Указание. Свернуть произведение синуса на косинус в синус двойного угла.

Решение. Так как

$$\sin^5 x \cdot \cos^6 x = \frac{1}{2^5} \sin^5 2x \cdot \cos x \le \frac{1}{32} < \frac{1}{31},$$

то исходное уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Задача 11. (У)

Решить уравнение $\sin^6 x \cdot \cos^{10} x = \dfrac{7}{8}$.

Идея. Показать, что левая часть равенства меньше $\dfrac{7}{8}$.
Указание. Свернуть произведение синуса на косинус в синус двойного угла.

Решение. Так как

$$\sin^6 x \cdot \cos^{10} x = \frac{1}{2^6} \sin^6 2x \cdot \cos^4 x \le \frac{1}{64} < \frac{7}{8},$$

то исходное уравнение решений не имеет.

Ответ. Решений нет.

Задача 12. (У)

Решить уравнение $\cos x = x^2 + 1$.

Идея. Использовать оценки левой и правой частей уравнения.
Указание. Равенство возможно только тогда, когда обе части равны 1.

Решение. Поскольку $\cos x \le 1$, а $x^2 + 1 \ge 1$, обе части равны 1, откуда $x = 0$.

Ответ. 0.

Задача 13. (У)

Решить уравнение $\cos^2(\pi x) - \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 1$.

Идея. Использовать оценку левой части уравнения.
Указание. Равенство возможно только тогда, когда радикал равен нулю.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\cos^2(\pi x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} + 1.$$

Поскольку $\cos^2(\pi x) \leq 1$, а $\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 1 \geq 1$, то обе части уравнения равны 1. Следовательно, радикал равен нулю, и решения надо искать среди корней квадратного уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$. Так как при $x = 1$ и $x = 4$ выполняется $\cos^2(\pi x) = 1$, то оба корня входят в окончательный ответ.

Ответ. 1; 4.

Задача 14. (У)

Решить уравнение $\cos^2 x = 0,5\left(\sqrt{1 + 4x^2} + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

Идея. Использовать оценки левой и правой частей уравнения.
Указание. Равенство возможно только тогда, когда обе части равны 1.

Решение. Минимум правой части уравнения совпадает с максимумом левой, следовательно, обе части равны 1, откуда $x = 0$.

Ответ. 0.

Задача 15. (У)

Решить уравнение $\sin 9x \cdot \sin x + \cos x = \dfrac{3}{2}$.

Идея. Показать, что левая часть уравнения всегда меньше правой.
Указание. Использовать метод вспомогательного аргумента.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin 9x \cdot \sin x + \cos x = \sqrt{\sin^2 9x + 1}\left(\frac{\sin^2 9x}{\sqrt{\sin^2 9x + 1}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{\sin^2 9x + 1}} \cos x\right) =$$

$$= \sqrt{\sin^2 9x + 1} \cdot \sin\left(x + \varphi(x)\right), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\sin^2 9x + 1}}.$$

Далее, так как $-1 \leq \sin\left(x + \varphi(x)\right) \leq 1$, то $1 \leq \sqrt{\sin^2 9x + 1} \leq \sqrt{2}$ и

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{\sin^2 9x + 1} \sin\left(x + \varphi(x)\right) \leq \sqrt{2}.$$

Следовательно, левая часть уравнения для любого x меньше правой, то есть решений нет.

Ответ. Решений нет.

Задача 16. (У)

Решить уравнение $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^2 x$.

Идея. Показать, что максимум левой части уравнения равен минимуму правой.
Указание. Использовать основное тригонометрическое тождество.

Решение. Оценим обе части уравнения:

$$\sin^5 x + \cos^5 x \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad 2 - \sin^2 x = 1 + \cos^2 x \ge 1.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \sin^5 x + \cos^5 x = 1, \\ 1 + \cos^2 x = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0; \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 17. (У)

Решить уравнение $\cos^2 x + \cos^2 \sqrt{3}x = 2$.

Идея. Использовать ограниченность косинуса.
Указание. Равенство может выполняться только тогда, когда оба слагаемых левой части равны 1.

Решение. Так как $\cos^2 x \le 1$, $\cos^2 \sqrt{3}x \le 1$, равенство достигается только при

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \cos^2 \sqrt{3}x = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \sqrt{3}x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значение $x = 0$ является решением. Если $x \ne 0$, то, поделив уравнения друг на друга, получим, что $\sqrt{3} = \dfrac{k}{n}$, то есть $\sqrt{3}$ является рациональным числом. Поскольку это неверно, решений, отличных от нуля, нет.

Ответ. 0.

Задача 18. (Геогр-98.4)

Решить уравнение $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2 + 5\sin^2\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Идея. Показать, что максимум левой части уравнения равен минимуму правой части.
Указание. Преобразовать левую часть уравнения с помощью метода вспомогательного аргумента и показать, что левая часть не превосходит правую.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 + \frac{5}{2}\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \iff \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{5}{2}\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Поскольку $-1 \le \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \le 1$ и $0 \le \sin^2\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \le 1$, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1, \\ \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задача 19. (Экон-90.5)

Найти все корни уравнения $\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x} \cdot \cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2}$, расположенные на отрезке $[-3; 1]$.

И д е я. Применив к левой части уравнения формулу вспомогательного аргумента, использовать ограниченность тригонометрических функций для поиска решения.
У к а з а н и е. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}$, свернуть левую часть полученного уравнения в косинус разности.
У к а з а н и е. Показать, что равенство может выполняться только, если обе его части равны 1, и решить соответствующую систему.

Р е ш е н и е. Преобразуем исходное уравнение в соответствии с методом вспомогательного аргумента:

$$\frac{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}} \cos \pi x + \frac{1}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}} \sin \pi x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}} \iff$$

$$\cos\varphi \cos \pi x + \sin\varphi \sin \pi x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}} \iff \cos(\pi x - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}},$$

где $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}}$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}}$.

В силу ограниченности косинуса в левой части полученного уравнения, необходимым условием существования решений является условие

$$\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x} \ge \sqrt{2} \iff \operatorname{ctg}^2 2\pi x \le 0 \iff \operatorname{ctg}^2 2\pi x = 0.$$

В этом случае уравнение примет вид

$$\cos(\pi x - \varphi) = 1, \quad \text{где} \quad \sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В результате, взяв в качестве φ угол $\dfrac{\pi}{4}$, получим, что исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\\ \operatorname{ctg}2\pi x=0;\end{cases}\iff\begin{cases}\pi x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 2\pi x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\end{cases}\iff\begin{cases}x=2n+\dfrac{1}{4},\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\dfrac{m}{2}+\dfrac{1}{4},\ m\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

следовательно, $x=2n+\dfrac{1}{4},\ n\in\mathbb{Z}$, причём условие $x\in[-3;1]$ выполняется только при $n=-1$ и $n=0$. То есть в ответ войдут $x=-\dfrac{7}{4}$ и $x=\dfrac{1}{4}$.

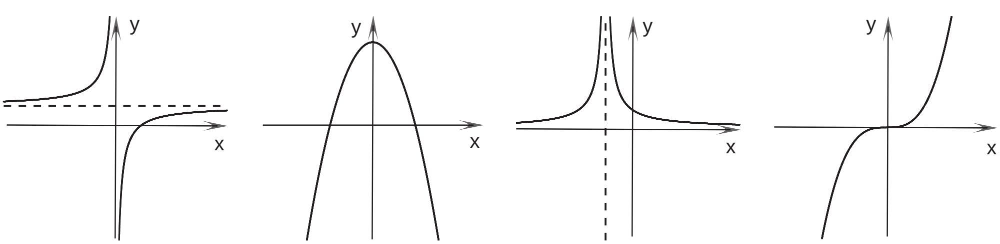
О т в е т. $-\dfrac{7}{4};\ \dfrac{1}{4}$.

7. Изображение множества точек на координатной плоскости, использование графических иллюстраций в уравнениях и неравенствах различных типов

7.1. Геометрические места точек, графики функций, правила линейных преобразований графиков

Задача 1. (ЕГЭ)

На одном из четырёх рисунков изображён график нечётной функции. Указать этот рисунок.



И д е я. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Р е ш е н и е. Так как график нечётной функции симметричен относительно начала координат, то нечётной функцией является только функция, изображённая на последнем рисунке.

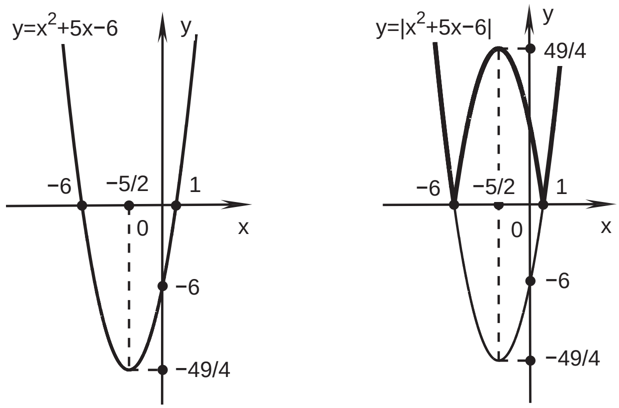
О т в е т. На последнем.

Задача 2. (У)

Построить график функции $y = |x^2 + 5x - 6|$.

Идея. Получить график функции $y = |f(x)|$ из графика функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 5x - 6$.
Указание. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика $y = f(x)$ отражением части графика, находящейся под осью Ox.

Решение. Сначала построим параболу $y = x^2 + 5x - 6$.



Ветви параболы направлены вверх, координаты вершины и корни равны соответственно

$$x_{\text{в}} = \frac{5}{2}, \quad y_{\text{в}} = y(x_{\text{в}}) = -12\frac{1}{4}, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 1.$$

Точка пересечения с осью Oy имеет координаты $(0; -6)$.

График функции $y = |x^2 + 5x - 6|$ получается из $y = x^2 + 5x - 6$ с помощью отражения наверх той части графика, которая находится ниже оси Ox.

Задача 3. (У)

Построить график функции $y = x^2 + 5|x| - 6$.

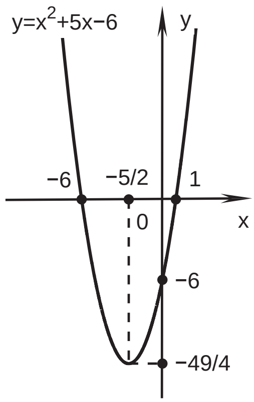
Идея. Получить график функции $y = f(|x|)$ из графика функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 5x - 6$.
Указание. График функции $y = f(|x|)$ получается из графика $y = f(x)$ с помощью отражения правой части графика относительно оси Oy.

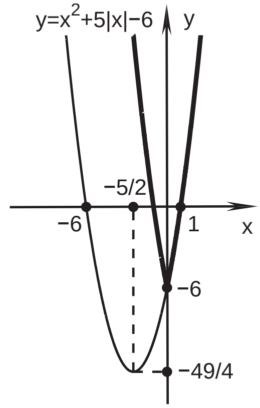
Решение. Сначала построим параболу $y = x^2 + 5x - 6$. Ветви параболы направлены вверх, координаты вершины и корни равны соответственно

$$x_{\text{в}} = \frac{5}{2}, \quad y_{\text{в}} = y(x_{\text{в}}) = -12\frac{1}{4}, \quad x_1 = -6, \quad x_2 = 1.$$

Точка пересечения с осью Oy имеет координаты $(0; -6)$.

График функции $y = x^2 + 5|x| - 6$ получается из $y = x^2 + 5x - 6$ с помощью отражения правой части графика относительно оси Oy.





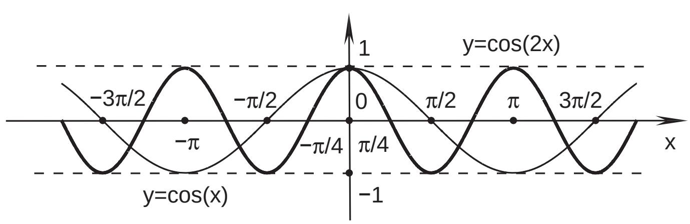
Задача 4. (У)

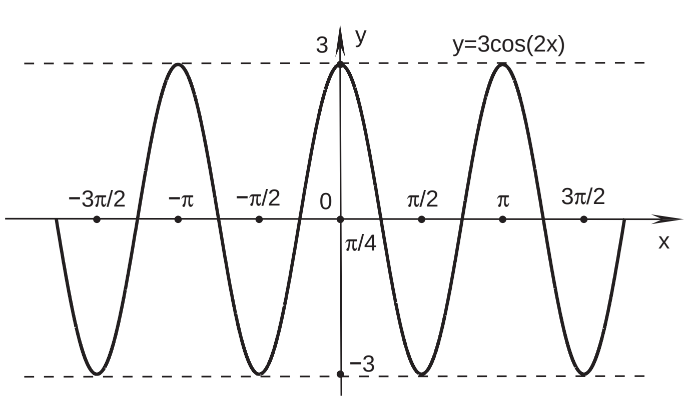
Построить график функции $y = 3\cos 2x$.

И д е я. Получить график функции $y = 3\cos 2x$ из графика $y = \cos x$ с помощью сжатия и растяжения по соответствующим осям.
У к а з а н и е. График функции $y = f(2x)$ получается из графика $y = f(x)$ сжатием в два раза вдоль оси Ox. График функции $y = 3f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в 3 раза вдоль оси Oy.

Р е ш е н и е. Построим график функции $y = \cos x$ и последовательными преобразованиями приведём его к графику функции $y = 3\cos 2x$.

Сначала сжатием в два раза вдоль оси Ox получим график $y = \cos 2x$. Потом растяжением в 3 раза вдоль оси Oy получим график $y = 3\cos 2x$.





Задача 5. (У)

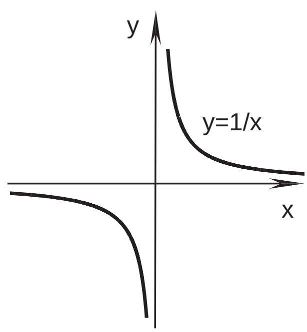
Построить график функции $y = 1 - \dfrac{1}{|x|}$.

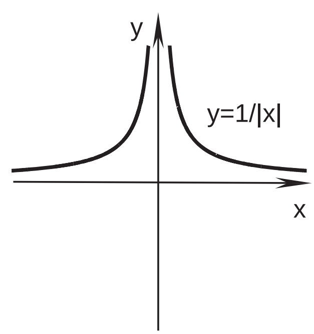
Идея. Получить график функции $y = 1 - \dfrac{1}{|x|}$ из графика $y = \dfrac{1}{x}$ с помощью простейших преобразований.

Указание. График функции $y = f(|x|)$ получается из графика $y = f(x)$ отражением правой части графика относительно оси Oy. График функции $y = 1 - f(x)$ получается из графика функции $y = -f(x)$ сдвигом на 1 вверх.

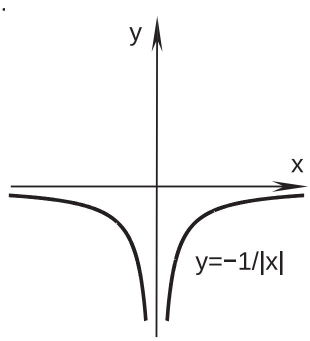
Решение. Построим график функции $y = \dfrac{1}{x}$ и последовательными преобразованиями приведём его к графику функции $y = 1 - \dfrac{1}{|x|}$.

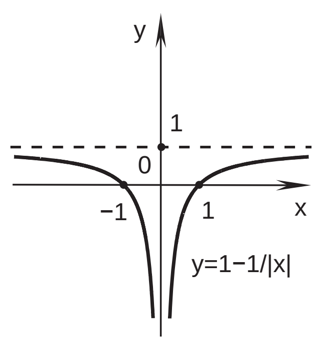
Сначала построим график функции $y = \dfrac{1}{|x|}$, отразив правую часть графика $y = \dfrac{1}{x}$ относительно оси Oy.





Отразив график функции $y = \dfrac{1}{|x|}$ относительно оси Ox, получим график функции $y = -\dfrac{1}{|x|}$, сдвинув который вверх на 1, получим график функции $y = 1 - \dfrac{1}{|x|}$.





Задача 6. (У)

Построить график функции $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Идея. Получить график функции $y = \dfrac{x}{x+1}$ из графика $y = \dfrac{1}{x}$ с помощью простейших преобразований.

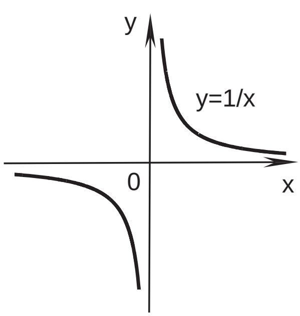
Указание. Выделить из дроби $\dfrac{x}{x+1}$ целую часть.

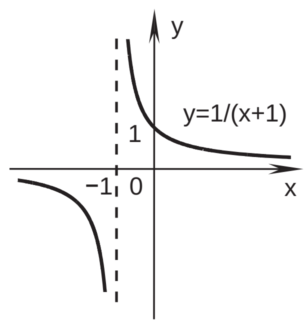
Указание. $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

Решение. Преобразуем искомую функцию следующим образом:

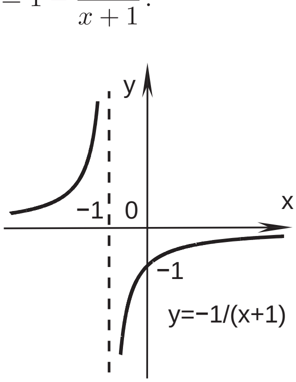
$$y = \frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

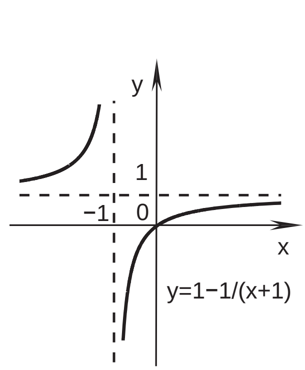
Сначала построим график функции $y = \dfrac{1}{x}$ и сдвинув его влево на 1, получим график функции $y = \dfrac{1}{x+1}$.





Отразив график функции $y = \dfrac{1}{x+1}$ относительно оси x, получим график функции $y = -\dfrac{1}{x+1}$, сдвинув который вверх на 1, получим искомый график функции $y = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.



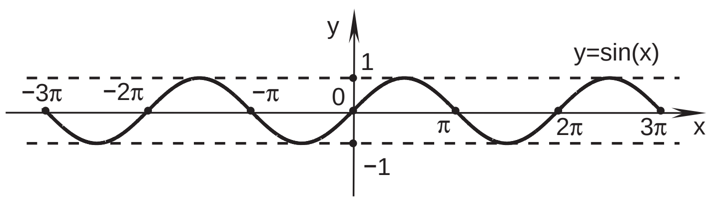


Задача 7. (У)

Построить график функции $y = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$.

Идея. На области определения исследуемой функции раскрыть модуль по определению и сократить выражение на $\sin x$.
Указание. На интервалах $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ подмодульное выражение положительно, на интервалах $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ подмодульное выражение отрицательно. В точках πk, $k \in \mathbb{Z}$ исходная функция не определена.

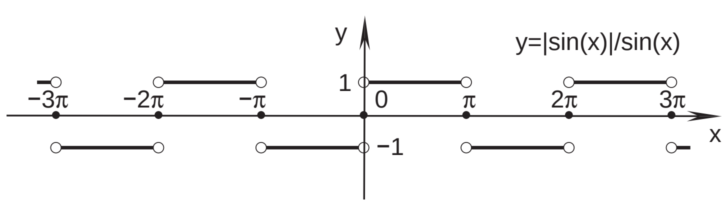
Решение. Функция определена в точках, где знаменатель дроби не равен нулю, то есть при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



В остальных точках раскроем модуль по определению.

1) При $\sin x > 0$ (то есть при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$) получим $y = \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$.

2) При $\sin x < 0$ (при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$) получим $y = -\dfrac{\sin x}{\sin x} = -1$.



Задача 8. (Экон-72.2)

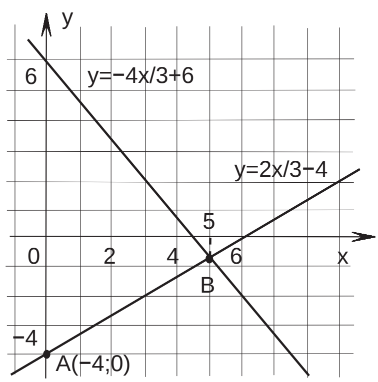
Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 12y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$$

Идея. Разложить каждое из уравнений на множители и, приравняв каждый из множителей к нулю, получить уравнения соответствующих прямых.

Р е ш е н и е. Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2y^2(18-4x-3y)=0, \\ y^2(12-2x+3y)=0; \end{cases} \iff \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ y=0, \\ y=-\dfrac{4}{3}x+6; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y=0, \\ y=\dfrac{2}{3}x-4. \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Заметив, что $y=0$ является решением, найдём остальные решения как точки пересечения прямой $y=\dfrac{2}{3}x-4$ с прямыми $x=0$ (т. $A(0;-4)$) и $y=-\dfrac{4}{3}x+6$ $\left(\text{т. } B\left(5;-\dfrac{2}{3}\right)\right)$.

О т в е т. $y=0$, т. $A(0;-4)$, т. $B\left(5;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Задача 9. (ВМК-99.2)

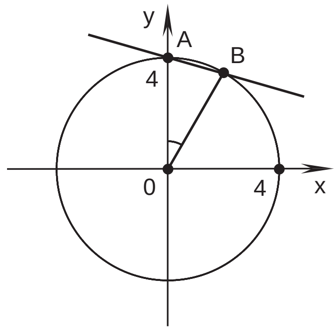
На координатной плоскости (x,y) проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y=4-(2-\sqrt{3})x$, пересекает её в точках A и B. Найти сумму длин отрезка AB и меньшей дуги AB.

И д е я. Найти координаты точек A и B. Вычислить градусную меру дуги AB.
У к а з а н и е. Градусная мера дуги AB есть величина центрального угла AOB, величину которого можно найти по теореме косинусов из соответствующего треугольника.

Р е ш е н и е. Найдём координаты точек пересечения прямой и окружности из соответствующей системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=4-\left(2-\sqrt{3}\right)x. \end{cases}$$

Решениями системы являются пары $x = 0,\ y = 4$ и $x = 2,\ y = 2\sqrt{3}$. Пусть $A(0;4)$, $B(2;2\sqrt{3})$ и точка O – начало координат.



По формуле расстояния между точками получим:

$$AB^2 = 2^2 + \left(4 - 2\sqrt{3}\right)^2 = 32 - 16\sqrt{3}.$$

Из теоремы косинусов для ΔAOB следует, что

$$32-16\sqrt{3} = 16+16-2\cdot16\cdot\cos\angle AOB \quad\Longrightarrow\quad \cos\angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \angle AOB = \frac{\pi}{6}.$$

Длина соответствующей дуги равна $4\cdot\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$. В результате искомая сумма длин равна $\dfrac{2\pi}{3} + 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

О т в е т. $\dfrac{2\pi}{3} + 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Задача 10. (Геол-82.5)

Построить на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют условию

$$y = 4 - \left|y - \frac{6}{x}\right| - 2\left|\frac{3}{x} - 1\right|,$$

и среди точек этого множества найти те, у которых координата y принимает наибольшее значение.

И д е я. Раскрыть модули по определению, то есть рассмотреть 4 случая раскрытия модулей в зависимости от знаков подмодульных выражений.
У к а з а н и е. Линии смены знаков подмодульных выражений разобьют координатную плоскость на несколько частей. На каждой из таких частей плоскости исходное уравнение уже не будет содержать знаков модулей.

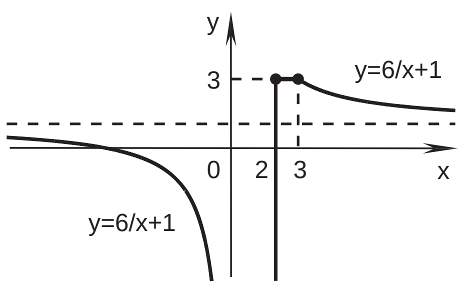
Р е ш е н и е. Рассмотрим 4 случая раскрытия модулей:

$$1)\ \begin{cases} y-\dfrac{6}{x}\ge 0,\\ \dfrac{3}{x}-1\ge 0,\\ y=4-y+\dfrac{6}{x}-\dfrac{6}{x}+2; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3x-6}{x}\ge 0,\\ \dfrac{x-3}{x}\le 0,\\ y=3; \end{cases} \iff \begin{cases} x\in[2;3],\\ y=3; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} y-\dfrac{6}{x}\ge 0,\\ \dfrac{3}{x}-1< 0,\\ y=4-y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{x}-2; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{6}{x}+1\ge \dfrac{6}{x},\\ \dfrac{x-3}{x}> 0,\\ y=\dfrac{6}{x}+1; \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty),\\ y=\dfrac{6}{x}+1; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} y-\dfrac{6}{x}< 0,\\ \dfrac{3}{x}-1\ge 0,\\ y=4+y-\dfrac{6}{x}-\dfrac{6}{x}+2; \end{cases} \iff \begin{cases} y<\dfrac{6}{x},\\ x\in(0;3],\\ 0=3-\dfrac{6}{x}; \end{cases} \iff \begin{cases} y<\dfrac{6}{x},\\ x=2; \end{cases} \iff \begin{cases} y<3,\\ x=2; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} y-\dfrac{6}{x}< 0,\\ \dfrac{3}{x}-1< 0,\\ y=4+y-\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{x}-2; \end{cases} \iff \begin{cases} y<\dfrac{6}{x},\\ \dfrac{x-3}{x}> 0,\\ 0=2, \quad \text{нет решений.} \end{cases}$$



Итак, $y_{\max}=3$ при $x\in[2;3]$.

О т в е т. $y_{\max}=3$ при $2\le x\le 3$.

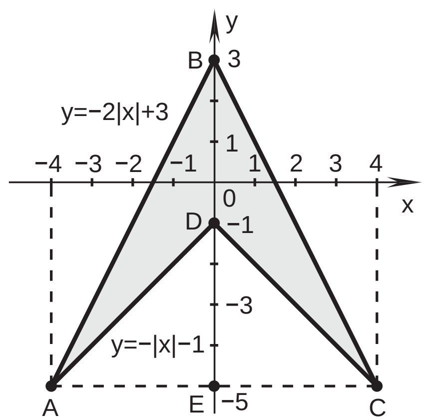
7.2. Плоские геометрические фигуры, применение метода координат

Задача 1. (ИСАА-96.2)

Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой
$$\begin{cases} y\ge -|x|-1,\\ y\le -2|x|+3. \end{cases}$$

И д е я. Искомая фигура представляет собой множество точек, лежащих выше графика функции $y=-|x|-1$ и ниже графика функции $y=-2|x|+3$.

Указание. График $y=-|x|-1$ получается из графика $y=|x|$ отражением относительно оси Ox из верхней полуплоскости в нижнюю и сдвигом по оси Oy на единицу вниз.
Указание. График $y=-2|x|+3$ получается из графика $y=|x|$ отражением относительно оси Ox в нижнюю полуплоскость, изменением в два раза углового коэффициента образующих лучей и сдвигом по оси Oy на три единицы вверх.
Указание. Искомая фигура является невыпуклым четырёхугольником, площадь которого удобно считать через разность площадей треугольников.



Решение. Построим графики функций $y=-|x|-1$ и $y=-2|x|+3$.

График $y=-|x|-1$ получается из графика $y=|x|$ отражением относительно оси Ox в нижнюю полуплоскость и сдвигом вниз по оси Oy на единицу; геометрическим местом точек, задаваемых неравенством $y\geq-|x|-1$, является область над графиком соответствующего уравнения.

График $y=-2|x|+3$ получается из графика $y=|x|$ отражением относительно оси Ox в нижнюю полуплоскость, изменением в два раза углового коэффициента образующих лучей и сдвигом вверх по оси Oy на три единицы; геометрическим местом точек неравенства $y\leq-2|x|+3$ является область под графиком соответствующего уравнения.

В итоге, заданной фигурой оказался невыпуклый четырёхугольник $ABCD$: $A(-4;-5)$, $B(0;3)$, $C(4;-5)$, $D(0;-1)$;

$$S_{ABCD}=S_{ABC}-S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot BE-\frac{1}{2}AC\cdot DE=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4=16,$$

где т. $E(0;-5)$.

Замечание. Координаты точек пересечения прямых находятся как решения систем соответствующих линейных уравнений.

Ответ. 16.

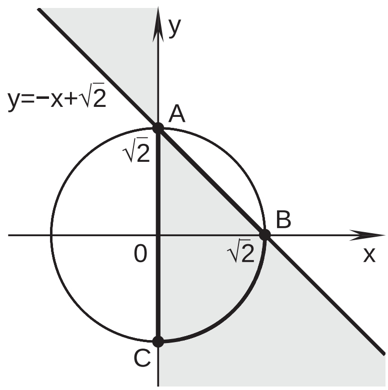
Задача 2. **(Геол-99.3)**

Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости (x,y) системой неравенств $\begin{cases} x(x+y-\sqrt{2})\leq 0, \\ x^2+y^2\leq 2. \end{cases}$

Идея. Построить отдельно множество точек, удовлетворяющих первому неравенству, и пересечь с множеством точек, лежащих внутри круга $x^2+y^2\leq 2$.
Указание. При решении первого неравенства рассмотреть случаи: первый множитель больше или равен нуля, второй – меньше или равен, и наоборот.

Р е ш е н и е. Первое неравенство системы расщепляется на две системы:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ x+y-\sqrt{2} \leq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq 0,\\ x+y-\sqrt{2} \geq 0;\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ y \leq -x+\sqrt{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq 0,\\ y \geq -x+\sqrt{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$



Таким образом, решением первого неравенства исходной системы будут точки, лежащие в закрашенной области.

В ответ из них войдут только те, которые лежат внутри круга $x^2+y^2 \leq 2$.

Прямая $y = -x+\sqrt{2}$ пересекает окружность в точках $A(0;\sqrt{2})$, $B(\sqrt{2};0)$, и площадь искомой фигуры складывается из площади сектора COB и площади треугольника AOB, то есть искомая площадь равна $\dfrac{\pi(\sqrt{2})^2}{4}+\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{2}+1$.

О т в е т. $\dfrac{\pi}{2}+1$.

Задача 3. (Геол.ОГ-81.4)

Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости условием $|x|+|y-1| \leq 4$.

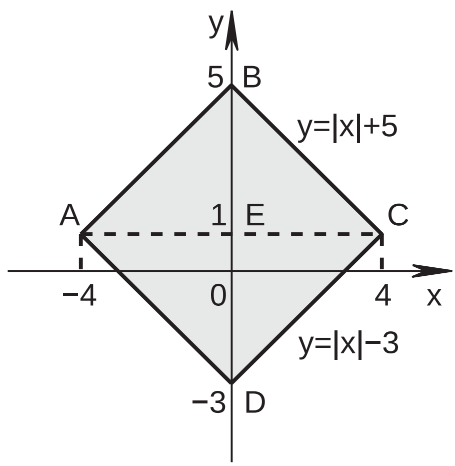
И д е я. Раскрывая второй модуль по определению, найти геометрическое место точек для каждого случая. Искомая фигура образуется из объединения соответствующих областей.

З а м е ч а н и е. В принципе, можно раскрывать оба модуля по определению независимо друг от друга, то есть рассмотреть четыре случая.

Р е ш е н и е. 1) Если $y \geq 1$, то $|x|+y-1 \leq 4 \iff y \leq -|x|+5$.
2) Если $y < 1$, то $|x|-y+1 \leq 4 \iff y \geq |x|-3$.

Построив в каждом из случаев задаваемую неравенством область, получим, что искомой фигурой является объединение двух треугольников – квадрат $ABCD$, где вершины имеют координаты (вычисляются непосредственно): $A(-4;1)$, $B(0;5)$, $C(4;1)$, $D(0;-3)$; точка $E(0;1)$ – центр симметрии;

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BE = AC\cdot BE = 8\cdot 4 = 32.$$



О т в е т. 32.

Задача 4. (Экон-88.4)

Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $2(2-x)\ge|y-x^2|+|y+x^2|$.

И д е я. Раскрыв модули по определению, построить на координатной плоскости соответствующие геометрические места точек и получить геометрическую плоскую фигуру, площадь которой считается стандартным образом.
У к а з а н и е. Удобно рассмотреть три промежутка: $y<-x^2$, $-x^2\le y\le x^2$, $y>x^2$, на каждом из которых строить соответствующее геометрическое место точек.
У к а з а н и е. Искомой фигурой является трапеция, основания которой параллельны оси Oy.

Р е ш е н и е. Раскроем модули по определению:

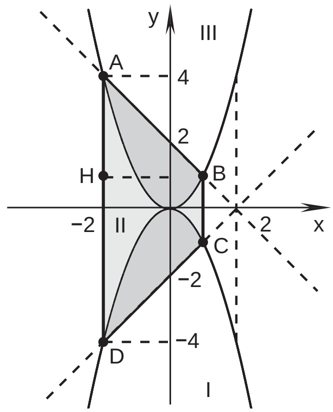
1) При $y<-x^2$ получим $4-2x\ge -y+x^2-y-x^2 \iff y\ge x-2$.

2) При $-x^2\le y<x^2$ получим $4-2x\ge -y+x^2+y+x^2 \iff x^2+x-2\le 0 \iff$ $\iff -2\le x\le 1$.

3) При $y\ge x^2$ получим $4-2x\ge y-x^2+y+x^2 \iff y\le -x+2$.

Искомой фигурой является трапеция $ABCD$ с вершинами $A(-2;4)$, $B(1;1)$, $C(1;-1)$, $D(-2;-4)$ и высотой BH, где т. $H(-2;1)$. Площадь трапеции равна

$$S=\frac{1}{2}(AD+BC)BH=\frac{1}{2}(2+8)\cdot 3=15,$$



Ответ. 15.

Задача 5. (Геол-80.5)

Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости следующими условиями $\begin{cases} \big||x-y|-|y-1|\big| = x-2y+1, \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1. \end{cases}$

Идея. Изобразив на координатной плоскости геометрические места точек, задаваемые каждым условием системы, получить плоскую геометрическую фигуру.
Указание. Неравенство системы задаёт на координатной плоскости круг единичного радиуса с центром в т. $(1;1)$.
Указание. При решении уравнения модули раскрыть по определению. Геометрическим местом точек, задаваемых этим уравнением, будет пара пересекающихся прямых и внутренняя область двух получающихся при этом углов.
Указание. Для вычисления искомой площади удобно перенести один из двух получившихся секторов и расположить его рядом со вторым.

Решение. Неравенство системы задаёт круг единичного радиуса с центром в т. $(1;1)$. В уравнении системы раскроем модули по определению:

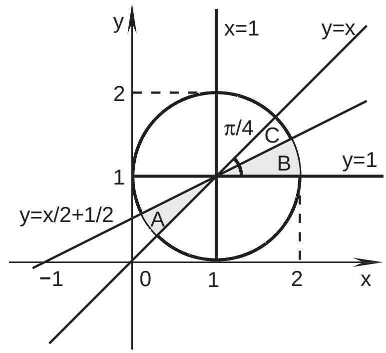
$$1)\ \begin{cases} x-y \ge 0, \\ y \ge 1, \\ |x-y-y+1| = x-2y+1; \end{cases} \iff \begin{cases} y \le x, \\ y \ge 1, \\ x-2y+1 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} y \le x, \\ y \ge 1, \\ y \le \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x-y \ge 0, \\ y < 1, \\ |x-y+y-1| = x-2y+1; \end{cases} \iff \begin{cases} y \le x, \\ y < 1, \\ |x-1| = x-2y+1; \end{cases} \iff \begin{cases} y \le x, \\ y < 1, \\ x < 1, \\ y = x. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x-y < 0, \\ y < 1, \\ |y-x+y-1| = x-2y+1; \end{cases} \iff \begin{cases} y > x, \\ y < 1, \\ x-2y+1 \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} y > x, \\ y < 1, \\ y \le \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

4) $\begin{cases} x - y < 0, \\ y - 1 \geq 0, \\ |y - x - y + 1| = x - 2y + 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x - y < 0, \\ 1 - y \leq 0, \\ |x - 1| = (x - y) + (1 - y); \end{cases} \iff \emptyset\,.$

Искомая фигура, задаваемая системой, состоит из двух секторов A и B, выделенных на чертеже. Площадь сектора A равна площади сектора C, так как их образующие углы вертикальны. Площадь фигуры равна площади сектора с углом $\dfrac{\pi}{4}$ внутри рассматриваемого круга единичного радиуса, то есть одной восьмой площади круга: $S = \dfrac{1}{8}\pi r^2 = \dfrac{\pi}{8}$.



Ответ. $\dfrac{\pi}{8}$.

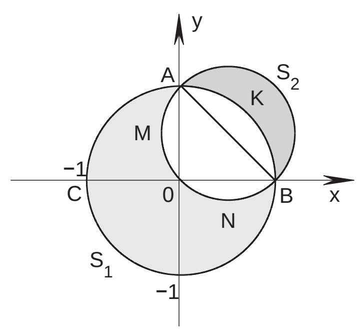
Задача 6. (Экон-91.5)

Найти площадь плоской фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию $\left(x^2 + y^2 - x - y\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right) \leq \ 0$.

Идея. Перейти к равносильной совокупности систем и изобразить на координатной плоскости геометрические места точек, задаваемых полученными условиями.

Указание. Перейти к равносильной совокупности систем, решения которых изобразить на координатной плоскости.

Указание. Геометрическим местом точек, удовлетворяющих неравенствам систем, является либо круг, либо внешняя область круга, включая границу.



Решение. Перейдём к равносильной совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 - x - y \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - x - y \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq \dfrac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Найдём площадь получившейся фигуры. Площадь круга радиуса $r_1 = 1$ равна $S_1 = \pi r_1^2 = \pi$. Площадь круга радиуса $r_2 = 1/\sqrt{2}$ равна $S_2 = \pi r_2^2 = \dfrac{\pi}{2}$. Площадь общей части кругов равна

$$S_{OMAKBN} = S_{\Delta AOB} + S_{OMA} + S_{OBN} + S_{AKB} =$$

$$= S_{\Delta AOB} + \left(\frac{S_2}{2} - S_{\Delta AOB}\right) + \left(\frac{S_1}{4} - S_{\Delta AOB}\right) = \frac{S_2}{2} + \frac{S_1}{4} - S_{\Delta AOB} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

В результате, искомая площадь равна

$$S = S_1 + S_2 - 2S_{OMAKBN} = \pi + \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{\pi}{2} - \pi + 1 = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + 1$.

Задача 7. (ИСАА-97.5)

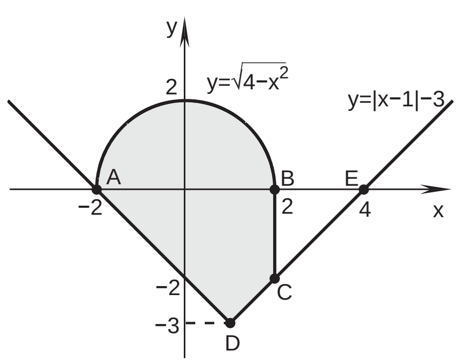
Найти площадь фигуры, заданной условиями $\begin{cases} y \le \sqrt{4 - x^2}, \\ y \ge |x - 1| - 3. \end{cases}$

Идея. Искомая фигура состоит из точек, лежащих выше графика функции $y = |x - 1| - 3$ и ниже верхней половины окружности $x^2 + y^2 = 4$.
Указание. Из условия существования радикала следует, что искомая фигура лежит в полосе $|x| \le 2$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство:

$$y \le \sqrt{4 - x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge 0, \\ y^2 \le 4 - x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0, \\ 4 - x^2 \ge 0; \end{cases} \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge 0, \\ x^2 + y^2 \le 4; \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0, \\ |x| \le 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Из второго неравенства системы следует, что искомая фигура состоит из точек, лежащих выше графика функции $y = |x - 1| - 3$.



Значит, искомая фигура состоит из верхнего полукруга и четырёхугольника $ABCD$, и её площадь равна:

$$S = \frac{\pi R^2}{2} + S_{ABCD} = 2\pi + S_{ADE} - S_{BEC} = 2\pi + 9 - 2 = 2\pi + 7.$$

Ответ. $2\pi + 7$.

Задача 8. (Геол-95(1).8)

Изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством

$$x^2 + y^2 + 6(x - |y|) \leq 0.$$

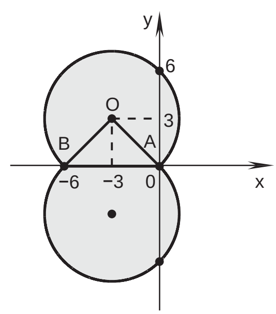
Найти площадь этой фигуры.

Идея. Так как переменная y входит в неравенство чётным образом, то можно сначала построить часть искомой фигуры в верхней полуплоскости, а потом отразить её в нижнюю полуплоскость симметрично относительно оси Ox.
Указание. При $y \geq 0$ исходное неравенство задаёт круг.

Решение. При $y \geq 0$ неравенство запишется в виде

$$x^2 + y^2 + 6(x - y) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+3)^2 + (y-3)^2 \leq 18.$$

То есть мы получили часть круга с центром в $(-3;3)$ радиуса $3\sqrt{2}$, лежащую в верхней полуплоскости. Окружность, задающая границу круга, пересекает ось Ox в точках $A(0;0)$ и $B(-6;0)$.



Так как переменная y входит в исходное неравенство чётным образом, искомое множество точек будет симметричным относительно оси Ox. Поскольку угол AOB прямой, площадь верхней половины фигуры равна

$$\frac{3}{4}\pi r^2 + S_{AOB} = \frac{27}{2}\pi + 9,$$

следовательно, площадь всей фигуры равна $27\pi + 18$.

Ответ. $27\pi + 18$.

Задача 9. (Почв-96(1).6)

Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $\log_{(x^2+y^2)}(x+y) > 1$.

Идея. Выписать совокупность двух систем, равносильную логарифмическому неравенству, и для каждой из них построить соответствующее множество точек.

У к а з а н и е. $\log_a b > 1 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < b < a; \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ b > a. \end{cases} \end{array}\right.$

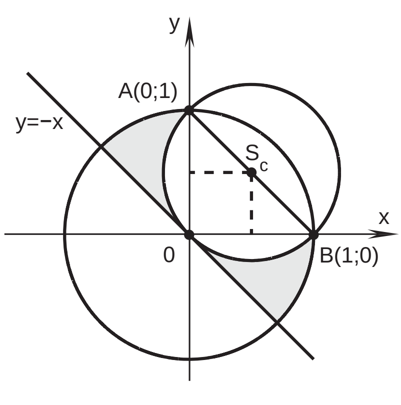
Р е ш е н и е. Запишем исходное неравенство в виде равносильной совокупности:

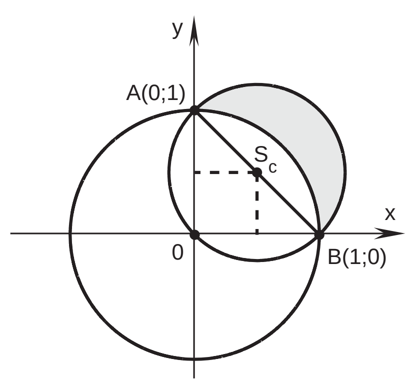
$$\log_{(x^2+y^2)}(x+y) > 1 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0 < x+y < x^2+y^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 > 1, \\ x+y > x^2+y^2; \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2 < 1, \\ y > -x, \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 > \dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 > 1, \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим окружность с центром в начале координат единичного радиуса с площадью $S_1 = \pi$ и окружность с центром в $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ радиуса $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ с площадью $S_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Окружности пересекаются в точках $A(0;1)$ и $B(1;0)$.

Первой системе удовлетворяют точки, которые лежат внутри окружности единичного радиуса, вне окружности радиуса $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и выше прямой $y = -x$.





Площадь этой области равна

$$\frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 - S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 - \left(\frac{1}{4}S_1 - S_{\Delta AOB}\right) = S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}.$$

Второй системе удовлетворяют точки, которые лежат вне окружности единичного радиуса и внутри окружности радиуса $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Площадь этой области равна

$$\frac{1}{2}S_2 - S_{\text{сегм}} = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{4}S_1 - S_{\Delta AOB}\right) = S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}.$$

В результате искомая площадь равна $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

Ответ. 1.

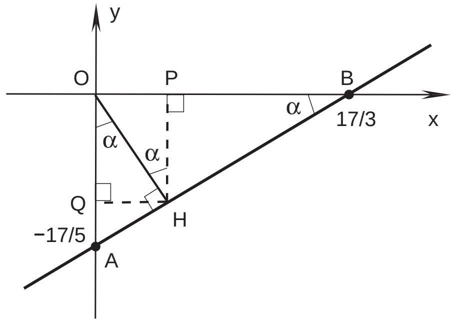
7.3. Использование графических иллюстраций при решении уравнений и неравенств

Задача 1. (ВМК-86.2)

Найти координаты точки, лежащей на прямой $3x - 5y = 17$ и наименее удалённой от начала координат.

Идея. Рассмотреть треугольник, вершинами которого являются начало координат и точки пересечения данной прямой с осями координат. Искомой точкой будет основание высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу этого треугольника.
Указание. Для того чтобы найти координаты точек пересечения прямой с осями координат, достаточно подставить в уравнение прямой вместо соответствующей координаты ноль и вычислить значение другой координаты.

Решение. Пусть O – начало координат, A – точка пересечения данной прямой с осью Oy, B – точка пересечения данной прямой с осью Ox. Для того чтобы найти координаты точек пересечения прямой с осями координат, достаточно подставить в уравнение прямой вместо соответствующей координаты ноль и вычислить значение другой координаты. Получим $A\left(0; -\dfrac{17}{5}\right)$, $B\left(\dfrac{17}{3}; 0\right)$.



Обозначим через α угол $\angle ABO$ и через H основание перпендикуляра, опущенного из точки O на отрезок AB. По теореме Пифагора из прямоугольного

ΔABO находим $AB = \dfrac{17\sqrt{34}}{15}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$ и

$$OH = OB \cdot \sin\alpha = \frac{17}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

Пусть P и Q – проекции точки H на оси координат. Получаем:

$$OP = OH \cdot \sin\alpha = \frac{\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3}{2}, \quad OQ = OH \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5}{2}.$$

Поскольку точка H лежит в четвёртой четверти, следовательно, её абсцисса положительна, а ордината отрицательна, то есть она имеет координаты $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$.

З а м е ч а н и е. Эту задачу можно решить другим способом. Поскольку высота OH треугольника AOB перпендикулярна основанию AB, а уравнение прямой содержащей отрезок AB нам известно $y = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{17}{5}$, то легко найти уравнение прямой, содержащей высоту OH. Эта прямая перпендикулярна исходной прямой и проходит через точку $O(0;0)$. Затем найти координаты точки пересечения этих двух прямых из линейной системы.

О т в е т. $\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$.

Задача 2. (Почв-74.4)

Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполняется для всех таких x, что $1 \le x \le 2$.

И д е я. Проставить на оси Ox нули числителя и знаменателя и применить метод интервалов.
У к а з а н и е. Сузить область изменения параметра a, использовав то, что исходное неравенство должно выполняться при $x = 1$ и $x = 2$.

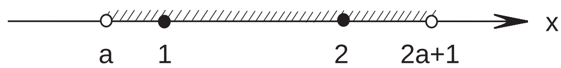
Р е ш е н и е. Точки $x = 2a+1$ и $x = a$ обращают в ноль числитель и знаменатель дроби соответственно. Для того, чтобы проставить их на оси Ox и применить метод интервалов, надо понять, какое из этих чисел лежит правее, а какое левее.

Так как исходное неравенство должно выполняться для всех $x \in [1;2]$, то оно должно выполняться при $x = 1$ и $x = 2$, то есть

$$\begin{cases} \dfrac{1-2a-1}{1-a} < 0, \\ \dfrac{2-2a-1}{2-a} < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a}{a-1} < 0, \\ \dfrac{2a-1}{a-2} < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \dfrac{1}{2} < a < 2; \end{cases} \iff \frac{1}{2} < a < 1.$$

Следовательно, искомые значения a лежат на интервале $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$, а при таких a число $x = a$ находится левее числа $x = 2a+1$ и

$$\frac{x-2a-1}{x-a} < 0 \quad \iff \quad x \in (a; 2a+1).$$



Но при $a \in \left(\frac{1}{2};1\right)$ точки $x = 1$ и $x = 2$ являются решениями исходного неравенства, следовательно, они лежат на интервале $(a;2a+1)$ и, следовательно, все точки, лежащие между ними, также лежат на этом интервале и являются решениями.

Ответ. $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Задача 3. (Псих-85.4)

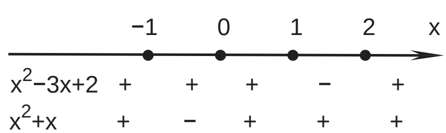
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = |x^2 + x| + |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

Идея. Найти нули подмодульных выражений, и на каждом из полученных промежутков найти наибольшее и наименьшее значения функции.
Указание. В соответствии с определением модуля и знаками подмодульных функций на соответствующих промежутках исходная функция представляется в виде:

$$y = \begin{cases} 2x^2 - 2x + 2, \quad \text{если} \quad x \in (-\infty;-1) \cup [0;1) \cup [2;+\infty), \\ -4x + 2, \quad \text{если} \quad x \in [-1;0), \\ 4x - 2, \quad \text{если} \quad x \in [1;2). \end{cases}$$

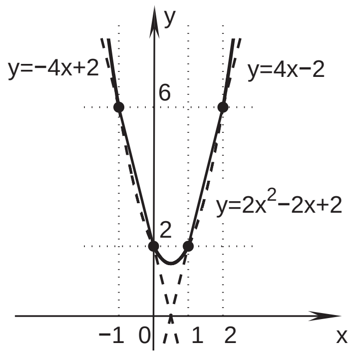
Указание. Рассматриваемая функция является объединением частей параболы и двух отрезков, поэтому наибольшее и наименьшее значения на соответствующих промежутках могут достигаться только в вершине параболы и на концах отрезков.

Решение. Проставим на числовой прямой знаки подмодульных выражений:



С учётом того, что $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$, нам надо рассмотреть три случая.

1) Если $x \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$, то $y = -x^2 - x + x^2 - 3x + 2 = -4x + 2$ – прямая, причём $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$, $y(0) = 2$.



2) Если $x \in [0;1]$, то $y = x^2 + x + x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 2x + 2$ – парабола, у которой координаты вершины $x_B = \dfrac{1}{2}$, $y_B = \dfrac{3}{2}$; $y(0) = y(1) = 2$.

3) Если $x \in \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$, то $y = x^2 + x - x^2 + 3x - 2 = 4x - 2$ – прямая, $y(1) = 2$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4$.

Наименьшее значение исходной функции достигается в вершине параболы и равно $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$, а наибольшее – на концах рассматриваемого отрезка, то есть $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4$.

Ответ. 4; $\dfrac{3}{2}$.

Задача 4. (Почв-95(2).5)

Найти все значения b, при которых система $\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ имеет два решения.

Идея. Построить на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих первому уравнению, и множество точек, удовлетворяющих второму уравнению. Исследовать количество точек пересечения этих множеств в зависимости от значения b.
Указание. Первое уравнение задаёт на координатной плоскости параболу, второе – окружность.

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

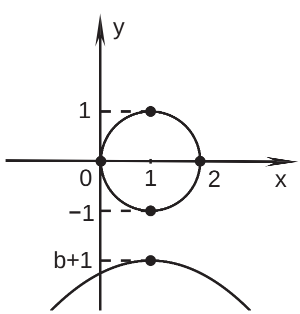
$$y = b + 1 - \frac{(x-1)^2}{4}.$$

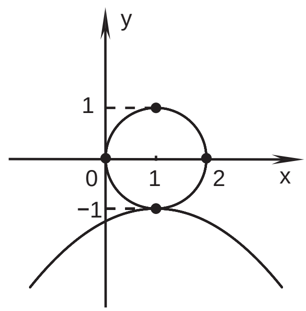
Это уравнение задаёт график параболы $y = -\dfrac{(x-1)^2}{4}$, сдвинутый по оси y на $b+1$. Второе уравнение системы можно записать в виде

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

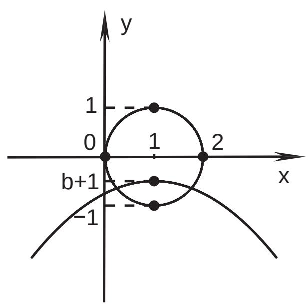
Оно задаёт окружность с центром в $(1;0)$ радиуса 1.

Построим на координатной плоскости параболу и окружность. Так как вершина параболы имеет координаты $(1; b+1)$, то при $b+1 < -1$ парабола располагается ниже окружности, и они не пересекаются (левый рисунок). При $b+1=-1$ графики имеют одну общую точку $(1;-1)$ (правый рисунок).

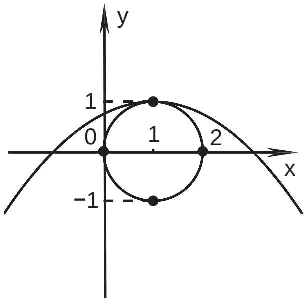


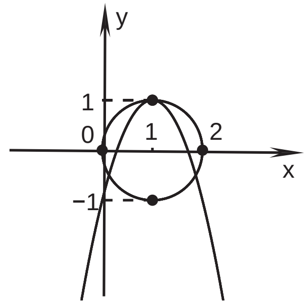


При $-1 < b+1 < 1$ графики пересекаются в двух точках.



Теперь определим количество точек пересечения при $b+1=1$, то есть $b=0$. Возможные варианты: либо одна точка пересечения (левый рисунок), либо три (правый рисунок).





Подставим $b = 0$ в исходную систему:

$$\begin{cases} 4y = 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x; \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = 4 - (x-1)^2, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1; \end{cases} \iff$$

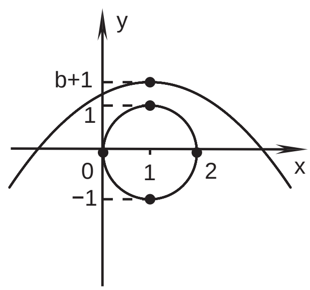
$$\iff \begin{cases} (x-1)^2 = 4 - 4y, \\ (x-1)^2 = 1 - y^2. \end{cases}$$

Приравняв правые части уравнений, получим квадратное уравнение для y:

$$y^2 - 4y + 3 = 0,$$

откуда $y = 1$ или $y = 3$. При $y = 1$ из второго уравнения системы следует, что $x = 1$. При $y = 3$ получаем $(x-1)^2 = -8$, то есть в этом случае решений нет. Следовательно, при $b = 0$ графики пересекаются только в одной точке, и система имеет только одно решение.

При $b > 0$ график параболы смещается вверх на b единиц, и общих точек с окружностью парабола уже не имеет.



Итак, система имеет два решения только при $b \in (-2; 0)$.

О т в е т. $(-2; 0)$.

Задача 5. (Хим-93(2).5)

Найти число решений уравнения $2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$.

И д е я. Построить на координатной плоскости Oxy графики левой и правой частей уравнения и исследовать наличие точек их пересечения.

У к а з а н и е. Для оценки левой части равенства использовать то, что $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$.

Р е ш е н и е. Обозначим

$$f(x) = 2 \cdot (2^x + 2^{-x}), \quad g(x) = 1 - 4x - x^2.$$

Функция $g(x)$ представляет собой параболу с направленными вниз ветвями и вершиной в точке $(-2; 5)$. Следовательно, $g(x) \leq 5$.

Поскольку $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$ и равенство достигается только при $a = 1$, получаем: $f(x) \geq 4$, причём минимум достигается в точке 0.

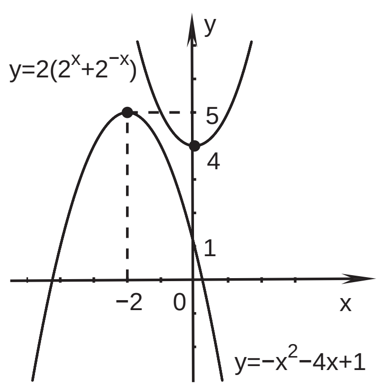
Покажем, что функция $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$ при $t > 0$ монотонна. Это исследование можно провести с помощью производной, однако производные не входят в программу по математике для поступающих в МГУ, и мы будем действовать по определению возрастания (убывания) функции на промежутке.

Рассмотрим числа t_1, t_2 $(0 < t_1 < t_2)$. Оценим разность значений функции h в этих точках:

$$h(t_2) - h(t_1) = (t_2 - t_1) + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right) = (t_2 - t_1) - \left(\frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2}\right) = (t_2 - t_1) \cdot \left(\frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 t_2}\right).$$

Видно, что если $0 < t_1 < t_2 \leq 1$, то $h(t_2) - h(t_1) < 0$; если же $1 \leq t_1 < t_2$, то $h(t_2) - h(t_1) > 0$.

Следовательно, функция $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty;\ 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$.



Сравним значения функций $f(x)$ и $g(x)$.

1) Рассмотрим $x \in (-\infty;\ -2]$. Тогда $f(x) \geq f(-2) = 8,5$, но $g(x) \leq 5$. Значит, на этом промежутке решений нет.

2) Если $x \in (-2;\ -1]$, то $f(x) \geq f(-1) = 5$, но $g(x) < 5$, следовательно, на этом промежутке решений также нет.

3) Если $x \in (-1; +\infty)$, то $f(x) \geq 4$, а $g(x) < 4$, следовательно, также нет решений.

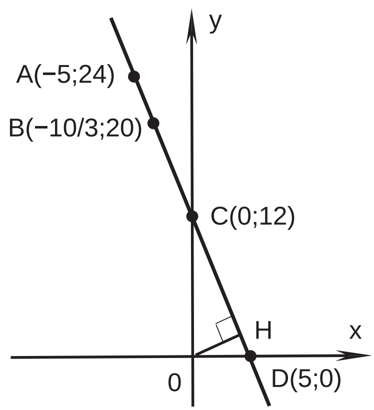
О т в е т. Нет решений.

Задача 6. (Геогр-00(1).5)

Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и $3\frac{1}{2}$ к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

Идея. Ввести прямоугольную систему координат с началом в точке, где находится метеостанция. Провести прямую через точки, где проводились измерения, и найти расстояние от начала координат до этой прямой.
Указание. Кратчайшим расстоянием будет высота, опущенная на гипотенузу, в соответствующем прямоугольном треугольнике.

Решение. Поместим метеостанцию в начало координат. Проведём ось Ox с запада на восток и ось Oy с юга на север. Согласно условию задачи первое измерение проводилось в точке $A(-5;24)$, второе – в точке $B\left(-\frac{10}{3};20\right)$.



Пусть циклон движется по прямой $y=kx+b$. Точки A и B лежат на этой прямой, следовательно,

$$\begin{cases} 24=k(-5)+b, \\ 20=k\left(-\dfrac{10}{3}\right)+b; \end{cases} \iff \begin{cases} k=-\dfrac{12}{5}, \\ b=12. \end{cases}$$

Полученная прямая $y=-\dfrac{12}{5}x+12$ пересекает оси координат в точках $C(0;12)$ и $D(5;0)$. Наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции – это высота OH в треугольнике OCD. Для того чтобы вычислить её длину, запишем площадь треугольника OCD двумя способами:

$$S=\frac{1}{2}OC\cdot OD=\frac{1}{2}OH\cdot CD \quad\Longrightarrow\quad OH=\frac{OC\cdot OD}{CD}=\frac{12\cdot 5}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{60}{13}.$$

Ответ. $\dfrac{60}{13}$.

Задача 7. (ВМК-82.5)

а) При всех значениях параметра a решить уравнение $|x+3|-a|x-1|=4$.

Идея. Перенести модуль с параметром в одну часть уравнения, все остальные слагаемые – в другую, изобразить графики обеих частей уравнения на координатной плоскости и исследовать их точки пересечения.

У к а з а н и е. Представить уравнение в виде $a|x-1| = |x+3|-4$, построить графики левой и правой частей на координатной плоскости.
У к а з а н и е. График функции $y = |x+3|-4$ получается из графика $y = |x|$ сдвигом по оси Ox влево на три единицы и по оси Oy вниз на четыре единицы.
У к а з а н и е. График функции $y = a|x-1|$ получается из графика $y = |x-1|$ изменением угловых коэффициентов образующих его лучей.
У к а з а н и е. Исследовать точки пересечения двух построенных графиков.

Р е ш е н и е. Приведём уравнение к виду

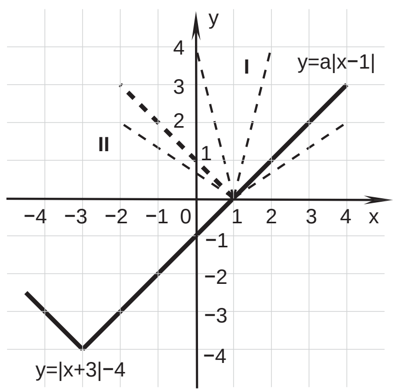
$$a|x-1| = |x+3|-4$$

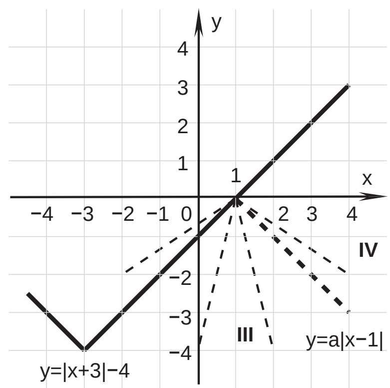
и построим графики левой и правой частей на координатной плоскости Oxy.

График $y = |x+3|-4$ получается из графика $y = |x|$ сдвигом влево по оси Ox на три единицы и вниз по оси Oy на четыре единицы.

График $y = a|x-1|$ получается из графика $y = |x-1|$ изменением угловых коэффициентов лучей, исходящих из точки (1;0).

Рассмотрим все возможные значения параметра a.





- При $a > 1$ график $y = a|x-1|$ лежит в верхней полуплоскости (ситуация I) и имеет только одну общую точку со вторым графиком: $x = 1$.

- При $a = 1$ правая ветвь графика $y = a|x-1|$ проходит ровно по лучу другого графика, то есть решениями уравнения являются все $x \geq 1$. Левые ветви графиков параллельны.

- При $-1 < a < 1$ график $y = a|x-1|$ имеет со вторым графиком две общие точки (ситуация II и IV) x_1 и x_2, причём $x_1 = 1$, а для вычисления x_2 надо раскрыть все модули в исходном уравнении с учётом того, что $x_2 < -3$:

$$-x-3-4 = a(1-x) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{a+7}{a-1}.$$

- При $a = -1$ левая ветвь графика $y = a|x-1|$ проходит ровно по части луча второго графика при $-3 \leq x \leq 1$, то есть все они являются решениями.

- При $a < -1$ график $y = a|x-1|$ целиком лежит в нижней полуплоскости и имеет (ситуация III) с другим графиком одну общую точку: $x = 1$.

Объединив полученные результаты, получим ответ.

Ответ. Если $a < -1$ или $a > 1$, то $x = 1$; если $a \in (-1;1)$, то $x = 1$ и $x = \dfrac{a+7}{a-1}$; если $a = -1$, то $x \in [-3;1]$; если $a = 1$, то $x \in [1;+\infty)$.

Задача 8. (Экон.М-96.6)

При каких p площадь фигуры, заданной условием $|2x+y| + |x-y+3| \le p$, равна 24?

Идея. Определить множества точек (x,y), в которых подмодульные выражения обращаются в ноль, изобразить решение неравенства на координатной плоскости и вывести формулу для вычисления площади построенной фигуры.
Указание. Множества точек (x,y), в которых подмодульные выражения обращаются в ноль есть две прямые, разбивающие плоскость на 4 области.
Указание. Решить неравенство на каждой из полученных областей и изобразить решение на координатной плоскости.
Указание. Выписать формулу для вычисления площади полученной фигуры и определить значение параметра, удовлетворяющее условию задачи.

Решение. Первое подмодульное выражение обращаются в ноль при $y = -2x$, второе – при $y = x+3$. Эти прямые пересекаются в точке $O(-1;2)$ и разбивают координатную плоскость на 4 области. Раскроем модули и решим неравенство $|y+2x| + |y-x-3| \le p$ на каждой из этих областей. Заметим, что решение существует только при $p > 0$.

1) В области $\begin{cases} y \ge -2x, \\ y \ge x+3; \end{cases}$ неравенство принимает вид

$$y + 2x + y - x - 3 \le p \quad \Longleftrightarrow \quad y \le -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{p}{2},$$

в этом случае мы получаем точки, лежащие внутри треугольника BOC.

2) В области $\begin{cases} y \ge -2x, \\ y \le x+3; \end{cases}$ неравенство принимает вид

$$y + 2x - y + x + 3 \le p \quad \Longleftrightarrow \quad x \le \frac{p}{3} - 1,$$

в этом случае мы получаем точки, лежащие внутри треугольника COD.

3) В области $\begin{cases} y \le -2x, \\ y \le x+3; \end{cases}$ неравенство принимает вид

$$-y - 2x - y + x + 3 \le p \quad \Longleftrightarrow \quad y \ge -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} - \frac{p}{2},$$

и мы получаем точки, лежащие внутри треугольника AOD.

4) В области $\begin{cases} y \le -2x, \\ y \ge x+3; \end{cases}$ неравенство принимает вид

$$-y - 2x + y - x - 3 \le p \iff x \ge -\frac{p}{3} - 1,$$

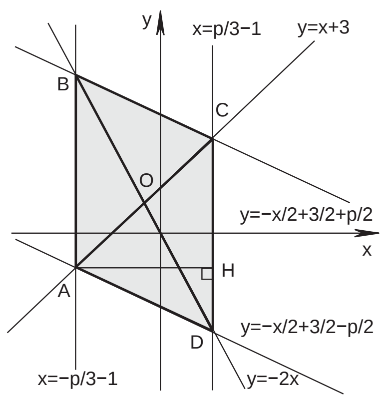
в этом случае мы получаем точки, лежащие внутри треугольника AOB.

Полученные треугольники склеиваются в параллелограмм $ABCD$. Найдём его высоту через абсциссы точек A и D:

$$AH = x_D - x_A = \left(\frac{p}{3} - 1\right) - \left(-\frac{p}{3} - 1\right) = \frac{2p}{3}.$$

Теперь выразим длину основания CD через координаты точек C и D:

$$CD = y_C - y_D = (x_C + 3) - (-2x_D) = 3x_C + 3 = 3\left(\frac{p}{3} - 1\right) + 3 = p.$$



В результате площадь параллелограмма

$$S = AH \cdot CD = \frac{2p^2}{3} = 24 \implies p = 6.$$

Ответ. 6.

8. Элементы математического анализа

8.1. Производная, её геометрический и физический смысл. Производные элементарных функций, основные правила дифференцирования функций

Задача 1. (ЕГЭ)

Найдите значение производной функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

Идея. Найти $y'(x)$, используя табличные производные и то, что $(f+g)' = f'+g'$.
Указание. Воспользоваться формулой $(f+g)' = f'+g'$:
$y'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)'$.
Указание. Использовать формулы производных элементарных функций:
$(x^2)' = 2x$, $(\sin x)' = \cos x$.

Решение. $y'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$, следовательно, $y'(\pi) = 2\pi + \cos\pi = 2\pi - 1$.

Ответ. $2\pi - 1$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Найдите $f'(1)$, если $f(x) = \dfrac{5}{x} + 4e^x$.

Идея. Найти $f'(x)$, используя табличные производные и то, что $(f+g)' = f'+g'$, $(Cf)' = Cf'$.
Указание. Воспользоваться формулами $(f+g)' = f'+g'$ и $(Cf)' = Cf'$:
$\left(\dfrac{5}{x} + 4e^x\right)' = \left(\dfrac{5}{x}\right)' + 4(e^x)'$.
Указание. Использовать формулы производных элементарных функций:
$(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$, $(e^x)' = e^x$.

Решение. $f'(x) = \left(\dfrac{5}{x} + 4e^x\right)' = \left(\dfrac{5}{x}\right)' + 4(e^x)' = -\dfrac{5}{x^2} + 4e^x$, следовательно, $f'(1) = -5 + 4e$.

Ответ. $-5 + 4e$.

Задача 3. (ЕГЭ)

Найдите скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{t^2}{4}$, в момент времени $t_0 = 4$.

Идея. Скорость точки в момент времени t_0 есть значение производной $x'(t_0)$.
Указание. $x'(t) = \dfrac{t}{2}$.

Р е ш е н и е. Так как скорость точки в момент времени t_0 равна $x'(t_0)$, то нам надо вычислить $x'(4)$. Получаем $x'(t) = \left(\dfrac{t^2}{4}\right)' = \dfrac{2t}{4} = \dfrac{t}{2}$ и $x'(4) = \dfrac{4}{2} = 2$.

О т в е т. 2.

Задача 4. (ЕГЭ)

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (3x^2+1)(3x^2-1)$.

И д е я. Найти $f'(x)$, предварительно упростив выражение для $f(x)$ с помощью формулы разности квадратов.
У к а з а н и е. Формула разности квадратов: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
У к а з а н и е. $f'(x) = (9x^4-1)' = 36x^3$.

Р е ш е н и е. $f'(x) = \big((3x^2+1)(3x^2-1)\big)' = (9x^4-1)' = 36x^3$, следовательно, $f'(x) = 0 \iff 36x^3 = 0 \iff x = 0$.

О т в е т. 0.

Задача 5. (ЕГЭ)

Найдите значение производной функции $y = x^2e^x$ в точке $x_0 = 1$.

И д е я. Найти $y'(x)$, используя табличные производные и то, что $(fg)' = f'g+fg'$.
У к а з а н и е. Использовать формулу $(fg)' = f'g+fg'$: $\big(x^2e^x\big)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)'$.
У к а з а н и е. Использовать формулы производных элементарных функций:
$(x^2)' = 2x$, $(e^x)' = e^x$.

Р е ш е н и е. $y'(x) = \big(x^2e^x\big)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x$, следовательно, $y'(1) = 3e$.

О т в е т. $3e$.

Задача 6. (ЕГЭ)

Найдите значение производной функции $y = x\ln x$ в точке $x_0 = e$.

И д е я. Найти $y'(x)$, используя табличные производные и то, что $(fg)' = f'g+fg'$.
У к а з а н и е. Использовать формулу $(fg)' = f'g+fg'$:
$(x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)'$.
У к а з а н и е. Использовать формулы производных элементарных функций:
$(x)' = 1$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. $y'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$, следовательно, $y'(e) = \ln e + 1 = 2$.

О т в е т. 2.

Задача 7. (ЕГЭ)

Найдите значение производной функции $y = \dfrac{2-x}{x}$ в точке $x_0 = 0,5$.

Идея. Найти $y'(x)$, используя табличные производные и то, что

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Указание. Использовать формулу $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$:
$\left(\dfrac{2-x}{x}\right)' = \dfrac{(2-x)'x - (2-x)(x)'}{x^2}$.

Решение. $y'(x) = \left(\dfrac{2-x}{x}\right)' = \dfrac{(2-x)'x - (2-x)(x)'}{x^2} = \dfrac{-x-(2-x)}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2}$,
следовательно, $y'(0,5) = -\dfrac{2}{0,5^2} = -8$.

Ответ. -8.

Задача 8. (ЕГЭ)

Найдите значение производной функции $y = \dfrac{e^x}{x}$ в точке $x_0 = 2$.

Идея. Найти $y'(x)$, используя табличные производные и то, что

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Указание. Использовать формулу $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$: $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)' = \dfrac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2}$.

Решение. $y' = \left(\dfrac{e^x}{x}\right)' = \dfrac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \dfrac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x \cdot \dfrac{x-1}{x^2}$, следовательно,
$y'(2) = e^2 \cdot \dfrac{2-1}{2^2} = 0,25e^2$.

Ответ. $0,25e^2$.

Задача 9. (ЕГЭ)

Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $y = 4x^3 - 6x^2 + 9$ через точку с абсциссой $x_0 = 1$.

Идея. Угловой коэффициент касательной равен $y'(x_0)$.

Указание. $\left(4x^3-6x^2+9\right)'=4(x^3)'-6(x^2)'+9'=12x^2-12x$.

Решение. Так как $y'=\left(4x^3-6x^2+9\right)'=4(x^3)'-6(x^2)'+9'=12x^2-12x$, то угловой коэффициент касательной равен $y'(1)=12-12=0$.

Ответ. 0.

Задача 10. (ЕГЭ)

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=3\sin x+12x$ в точке с абсциссой $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$.

Идея. Угловой коэффициент касательной равен $y'(x_0)$.
Указание. $(3\sin x+12x)'=3(\sin x)'+12x'=3\cos x+12$.

Решение. Так как $y'=(3\sin x+12x)'=3(\sin x)'+12x'=3\cos x+12$, то угловой коэффициент касательной равен $y'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=12$.

Ответ. 12.

Задача 11. (ЕГЭ)

Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $y=-\dfrac{4}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.

Идея. Тангенс угла наклона касательной равен $y'(x_0)$.
Указание. $\left(-\dfrac{4}{x}\right)'=-4\left(\dfrac{1}{x}\right)'=4\cdot\dfrac{1}{x^2}$.

Решение. Так как $y'=\left(-\dfrac{4}{x}\right)'=-4\left(\dfrac{1}{x}\right)'=4\cdot\dfrac{1}{x^2}$, то тангенс угла наклона касательной равен $y'(-2)=4\cdot\dfrac{1}{(-2)^2}=1$.

Ответ. 1.

8.2. Исследование функций с помощью производной

Задача 1. (ЕГЭ)

Найдите максимум функции $y=-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+2x+8\dfrac{5}{6}$.

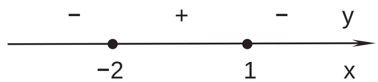
Идея. При переходе через точку максимума производная меняет знак с плюса на минус.
Указание. Найти нули функции $y'(x)$ и исследовать смену знаков при переходе через них.

Указание. $y'(x) = -x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2)$.

Решение. Вычислим производную функции y:

$$y'(x) = -x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2).$$

Отметим нули и знаки производной на оси Ox.



При переходе через точку $x = -2$ производная меняет знак с минуса на плюс, то есть сама функция до $x = -2$ убывает, а после – возрастает. Следовательно, точка $x = -2$ является точкой минимума.

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, то есть сама функция до $x = 1$ возрастает, а после – убывает. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой максимума. Сам максимум равен $y(1) = 10$.

Ответ. 10.

Задача 2. (ЕГЭ)

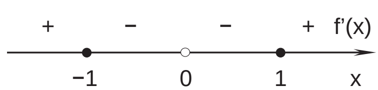
Найдите минимум функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Идея. При переходе через точку минимума производная меняет знак с минуса на плюс.
Указание. Найти нули числителя и знаменателя функции $f'(x)$ и исследовать смену знаков при переходе через них.
Указание. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

Решение. Производная

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Отметим нули числителя и знаменателя и знаки производной на оси Ox.



В точке $x = 1$ производная обращается в ноль, при переходе через $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, это точка минимума. Сам минимум равен $f(1) = 2$.

Ответ. 2.

Замечание. То, что минимум $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ равен двум, можно было получить из оценки суммы двух взаимно обратных величин $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \leq 2$ без привлечения производной.

Задача 3. (ЕГЭ)

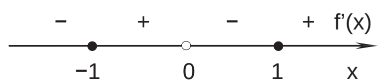
Найдите минимум функции $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2$.

Идея. При переходе через точку минимума производная меняет знак с минуса на плюс.
Указание. Найти нули числителя и знаменателя функции $f'(x)$ и исследовать смену знаков при переходе через них.
Указание. $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3} = 2\dfrac{x^4-1}{x^3} = 2\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}$.

Решение. Производная равна

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 2\frac{x^4-1}{x^3} = 2\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}.$$

Отметим нули числителя и знаменателя и знаки производной на оси Ox.



В точках $x = \pm 1$ производная обращается в ноль, при переходе через эти точки производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, это точки минимума. Сам минимум равен $f(\pm 1) = 0$.

Ответ. 0.

Замечание. Минимум можно было найти без привлечения производной. Например, используя результат предыдущей задачи или заметив, что функция является полным квадратом $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$.

Задача 4. (ЕГЭ)

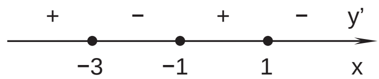
Найдите минимум функции $y = 5\dfrac{3}{4} + 3x + \dfrac{x^2}{2} - x^3 - \dfrac{x^4}{4}$.

Идея. При переходе через точку минимума производная меняет знак с минуса на плюс.
Указание. Найти нули числителя и знаменателя функции $y'(x)$ и исследовать смену знаков при переходе через них.
Указание. $y' = 3 + x - 3x^2 - x^3 = (3+x)(1-x^2)$.

Решение. Вычислим производную функции y:

$$y' = 3 + x - 3x^2 - x^3 = (3+x) - x^2(3+x) = (3+x)(1-x^2)$$

Отметим нули и знаки производной на оси Ox.



При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то есть сама функция до $x = -1$ убывает, а после – возрастает. Следовательно, точка $x = -1$ является точкой минимума. Сам минимум равен $y(-1) = 4$.

Ответ. 4.

Задача 5. (ЕГЭ)

При каком наибольшем значении b функция $f(x) = x^3 + bx^2 + 3bx - 1$ возрастает на всей числовой прямой?

Идея. Если производная функции определена на всей числовой прямой и везде, кроме конечного числа точек, положительна, то функция возрастает на всей числовой прямой.
Указание. Найти значения b, при которых $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Указание. $f'(x) = 3x^2 + 2bx + 3b$.

Решение. Производная равна $f'(x) = 3x^2 + 2bx + 3b$. Рассмотрим $\dfrac{D}{4} = b^2 - 9b$.

При $b \in (0; 9)$ дискриминант отрицателен и, следовательно, $f'(x) > 0$ при всех x, то есть $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

При $b = 0$ и $b = 9$ дискриминант равен нулю и производная обращается в ноль в единственной точке. В остальных точках она положительна. Но если производная функции определена на всей числовой прямой и везде, кроме конечного числа точек, положительна, то функция возрастает на всей числовой прямой.

При остальных значениях b дискриминант положителен, производная обращается в ноль в двух точках, причём между ними она отрицательна, следовательно, функция убывает.

В результате, только при $b \in [0; 9]$ функция возрастает на всей числовой прямой; наибольшее значение b равно 9.

Ответ. 9.

Задача 6. (ЕГЭ)

При каком наибольшем значении m функция $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3 + mx^2 - 4mx + 3$ убывает на всей числовой прямой?

Идея. Если производная функции определена на всей числовой прямой и везде, кроме конечного числа точек, отрицательна, то функция убывает на всей числовой прямой.
Указание. Найти значения m, при которых $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Указание. $f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 2mx - 4m$.

Решение. Производная равна $f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 2mx - 4m$.

Рассмотрим $D/4 = m^2 - 6m$. Условие убывания кубической функции на всей числовой прямой равносильно условию $f'(x) \le 0$, которое, в свою очередь, равносильно условию $D/4 \le 0$. Следовательно, искомые значения $m \in [0; 6]$, наибольшее значение равно 6.

Ответ. 6.

Задача 7. (ЕГЭ)

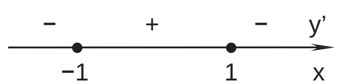
Найдите длину промежутка возрастания функции $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$.

Идея. Определить промежуток возрастания функции с помощью исследования знака производной.
Указание. Найти длину промежутка, где $y'(x) > 0$.
Указание. $y' = \dfrac{5-5x^2}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Производная равна

$$y' = \frac{(5x)'(x^2+1) - 5x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{5(x^2+1) - 5x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{5-5x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Отметим нули и знаки производной на оси Ox.



На интервале $(-1; 1)$ производная положительна. Следовательно, промежуток возрастания функции имеет длину 2.

Ответ. 2.

Задача 8. (ЕГЭ)

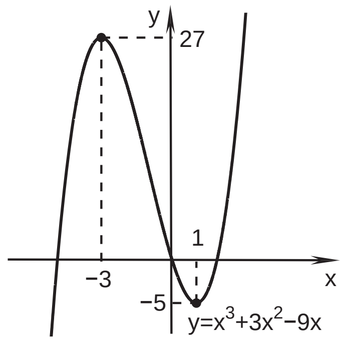
При каком натуральном значении параметра a уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$ имеет ровно два корня?

Идея. Построить график функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ и определить, при каком значении a прямая $y = a$ пересекает его ровно в двух точках.
Указание. Максимум и минимум функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ можно вычислить с помощью производной.

Решение. Построим график функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x$. Приравняв производную к нулю, найдём точки минимума и максимума функции:

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3) = 0.$$

Точка $x = -3$ является точкой максимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с плюса на минус. Точка $x = 1$ является точкой минимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с минуса на плюс.



Функция $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ принимает каждое из значений $a = y(-3) = 27$ и $a = y(1) = -5$ ровно в двух точках. Все остальные значения функция принимает либо один, либо три раза. Так как нас интересуют натуральные значения параметра a, подходит только $a = 27$.

Ответ. 27.

Задача 9. (ЕГЭ)

При каком наименьшем целом значении параметра p уравнение $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x = p$ имеет 3 корня?

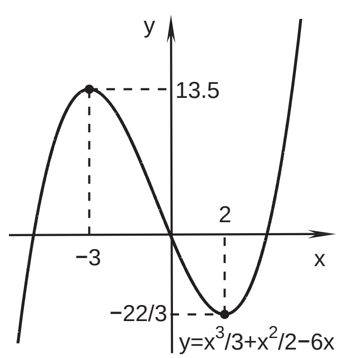
Идея. Построить график функции $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$ и выяснить, при каком значении p прямая $y = p$ пересекает его ровно в трёх точках.

Указание. Максимум и минимум функции $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$ можно вычислить с помощью производной.

Решение. Построим график функции $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$. Приравняем производную к нулю:

$$y' = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3) = 0.$$

Точка $x = -3$ является точкой максимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с плюса на минус. Точка $x = 2$ является точкой минимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с минуса на плюс.



Функция $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x$ принимает все значения

$$p \in (y(2); y(-3)) = \left(-7\frac{1}{3}; 13,5\right)$$

ровно в трёх точках. Так как нас интересует наименьшее целое значение параметра p, подходит $p = -7$.

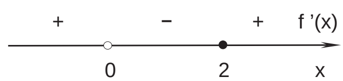
Ответ. -7.

Задача 10. (ЕГЭ)

Найдите середину промежутка убывания функции $f(x) = x - 2\ln x$.

Идея. Определить промежуток убывания функции с помощью исследования знака производной.
Указание. Найти промежуток, где $f'(x) < 0$.
Указание. $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$.

Решение. Производная равна $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$. Отметим нули числителя и знаменателя и знаки производной на числовой оси.



На интервале $(0; 2)$ производная отрицательна; следовательно, это есть промежуток убывания функции. Серединой этого промежутка является 1.

Ответ. 1.

Задача 11. (ЕГЭ)

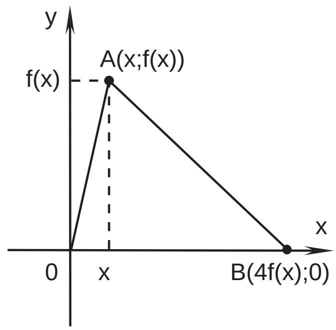
Точка A лежит на графике функции $y = f(x)$, точка B – на оси Ox, и её абсцисса в четыре раза больше ординаты точки A. Найдите наибольшее значение площади треугольника AOB, где точка O – начало координат,

$$f(x) = \sqrt{7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x}, \quad \frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{9\pi}{8}.$$

Идея. Представить площадь треугольника AOB в виде функции от x и с помощью производной найти её максимум.

Указание. Площадь $S_{AOB} = \dfrac{1}{2}OB\cdot h$, где h – высота, опущенная из вершины A на основание OB.
Указание. $S_{AOB} = \dfrac{1}{2}OB \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 4f(x) \cdot f(x) = 2f^2(x)$.

Решение. Рассмотрим на графике функции $f(x) = \sqrt{7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x}$ точку $A(x; f(x))$ и точку $B(4f(x); 0)$ на оси Ox.



Площадь треугольника AOB равна

$$S = \frac{1}{2}OB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4f(x) \cdot f(x) = 2f^2(x) = 2(7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x).$$

Вычислим нули производной:

$$S' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3\cos x - 3\cos x + (3x+1)\sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3x+1)\sin x = 0.$$

На отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{8}\right]$ лежит только один корень $x = \pi$. Точка $x = \pi$ является точкой максимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с плюса на минус.

Итак, наибольшее значение площади треугольника AOB равно

$$S(\pi) = 2(7 + (3\pi + 1)) = 16 + 6\pi.$$

Ответ. $16 + 6\pi$.

Задача 12. (ЕГЭ)

Требуется разместить на земле участок $ABCDEFGH$ площадью 1800 м^2, состоящий из трёх прямоугольных частей и имеющий форму, изображённую на рисунке, где $FG = EF = 10$ м, $BC = 15$ м и $CD \geq 40$ м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, LH и CD, при которых периметр является наименьшим.

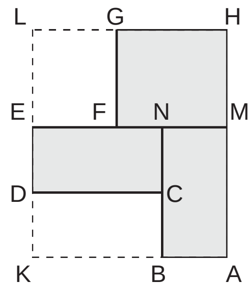
Идея. Представить периметр участка в виде функции от какой-либо переменной и с помощью производной найти её минимум.
Указание. Если обозначить $KL = x$, $LH = y$ и $CD = z$, тогда периметр участка равен $P = 2(x+y)$, а площадь участка равна $S = xy - 10 \cdot 10 - 15 \cdot z$.

Решение. Пусть $KL = x$, $LH = y$ и $CD = z$. Так как площадь участка равна 1800 м^2 и по условию задачи $z \geq 40$, то

$$1800 = xy - 10 \cdot 10 - 15 \cdot z \Longleftrightarrow xy = 1900 + 15z \geq 2500.$$

Следовательно, $y \geq \frac{2500}{x}$, и периметр участка

$$P = 2(x+y) \geq 2\left(x + \frac{2500}{x}\right).$$



Рассмотрим функцию $f(x) = x + \dfrac{2500}{x}$ и найдем её минимум при $x > 0$. Производная
$$f'(x) = 1 - \frac{2500}{x^2} = \frac{(x-50)(x+50)}{x^2}$$
обращается в ноль при $x = 50$, причём левее этой точки она отрицательна, а правее – положительна, следовательно, это точка минимума и $P \geq 2f(50) = 200$. Это минимальное значение достигается при $x = 50$, $y = 50$, $z = 40$.

О т в е т. 200, 50, 50, 40 м.

8.3. Первообразные элементарных функций, основные правила нахождения первообразных. Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной

Задача 1. (ЕГЭ)

Укажите первообразную функции $f(x) = x + \cos x$.

И д е я. Найти первообразную $F(x)$, используя табличные первообразные и основные правила нахождения первообразных.

У к а з а н и е. Функция $F_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$ является первообразной функции $f_1(x) = x$, а функция $F_2(x) = \sin x$ – первообразной функции $f_2(x) = \cos x$.

Р е ш е н и е. Так как функция $F_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$ является первообразной функции $f_1(x) = x$, а функция $F_2(x) = \sin x$ – первообразной функции $f_2(x) = \cos x$, то искомая первообразная равна $F(x) = F_1(x) + F_2(x) = \dfrac{x^2}{2} + \sin x$.

О т в е т. $\dfrac{x^2}{2} + \sin x$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Укажите первообразную функции $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Идея. Найти первообразную $F(x)$, используя табличные первообразные и основные правила нахождения первообразных.
Указание. Функция $F_1(x) = x^2$ является первообразной функции $f_1(x) = 2x$, а функция $F_2(x) = \ln x$ – первообразной функции $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Так как функция $F_1(x) = x^2$ является первообразной функции $f_1(x) = 2x$, а функция $F_2(x) = \ln x$ – первообразной функции $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, то искомая первообразная равна $F(x) = F_1(x) + F_2(x) = x^2 + \ln x$.

Ответ. $x^2 + \ln x$.

Задача 3. (ЕГЭ)

Укажите первообразную функции $f(x) = 2 - e^x$.

Идея. Найти первообразную $F(x)$, используя табличные первообразные и основные правила нахождения первообразных.
Указание. Функция $F_1(x) = 2x$ является первообразной для $f_1(x) = 2$, а функция $F_2(x) = e^x$ – первообразной функции $f_2(x) = e^x$.

Решение. Так как функция $F_1(x) = 2x$ является первообразной для $f_1(x) = 2$, а функция $F_2(x) = e^x$ – первообразной функции $f_2(x) = e^x$, то искомая первообразная равна $F(x) = F_1(x) - F_2(x) = 2x - e^x$.

Ответ. $2x - e^x$.

Задача 4. (ЕГЭ)

Найти первообразную F функции $f(x) = e^x + \cos x$, если известно, что $F(0) = -1$.

Идея. Определить общий вид первообразной $F(x)$, константу найти из условия $F(0) = -1$.
Указание. $F(x) = e^x + \sin x + C$, константу найти из условия $F(0) = -1$.

Решение. Так как $F(x) = e^x + \sin x + C$, то

$$F(0) = -1 \iff e^0 - \sin 0 + C = -1 \iff 1 - 0 + C = -1 \iff C = -2$$

и, следовательно, $F(x) = e^x + \sin x - 2$.

Ответ. $e^x + \sin x - 2$.

Задача 5. (ЕГЭ)

Известно, что $F(x)$ – первообразная функции $f(x) = -18x^2 - 7$ и $F(0) = 0$. Найдите $F(1)$.

Идея. Определить общий вид первообразной $F(x)$, константу найти из условия $F(0) = 0$.

Указание. $F(x) = -6x^3 - 7x + C$, константу найти из условия $F(0) = 0$.

Решение. Так как $F(x) = -6x^3 - 7x + C$, то $F(0) = 0 \iff C = 0$. Следовательно, $F(x) = -6x^3 - 7x$ и $F(1) = -6 - 7 = -13$.

Ответ. -13.

Задача 6. (ЕГЭ)

Для функции $f(x) = 2\cos x$ укажите первообразную F, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

Идея. Определить общий вид первообразной $F(x)$, константу найти из условия $F(\pi/2) = 0$.
Указание. $F(x) = 2\sin x + C$, константу найти из условия $F(\pi/2) = 0$.

Решение. Первообразная $F(x) = 2\sin x + C$. Так как график функции $F(x)$ проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$, то выполняется равенство

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \iff \quad 2\sin\frac{\pi}{2} + C = 0 \quad \iff \quad 2 + C = 0,$$

откуда $C = -2$ и, следовательно, $F(x) = 2\sin x - 2$.

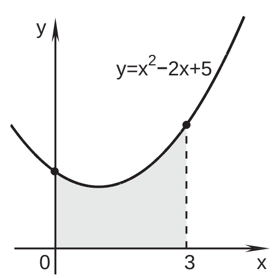
Ответ. $2\sin x - 2$.

Задача 7. (ЕГЭ)

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 5$; $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$.

Идея. Площадь криволинейной трапеции есть приращение первообразной.
Указание. Площадь равна $S = F(3) - F(0)$, где $F(x)$ – первообразная функции $y(x)$.

Решение. Так как первообразная $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5x$, то искомая площадь равна $S = F(3) - F(0) = (9 - 9 + 15) - 0 = 15$.



Ответ. 15.

Задача 8. (ЕГЭ)

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x}$ и $y = \dfrac{3}{4}x + 2\dfrac{1}{4}$.

Идея. Площадь искомой фигуры есть разность площадей двух криволинейных трапеций.

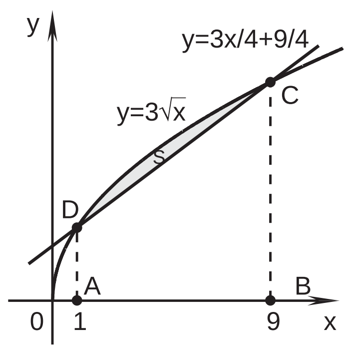
Указание. Площадь каждой из криволинейных трапеций есть приращение соответствующей первообразной.

Указание. Найти точки пересечения графиков функций $y = 3\sqrt{x}$ и $y = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{9}{4}$.

Указание. $F_1(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$ и $F_2(x) = \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{9}{4}x$ соответственно – первообразные функций $y_1(x) = 3\sqrt{x}$ и $y_2(x) = \dfrac{3}{4}x + 2\dfrac{1}{4}$.

Решение. Решив систему из двух уравнений $y = 3\sqrt{x}$ и $y = \dfrac{3}{4}x + 2\dfrac{1}{4}$, получим абсциссы точек пересечения этих функций: $x = 1$ и $x = 9$.

Пусть S_1 – площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = 3\sqrt{x}$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 9$.



Тогда площадь искомой фигуры S есть разность площадей этой криволинейной трапеции и трапеции $ABCD$:

$$S = S_1 - S_{ABCD} = (F_1(9) - F_1(1)) - (F_2(9) - F_2(1)),$$

где $F_1(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$ и $F_2(x) = \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{9}{4}x$ – первообразные функций $y_1(x) = 3\sqrt{x}$ и $y_2(x) = \dfrac{3}{4}x + 2\dfrac{1}{4}$. Следовательно, $S = 52 - 48 = 4$.

Замечание. Можно было сразу искать площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ как приращение первообразной $F(x)$ функции $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$.

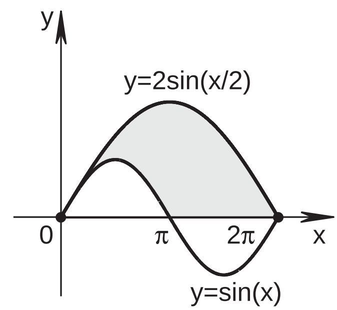
Ответ. 4.

Задача 9. (ЕГЭ)

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sin\frac{1}{2}x$, $y = \sin x$, $y = 0$ при $0 \le x \le 2\pi$.

Идея. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (где $y_1(x) \ge y_2(x)$) есть приращение первообразной функции $f(x) = y_1(x) - y_2(x)$.

Указание. Рассмотреть отдельно отрезки $[0;\pi]$ и $[\pi;2\pi]$.



Решение. Представим искомую площадь S в виде суммы площадей S_1 (при $x \in [0;\pi]$) и S_2 (при $x \in [\pi;2\pi]$).

Для того, чтобы найти S_1, рассмотрим на отрезке $[0;\pi]$ функцию $f_1(x) = 2\sin\frac{x}{2} - \sin x$. Заметим, что $f_1(x) \ge 0$, так как

$$f_1(x) = 2\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{x}{2}(1 - \cos\frac{x}{2}) \ge 2\sin\frac{x}{2} \ge 0.$$

Площадь S_1 есть приращение первообразной $F_1(x)$ функции $f_1(x)$ на отрезке $[0;\pi]$, то есть

$$S_1 = F_1(\pi) - F_1(0), \quad \text{где} \quad F_1(x) = -4\cos\frac{x}{2} + \cos x \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_1 = (-4\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi) - (-4\cos 0 + \cos 0) = -1 + 3 = 2.$$

Площадь S_2 есть приращение первообразной $F_2(x)$ функции $f_2(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ на отрезке $[\pi;2\pi]$, то есть

$$S_2 = F_2(2\pi) - F_2(\pi), \quad \text{где} \quad F_2(x) = -4\cos\frac{x}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_2 = -4\cos\pi - (-4\cos\frac{\pi}{2}) = 4.$$

Искомая площадь равна $S_1 + S_2 = 2 + 4 = 6$.

Ответ. 6.

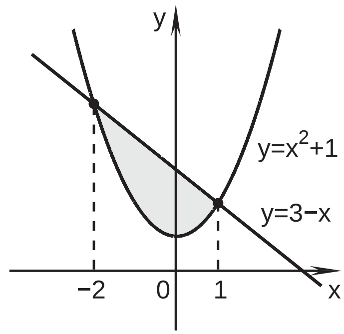
Задача 10. (ЕГЭ)

Найдите значение выражения $2S$, если S – площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y + x = 3$.

Идея. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (где $y_1(x) \ge y_2(x)$) есть приращение первообразной функции $f(x) = y_1(x) - y_2(x)$.

Указание. Для определения отрезка, на котором следует вычислять приращение первообразной, надо найти точки пересечения исходных функций.

Решение. Решив систему из двух уравнений $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$, получим, что эти две функции пересекаются в точках с абсциссами -2 и 1.



Следовательно, площадь искомой фигуры равна

$$S = F(1) - F(-2),$$

где $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 2x$ – первообразная функции

$$f(x) = (-x + 3) - (x^2 + 1) = -x^2 - x + 2.$$

В результате $2S = 2(F(1) - F(-2)) = 2 \cdot 4{,}5 = 9$.

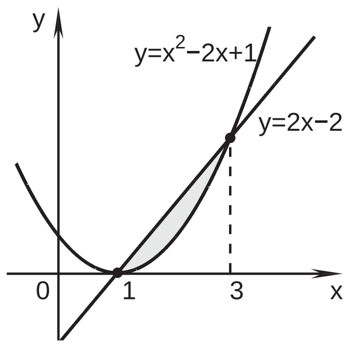
Ответ. 9.

Задача 11. (ЕГЭ)

Найдите значение выражения $6S$, если S – площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x + 1$ и графиком её производной.

Идея. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (где $y_1(x) \geq y_2(x)$) есть приращение первообразной функции $f(x) = y_1(x) - y_2(x)$.
Указание. Для определения отрезка, на котором следует вычислять приращение первообразной, надо найти точки пересечения функций $y = x^2 - 2x + 1$ и $y' = 2x - 2$.

Решение. Функции $y = x^2 - 2x + 1$ и $y' = 2x - 2$ пересекаются в точках с абсциссами 1 и 3.



Рассмотрим функцию $f(x) = y' - y = -x^2 + 4x - 3$. Площадь искомой фигуры равна приращению её первообразной $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$ на отрезке $[1; 3]$, то есть

$$S = F(3) - F(1) = 0 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad 6S = 8.$$

Ответ. 8.

9. Текстовые задачи

9.1. Скорость, движение и время

Задача 1. (Геол-00.3)

От причала A к причалу B отплыли катер и лодка, причём скорость катера в 5 раз больше скорости лодки. Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала B за 2 часа, а лодка за 4 часа?

Идея. Обозначить за неизвестные величины время остановок, скорость лодки и путь, после чего составить уравнения для времени.

Указание. Если x км/ч – скорость лодки, то $5x$ км/ч – скорость катера; $\dfrac{S}{x}$ часов – время лодки в пути на S км.

Решение. Пусть x км/ч – скорость лодки, $5x$ км/ч – скорость катера; всего S км. пути, t часов на остановки:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{5x} + t = 2, \\ \dfrac{S}{x} = 4; \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad t = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \text{ часа.}$$

Замечание. Можно было и не вводить неизвестных, а рассуждать следующим образом. Так как скорость катера в 5 раз больше скорости лодки, то время, необходимое катеру на преодоление расстояния, в 5 раз меньше, чем время лодки, необходимое на преодоление того же расстояния. Значит, время катера равно $\dfrac{4}{5}$ часа.

Следовательно, из двух часов катер плыл $\dfrac{4}{5}$ часа, а остальное время потратил на остановки: $2-\dfrac{4}{5}=\dfrac{6}{5}$ часа.

О т в е т. $\dfrac{6}{5}$ часа.

Задача 2. (Биол-87.2)

Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идёт вниз по течению. Найти, какую часть пути от A до B пройдёт плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

И д е я. Обозначить за неизвестные величины скорость течения и время движения плота и катера до момента встречи. Выразить через эти величины всё расстояние AB и время движения катера от точки встречи до пункта B.
У к а з а н и е. Если v км/ч – скорость течения, то $4v$ км/ч – скорость катера в стоячей воде, $3v$ км/ч – скорость движения катера против течения и $5v$ км/ч – скорость по течению.

Р е ш е н и е. Пусть v км/ч – скорость течения, а t ч – время движения плота и катера до момента встречи, тогда $4v$ км/ч – скорость катера в стоячей воде, $3v$ км/ч – скорость движения катера против течения и $5v$ км/ч – скорость по течению. За время t ч плот проплыл vt км, а катер $3vt$ км; значит, всё расстояние $AB=4vt$ км.

Расстояние от точки встречи до пункта B равно $3vt$ км, катер проплыл его со скоростью $5v$ км/ч; значит, он затратил на это $\dfrac{3vt}{5v}=\dfrac{3t}{5}$ ч. За это время плот проплыл $v\cdot\dfrac{3t}{5}$ км. Поделив весь путь плота $vt+v\cdot\dfrac{3t}{5}$ на расстояние $AB=4vt$ км, получим:

$$\frac{vt+v\cdot\dfrac{3t}{5}}{4vt}=\frac{2}{5}.$$

О т в е т. $\dfrac{2}{5}$.

Задача 3. (ВМК-99(1).1)

Пункты A,B,C и D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/час и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 часов. Известно, что расстояние между A и C он прошел за 3 часа, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найти расстояние между B и C.

Идея. Используя формулы для членов геометрической прогрессии, составить уравнения для времени прохождения пути.
Указание. Если расстояние AB обозначить за a км, то расстояния BC и CD соответственно равны aq и aq^2 км, где q – знаменатель прогрессии.
Указание. Система уравнений для модели задачи имеет вид:

$$a + aq = 3 \cdot 5, \; a + aq + aq^2 + aq^2 + aq = 5 \cdot 5.$$

Решение. Обозначим за a км расстояние AB, тогда расстояния $BC = aq$ км, $CD = aq^2$ км, где q – знаменатель прогрессии. Учитывая заданные времена и скорость в 5 км/ч, получаем:

$$\begin{cases} a + aq = 3 \cdot 5, \\ a + aq + aq^2 + aq^2 + aq = 5 \cdot 5; \end{cases} \iff \begin{cases} a(q+1) = 15, \\ a(2q^2 + 2q + 1) = 25; \end{cases}$$

поделив второе уравнение на первое, получаем

$$\frac{2q^2 + 2q + 1}{q + 1} = \frac{5}{3} \iff 6q^2 + q - 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{2}; \\ q = -\dfrac{2}{3} < 0; \end{array} \right.$$

по смыслу задачи $q = \dfrac{1}{2}$. Тогда $a = \dfrac{15}{q+1} = 10$ км, $BC = aq = 5$ км.

Ответ. 5 км.

Задача 4. (Геогр-77.4)

Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 минут позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

Идея. *Первый способ.* Приняв за неизвестную величину скорость грузовика, составить уравнения времён в обоих случаях задачи и решить их как систему.
Указание. Теоретически можно, составив уравнения относительно неизвестной скорости грузовика в обеих описанных ситуациях, решить каждое в отдельности и выбрать общий корень, однако решение системы двух уравнений, пусть даже с одним неизвестным, гораздо рациональнее.
Указание. Если x км/ч – скорость грузовика, то уравнение для первой ситуации имеет вид:

$$\frac{360}{x} + 1\frac{15}{60} = \frac{120}{2x} + \frac{1000}{2x + 40}.$$

Аналогично составляется и второе уравнение.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч – скорость грузового автомобиля. Тогда для первой ситуации движения:

$$\frac{360}{x}+1\frac{15}{60}=\frac{120}{2x}+\frac{1000}{2x+40},$$

а для второй ситуации:

$$\frac{360}{x}+1=\frac{120}{2x+40}+\frac{1000}{2x+40};$$

решаем как систему (у двух уравнений должен быть хотя бы один общий корень):

$$\begin{cases}\dfrac{500}{x+20}-\dfrac{300}{x}=\dfrac{5}{4},\\ \dfrac{560}{x+20}-\dfrac{360}{x}=1;\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{5x-3x-60}{x(x+20)}=\dfrac{5}{400},\\ \dfrac{14x-9x-180}{x(x+20)}=\dfrac{1}{40};\end{cases}$$

разделив первое уравнение на второе, находим:

$$\frac{2x-60}{5x-180}=\frac{1}{2}\iff 4x-120=5x-180\iff x=60.$$

Так как при делении одного уравнения на другое для решения оставили лишь одно условие, то необходимо проверить этот корень, подставив его в любое из исходных уравнений. Подставим $x=60$, например, в первое уравнение:

$$\frac{2x-60}{x(x+20)}=\frac{5}{400}\implies\frac{60}{60\cdot 80}=\frac{1}{80}\text{ – верно.}$$

Значит, $x=60$ – решение системы.

И д е я. *Второй способ.* Приняв за неизвестную величину скорость грузовика, составить одно уравнение, исходя из того, что отличие двух вариантов поездки гоночного автомобиля происходит на участке AB.

У к а з а н и е. Пусть x км/ч – скорость грузовика. Так как второй вариант поездки гоночного автомобиля отличается от первого варианта только участком AB, то можно составить уравнение:

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+40}=\frac{1}{4}.$$

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч – скорость грузового автомобиля. Так как из условия следует, что при втором варианте поездки гоночный автомобиль проехал участок AB на 15 минут быстрее, чем при первом варианте, то можно составить уравнение:

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+40}=\frac{1}{4},$$

которое легко решается и находится $x=60$. Далее на всякий случай надо проверить баланс времён:

$$\frac{360}{60}+1\frac{1}{4}=\frac{120}{2\cdot 60}+\frac{1000}{2\cdot 60+40}\iff 6+1\frac{1}{4}=1+\frac{25}{4}\ \text{ – верно.}$$

О т в е т. 60 км/ч.

Задача 5. (ВКНМ-99(1).3)

Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход Π_1, а в тот же момент из деревни в город вышел пешеход Π_2. Скорости пешеходов были равны. Встретившись, Б и Π_2 некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью, равной 12 км/ч, а Π_2 уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и Π_2, одновременно пришли оба пешехода. Найти скорость пешехода Π_1.

И д е я. Обозначив за неизвестные расстояние от города до деревни, расстояние от места встречи до деревни, скорость пешеходов и длительность встречи, составить три уравнения для времени соответствующих событий.
У к а з а н и е. Если S км – расстояние от города до деревни, a км – расстояние от места встречи до деревни, x км/ч – скорость пешехода, а τ ч – длительность встречи, то система уравнений для задачи принимает вид:

$$\frac{S-a}{12}=\frac{a}{x},\qquad \frac{S-a}{12}+\tau+\frac{a}{12}+2\tau=\frac{S}{x},\qquad \frac{S}{x}=\frac{a}{x}+\tau+\frac{a}{\frac{2}{3}x}.$$

У к а з а н и е. Для решения полученной системы эффективно выразить a из первого уравнения, подставить в два других, из которых исключить $\dfrac{S}{\tau}$.

Р е ш е н и е. Обозначим за S км расстояние от города до деревни, a км – расстояние от места встречи до деревни, x км/ч – скорость пешехода, τ ч – длительность встречи. Из условия следует, что $x<12$ км/ч. Запишем баланс времен:

из условия встречи бегуна и пешехода Π_2: $\dfrac{S-a}{12}=\dfrac{a}{x}$;

прибытие бегуна в деревню в сравнении со временем пешехода Π_1:

$$\frac{S-a}{12}+\tau+\frac{a}{12}+2\tau=\frac{S}{x};$$

прибытие пешеходов в деревню: $\dfrac{S}{x}=\dfrac{a}{x}+\tau+\dfrac{a}{\frac{2}{3}x}$.

Решаем получившуюся систему уравнений: $\begin{cases} a=\dfrac{x}{x+12}S,\\ \dfrac{S}{x}=\dfrac{S}{12}+3\tau,\\ \dfrac{S}{x}=\dfrac{5a}{2x}+\tau; \end{cases}$

исключаем a: $\begin{cases} S\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{12}\right)=3\tau,\\ S\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{2(x+12)}\right)=\tau; \end{cases}$

приравнивая $\dfrac{\tau}{S}$ из этих уравнений, получаем:

$$\frac{1}{x}-\frac{5}{2(x+12)}=\frac{1}{3x}-\frac{1}{36}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{2}{3x}+\frac{1}{36}=\frac{5}{2(x+12)}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad \frac{24+x}{36x} = \frac{5}{2(x+12)} \quad \iff \quad (x+24)(x+12) = 90x \quad \iff$$

$$\iff \quad x^2 - 54x + 12 \cdot 24 = 0 \quad \iff \quad x = 27 \pm 21 \quad \Longrightarrow \quad x = 6.$$

Второе число не удовлетворяет условию $x < 12$.

О т в е т. 6 км/ч.

Задача 6. (Хим-81.3)

Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый – остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найти расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

И д е я. Приняв за неизвестные величины скорости автомобилей, искомое расстояние и время остановки, составить систему из трёх уравнений.
У к а з а н и е. Полученную систему удобно решать подстановкой, последовательно исключая неизвестные.

Р е ш е н и е. Пусть x – скорость первого автомобиля, y – скорость второго автомобиля, s – искомый путь CD, t – время остановки. По условию $AC = 270$ км, $BC = 180$ км; значит, $AB = 450$ км.

Первый автомобиль прибыл в B одновременно с прибытием второго в A, причём второй делал в пути остановку:

$$\frac{450}{x} = \frac{270}{y} + t.$$

Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, одновременно прибыли первый в A, второй в B, причём первый в пути сделал остановку:

$$\frac{450}{x} + t = \frac{450}{y}.$$

Во время этого движения автомобили встретились в пункте D:

$$\frac{270-s}{y} = \frac{180+s}{x} + t.$$

Получаем систему:
$$\begin{cases} \dfrac{450}{x} = \dfrac{270}{y} + t, \\ \dfrac{450}{x} + t = \dfrac{450}{y}, \\ \dfrac{270 - s}{y} = \dfrac{180 + s}{x} + t. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения t и подставив это выражение во второе и третье уравнения, получим:
$$\begin{cases} t = \dfrac{450}{x} - \dfrac{270}{y}, \\ \dfrac{900}{x} = \dfrac{720}{y}, \\ \dfrac{540 - s}{y} = \dfrac{630 + s}{x}. \end{cases}$$

Теперь выразим из второго уравнения $x = \dfrac{5}{4}y$ и подставим в третье уравнение:
$$\frac{540 - s}{y} = \frac{4(630 + s)}{5y} \iff 5(540 - s) = 4(630 + s) \iff s = 20.$$

О т в е т. 20 км.

Задача 7. (ВМК-92.4)

Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всём пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут того же дня. Найти время отправления мотоцикла из города B.

И д е я. *Первый способ.* Обозначив за неизвестные величины скорости автомобиля и мотоцикла, а также путь и требуемое время выезда, составить три уравнения для пройденного расстояния.

У к а з а н и е. Если x и y км/ч – скорости автомобиля и мотоцикла соответственно, S км – путь AB, T ч – время выезда мотоциклиста, то можно составить уравнения:
$$7{,}5x + 3y = S, \quad (23 - T)y = S, \quad (16{,}5 - (T - 4{,}5))x = S.$$

У к а з а н и е. Свести систему к уравнениям относительно T, $\dfrac{x}{S}$ и $\dfrac{y}{S}$.

У к а з а н и е. Система уравнений
$$7{,}5\frac{x}{S} + 3\frac{y}{S} = 1, \quad \frac{y}{S} = \frac{1}{23 - T}, \quad \frac{x}{S} = \frac{1}{21 - T}$$
эффективнее всего решается подстановкой в первое уравнение.

Р е ш е н и е. Так как автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа, то мотоцикл выехал на 4 часа 30 минут позже автомобиля. Обозначим за x и y км/ч скорости автомобиля и мотоцикла соответственно, S км – расстояние AB, T ч – время выезда мотоциклиста из B, получаем систему:

$$\begin{cases} 7,5x + 3y = S, \\ (23 - T)y = S, \\ (16,5 - (T - 4,5))x = S; \end{cases} \iff \begin{cases} 7,5\dfrac{x}{S} + 3\dfrac{y}{S} = 1, \\ \dfrac{y}{S} = \dfrac{1}{23 - T}, \\ \dfrac{x}{S} = \dfrac{1}{21 - T}. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение $\dfrac{x}{S}$ и $\dfrac{y}{S}$, выраженные из второго и третьего уравнений, получаем:

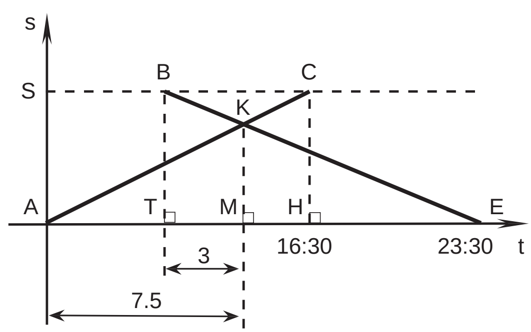
$$\frac{7,5}{21 - T} + \frac{3}{23 - T} = 1 \iff 2T^2 - 67T + 495 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} T = 11; \\ T = 22,5. \end{array} \right.$$

По условию задачи $T < 16,5$, поэтому $T = 11$.

И д е я. *Второй способ.* Воспользоваться геометрической интерпретацией задачи, построив графики зависимости пути от времени и рассмотрев подобие получающихся при этом треугольников.

У к а з а н и е. Учитывая равномерность движения автомобиля и мотоцикла, графиками их пути от времени будут прямые.

У к а з а н и е. Геометрическая интерпретация задачи имеет вид, представленный на чертеже.



У к а з а н и е. Для вычисления T как координаты по оси Ot эффективно использование подобия прямоугольных треугольников AKM с ACH и EKM с EBT соответственно.

Р е ш е н и е. Учитывая равномерность движения автомобиля и мотоцикла, можно построить прямолинейные графики зависимости пути от времени в координатах Ots (см. чертёж). Расстояние между осью Ot и BC равно S км; на оси Ot точки H и E имеют «абсолютные координаты»: 16,5 и 23 соответственно. Требуется найти аналогичную «абсолютную» координату точки T (время выезда мотоцикла из точки B).

$$\Delta AKM \sim \Delta ACH \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{KM}{CH}, \text{ то есть } \frac{7,5}{16,5-(T-(7,5-3))} = \frac{KM}{CH};$$

$$\Delta EKM \sim \Delta EBT \Rightarrow \frac{EM}{ET} = \frac{KM}{BT}, \text{ то есть } \frac{23-(T+3))}{23-T} = \frac{KM}{BT};$$

учитывая равенство расстояний CH и BT (так как $BCHT-$ прямоугольник), получим уравнение:

$$\frac{7,5}{21-T} = \frac{20-T}{23-T} \quad\Longleftrightarrow\quad 2T^2-67T+495=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} T=11; \\ T=22,5. \end{array}\right.$$

Так как $T<16,5$, то $T=11$.

О т в е т. 11:00.

9.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Задача 1. (Геол-94.1)

Какое из двух чисел больше: $2\sqrt{17}$ или $8,(24)$?

И д е я. Представить бесконечную периодическую дробь в виде обыкновенной либо через уравнение, либо через геометрическую прогрессию.

У к а з а н и е. $0,(24) = \dfrac{24}{100} + \dfrac{24}{100\cdot 100} + \cdots$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом 0,24 и знаменателем $\dfrac{1}{100}$; её сумма равна $S = \dfrac{b_1}{1-q}$. Если идти другим путём, то можно обозначить: $0,(24)=a$, то есть $24+0,(24)=100a$ и вычислить a.

Р е ш е н и е. Представим 8,(24) в виде обыкновенной дроби.
Первый способ:

$$8,(24) = 8+0,(24) = 8+\frac{24}{100}+\frac{24}{100^2}+\cdots = 8+\frac{\frac{24}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 8+\frac{24}{99} = 8+\frac{8}{33} = \frac{8\cdot 34}{33},$$

где используется формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\dfrac{b_1}{1-q}$ с первым членом $b_1=\dfrac{24}{100}$ и знаменателем $q=\dfrac{1}{100}$.
Второй способ: обозначим $a=0,(24)$. Тогда $24,(24)=24+0,(24)=24+a$, но $24,(24)=100a$. Получаем уравнение

$$24+a=100a \iff a=\frac{24}{99}=\frac{8}{33} \implies 8,(24)=8+0,(24)=8+a=8+\frac{8}{33}=\frac{8\cdot 34}{33}.$$

Теперь сравним $2\sqrt{17}$ и $8,(24)=\dfrac{8\cdot 34}{33}$:

$$\begin{array}{rcl} 2\sqrt{17} & \vee & \dfrac{8\cdot 34}{33} \\ 33\sqrt{17} & \vee & 8\cdot 17 \\ 33 & \vee & 8\sqrt{17} \\ 1089 & > & 1088 \end{array}$$

так как не было преобразований, изменяющих знак неравенства, можно утверждать, что $2\sqrt{17} > 8,(24)$, то есть первое число больше.

Ответ. Первое.

Задача 2. (Почв-00.2)

Первый, второй и четвёртый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель этой геометрической прогрессии.

Идея. Обозначить за неизвестные величины первый член прогрессии и знаменатель геометрической прогрессии.
Указание. Если b – первый член прогрессии, q – знаменатель геометрической прогрессии, то из условия получаем

$$bq^2 - bq = 2(bq - b).$$

Решение. Пусть b – первый член прогрессии, q – знаменатель геометрической прогрессии. Так как b, bq, bq^2 являются соответственно первым, вторым и четвертым членами арифметической прогрессии, то получаем уравнение для определения q:

$$bq^2 - bq = 2(bq - b) \iff q^2 - 3q + 2 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} q = 1; \\ q = 2. \end{array}\right.$$

Так как нет никаких ограничений на принятие этих значений, то подходят оба значения.

Ответ. $1; 2$.

Задача 3. (ВМК-90.2)

Числа $a_1, a_2, ..., a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечётными номерами на 15 больше суммы членов с чётными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

Идея. Составить уравнения с неизвестными разностью и первым членом прогрессии для заданных сумм и решить систему, после чего вычислить требуемое.

Указание. Сумма членов с нечётными номерами является, в свою очередь, новой арифметической прогрессией. Сумма членов с чётными номерами также образует арифметическую прогрессию.
Указание. Если a_1 – первый член прогрессии, d – её разность, то получаем:
$$\begin{cases} a_1 + a_3 + ... + a_{21} = 15 + a_2 + a_4 + ... + a_{20}, \\ a_1 + 19d = 3(a_1 + 8d). \end{cases}$$
Найти надо $a_{12} = a_1 + 11d$.
Указание. Сумму членов с нечётными номерами можно посчитать как сумму 11 членов прогрессии с тем же первым членом и разностью $2d$; сумму членов с чётными номерами можно посчитать как сумму 10 членов прогрессии с первым членом $a_1 + d$ и разностью $2d$:
$$a_1 + a_3 + ... + a_{21} = \frac{2a_1 + (11-1)2d}{2} \cdot 11 = 11(a_1 + 10d),$$
$$a_2 + a_4 + ... + a_{20} = \frac{2(a_1 + d) + (10-1)2d}{2} \cdot 10 = 10(a_1 + 10d).$$
Решение. Если a_1 – первый член прогрессии, а d – её разность, то из условия получаем: $\begin{cases} a_1 + a_3 + ... + a_{21} = 15 + a_2 + a_4 + ... + a_{20}, \\ a_1 + 19d = 3(a_1 + 8d). \end{cases}$

Найти надо $a_{12} = a_1 + 11d$. Сумму членов с нечётными номерами можно посчитать как сумму 11 членов прогрессии с тем же первым членом и разностью $2d$; сумму членов с чётными номерами можно посчитать как сумму 10 членов прогрессии с первым членом $a_1 + d$ и разностью $2d$:
$$\begin{cases} \dfrac{2a_1 + 10 \cdot 2d}{2} \cdot 11 = 15 + \dfrac{2(a_1 + d) + 9 \cdot 2d}{2} \cdot 10, \\ 2a_1 + 5d = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + 10d = 15, \\ 2a_1 + 5d = 0; \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} a_1 + 10d = 15, \\ d = 2; \end{cases} \implies a_{12} = a_1 + 11d = 17.$$
Ответ. 17.

Задача 4. (М/м-97(2).2)

Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. Сумма их первых членов равна (-3), сумма третьих членов равна 1, а сумма пятых членов равна 5. Найти разность арифметической прогрессии.

Идея. Выразить все элементы через первые члены прогрессий, знаменатель и разность. Составить систему из трёх уравнений с четырьмя неизвестными.
Указание. Исключить из полученной системы сначала первый член арифметической прогрессии, потом первый член геометрической прогрессии.

Р е ш е н и е. Пусть a_1 – первый член арифметической прогрессии с разностью d. Пусть b_1 – первый член геометрической прогрессии со знаменателем q. Тогда согласно условию:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = -3, \\ a_3 + b_3 = 1, \\ a_5 + b_5 = 5; \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + b_1 = -3, \\ a_1 + 2d + b_1 q^2 = 1, \\ a_1 + 4d + b_1 q^4 = 5. \end{cases}$$

Выразив a_1 из первого уравнения и подставив в остальные, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} b_1(q^2 - 1) = 4 - 2d, \\ b_1(q^4 - 1) = 8 - 4d. \end{cases}$$

Разложим $q^4 - 1$ во втором уравнении как разность квадратов:

$$b_1(q^2 - 1)(q^2 + 1) = 8 - 4d.$$

Подставив вместо первых двух множителей правую часть первого уравнения, получим

$$(4 - 2d)(q^2 + 1) = 8 - 4d \quad \iff \quad (4 - 2d)(q^2 - 1) = 0.$$

Значит, либо $d = 2$, либо $q^2 = 1$. Если $q^2 = 1$, то из первого уравнения последней системы следует, что $d = 2$. Поэтому $d = 2$ – единственное решение.

О т в е т. 2.

Задача 5. (ЕГЭ)

Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить соответственно 2, 5, 7 и 7, то получим четыре числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие геометрическую прогрессию.

И д е я. Составить систему, воспользовавшись критериями геометрической и арифметической прогрессий.
У к а з а н и е. Пусть a, b, c, d – искомые числа. Они составляют геометрическую прогрессию. Тогда числа $a+2, b+5, c+7, d+7$ образуют арифметическую прогрессию. Воспользуемся критериями геометрической и арифметической прогрессий:

$$\begin{cases} ac = b^2, \\ bd = c^2, \\ (a+2) + (c+7) = 2(b+5), \\ (b+5) + (d+7) = 2(c+7). \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Пусть a, b, c, d – искомые числа. Они составляют геометрическую прогрессию. Тогда числа $a+2, b+5, c+7, d+7$ образуют арифметическую прогрессию. Воспользуемся критериями геометрической и арифметической прогрессий:

$$\begin{cases} ac = b^2, \\ bd = c^2, \\ (a+2) + (c+7) = 2(b+5), \\ (b+5) + (d+7) = 2(c+7); \end{cases} \iff \begin{cases} ac = b^2, \\ c^2 = bd, \\ a + c = 2b + 1, \\ b + d = 2c + 2. \end{cases}$$

Сложив первые два уравнения последней системы, получим:

$$c(a+c)=b(b+d).$$

Воспользуемся последними двумя уравнениями:

$$c(2b+1)=b(2c+2) \quad\Longleftrightarrow\quad c=2b.$$

Тогда из третьего уравнения системы находим $a=1$, а из первого уравнения, учитывая условие $b\neq 0$, получаем $b=2$; значит, $c=4$, $d=8$.

Ответ. 1; 2; 4; 8.

Задача 6. (ЕГЭ)

Сумма утроенного второго и четвёртого членов арифметической прогрессии равна 12. При каком значении разности прогрессии произведение третьего и пятого членов прогрессии будет наименьшим?

Идея. Записать условие задачи через первый член и разность прогрессии.
Указание. Воспользоваться свойствами квадратичной функции.

Решение. Пусть a_1 – первый член прогрессии, d – её разность. По условию

$$3(a_1+d)+(a_1+3d)=12 \quad\Longleftrightarrow\quad 4a_1=12-6d \quad\Longleftrightarrow\quad a_1=3-\frac{3}{2}d.$$

Рассмотрим произведение третьего и пятого членов:

$$(a_1+2d)(a_1+4d)=\left(3-\frac{3}{2}d+2d\right)\left(3-\frac{3}{2}d+4d\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(6+d)(6+5d)=\frac{1}{4}(5d^2+36d+36)=f(d).$$

Графиком функции $f(d)$ является парабола с ветвями, направленными вверх; минимальное значение параболы достигается в вершине. Абсцисса вершины $d_{\text{в}}=-\dfrac{36}{10}$.

Ответ. $-3,6$.

Задача 7. (Геол-80.4)

В гору ехал автомобиль. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

Идея. Законы движения автомобиля и автобуса подчиняются формулам арифметической прогрессии, в которых путь вычисляется суммой членов.
Указание. До момента выезда автобуса автомобиль проехал 198 м:

$$S_9 = \frac{2a_1 + (9-1)d}{2} \cdot 9,$$

где $a_1 = 30$ м, $d = -2$ м.
Указание. В момент выезда автобуса между ним и автомобилем было 60 м, что является суммой членов двух соответствующих арифметических прогрессий с одинаковым неизвестным числом секунд.
Указание. Составив формулу пути автомобиля, начиная с десятой секунды движения, сложить с путём автобуса для встречи на дистанции 60 м.

Решение. За каждую n-ю секунду автомобиль проезжает
$a_n = a_1 + (n-1)d$ м, где $a_1 = 30$ м, $d = -2$ м; значит, через 9 секунд он проедет

$$S_9 = \frac{2a_1 + (9-1)d}{2} \cdot 9 = 22 \cdot 9 = 198 \text{ м}.$$

Автобус за каждую k-ю секунду проезжает $b_k = a_1 + (k-1)q$ м, где $b_1 = 2$м, $q = 1$м. Начиная с десятой секунды движения, автомобиль сближается с автобусом на дистанции $258 - 198 = 60$ м; $a_{10} = a_1 + 9d = 12$ м; если до встречи пройдет n секунд, то уравнение принимает вид:

$$\frac{2a_{10} + (n-1)d}{2} \cdot n + \frac{2b_1 + (n-1)q}{2} \cdot n = 60 \iff n(26-2n) + n(n+3) = 120 \iff$$

$$\iff n^2 - 29n + 120 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} n = 5; \\ n = 24. \end{array} \right.$$

Так как за 24 секунды автобус проедет

$$S_{24} = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 + 23) = 27 \cdot 12 > 60 \text{ м},$$

то по смыслу задачи подходит только $n = 5$; $S_5 = 5 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (4+4) = 20$ м.

Ответ. 20 м.

Задача 8. (М/м-00(1).2)

О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвёртых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

Идея. Обозначить за неизвестные величины четвёртый член прогрессии и её разность.
Указание. Если $a_4 = a$, d – разность прогрессии, то $a_1 = a - 3d$, $a_2 = a - 2d$, $a_3 = a - d$, $a_5 = a + d$, $a_6 = a + 2d$, $a_7 = a + 3d$, где $d < 0$ по условию.
Указание. Сумма пятых степеней:

$$(a-3d)^5 + (a-2d)^5 + (a-d)^5 + a^5 + (a+d)^5 + (a+2d)^5 + (a+3d)^5$$

равна нулю при $a = 0$.

Р е ш е н и е. Обозначим за $d<0$ – разность прогрессии, $a_4=a$, тогда $a_1=a-3d$, $a_2=a-2d$, $a_3=a-d$, $a_5=a+d$, $a_6=a+2d$, $a_7=a+3d$. Тогда из условия получаем систему:

$$\begin{cases}(a-3d)^5+(a-2d)^5+(a-d)^5+a^5+(a+d)^5+(a+2d)^5+(a+3d)^5=0,\\(a-3d)^4+(a-2d)^4+(a-d)^4+a^4+(a+d)^4+(a+2d)^4+(a+3d)^4=51.\end{cases}$$

Рассмотрим три случая:

1) Пусть $a>0$. Тогда получаем

$a^5>0$,
$a-d>0$ и $|a-d|>|a+d| \quad\Longrightarrow\quad (a-d)^5+(a+d)^5>0$,
$a-2d>0$ и $|a-2d|>|a+2d| \quad\Longrightarrow\quad (a-2d)^5+(a+2d)^5>0$,
$a-3d>0$ и $|a-3d|>|a+3d| \quad\Longrightarrow\quad (a-3d)^5+(a+3d)^5>0$.

Поэтому

$$(a-3d)^5+(a-2d)^5+(a-d)^5+a^5+(a+d)^5+(a+2d)^5+(a+3d)^5>0.$$

2) Пусть $a<0$. Тогда получаем

$a^5<0$,
$a+d<0$ и $|a+d|>|a-d| \quad\Longrightarrow\quad (a-d)^5+(a+d)^5<0$,
$a+2d<0$ и $|a+2d|>|a-2d| \quad\Longrightarrow\quad (a-2d)^5+(a+2d)^5<0$,
$a+3d<0$ и $|a+3d|>|a-3d| \quad\Longrightarrow\quad (a-3d)^5+(a+3d)^5<0$.

Поэтому

$$(a-3d)^5+(a-2d)^5+(a-d)^5+a^5+(a+d)^5+(a+2d)^5+(a+3d)^5<0.$$

3) Пусть $a=0$. Тогда получаем

$a^5=0$,
$a+d=-(a-d) \quad\Longrightarrow\quad (a-d)^5+(a+d)^5=0$,
$a+2d=-(a-2d) \quad\Longrightarrow\quad (a-2d)^5+(a+2d)^5=0$,
$a+3d=-(a-3d) \quad\Longrightarrow\quad (a-3d)^5+(a+3d)^5=0$.

Поэтому

$$(a-3d)^5+(a-2d)^5+(a-d)^5+a^5+(a+d)^5+(a+2d)^5+(a+3d)^5=0.$$

Значит, $a=0$. Подставляя во второе уравнение системы, получаем:

$$2\cdot 81d^4+2\cdot 16d^4+2d^4=51 \quad\Longleftrightarrow\quad d^4=\frac{51}{196} \quad\Longleftrightarrow\quad d=\pm\sqrt[4]{\frac{51}{196}},$$

но $d<0$, значит,

$$d=-\sqrt[4]{\frac{51}{196}} \quad\Longrightarrow\quad a_7=3d=-3\sqrt[4]{\frac{51}{196}}.$$

О т в е т. $-3\sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$.

Задача 9. (ВМК-94(2).5)

В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента сразу после 30-й инъекции?

Идея. Составить формулу для нахождения количества лекарства сразу после n-й инъекции на основе анализа процесса.

Указание. Заметить, что сразу после k-й инъекции в организме будет $5+\dfrac{1}{5^k}$, $k \in \mathbb{N}$ единиц лекарства.

Решение. Приняв за a_n количество единиц лекарства сразу после n-й инъекции, получим:

$$a_1 = 6; \quad a_2 = \frac{1}{5}a_1 + 4 = 5 + \frac{1}{5}; \quad a_3 = \frac{1}{5}a_2 + 4 = 5 + \frac{1}{5^2};$$

$$a_4 = \frac{1}{5}a_3 + 4 = 5 + \frac{1}{5^3}; \quad \ldots; \quad a_n = \frac{1}{5}a_{n-1} + 4 = 5 + \frac{1}{5^{n-1}} \quad \Longrightarrow \quad a_{30} = 5 + \frac{1}{5^{29}}.$$

Ответ. $5+\dfrac{1}{5^{29}}$.

Задача 10. (Соц-98.5)

Найти все натуральные значения параметра n, при каждом из которых задача: «Найти арифметическую прогрессию, если известны её семнадцатый член и сумма n первых членов» не имеет решений или её решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

Идея. Обозначить за неизвестные величины первый член прогрессии и её разность и составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными.

Указание. Система имеет вид $\begin{cases} a_1 + 16d = a_{17}, \\ \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = S_n. \end{cases}$

Решение можно искать с помощью подстановки.

Решение. Пусть x – первый член прогрессии и y – её разность. Тогда, согласно условию задачи, получаем

$$\begin{cases} x + 16y = a_{17}, \\ \dfrac{2x + y(n-1)}{2} \cdot n = S_n. \end{cases}$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим:

$$\frac{2a_{17} + y(n-33)}{2} \cdot n = S_n \quad \Longleftrightarrow \quad y(n-33) = \frac{2S_n}{n} - 2a_{17}.$$

При $n = 33$ и правой части, равной нулю, решений бесконечно много. При $n = 33$ и правой части, не равной нулю, решений нет. При $n \neq 33$ значение y определяется однозначно и равно

$$y = \frac{\dfrac{2S_n}{n} - 2a_{17}}{n - 33}.$$

Значение x определяется из первого уравнения системы.

Ответ. 33.

9.3. Концентрация, смеси и сплавы, массовые и объёмные доли

Задача 1. (ЕГЭ)

Масса первого сплава на 3 кг больше массы второго сплава. Первый сплав содержит 10 % цинка, второй 40 % цинка. Новый сплав, полученный из двух первоначальных, содержит 20 % цинка. Определите массу нового сплава.

Идея. Обозначить за неизвестную величину массу первого сплава и составить уравнение для цинка.
Указание. Пусть x кг – масса первого сплава, в нём $0,1x$ кг цинка. Тогда $(x - 3)$ кг – масса второго сплава, в нём $0,4(x - 3)$ кг цинка. Новый сплав весит $(2x - 3)$ кг, в нём $0,2(2x - 3)$ кг цинка.

Решение. Пусть x кг – масса первого сплава, в нём $0,1x$ кг цинка.
Тогда $(x - 3)$ кг – масса второго сплава, в нём $0,4(x - 3)$ кг цинка. Новый сплав весит $(2x - 3)$ кг, в нём $0,2(2x - 3)$ кг цинка. Получаем уравнение для цинка:

$$0,1x + 0,4(x - 3) = 0,2(2x - 3) \quad \Longleftrightarrow \quad 0,1x = 0,6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 6.$$

Следовательно, масса нового сплава равна $2x - 3 = 9$ кг.

Ответ. 9 кг.

Задача 2. (ЕГЭ)

Кусок сплава меди с оловом массой 15 кг содержит 20 % меди. Сколько чистой меди необходимо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 40 % олова?

Идея. Обозначить за неизвестную величину массу чистой меди и составить уравнение для олова.
Указание. В сплаве меди с оловом массой 15 кг содержится $0,2 \cdot 15 = 3$ кг меди и $15 - 3 = 12$ кг олова. Пусть y кг – масса чистой меди, необходимой для получения нового сплава. В новом сплаве должно быть $0,4(15 + y)$ кг олова.

Решение. В сплаве меди с оловом массой 15 кг содержится $0,2 \cdot 15 = 3$ кг меди и $15 - 3 = 12$ кг олова. Пусть y кг – масса чистой меди, необходимой для получения нового сплава. В новом сплаве должно быть $0,4(15 + y)$ кг олова. Составим уравнение для олова:

$$12 = 0,4(15 + y) \iff 0,4y = 6 \iff y = 15.$$

Ответ. 15 кг.

Задача 3. (ЕГЭ)

Свежие грибы содержат 92 % воды, а сухие 8 %. Сколько получится сухих грибов из 23 килограммов свежих?

Идея. Обозначить за неизвестную величину массу сухих грибов и составить уравнение.
Указание. Составить уравнение на сухое вещество, которое одинаково в свежих и сухих грибах.

Решение. В 23 кг свежих грибов содержится $0,08 \cdot 23$ кг сухого вещества. Пусть x кг – масса сухих грибов. Они содержат $0,92x$ кг сухого вещества. Получаем уравнение:

$$0,08 \cdot 23 = 0,92x \iff x = 2.$$

Ответ. 2 кг.

Задача 4. (ЕГЭ)

К 40 % раствору соляной кислоты добавили 50 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60 %. Найдите первоначальный вес раствора.

Идея. Обозначить за неизвестную величину первоначальный вес раствора и составить уравнение для кислоты.
Указание. Пусть x г – первоначальный вес раствора, в нём $0,4x$ г кислоты. После добавления 50 г чистой кислоты новый раствор стал весить $x + 50$ г, в нём оказалось $0,6(x + 50)$ г чистой кислоты.

Решение. Пусть x г – первоначальный вес раствора, в нём $0,4x$ г кислоты. После добавления 50 г чистой кислоты новый раствор стал весить $x + 50$ г, в нём оказалось $0,6(x + 50)$ г чистой кислоты. Составим уравнение для кислоты:

$$0,4x + 50 = 0,6(x + 50) \iff 0,2x = 20 \iff x = 100.$$

Ответ. 100 г.

Задача 5. (ЕГЭ)

Какое количество воды нужно добавить в 1 литр 9 %-ного раствора уксуса, чтобы получить 3 %-ный раствор?

Идея. Обозначить за неизвестную величину количество добавляемой воды и составить уравнение для уксуса.
Указание. В 1 литре 9 %-ного раствора уксуса $0,09$ л уксуса. Пусть x л – количество добавляемой воды. Новый раствор содержит $1+x$ л, в нём должно быть $0,03(1+x)$ л уксуса.

Решение. В 1 литре 9 %-ного раствора уксуса $0,09$ л уксуса. Пусть x л – количество добавляемой воды. Новый раствор содержит $1+x$ л, в нём должно быть $0,03(1+x)$ л уксуса. Составим уравнение для уксуса:

$$0,09 = 0,03(1+x) \quad \Longleftrightarrow \quad 3 = 1+x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2.$$

Ответ. 2 л.

Задача 6. (Филол-00.1)

Имеется 40 литров 0,5 % раствора и 50 литров 2 % раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько нужно взять второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5 % раствора уксусной кислоты?

Идея. Обозначить за неизвестные величины объёмы каждого из растворов для смешивания, после чего составить уравнения для концентраций.
Указание. Если x л первого и $30-x$ л второго растворов использовать для смешивания, то $0,005x + 0,02(30-x) = 0,015\cdot 30$.

Решение. Если взять x л первого раствора, то второго раствора надо взять $30-x$ л. Тогда получаем уравнение:

$$0,005x + 0,02(30-x) = 0,015\cdot 30 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,5x + 2(30-x) = 45 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 10.$$

Ответ. 10 л и 20 л соответственно.

Задача 7. (Физ-78.2)

Руда содержит 40 % примесей, а выплавленный из неё металл содержит 4 % примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?

Идея. Разделив условно продукт каждого этапа на «чистое вещество» и «примеси», отталкиваться от неизменности массы и количества «чистого вещества» для начального и конечного состояния.
Указание. Если найти массу чистого металла в руде (60 % от 24 т), то она останется неизменной в конечном продукте, хотя составит в нем другую долю (96 %).

Р е ш е н и е. В 24 т руды 40 % примесей, а значит, 60 % чистого металла, то есть $0,6 \cdot 24 = 14,4$ т. В выплавленном металле уже 4 % примесей и 96 % чистого металла, а это те же самые 14,4 тонны. Поэтому, если обозначить за x массу выплавленного металла, то получим уравнение:

$$0,96x = 14,4 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{14,4}{0,96} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 15.$$

О т в е т. 15 тонн.

Задача 8. (Экон-80.4)

Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй - 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определить, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве.

И д е я. Процентное содержание цинка одинаково не только в первом и втором сплавах. Оно такое же и в получившемся новом сплаве.
У к а з а н и е. Найдя процентное содержание цинка в исходных сплавах, легко найти процентное содержание олова во втором сплаве.

Р е ш е н и е. Так как процентное содержание цинка одинаково в первом и втором сплавах, то оно такое же и в получившемся новом сплаве. Значит, в исходных сплавах процентное содержание цинка равно $30\,\%$. Тогда процентное содержание олова во втором сплаве равно $100 - 26 - 30 = 44\,\%$. Поэтому легко посчитать сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве:

$$0,4 \cdot 150 + 0,44 \cdot 250 = 60 + 110 = 170.$$

О т в е т. 170 кг.

Задача 9. (Геол-95.6)

Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке – 10 %, во втором – 40 %. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором – 30 %. Определить массу полученного слитка.

И д е я. Обозначить за неизвестную величину массу первого слитка. Посчитать массу меди в первом слитке, втором слитке и новом слитке, полученном после сплавливания, используя известные концентрации меди и массы слитков.
У к а з а н и е. Если x кг – масса первого слитка, $x + 3$ кг – масса второго, то в первом слитке содержится $0,1x$ кг меди, во втором – $0,4(x + 3)$ кг.
У к а з а н и е. Масса нового слитка – $2x + 3$ кг, а меди в нём – $0,3(2x + 3)$ кг.

Р е ш е н и е. Пусть x кг – масса первого слитка, $x+3$ кг – масса второго слитка. Значит, масса нового слитка – $2x+3$ кг. Тогда в первом слитке содержится $0,1x$ кг меди, во втором – $0,4(x+3)$ кг, в третьем – $0,3(2x+3)$ кг. Следовательно, получаем уравнение:

$$0,1x+0,4(x+3)=0,3(2x+3) \iff 0,5x+1,2=0,6x+0,9 \iff x=3.$$

Значит, масса полученного слитка: $2x+3=9$.

О т в е т. 9 кг.

Задача 10. (Геол-96(1).5)

В одном декалитре кислотного раствора 96 % объёма составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40 %?

И д е я. Обозначить за неизвестную величину объём доливаемой воды.
У к а з а н и е. Если долить x декалитров воды, то концентрация вычисляется по формуле $\dfrac{0,96}{x+1}$.

Р е ш е н и е. Пусть доливают x декалитров воды. Так как в исходном растворе было $0,96$ декалитров кислоты, то в получившемся растворе концентрация не больше 40 %, если

$$\frac{0,96}{x+1} \le 0,4 \iff 0,4x \ge 0,56 \iff x \ge 1,4.$$

О т в е т. Не менее $1,4$ декалитра.

Задача 11. (ВМК-96.2)

Первый раствор содержит 20 % азотной кислоты и 80 % воды, второй - 60 % кислоты и 40 % воды. Первая смесь была получена из 15 л первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 л первого раствора, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если процентное содержание воды во второй смеси вдвое больше процентного содержания кислоты в первой?

И д е я. Обозначив за неизвестную величину количество использованного второго раствора, одинаковое в каждой смеси, вычислить концентрации кислоты и воды соответственно в первой и второй из них.
У к а з а н и е. Если x литров второго раствора использовать для первой смеси, то концентрация кислоты в ней $\dfrac{0,2\cdot 15+0,6x}{x+15}$, а концентрация воды во второй смеси равна $\dfrac{0,8\cdot 5+0,4x}{x+5}$.

Р е ш е н и е. Пусть x литров второго раствора берут для приготовления смеси. Тогда концентрация кислоты в первой смеси равна

$$\frac{0,2 \cdot 15 + 0,6x}{x + 15},$$

а концентрация воды во второй смеси равна

$$\frac{0,8 \cdot 5 + 0,4x}{x + 5}.$$

Тогда из условия получаем уравнение

$$\frac{0,8 \cdot 5 + 0,4x}{x + 5} = 2 \cdot \frac{0,2 \cdot 15 + 0,6x}{x + 15} \iff (4 + 0,4x)(x + 15) = (6 + 1,2x)(x + 5) \iff$$

$$0,8x^2 + 2x - 30 = 0 \iff 2x^2 + 5x - 75 = 0 \iff x = \frac{-5 \pm 25}{4} \implies x = 5,$$

так как $x > 0$ по смыслу задачи.

О т в е т. 5 литров.

Задача 12. (ВМК-00.2)

Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора 1 л воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора 39 л воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найти концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

И д е я. Обозначив за неизвестные величины массу всего раствора и массу соли в нём, составить систему из двух уравнений с двумя неизвестными, используя то, что концентрация соли в растворе есть отношение массы соли к массе раствора.

У к а з а н и е. Если в z кг раствора содержится x кг соли, то концентрация равна $\frac{x}{z}$. После испарения 1 л воды она станет равной $\frac{x}{z-1}$, а после добавления 39 л воды станет равной $\frac{x}{z+38}$.

Р е ш е н и е. Пусть имеется z кг раствора, в нём содержится x кг соли. Надо найти значение $\frac{x}{z}$. Составляем систему:

$$\begin{cases} \frac{x}{z} + 0,05 = \frac{x}{z-1}, \\ \frac{3x}{z+38} = \frac{x}{z}. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем

$$\frac{3}{z+38} = \frac{1}{z} \implies z = 19.$$

Подставляем $z = 19$ в первое уравнение системы:

$$\frac{x}{19} + 0,05 = \frac{x}{18} \iff \frac{x}{18 \cdot 19} = 0,05 \iff x = 0,9 \cdot 19 \implies \frac{x}{z} = \frac{x}{19} = 0,9.$$

О т в е т. 90 %.

Задача 13. (Экон-79.3)

Из сосуда, до краёв наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объём воды в сосуде стал на 3 литра больше объёма оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

Идея. Обозначив за неизвестную величину объём сосуда, проследить за изменением количества глицерина в результате трёх отливаний смеси с последующим добавлением воды.
Указание. Объём глицерина, остающийся в сосуде, равен объёму оставшейся в сосуде смеси, умноженному на текущую концентрацию глицерина.

Решение. Пусть V – объём сосуда. Занесем в таблицу, состоящую из четырех колонок (№ операции, объём чистого глицерина, концентрация глицерина в растворе и объём всего раствора), поэтапно все операции, описанные в условии задачи:

№	глицерин	концентрация	всего смеси
0	V	1	V
1a	$V-2$	1	$V-2$
1b	$V-2$	$\dfrac{V-2}{V}$	V
2a	$\dfrac{V-2}{V}\cdot(V-2)$	$\dfrac{V-2}{V}$	$V-2$
2b	$\dfrac{(V-2)^2}{V}$	$\dfrac{(V-2)^2}{V^2}$	V
3a	$\dfrac{(V-2)^2}{V^2}\cdot(V-2)$	$\dfrac{(V-2)^2}{V^2}$	$V-2$
3b	$\dfrac{(V-2)^3}{V^2}$	$\dfrac{(V-2)^3}{V^3}$	V

Прокомментируем таблицу:

0) Изначально в сосуде был чистый глицерин. Поэтому глицерина и всего смеси было по V, а концентрация равна 1.

1a) Из сосуда отлили два литра. Значит, осталось всего $V-2$ литров смеси с концентрацией 1 и, следовательно, осталось $V-2$ литров глицерина.

1b) В сосуд долили 2 литра воды. Значит, стало всего V литров смеси, а глицерина осталось столько же сколько и было, то есть $V-2$ литров. Следовательно, концентрация глицерина стала равняться $\dfrac{V-2}{V}$.

2a) После перемешивания снова отлили 2 литра смеси. Значит, осталось всего $V-2$ литров смеси, а концентрация глицерина не изменилась $\dfrac{V-2}{V}$. Поэтому глицерина осталось $\dfrac{V-2}{V}\cdot(V-2)$ литров.

2b) В сосуд снова долили 2 литра воды. Значит, стало всего V литров смеси, а глицерина осталось столько же сколько и было, то есть $\dfrac{(V-2)^2}{V}$ литров. Следовательно, концентрация глицерина стала равняться $\dfrac{(V-2)^2}{V^2}$.

3a) После перемешивания снова отлили 2 литра смеси. Значит, осталось всего $V-2$ литров смеси, а концентрация глицерина не изменилась $\dfrac{(V-2)^2}{V^2}$. Поэтому глицерина осталось $\dfrac{(V-2)^2}{V^2}\cdot(V-2)$ литров.

3b) В сосуд снова долили 2 литра воды. Значит, стало всего V литров смеси, а глицерина осталось столько же сколько и было, то есть $\dfrac{(V-2)^3}{V^2}$ литров. Следовательно, концентрация глицерина стала равняться $\dfrac{(V-2)^3}{V^3}$.

Заметим, что при каждой операции две колонки таблицы легко заполняются, а третья по ним считается.

В результате этих операций объём воды в сосуде стал на 3 литра больше объёма оставшегося в нем глицерина. Так как объём воды в сосуде равен разности объёмов всей смеси и глицерина, то из этого условия легко выписывается уравнение:

$$V-\frac{(V-2)^3}{V^2}=\frac{(V-2)^3}{V^2}+3 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2(V-2)^3}{V^2}=V-3 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad V^3-9V^2+24V-16=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (V-1)(V-4)^2=0.$$

Так как из сосуда отливали 2 литра, то его объём больше 2. Поэтому $V=4$. Из последней строчки таблицы легко получаем ответ.

Ответ. Глицерина 0,5 л; воды 3,5 л.

Задача 14. (Геол-81.5)

Для составления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда: первый ёмкостью 10 литров, второй – 20 литров. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 литров жидкости A. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько было в него её налито сначала, отношения количества жидкости A ко всему объёму имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд?

Идея. Обозначив за неизвестную величину количество жидкости A в первом сосуде изначально, составить таблицу, отражая в ней изменения количества жидкости A, её концентрации и общее количество смеси в обоих сосудах на каждом шаге.

Указание. Если x л жидкости A первоначально налили в первый сосуд, то во втором оказалось $15-x$ л. После дополнения первого сосуда доверху жидкостью B, концентрация жидкости A в первом сосуде станет равной $\frac{x}{10}$. В V л смеси из первого сосуда жидкости A будет $\frac{x}{10}V$ л .

Решение. Пусть x л жидкости A налили в первый сосуд, тогда во втором оказалось $15-x$ л. Составим таблицу, отражая в ней изменения количества жидкости A, её концентрации и общее количество смеси в обоих сосудах на каждом шаге.

Первый сосуд:

№	жидкость A	концентрация	всего
1	x	1	x
2	x	$\frac{x}{10}$	10
3	$\frac{x}{10}(5-x)$	$\frac{x}{10}$	$10-(x+5)$
4	$\frac{x(5-x)}{10}+x$	$\frac{\frac{x(5-x)}{10}+x}{5}$	5

Второй сосуд:

№	жидкость A	концентрация	всего
1	$15-x$	1	$15-x$
2	$15-x$	1	$15-x$
3	$15-x+\frac{x}{10}(x+5)$	$\frac{15-x+\frac{x}{10}(x+5)}{20}$	20
4	$15-x+\frac{x}{10}(x+5)$	$\frac{15-x+\frac{x}{10}(x+5)}{20}$	20

Прокомментируем таблицу:

1) Первый сосуд: налили x литров жидкости A; поэтому всего тоже x литров, а концентрация равна 1.

Второй сосуд: налили $15-x$ литров жидкости A; поэтому всего тоже $15-x$ литров, а концентрация равна 1.

2) Первый сосуд: после дополнения доверху первого сосуда жидкостью B всего стало 10 литров, а концентрация жидкости A в нем стала $\frac{x}{10}$.

Второй сосуд: изменений не произошло.

3) Первый сосуд: во второй сосуд из первого сосуда перелили $20-(15-x)=5+x$ литров; поэтому в первом сосуде осталось $10-(x+5)=5-x$ литров, концентрация не изменилась, а жидкости A осталось $\dfrac{x}{10}(5-x)$ литров.

Второй сосуд: всего стало 20 литров, жидкости A добавилось $\dfrac{x}{10}(x+5)$, тогда концентрация легко считается.

4) Первый сосуд: в первый сосуд добавилось x литров жидкости A, всего тоже стало на x литров больше, тогда концентрация легко считается.

Второй сосуд: изменений не произошло.

Так как концентрация жидкости A в обоих сосудах стали равными, получаем уравнение:

$$\frac{\dfrac{x(5-x)}{10}+x}{5}=\frac{15-x+\dfrac{x}{10}(x+5)}{20} \iff 4(x(5-x)+10x)=10(15-x)+x(x+5)$$

$$\iff x^2-13x+30=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=10. \end{array}\right.$$

Так как на третьем этапе в первом сосуде осталось $5-x$ литров, то $x=10$ – не подходит. Поэтому $x=3$ литра.

Ответ. 3 л.

9.4. Целые числа, перебор вариантов, отбор решений

Задача 1. (У)

Решить в целых числах уравнение $6x^2+5y^2=74$.

Идея. Получить ограничения на одну из переменных и действовать перебором.
Указание. Ограничения на x следуют из неотрицательности обеих частей равенства $5y^2=74-6x^2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $5y^2=74-6x^2$. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то $74-6x^2\geq 0$, следовательно, x^2 может принимать только следующие значения: $x^2=0$; $x^2=1$; $x^2=4$; $x^2=9$.

В результате перебора получаем, что целое значение y существует только при $x^2=9$. В этом случае $y=\pm 2$.

Ответ. $(3;2)$, $(3;-2)$, $(-3;2)$, $(-3;-2)$.

Задача 2. (У)

Решить в целых числах уравнение $2x^3+xy-7=0$.

Идея. Перенести 7 в правую часть равенства, а левую разложить на множители.
Указание. Число x является делителем числа 7.

Р е ш е н и е. Так как $2x^3 + xy - 7 = 0 \iff x(2x^2 + y) = 7$, то x может быть равно либо ± 1, либо ± 7. Следовательно, возможны четыре варианта:

1) $\begin{cases} x = 1, \\ 2x^2 + y = 7; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = -1, \\ 2x^2 + y = -7; \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = -9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7, \\ 2x^2 + y = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7, \\ y = -97; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = -7, \\ 2x^2 + y = -1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = -7, \\ y = -99. \end{cases}$

О т в е т. $(1; 5)$, $(7; -97)$, $(-7; -99)$, $(-1; -9)$.

Задача 3. (У)

Решить в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 21$.

И д е я. Использовать разложение на множители, далее действовать перебором.
У к а з а н и е. Воспользоваться формулой разности квадратов.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой разности квадратов, получаем:

$$x^2 - y^2 = 21 \iff (x - y)(x + y) = 21.$$

Первый множитель может принимать значения: $\pm 21; \pm 7; \pm 3; \pm 1$. При этом второй множитель равен $\pm 1 \pm 3; \pm 7; \pm 21$. Перебрав все эти варианты, получим ответ.

О т в е т. $(5; \pm 2)$, $(-5; \pm 2)$, $(11; \pm 10)$, $(-11; \pm 10)$.

Задача 4. (У)

Решить в натуральных числах уравнение $2xy = x^2 + 2y$.

И д е я. Использовать разложение на множители.
У к а з а н и е. Выделить два полных квадрата.

Р е ш е н и е. Сначала выделим полный квадрат, в который уйдут все слагаемые, содержащие x, а затем выделим полный квадрат, в который уйдут оставшиеся слагаемые, содержащие y:

$$2xy = x^2 + 2y \iff y^2 - 2y = (x - y)^2 \iff (y - 1)^2 - (x - y)^2 = 1 \iff$$

$$\iff (2y - x - 1)(x - 1) = 1.$$

Так как x и y – натуральные числа, то оба множителя равны единице и, значит, $x = 2$, $y = 2$.

О т в е т. $x = 2$, $y = 2$.

Задача 5. (У)

Решить в целых числах уравнение $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

Идея. Использовать разложение на множители, далее действовать перебором.
Указание. Выделить полный квадрат и, сделав замену, решать в натуральных числах.

Решение. Выделим полный квадрат по y:

$$x^2 = y^2 + 2y + 13 \iff x^2 = (y+1)^2 + 12 \iff x^2 - (y+1)^2 = 12.$$

После замены $a = |x|$, $b = |y+1|$ уравнение принимает вид:

$$a^2 - b^2 = 12.$$

Заметим, что $b \geq 1$ (поскольку при $b = 0$ целых a нет) и $a \geq 4$ (поскольку должно быть $a^2 \geq 12$).

Переберём возможные значения a и b такие, что

$$(a-b)(a+b) = 12.$$

Первый множитель (он меньше второго) может принимать значения $1,\ 2,\ 3$. Второй, соответственно, $12,\ 6,\ 4$. Так как сумма и разность двух чисел имеет одинаковую чётность, то первый и последний случаи не подходят. Итак:

$$\begin{cases} a - b = 2, \\ a + b = 6; \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4, \\ b = 2. \end{cases}$$

Следовательно, $x = \pm 4$, $y = 1$ или -3.

Ответ. $(\pm 4; 1)$, $(\pm 4; -3)$.

Задача 6. (У)

Решить в целых числах уравнение $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7$.

Идея. Разложить левую часть уравнения на множители.
Указание. Рассмотреть однородное уравнение $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 0$.

Решение. Так как квадратное уравнение $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 0$ имеет корни $x_1 = \dfrac{2y}{5}$, $x_2 = \dfrac{y}{3}$, то

$$15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7 \iff (5x - 2y)(3x - y) = 7.$$

Первый множитель может быть равным ± 1, ± 7, второй, соответственно, ± 7, ± 1. Перебрав эти варианты, получим ответ.

Ответ. $(13; 32)$, $(-5; -16)$, $(-13; -32)$, $(5; 16)$.

Задача 7. (Экон.К-66.1)

Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причём «троек» было больше, чем «пятёрок», и меньше, чем «четвёрок». Кроме того, число «четвёрок» делилось на 10, а число «пятёрок» было чётным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

Идея. Обозначив количество соответствующих оценок за неизвестные величины, составить уравнения задачи и организовать целочисленный перебор вариантов с учётом делимости.
Указание. Если число «2» было n, «3» было m, «4» было p, «5» было k, где $n, m, p, k \in \mathbb{N}$, то получаем:

$$\begin{cases} n + m + p + k = 30, \ p > m > k, \ p \vdots 10, \\ 2n + 3m + 4p + 5k = 93, \ k \vdots 2. \end{cases}$$

Указание. Исключив из уравнений n и заменив $p = 10q$, $k = 2s$, где $q, s \in \mathbb{N}$, получим: $m + 20q + 6s = 33$, откуда $q = 1$.
Указание. Используя тот факт, что $q = 1$, получаем: $m + 6s = 13$, откуда $s = 1$ или $s = 2$; вариант $s = 2$ приводит к $m = 1$ и не отвечает неравенству: $k = 2s < m$.

Решение. Обозначим количество полученных оценок соответственно: «2» – n шт., «3» – m шт., «4» – p шт., «5» $-k$ шт., $n, m, p, k \in \mathbb{N}$; получаем из условия задачи:

$$\begin{cases} n + m + p + k = 30, \\ 2n + 3m + 4p + 5k = 93, \\ k < m < p, \ p \vdots 10, \ k \vdots 2; \end{cases}$$

исключив n из уравнений и подставив $p = 10q$, $k = 2s$ $(q, s \in \mathbb{N})$, получаем:

$$\begin{cases} n = 30 - m - p - k, \ k = 2s, \ p = 10q, \ k < m < p, \\ 60 - 2m - 2p - 2k + 3m + 4p + 5k = 93; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m + 20q + 6s = 33, \\ 2s < m < 10q; \end{cases}$$

из уравнения находим: $q = 1$, $m + 6s = 33 - 20$,

$$\left[\begin{array}{l} s = 2, \ m = 1 - \text{не подходит}; \\ s = 1, \ m = 7; \end{array} \right.$$

значит, получаем: $q = 1$, $s = 1$, $m = 7$, то есть $n = 11$, $m = 7$, $p = 10$, $k = 2$.

Ответ. 11 оценок «2», 7 оценок «3», 10 оценок «4» и две оценки «5».

Задача 8. (Экон-94.1)

Найти все целочисленные решения системы $\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \le 5. \end{cases}$

Идея. Организовать перебор вариантов в соответствии с делимостью переменных из уравнения.
Указание. Заметив, что $7875 = 7 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, а $1701 = 7 \cdot 3^5$, получаем: $63 \cdot (5x)^3 = 63 \cdot (3y)^3$.

Указание. Из условия $5x = 3y$ в целых числах получаем, что $x \,\vdots\, 3$, $y \,\vdots\, 5$.

Решение. Разложим числа на множители:

$$\begin{cases} 7 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot x^3 = 7 \cdot 3^5 \cdot y^3, \\ -5 \le x \le 5; \end{cases} \iff \begin{cases} (5x)^3 = (3y)^3, \\ -5 \le x \le 5; \end{cases} \iff \begin{cases} 5x = 3y, \\ -5 \le x \le 5; \end{cases}$$

то есть $x \,\vdots\, 3$, $y \,\vdots\, 5$; учитывая, что $-5 \le x \le 5$, получаем: $x = 0$, $y = 0$; $x = -3$, $y = -54$; $x = 3$, $y = 5$.

Ответ. $(0;0)$, $(-3;-5)$, $(3;5)$.

Задача 9. (Биол-92.4)

Найти все пары целых чисел p, q, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам $\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$

Приведем два способа решения этой задачи.

Идея. *Первый способ.* Рассмотреть каждое неравенство как квадратное по одной из переменных и записать необходимые условия наличия целочисленных решений у них, после чего организовать перебор возможных вариантов.
Указание. Необходимым условием наличия решений у квадратного неравенства является положительность его дискриминанта. В данной задаче дополнительно накладывается условие целочисленности переменных.
Указание. Переписав систему в виде:

$$\begin{cases} q^2 + 20q + (p^2 - 18p + 166) < 0, \\ q^2 + 12q + (p^2 - 32p + 271) < 0; \end{cases}$$

получаем для дискриминантов:

$$\begin{cases} 100 - p^2 + 18p - 166 > 0, \\ 36 - p^2 + 32p - 271 > 0. \end{cases}$$

Указание. Решая систему неравенств для дискриминантов при $p \in \mathbb{Z}$, получаем, что $p = 12$.
Указание. Подставив найденное значение p в исходную систему неравенств, вычисляем q.

Решение. Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} q^2 + 20q + (p^2 - 18p + 166) < 0, \\ q^2 + 12q + (p^2 - 32p + 271) < 0. \end{cases}$$

Необходимым условием наличия решений является положительность обоих дискриминантов. С учётом целочисленности p получаем:

$$\begin{cases} 100 - p^2 + 18p - 166 > 0, \\ 36 - p^2 + 32p - 271 > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} p^2 - 18p + 66 < 0, \\ p^2 - 32p + 235 < 0; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 9 - \sqrt{15} < p < 9 + \sqrt{15}, \\ 16 - \sqrt{21} < p < 16 + \sqrt{21}; \end{cases} \iff \begin{cases} p = 6; 7; ...; 12, \\ p = 12; 13; ...; 20; \end{cases} \iff p = 12.$$

Возвращаемся к системе неравенств с переменной q, подставив найденное $p = 12$:

$$\begin{cases} q^2 + 20q + 94 < 0, \\ q^2 + 12q + 31 < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -10 - \sqrt{6} < q < -10 + \sqrt{6}, \\ -6 - \sqrt{5} < q < -6 + \sqrt{5}; \end{cases}$$

в целых числах получаем:

$$\begin{cases} q = -12; -22; ...; -8; \\ q = -8; -7; ...; -4; \end{cases} \iff q = -8.$$

Ответ. $(12; -8)$.

Идея. *Второй способ.* Выделив полные квадраты в обоих неравенствах, провести оценки возможных значений переменных.
Указание. Систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} (p - 9)^2 + (q + 10)^2 < 15, \\ (p - 16)^2 + (q + 6)^2 < 21. \end{cases}$$

Указание. Из системы следуют оценки:

$$\begin{cases} -\sqrt{15} < p - 9 < \sqrt{15}, \\ -\sqrt{21} < p - 16 < \sqrt{21}; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\sqrt{15} < q + 10 < \sqrt{15}, \\ -\sqrt{21} < q + 6 < \sqrt{21}. \end{cases}$$

Указание. Из полученных оценок с учётом целочисленности p и q находим:

$$\begin{cases} 6 \le p \le 12, \\ 12 \le p \le 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} -13 \le q \le -7, \\ -10 \le q \le -2; \end{cases}$$

значит, $p = 12$.
Указание. Подставив $p = 12$ в исходное неравенство с переменной q, получим, что $q = -8$.

З а м е ч а н и е. Перебор чисел $q = -10; -9; -8; -7$ в соответствии с полученной оценкой возможен, но такое решение будет не оптимальным.

Р е ш е н и е. Выделим полные квадраты:

$$\begin{cases}(p-9)^2+(q+10)^2<15,\\(p-16)^2+(q+6)^2<21;\end{cases}$$

получаем оценочные неравенства:

$$\begin{cases}-\sqrt{15}<p-9<\sqrt{15},\\-\sqrt{21}<p-16<\sqrt{21},\\-\sqrt{15}<q+10<\sqrt{15},\\-\sqrt{21}<q+6<\sqrt{21};\end{cases}\iff\begin{cases}6\le p\le 12,\\12\le p\le 20,\\-13\le q\le -7,\\-10\le q\le -2;\end{cases}$$

значит, $p = 12$; возвращаясь к исходным неравенствам, уточняем оценку для q:

$$\begin{cases}(q+10)^2<6,\\(q+6)^2<5;\end{cases}\iff\begin{cases}-10-\sqrt{6}<q<-10+\sqrt{6},\\-6-\sqrt{5}<q<-6+\sqrt{5};\end{cases}\iff\begin{cases}-12\le q\le -8,\\-8\le q\le -2;\end{cases}$$

значит, $q = -8$.

О т в е т. $(12; -8)$.

Задача 10. (Почв-77.5)

Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

И д е я. Обозначив число рядов в построении за неизвестную величину, получить условия на оценку этой переменной и организовать перебор вариантов.
У к а з а н и е. Если $n \in \mathbb{N}$ рядов в построении, то получаем:
$(n-2)(n-2+26) < 24n$, где $24n = p^2$, $p \in \mathbb{N}$.
У к а з а н и е. Из неравенства получаем: $n^2 - 2n - 48 < 0$, то есть $n = 1; 2; ...; 7$.

Р е ш е н и е. Обозначим за $n \in \mathbb{N}$ число рядов в построении. Тогда из условия получаем

$$\left\{\begin{array}{l}(n-2)(n-2+26)<24n,\\24n=p^2,\ p\in\mathbb{N};\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}n^2-2n-48<0,\\24n=p^2,\ p\in\mathbb{N};\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}-6<n<8,\\24n=p^2,\ p\in\mathbb{N};\end{array}\right.$$

но $n \in \mathbb{N}$, поэтому $n = 1; 2; ...; 7$. Перебрав все семь вариантов, под условие полного квадрата $24n = p^2$ подходит только $n = 6$, $24n = 144$.

О т в е т. 144 человека.

Задача 11. (ВМК-82.4)

На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

Идея. Обозначив за неизвестную величину число прессов до реконструкции, составить неравенство для производительностей в день до и после реконструкции, по смыслу являющихся целочисленными величинами, после чего с учётом делимости числителей на знаменатели организовать перебор возможных вариантов.

Указание. Если первоначально было n прессов ($n \in \mathbb{N}$), то $p = \dfrac{6480}{n} \in \mathbb{N}$ – производительность до реконструкции и $q = \dfrac{11200}{n+3} \in \mathbb{N}$ – производительность после неё, причём $p < q$.

Указание. $6480 = 5 \cdot 3^4 \cdot 2^4$, $11200 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^6$; при этом $6480 \,\vdots\, n$ и $11200 \,\vdots\, (n+3)$, $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

Указание. Так как 11200 не делится на три, то $n+3$ не делится на три $\Rightarrow$ n не делится на три, $6480 \,\vdots\, n$ и $6480 = 5 \cdot 3^4 \cdot 2^4$; значит, число n является делителем числа $5 \cdot 2^4$.

Указание. Для организации перебора вариантов делителей $5 \cdot 2^4$ удобно не терять из виду, что $n+3$ является делителем числа
$7 \cdot 5^2 \cdot 2^6 = 11200$.

Решение. Обозначим за $n \in \mathbb{N}$ число прессов до реконструкции. Тогда из условия задачи получаем: $p = \dfrac{6480}{n} < \dfrac{11200}{n+3} = q$, где $p, q \in \mathbb{N}$ – производительности по деталям в день до и после реконструкции соответственно. Следовательно,

$$\begin{cases} 6480(n+3) < 11200n, \\ 6480 \,\vdots\, n, \\ 11200 \,\vdots\, (n+3); \end{cases}$$

Так как $6480 = 5 \cdot 3^4 \cdot 2^4$, $11200 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^6$, то из первого неравенства системы получаем:

$$3^4(n+3) < 35 \cdot 4n \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{243}{59} \quad \Longrightarrow \quad n \geq 5,\ n \in \mathbb{N}.$$

Исследуем делимость чисел:

$6480 \,\vdots\, n$, то есть $5 \cdot 3^4 \cdot 2^4 \,\vdots\, n$;

$11200 \,\vdots\, (n+3)$, то есть $7 \cdot 5^2 \cdot 2^6 \,\vdots\, (n+3)$;

Так как 11200 не делится на 3, то и $n+3$ не делится на 3, тогда и n не делится на 3. Значит, в разложении n на простые множители только делители числа $5 \cdot 2^4$; при этом $n \geq 5$. Переберем все возможные варианты:

$n = 5$; $\quad n+3 = 8$ – подходит;

$n = 2^3$; $\quad n + 3 = 11$ – не подходит;
$n = 2^4$; $\quad n + 3 = 19$ – не подходит;
$n = 5 \cdot 2$; $\quad n + 3 = 13$ – не подходит;
$n = 5 \cdot 2^2$; $\quad n + 3 = 23$ – не подходит;
$n = 5 \cdot 2^3$; $\quad n + 3 = 43$ – не подходит;
$n = 5 \cdot 2^4$; $\quad n + 3 = 83$ – не подходит.

Ответ. 5 прессов.

Задача 12. (М/м-00(2).2)

Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашел 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашел. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберёзовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесённых Петей домой грибах?

Идея. Обозначив количество соответствующих грибов за неизвестные величины, составить уравнение по условию равных долей и решить его с организацией целочисленного перебора вариантов.
Указание. Если было собрано x подосиновиков и y белых грибов ($x, y \in \mathbb{N}$, $x > 1$), то из условия равенства долей получаем: $\dfrac{y}{35} = \dfrac{x}{34 - y}$.
Указание. Получающееся квадратное уравнение $y^2 - 34y + 35x = 0$ даёт выражение: $y = 17 \pm \sqrt{289 - 35x} \in \mathbb{N}$.
Указание. Перебрав возможные варианты $289 - 35x \geq 0$, $x \in \mathbb{N}$, $x > 1$, то есть $x = 2; ...; 8$, получаем, что лишь $x = 8$ даёт $y \in \mathbb{N}$.

Решение. Пусть было собрано x подосиновиков, y белых грибов ($x, y \in \mathbb{N}$, $x > 1$). Тогда из равенства долей по условию получаем:

$$\frac{y}{35} = \frac{x}{34 - y} \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 34y + 35x = 0.$$

Для существования решения квадратного уравнения получаем условие на дискриминант $D = 289 - 35x \geq 0$. Так как $x \in \mathbb{N}$, $x > 1$, то $x = 2; ...; 8$. Теперь исследуем на целочисленность решение уравнения

$$y = 17 \pm \sqrt{289 - 35x} \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad 289 - 35x = p^2,\ p \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad x = 8.$$

Ответ. 8 шт.

Задача 13. (Геол.ОГ-88.5)

В пионерский лагерь отправилась автобусная колонна с 510 пионерами, состоящая из «Икарусов» и «Лиазов», причём количество тех и других нечётно. Число пионеров в каждом из «Лиазов» одинаково и кратно трём, а в каждом «Икарусе»– в 1,2 раза больше, чем в одном «Лиазе». Сколько всего автобусов в колонне?

И д е я. Обозначив за неизвестные число автобусов каждого типа и число пионеров в «Лиазе», составить уравнение в целых числах и решить его с организацией перебора вариантов.
У к а з а н и е. Если число автобусов m и n соответственно, а p – число людей в «Лиазе», то имеем: $p \cdot n + \left(\dfrac{6}{5}p\right) \cdot m = 510$, где n и m – нечётные, $p \,\vdots\, 3$.

У к а з а н и е. После преобразований с учётом того, что $p \,\vdots\, 3$ и $p \,\vdots\, 5$, то есть $p \,\vdots\, 15$, $p = 15k$, $k \in \mathbb{N}$, получаем: $k(5n + 6m) = 34 \cdot 5$.
У к а з а н и е. Из того, что n и m нечётны, следует, что $5n + 6m \geq 11$ и тоже нечётно.

Р е ш е н и е. Обозначим число «Икарусов» за m штук, «Лиазов» за n штук, p человек в «Лиазе». Тогда получаем уравнение:

$$p \cdot n + \left(\frac{6}{5}p\right) \cdot m = 510,$$

где $p \,\vdots\, 3$, n и m – нечётные. Требуется найти $S = n + m$, где $n, m, p \in \mathbb{N}$. Так как $\dfrac{6}{5}p \in \mathbb{N}$, то $p \,\vdots\, 5$. Так как $p \,\vdots\, 3$ и $p \,\vdots\, 5$, то $p \,\vdots\, 15$. Значит, $p = 15k$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому из уравнения получаем

$$15k \cdot n + 18k \cdot m = 510 \quad \Longleftrightarrow \quad (5n + 6m)k = 170.$$

Так как n и m нечётны, то $5n$ нечётно и, следовательно, $5n + 6m \geq 11$ и нечётно. Значит, k – чётное, то есть $k = 2r$, $r \in \mathbb{N}$. Поэтому уравнение принимает вид:

$$2r(5n + 6m) = 2 \cdot 5 \cdot 17 \quad \Longleftrightarrow \quad r(5n + 6m) = 5 \cdot 17.$$

Следовательно, возможны только два варианта:

$$\begin{cases} 5n + 6m = 17, \\ r = 5; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 5n + 6m = 85, \\ r = 1; \end{cases}$$

в первом случае возможно лишь значение $m = 1$, но тогда $5n = 11$, нет решений. Решая уравнение $5n + 6m = 85$, используем нечётность переменных:

$$n = 2t + 1, \quad m = 2q + 1,$$

где $t, q \in \mathbb{N}$ (при $t = 0$ получаем $6m = 80$ – нет целых решений, а $q = 0$ приводит к $5n = 79$, что тоже неверно). Тогда уравнение принимает вид:

$$5(2t + 1) + 6(2q + 1) = 85 \quad \Longleftrightarrow \quad 10t + 12q = 74 \quad \Longleftrightarrow \quad 5t + 6q = 37.$$

Значит, $q = 1; 2; 3; 4; 5; 6$. Проверяя все значения для поиска $q \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{N}$, получаем только $q = 2$, $t = 5$. Таким образом, $n = 2t + 1 = 11$, $m = 2q + 1 = 5$; всего автобусов: $S = n + m = 5 + 11 = 16$.

О т в е т. 16 автобусов.

10. Раскрытие модулей в уравнениях и неравенствах различных видов

10.1. Различные приёмы раскрытия модулей, системы уравнений и неравенств с модулями

Задача 1. (Геол-91.2)

Решить уравнение $|x^2-2x-1|-x+1=0$.

Идея. Раскрыть модуль через геометрический смысл.
Указание. Переписав уравнение в виде $|x^2-2x-1|=x-1$, раскрыть модуль, используя его геометрический смысл:

$$\left\{\begin{array}{l} x-1\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=x-1, \\ x^2-2x-1=-(x-1). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $|x^2-2x-1|=x-1$. Раскроем модуль, используя его геометрический смысл:

$$\left\{\begin{array}{l} x-1\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=x-1, \\ x^2-2x-1=1-x; \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x\geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x=0, \\ x^2-x-2=0; \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x\geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ или } x=3, \\ x=-1 \text{ или } x=2; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

значит, $x=2$ или $x=3$.

Ответ. $2; 3$.

Замечание. Естественно, можно раскрывать модуль и по определению, однако точками смены знака подмодульной функции являются не самые удобные для сравнения иррациональные числа, поэтому раскрытие через геометрический смысл предпочтительнее.

Задача 2. (Физ-98(2).2)

Решить неравенство $|x^2+2x-8|>2x$.

Идея. Раскрыть модуль через геометрический смысл.
Указание. Неравенство равносильно совокупности:

$$x^2+2x-8>2x \quad \text{или} \quad x^2+2x-8<-2x.$$

Решение. Раскрывая модуль через геометрический смысл, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x-8>2x, \\ x^2+2x-8<-2x; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2>8, \\ x^2+4x-8<0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x<-2\sqrt{2}, \\ x>2\sqrt{2}, \\ -2-2\sqrt{3}<x<-2+2\sqrt{3}; \end{array}\right.$$

Объединяя полученные промежутки, получим ответ.

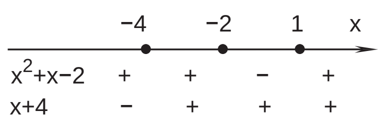
Ответ. $(-\infty; -2+2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$.

Задача 3. (Биол-98.2)

Решить неравенство $|x^2+x-2|+|x+4| \le x^2+2x+6$.

Идея. Раскрыть модули в левой части через точки смены знака подмодульных функций и решить получившиеся неравенства на соответствующих промежутках.
Указание. Точками смены знака подмодульных функций являются значения $x=1$, $x=-4$, $x=-2$, то есть потребуется рассмотреть четыре промежутка.

Решение. Раскрываем модули по определению. Точками смены знака подмодульных функций являются $x=-4$, $x=-2$, $x=1$. Значит, нужно исследовать четыре промежутка.



Согласно расстановке знаков достаточно рассмотреть три случая:

1) $\begin{cases} x < -4, \\ x^2+x-2-x-4 \le x^2+2x+6; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -4, \\ x \ge -6; \end{cases} \iff -6 \le x < -4;$

2) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -4 \le x < -2, \\ x \ge 1, \end{array} \right. \\ x^2+x-2+x+4 \le x^2+2x+6; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -4 \le x < -2, \\ x \ge 1, \end{array} \right. \\ 2 \le 6; \end{cases} \iff$

$\iff \left[\begin{array}{l} -4 \le x < -2, \\ x \ge 1; \end{array} \right.$

3) $\begin{cases} -2 \le x < 1, \\ -x^2-x+2+x+4 \le x^2+2x+6; \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \le x < 1, \\ x^2+x \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \le x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 0; \end{array} \right. \end{cases}$

значит, $x \in [-2; -1] \cup [0; 1)$.

Объединяя все три результата в совокупность, получаем ответ.

Ответ. $[-6; -1] \cup [0; +\infty)$.

Задача 4. (Физ-96(2).3)

Решить неравенство $-1 < |x^2-9| < 27$.

Идея. Раскрыть модуль через геометрический смысл.

Указание. С учётом неотрицательности модуля исходное неравенство равносильно неравенству $|x^2-9|<27$.
Указание. С учётом геометрического смысла модуля неравенство $|x^2-9|<27$ равносильно неравенству $-27<x^2-9<27$.

Решение. С учётом неотрицательности модуля исходное неравенство равносильно неравенству $|x^2-9|<27$, которое раскрываем через геометрический смысл модуля:

$$-27<x^2-9<27 \iff -18<x^2<36 \iff x^2<36 \iff -6<x<6.$$

Ответ. $(-6;6)$.

Задача 5. (Экон-90.2)

Решить уравнение $\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|$.

Идея. С учётом неотрицательности правой части возвести уравнение в квадрат, после чего раскрыть модули через точки смены знака.
Указание. Так как обе части уравнения неотрицательны, то можно возвести их в квадрат:

$$25+|16x^2-25|=16+16(x+1)^2+32|x+1|.$$

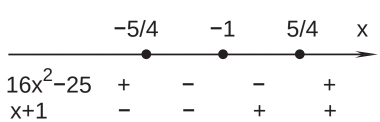
Указание. Полученное уравнение удобно решать, раскрывая модули через точки смены знака подмодульных функций ($x=\pm\dfrac{5}{4}$, $x=-1$).

Решение. В силу неотрицательности правой части уравнения оно равносильно:

$$25+|16x^2-25|=16+16(x+1)^2+32|x+1| \iff$$

$$\iff |16x^2-25|=16x^2+32x+7+32|x+1|.$$

Раскрываем модули по определению:



1) $\begin{cases} x<-\dfrac{5}{4}, \\ 16x^2-25=16x^2+32x+7-32x-32; \end{cases} \iff \begin{cases} x<-\dfrac{5}{4}, \\ 0=0; \end{cases} \iff x<-\dfrac{5}{4};$

2) $\begin{cases} -\dfrac{5}{4}\le x<-1, \\ 25-16x^2=16x^2+32x+7-32x-32; \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{5}{4}\le x<-1, \\ x=\pm\dfrac{5}{4}; \end{cases} \iff x=-\dfrac{5}{4};$

3) $\begin{cases} -1\le x<\dfrac{5}{4}, \\ 25-16x^2=16x^2+32x+7+32x+32; \end{cases} \iff \begin{cases} -1\le x<\dfrac{5}{4}, \\ 16x^2+32x+7=0; \end{cases} \iff$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \le x < \dfrac{5}{4}, \\ x = \dfrac{-16 \pm 12}{16}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4};$$

4) $\begin{cases} x \ge \dfrac{5}{4}, \\ 16x^2 - 25 = 16x^2 + 32x + 7 + 32x + 32; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge \dfrac{5}{4}, \\ 64x + 64 = 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \emptyset$

Объединяя все результаты, получаем ответ.

Ответ. $\left(-\infty; -\dfrac{5}{4}\right] \cup \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

Задача 6. (Геогр-99(1).3)

Решить уравнение $\sqrt{|x^2 + 14x + 47| - 1} = |x + 7| - 1$.

Идея. Выделив полный квадрат под модулем в левой части уравнения и сделав замену переменной, решить уравнение как иррациональное стандартным алгоритмом.
Указание. Уравнение сводится виду:

$$\sqrt{|t^2 - 2| - 1} = t - 1, \quad \text{где} \quad t = |x + 7| \ge 0.$$

Указание. По стандартным алгоритмам возвести в квадрат и раскрыть модуль.

Решение. Преобразуем уравнение, выделив полный квадрат в левой части:

$$\sqrt{|(x + 7)^2 - 2| - 1} = |x + 7| - 1.$$

Сделаем замену $t = |x + 7|$, тогда получаем: $\sqrt{|t^2 - 2| - 1} = t - 1$. Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} |t^2 - 2| = (t - 1)^2 + 1, \\ t \ge 1. \end{cases}$$

Так как $(t - 1)^2 + 1 > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, то удобно раскрывать модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t^2 - 2 = t^2 - 2t + 2; \\ t^2 - 2 = -(t^2 - 2t + 2); \end{array} \right. \\ t \ge 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 2; \\ t^2 - t = 0; \end{array} \right. \\ t \ge 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 2; \\ t = 1. \end{array} \right.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} |x + 7| = 1, \\ |x + 7| = 2; \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x + 7 = \pm 1, \\ x + 7 = \pm 2; \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{-9; -8; -6; -5\}.$$

Ответ. $-9; -8; -6; -5$.

Задача 7. (ВМК-00(1).1)

Решить неравенство $\big||x^2-8x+2|-x^2\big| \geq 2x+2$.

Идея. Последовательно раскрыть модули через геометрический смысл равносильными переходами.

Замечание. Раскрытие модулей через точки смены знака более трудоёмко в силу иррациональности корней подмодульного квадратного трёхчлена.

Указание. Неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2|-x^2 \geq 2x+2, \\ |x^2-8x+2|-x^2 \leq -2x-2. \end{array}\right.$$

Указание. Ещё раз раскрыть модули, используя геометрический смысл.

Решение. Раскроем внешний модуль через геометрический смысл:

$$\left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2|-x^2 \geq 2x+2, \\ |x^2-8x+2|-x^2 \leq -2x-2; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2| \geq x^2+2x+2, \\ |x^2-8x+2| \leq x^2-2x-2. \end{array}\right.$$

Ещё раз раскрываем модули, используя геометрический смысл:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-8x+2 \geq x^2+2x+2, \\ x^2-8x+2 \leq -x^2-2x-2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-8x+2 \geq -x^2+2x+2, \\ x^2-8x+2 \leq x^2-2x-2; \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x^2-3x+2 \leq 0, \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-5x \geq 0, \\ 6x \geq 4; \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \leq 0 \\ 1 \leq x \leq 2, \\ x \geq 5. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;0] \cup [1;2] \cup [5;+\infty)$.

Задача 8. (М/м-00(1).1)

а) Решить неравенство $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

Идея. Умножить обе части неравенства на сопряжённую в смысле разности квадратов в левой части дробь и снять оставшиеся модули через возведение в квадрат или геометрический смысл.

Указание. Умножив обе части неравенства на положительную дробь $\dfrac{|x-4|+|x-1|}{|x-3|+|x-2|}$, получаем: $\dfrac{(x-4)^2-(x-1)^2}{(x-3)^2-(x-2)^2} < \dfrac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|}$.

Указание. После ряда эквивалентных преобразований приходим к неравенству:

$$|x-1| > 2|x-4|, \quad x \neq 4, \quad x \neq \frac{5}{2},$$

которое легко решается возведением обеих частей в квадрат.

Замечание. Конечно, можно решать исходное неравенство раскрытием модулей по определению, но тогда придется рассматривать пять случаев.

Р е ш е н и е. Умножим обе части неравенства на заведомо положительную дробь $\dfrac{|x-4|+|x-1|}{|x-3|+|x-2|}$, после чего получим:

$$\frac{(x-4)^2-(x-1)^2}{(x-3)^2-(x-2)^2} < \frac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{(x-4-x+1)(x-4+x-1)}{(x-3-x+2)(x-3+x-2)} < 1+\frac{|x-1|}{|x-4|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3(2x-5)}{(2x-5)} < 1+\frac{|x-1|}{|x-4|}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |x-1| > 2|x-4|, \\ x \neq 4, \ x \neq \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Возводя обе части неравенства в квадрат, получаем:

$$\begin{cases} (x-1)^2-(2x-8)^2 > 0, \\ x \neq 4, \ x \neq \dfrac{5}{2}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1-2x+8)(x-1+2x-8) > 0, \\ x \neq 4, \ x \neq \dfrac{5}{2}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (x-7)(x-3) < 0, \\ x \neq 4, \ x \neq \dfrac{5}{2}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3 < x < 7, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

О т в е т. $(3;4) \cup (4;7)$.

Задача 9. **(Почв-00.4)**

Решить систему уравнений $\begin{cases} |x-y|+2x=6, \\ |2x-y|+3x=6 \end{cases}$ и изобразить множество решений на координатной плоскости (x,y).

И д е я. Найти значения переменных аналитическим путём, после чего построить соответствующие точки на координатной плоскости.

У к а з а н и е. Раскрыть модули в уравнениях через геометрический смысл и переписать исходную систему в совокупность условий.

У к а з а н и е. Система преобразуется к виду: $\begin{cases} x \leq 2, \\ \left[\begin{array}{l} y = 3x-6, \\ y = 6-x, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 5x-6, \\ y = 6-x; \end{array} \right. \end{cases}$

У к а з а н и е. Далее рассмотреть четыре случая.

Р е ш е н и е. Раскроем модули в обоих уравнениях через геометрический смысл:

$$\begin{cases} |x-y| = 6-2x, \\ |2x-y| = 6-3x; \end{cases} \iff \begin{cases} 6-2x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-y = 6-2x; \\ x-y = 2x-6; \end{array}\right. \\ 6-3x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-y = 6-3x; \\ 2x-y = 3x-6; \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 2, \\ \left[\begin{array}{l} y = 3x-6; \\ y = 6-x; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 5x-6; \\ y = 6-x; \end{array}\right. \end{cases}$$

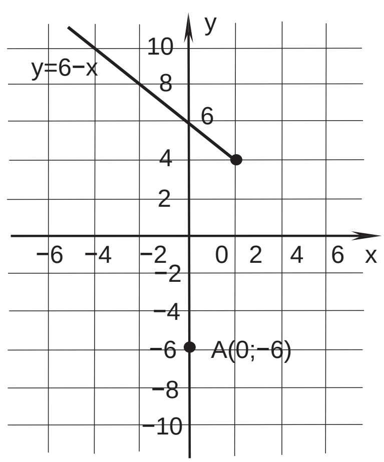
Отсюда получаем четыре случая:

1) $$\begin{cases} x \leq 2, \\ y = 3x-6, \\ y = 5x-6; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = -6; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x \leq 2, \\ y = 3x-6, \\ y = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 2, \\ x = 3, \\ y = 3; \end{cases} \iff \emptyset$$

3) $$\begin{cases} x \leq 2, \\ y = 6-x, \\ y = 5x-6; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2, \\ y = 4; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x \leq 2, \\ y = 6-x, \\ y = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 2, \\ y = 6-x; \end{cases}$$



решение $(2;4)$ входит в семейство $x \leq 2,\ y = 6-x$, то есть $(t;6-t)$, где $2 \geq t \in \mathbb{R}$.

Геометрически на координатной плоскости решения системы изображаются точкой $(0;-6)$ и лучом $y = 6-x$ с началом в точке $(2;4)$.

Ответ. $(0;-6)$, $(t;6-t)$, где $t \leq 2$, $t \in \mathbb{R}$.

Задача 10. (ИСАА-99.5)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-6}-3}{|x-1|-4} \geq 1$.

И д е я. Рассмотреть два случая в соответствии с вариантами знака знаменателя.
У к а з а н и е. Неравенство равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x < -3 \quad \text{или} \quad x > 5, \\ \sqrt{x^2-6} \geq |x-1|-1; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} -3 < x < 5, \\ \sqrt{x^2-6} \leq |x-1|-1. \end{cases}$$

У к а з а н и е. С учётом ОДЗ рассмотреть два случая для каждой из полученных систем. При этом модуль снимается однозначно в каждом случае, а полученные неравенства с радикалами легко решаются.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два случая, в зависимости от знака знаменателя:

1) $$\begin{cases} |x-1| > 4, \\ \sqrt{x^2-6}-3 \geq |x-1|-4; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -3, \end{array} \right. \\ \sqrt{x^2-6} \geq |x-1|-1. \end{cases}$$

Далее рассматриваем две области по x отдельно. При этом в каждом случае подкоренное выражение положительно, правая часть неравенства положительна и модуль снимается однозначно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5, \\ \sqrt{x^2-6} \geq x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ \sqrt{x^2-6} \geq -x; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5, \\ x^2-6 \geq x^2-4x+4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3, \\ x^2-6 \geq x^2; \end{cases} \end{array} \right. \iff x > 5.$$

2) $$\begin{cases} |x-1| < 4, \\ \sqrt{x^2-6}-3 \leq |x-1|-4; \end{cases} \iff \begin{cases} -3 < x < 5, \\ \sqrt{x^2-6} \leq |x-1|-1. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ получаем две области по x, на каждой из которых правая часть неравенства положительна и модуль снимается однозначно:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x \leq -\sqrt{6}, \\ \sqrt{x^2-6} \leq -x; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6} \leq x < 5, \\ \sqrt{x^2-6} \leq x-2; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x \leq -\sqrt{6}, \\ x^2-6 \leq x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{6} \leq x < 5, \\ x^2-6 \leq x^2-4x+4; \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} -3 < x \leq -\sqrt{6}, \\ \sqrt{6} \leq x \leq 2,5. \end{array} \right.$$

О т в е т. $\left(-3; -\sqrt{6}\,\right] \cup \left[\sqrt{6}; \dfrac{5}{2}\right] \cup (5; +\infty)$.

Задача 11. (ВМК-98(1).2)

а) Решить неравенство $|\sqrt{x-4}-3| > |\sqrt{9-x}-2|+1$.

И д е я. Учитывая ОДЗ, снять один модуль, а второй модуль раскрыть через геометрический смысл.
У к а з а н и е. Заметим, что на ОДЗ ($x \in [4;9]$) выражение, стоящее под первым модулем, всегда отрицательно. Поэтому левый модуль однозначно снимается со знаком минус:
$$|\sqrt{9-x}-2| < 2-\sqrt{x-4}.$$

У к а з а н и е. Модуль в получившемся неравенстве лучше снимать, используя геометрический смысл модуля:
$$\begin{cases} \sqrt{9-x}-2 > \sqrt{x-4}-2, \\ \sqrt{9-x}-2 < 2-\sqrt{x-4}; \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Заметим, что на ОДЗ ($x \in [4;9]$) выражение, стоящее под первым модулем, всегда отрицательно. Поэтому левый модуль снимаем однозначно со знаком минус:
$$|\sqrt{9-x}-2| < 2-\sqrt{x-4}.$$

Модуль в получившемся неравенстве снимаем, используя геометрический смысл модуля:
$$\begin{cases} \sqrt{9-x}-2 > \sqrt{x-4}-2, \\ \sqrt{9-x}-2 < 2-\sqrt{x-4}; \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{9-x} > \sqrt{x-4}, \\ \sqrt{9-x}+\sqrt{x-4} < 4; \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} 9-x > x-4, \\ 9-x+x-4+2\sqrt{9-x}\sqrt{x-4} < 16; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 13/2, \\ \sqrt{9-x}\sqrt{x-4} < 11/2; \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} 4 \le x < 13/2, \\ x^2-13x+265/4 > 0; \end{cases} \iff 4 \le x < 13/2,$$

так как дискриминант уравнения $D = 13^2 - 265 < 0$, поэтому неравенство выполняется для всех x.

О т в е т. $\left[4; \dfrac{13}{2}\right)$.

Задача 12. (Геогр-78.5)

а) Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений
$$\begin{cases} |x^2-5x+4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0. \end{cases}$$

И д е я. Решить первое уравнение путём раскрытия модулей через точки смены знака и сопоставить с решениями второго уравнения при всех возможных значениях параметра.
У к а з а н и е. Первое уравнение от параметра не зависит и решается привычной схемой раскрытия модулей по определению на промежутках знакопостоянства подмодульных выражений.
У к а з а н и е. Решая уравнение с параметром как квадратное по независимой переменной x, находим: $x = a-2$ или $x = a$.

У к а з а н и е. Исходная система равносильна:

$$\begin{cases} x=-1 \quad \text{или} \quad 1\le x\le 4,\\ x=a-2 \quad \text{или} \quad x=a. \end{cases}$$

Эта система должна по условию иметь только одно решение, что выполняется, соответственно (анализируя расположение рассматриваемых чисел),

при $a=-1$ или $\begin{cases} a-2<1,\\ 1<a\le 4; \end{cases}$ или $\begin{cases} 1\le a-2\le 4,\\ a>4. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Рассмотрим уравнения по отдельности.

1) $|x^2-5x+4|+10x|x|-9x^2-5x+4=0$;

раскрываем модули через точки смены знака:

а) $\begin{cases} x<0,\\ x^2-5x+4-10x^2-9x^2-5x+4=0; \end{cases} \iff \begin{cases} x<0,\\ 9x^2+5x-4=0; \end{cases} \iff x=-1.$

б) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le x<1,\\ x\ge 4, \end{array}\right.\\ x^2-5x+4+10x^2-9x^2-5x+4=0; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0\le x<1,\\ x\ge 4, \end{array}\right.\\ x^2-5x+4=0; \end{cases} \iff x=4.$

в) $\begin{cases} 1\le x<4,\\ -x^2+5x-4+10x^2-9x^2-5x+4=0; \end{cases} \iff \begin{cases} 1\le x<4,\\ 0=0; \end{cases} \iff 1\le x<4.$

соответственно, получаем: $x=-1$ или $1\le x\le 4$.

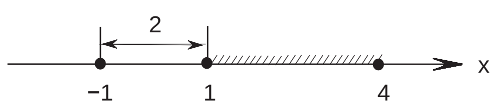
2) $x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0$; решаем как квадратное относительно x:

$$D_1=(a-1)^2-a(a-2)=a^2-2a+1-a^2+2a=1,$$

то есть $x=a-2$ или $x=a$.

Тогда исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} x=-1 \quad \text{или} \quad 1\le x\le 4,\\ x=a-2 \quad \text{или} \quad x=a; \end{cases}$$



эта система по условию задачи должна иметь только одно решение. Анализируя расположение всех задействованных точек на координатной оси при движении числа a вдоль неё, получаем:

$a<-1$ – нет решений;
$a=-1$ – одно решение;
$-1<a<1$ – нет решений;
$a=1$ – два решения;
$a>1$, но $a-2<1$ – одно решение;
$a-2\ge 1$, но $a\le 4$ – два решения;
$a>4$, но $a-2\le 4$ – одно решение;
$a-2>4$ – нет решений;

значит, нас устраивают три случая:

$$a = -1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} a-2<1, \\ a>1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a-2 \le 4, \\ a>4; \end{cases}$$

откуда получаем: $a=-1$ или $1<a<3$ или $4<a\le 6$.

О т в е т. $\{-1\}\cup(1;3)\cup(4;6]$.

З а м е ч а н и е. В приведённом решении рассмотрено число решений системы при всех возможных значениях параметра, что в данном случае излишне. Это было сделано для того, чтобы показать как исследовать вопрос о количестве решений в аналогичных задачах.

Задача 13. (Геол-86.5)

а) Для каждой пары положительных чисел a и b найти решение неравенства $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{a^2}} > \left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{b}\right|$.

И д е я. Возвести обе части неравенства в квадрат и решить получившееся неравенство с учётом выявленных необходимых условий.

У к а з а н и е. В силу неотрицательности обеих частей, неравенство равносильно

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2} > \frac{1}{x^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{2}{bx}.$$

У к а з а н и е. Неравенство приводится к виду: $\dfrac{1}{x} > \dfrac{a^2+b^2}{2a^2b}$, то есть $x>0$, после чего получаем, что фактически $\quad 0<x<\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$.

Р е ш е н и е. В силу неотрицательности обеих частей неравенства оно равносильно:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2} > \frac{1}{x^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{2}{bx} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2}{bx} > \frac{a^2+b^2}{a^2b^2},$$

но $b>0$, поэтому находим: $\dfrac{1}{x} > \dfrac{a^2+b^2}{2a^2b} > 0$, откуда $x>0$ и окончательно: $0<x<\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$ при всех положительных a и b.

О т в е т. $\forall a>0,\ \forall b>0 \quad 0<x<\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$.

Задача 14. (ВМК-95(1).4)

а) Для каждого значения a решить неравенство $|x+2a| \le \dfrac{1}{x}$.

И д е я. Перейти к равносильной системе неравенств, раскрыв модуль через геометрический смысл, в которой использовать необходимое условие положительности правой части исходного неравенства для перехода к системе квадратных неравенств.

Указание. Исходное неравенство при условии $x > 0$ равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 + 2ax - 1 \le 0, \\ x^2 + 2ax + 1 \ge 0. \end{cases}$$

Каждое из этих неравенств является квадратным и решается стандартным алгоритмом.
Указание. Для выяснения расположения корней квадратных трёхчленов на числовой оси удобно рассмотреть контрольные значения параметра $a = \pm 1$ и соответствующие им промежутки.

Решение. Из неравенства следует, что решения могут быть только при $x > 0$, поэтому все дальнейшие рассуждения будем вести на этом луче. Поэтому исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 2a \le \dfrac{1}{x}, \\ x + 2a \ge -\dfrac{1}{x}; \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 + 2ax - 1 \le 0, \ D_1 = a^2 + 1, \\ x^2 + 2ax + 1 \ge 0, \ D_1 = a^2 - 1; \end{cases}$$

решением первого неравенства системы $\forall a \in \mathbb{R}$ будет отрезок

$$-a - \sqrt{a^2 + 1} \le x \le -a + \sqrt{a^2 + 1},$$

но так как $x > 0$, то в системе останется $0 < x \le -a + \sqrt{a^2 + 1}$;

для второго неравенства:

1) $a = \pm 1$, $D_1 = 0$, поэтому левая часть сворачивается в полный квадрат. Значит, $x \in \mathbb{R}$, то есть все $x > 0$ являются решениями;

2) $-1 < a < 1$, $D_1 < 0$, левая часть не имеет корней, то есть неравенство выполнено $\forall x \in \mathbb{R}$, значит, все $x > 0$ являются решениями;

3) $a < -1$ или $a > 1$, $D_1 > 0$, корни $x_1 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ и $x_2 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$; решением неравенства будет $x \le x_1$ или $x \ge x_2$ на луче $x > 0$.

Заметим, что при $a > 1$ $x_1 < x_2 < 0$, то есть на луче $x > 0$ из $x \le x_1$ или $x \ge x_2$ останется решение $x > 0$; тогда как при $a < -1$ $0 < x_1 < x_2$, то есть на луче $x > 0$ решением останется $0 < x \le x_1$ или $x \ge x_2$.

Пересекая решения первого и второго неравенств системы, получаем:
при $a \ge -1$ $0 < x \le -a + \sqrt{a^2 + 1}$;
учитывая, что при $a < -1$ имеет место порядок:

$$0 < -a - \sqrt{a^2 - 1} < -a + \sqrt{a^2 - 1} < -a + \sqrt{a^2 + 1},$$

получаем при $a < -1$ $\left[\begin{array}{l} 0 < x \le -a - \sqrt{a^2 - 1}, \\ -a + \sqrt{a^2 - 1} \le x \le -a + \sqrt{a^2 + 1}. \end{array}\right.$

Ответ. Если $a < -1$, то $x \in (0; -a - \sqrt{a^2 - 1}] \cup [-a + \sqrt{a^2 - 1}; -a + \sqrt{a^2 + 1}]$; если $a \ge -1$, то $x \in (0; -a + \sqrt{a^2 + 1}]$.

10.2. Раскрытие модулей в тригонометрических уравнениях

Задача 1. (ЕГЭ)

Решите уравнение $\cos^2 x + 0,5|\cos x| \cdot \sin x = 0$.

Идея. Раскрыть модуль по определению и решить получившиеся уравнения разложением на множители и расщеплением.
Указание. После раскрытия модуля по определению и вынесения $\cos x$ за скобки, получаем два уравнения. Второе уравнение лучше решать как однородное уравнение первой степени.

Решение. 1) При $\cos x \geq 0$ уравнение принимает вид:

$$2\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x(2\cos x + \sin x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = -2; \end{array}\right.$$

отбираем корни, удовлетворяющие условию $\cos x \geq 0$:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = -\operatorname{arctg} 2 + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

2) При $\cos x < 0$ уравнение принимает вид:

$$2\cos^2 x - \cos x \cdot \sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x(2\cos x - \sin x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 2; \end{array}\right.$$

условию $\cos x < 0$ удовлетворяет только $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Объединяя результаты, получаем ответ.

Ответ. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi m,\ -\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k;\ n, m, k \in \mathbb{Z}.$

Задача 2. (Экон.К-77.1)

Решить уравнение $\dfrac{\cos x}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x|$.

Идея. Раскрыть модуль, предварительно исследовав знаки всех множителей в разных частях уравнения, после чего решить квадратное уравнение с отбором корней.
Указание. Правая часть всегда неотрицательна, знаменатель в левой части всегда положителен, поэтому, в силу равенства обеих частей, числитель дроби в левой части тоже неотрицателен.
Указание. За счёт неотрицательности косинуса в числителе дроби модуль снимается и уравнение переписывается в виде: $\dfrac{\cos x}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = \cos x$, где $\cos x \geq 0$.
Это уравнение легко решается разложением на множители и расщеплением.

Р е ш е н и е. Правая часть всегда неотрицательна, а знаменатель в левой части положителен. Поэтому для выполнения равенства необходимо, чтобы и числитель дроби был неотрицателен, то есть $\cos x \geq 0$, а это позволяет снять модуль в уравнении:

$$\frac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = \cos x.$$

Решая это уравнение, получаем два случая:

1) $\begin{cases} \cos x = 0, \\ x \neq -\dfrac{3}{2}; \end{cases} \iff x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

2) $\begin{cases} \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 = 1, \\ \cos x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5}{2}, \\ x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x > 0; \end{cases} \iff x = -\dfrac{1}{2}.$

О т в е т. $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. (Почв-77.3)

Решить уравнение $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$.

И д е я. Рассмотреть два случая раскрытия модуля по определению и решить тригонометрические уравнения в каждом случае.
У к а з а н и е. Снимая модуль по определению, получаем два случая:

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos x = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x + \cos x = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Раскрывая модуль по определению, получим два случая:

1) $\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x = \sin x + 2\cos x; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos x = 0; \end{cases} \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

2) $\begin{cases} \sin x < 0, \\ -\sin x = \sin x + 2\cos x; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x + \cos x = 0; \end{cases}$

разделив последнее уравнение на $\sin x \neq 0$, получаем:

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ \operatorname{ctg} x = -1; \end{cases} \iff x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. (Почв-99(1).2)

Решить уравнение $\left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right| = \sin x - \dfrac{1}{2}$.

Идея. Раскрыть модуль по определению или через его геометрический смысл.
Указание. Раскрывая модуль по определению, получаем:

$$\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \cos x - \dfrac{1}{2} = \sin x - \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{2}, \\ -\cos x + \dfrac{1}{2} = \sin x - \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

в каждом из случаев уравнение решается стандартными приёмами для тригонометрического уравнения.

Решение. Раскрывая модуль по определению, получаем два случая:

$$1) \begin{cases} \cos x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \cos x - \dfrac{1}{2} = \sin x - \dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{2}, \\ -\cos x + \dfrac{1}{2} = \sin x - \dfrac{1}{2}; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{2}, \\ \cos x + \sin x = 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1; \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{array} \right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m;\ \ n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 5. (Псих-89.2)

Решить уравнение $\left|\cos^2 \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1\,.$

Идея. Свести уравнение к линейному тригонометрическому уравнению с модулем, применив формулу понижения степени.
Указание. Применив формулу понижения степени, получим уравнение:

$$|5\cos x + 1| = 10\,(5\cos x + 1)\,,$$

которое легко решается, если ввести замену $t = 5\cos x + 1$.

Решение. Сначала понизим степень уравнения:

$$\left|\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1 \iff \left|\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{10}\right| = 5\cos x + 1 \iff$$

$$\iff \quad |5\cos x + 1| = 10\,(5\cos x + 1)\,,$$

то есть $|t| = 10t$, где $t = 5\cos x + 1$. Раскрывая модуль через геометрический смысл, находим, что единственным решением этого уравнения является $t = 0$, то есть

$$\cos x = -\frac{1}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi n = \pi \pm \arccos\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\pi \pm \arccos\dfrac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Задача 6. (Почв-97.3)

Решить уравнение $2\sin^2 x - \dfrac{|\sin x|}{\cos x} = 0$.

И д е я. Перенеся дробь в правую часть, раскрыть модуль по определению.

У к а з а н и е. Уравнение $2\sin^2 x = \dfrac{|\sin x|}{\cos x}$ равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \sin x \ge 0, \\ 2\sin^2 x = \dfrac{\sin x}{\cos x}; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \sin x < 0, \\ 2\sin^2 x = -\dfrac{\sin x}{\cos x}; \end{cases}$$

которая решается стандартными способами.

Р е ш е н и е. $2\sin^2 x = \dfrac{|\sin x|}{\cos x}$. Раскрывая модуль по определению, получаем два случая:

$$1)\ \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ 2\sin^2 x\cos x = \sin x, \\ \cos x \ne 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 2x = 1; \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$2)\ \begin{cases} \sin x < 0, \\ 2\sin^2 x\cos x = -\sin x; \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin 2x = -1; \end{cases} \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

О т в е т. $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \pi m;\ \ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. (Геол.ОГ-76.3)

Найти все решения уравнения $\dfrac{|1-\cos x|}{1-\cos x}\sin x = 4\sin^2 x\cos x$.

И д е я. С учётом области определения уравнения и области значений косинуса раскрыть модуль и перейти к совокупности простейших тригонометрических уравнений.

У к а з а н и е. Из ОДЗ следует, что $\cos x \ne 1$ и за счёт области значений косинуса $1 - \cos x > 0$, то есть модуль в уравнении снимается.

У к а з а н и е. Уравнение равносильно совокупности: $\sin x = 0$ или $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$, где $\cos x \ne 1$.

Р е ш е н и е. Поскольку знаменатель дроби не должен равняться нулю, то в данном уравнении $\cos x \neq 1$, однако, так как $\cos x \leq 1$ по области значений, то модуль всегда раскрывается с плюсом, то есть уравнение переписывается в виде:

$$\begin{cases} \sin x = 4\sin^2 x \cos x, \\ \cos x \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}, \end{array} \right. \\ \cos x \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \\ x \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

значит, окончательно получаем: $x = \pi + 2\pi k$ или $(-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $\pi + 2\pi k$, $(-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 8. (Биол-98.3)

Решить уравнение $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \sin x \left(\cos x - \dfrac{2}{3} \right)$.

И д е я. Применить в левой части формулу косинуса двойного угла и раскрыть возникший модуль по определению.

У к а з а н и е. Уравнение приводится к виду: $|\sin x| = \sin x \left(\cos x - \dfrac{2}{3} \right)$, после чего решается раскрытием модуля по определению.

У к а з а н и е. Раскрывая модуль по определению, приходим к совокупности:

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \dfrac{5}{3}; \end{array} \right. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Применив к левой части формулу косинуса двойного угла, получаем:

$$\sqrt{1 - (1 - 2\sin^2 x)} = \sqrt{2} \sin x \left(\cos x - \frac{2}{3} \right) \iff |\sin x| = \sin x \left(\cos x - \frac{2}{3} \right).$$

Раскрывая модуль по определению, получаем два случая:

1) $\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x = \sin x \left(\cos x - \dfrac{2}{3} \right); \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \dfrac{5}{3} > 1; \end{array} \right. \end{cases} \iff x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

2) $\begin{cases} \sin x < 0, \\ -\sin x = \sin x \left(\cos x - \dfrac{2}{3} \right); \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x = -\dfrac{1}{3}; \end{cases} \iff$

$\iff x = -\arccos\left(-\dfrac{1}{3} \right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

О т в е т. πn, $-\arccos\left(-\dfrac{1}{3} \right) + 2\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 9. (Почв-91.3)

Решить уравнение $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|$.

И д е я. Применить формулу косинуса суммы углов и раскрыть модуль по определению.
У к а з а н и е. Формула косинуса суммы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

за счёт её применения уравнение преобразуется к виду:

$$\cos x-2\sin x=|\cos x|.$$

У к а з а н и е. Полученное уравнение решать, раскрывая модуль по определению.

Р е ш е н и е. Применив формулу косинуса суммы углов, уравнение преобразуется к виду:

$$\cos x-2\sin x=|\cos x|.$$

Раскрывая модуль по определению, получаем два случая:

1) $\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \cos x-2\sin x=\cos x;\end{cases} \iff \begin{cases}\cos x\ge 0,\\ \sin x=0;\end{cases} \iff \quad x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$

2) $\begin{cases}\cos x<0,\\ \cos x-2\sin x=-\cos x;\end{cases} \iff \begin{cases}\cos x<0,\\ \sin x=\cos x;\end{cases} \iff \begin{cases}\cos x<0,\\ \operatorname{tg} x=1;\end{cases} \iff$

$\iff \quad x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

О т в е т. $2\pi n,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m;\quad n,m\in\mathbb{Z}$.

Задача 10. (Экон-95.2)

Решить уравнение $2|\sin x|+\sqrt{3}\log_{\operatorname{tg} x}\left(-\dfrac{\cos x}{|\sin x|}\right)=0$.

И д е я. Раскрыть модули за счёт области определения входящих функций и перейти к простейшему тригонометрическому уравнению с отбором корней.
У к а з а н и е. Область определения уравнения задаётся условиями:

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}>0, \quad \operatorname{tg} x\ne 1,\\ -\dfrac{\cos x}{|\sin x|}>0, \quad \sin x\ne 0;\end{cases}$$

из которых получаем: $\cos x<0,\quad \sin x<0,\quad \operatorname{tg} x\ne 1,$ что позволяет сразу раскрыть входящие модули.

У к а з а н и е. Уравнение равносильно системе:
$\begin{cases} \sqrt{3}\log_{\operatorname{tg} x} \operatorname{ctg} x = 2\sin x, \\ \sin x < 0,\ \cos x < 0,\ \operatorname{tg} x \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x < 0,\ \cos x < 0,\ \operatorname{tg} x \neq 1. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Область определения:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} > 0, \quad \operatorname{tg} x \neq 1, \\ -\dfrac{\cos x}{|\sin x|} > 0, \quad \sin x \neq 0; \end{cases}$$

из второго неравенства получаем, что $\cos x < 0$, тогда из первого следует, что $\sin x < 0$. Значит, $\sin x < 0,\ \cos x < 0,\ \ \operatorname{tg} x \neq 1$, что позволяет записать исходное уравнение без модулей:

$$-2\sin x + \sqrt{3}\log_{\operatorname{tg} x}\frac{\cos x}{\sin x} = 0 \iff \sqrt{3}\log_{\operatorname{tg} x}\operatorname{ctg} x = 2\sin x \iff \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

то есть $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$. Согласно области определения нас интересуют углы третьей четверти. Поэтому $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Задача 11. (Экон-97.1)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \left|\sin\dfrac{\pi(x+y)}{4}\right| + \left|1 - \sin\dfrac{\pi(x-y)}{4}\right| = 0, \\ \sqrt{4 - |x| - |y+2|} = \sqrt{4 - |x| - |y+2|}. \end{cases}$

И д е я. В первом уравнении воспользоваться тем, что сумма модулей всегда неотрицательна, а из второго уравнения остаётся только ОДЗ.
У к а з а н и е. Так как сумма модулей всегда неотрицательна, то первое уравнение равносильно системе двух уравнений:

$$\sin\frac{\pi(x+y)}{4} = 0, \quad \sin\frac{\pi(x-y)}{4} = 1.$$

Второе уравнение обращается в верное равенство всюду на области определения.
У к а з а н и е. Из тригонометрических уравнений получаем:

$$\begin{cases} x = 1 + 2n + 4k,\ n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = x - 2 - 8k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ |x| + |y+2| \leq 4. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Из первого равенства следует, что $x -$ нечётное целое число, а из неравенства следует, что $x \in [-4; 4]$. Поэтому возможны только $x = -3; -1; 1; 3$. Рассмотреть по очереди эти четыре случая.

Р е ш е н и е. Так как сумма модулей всегда неотрицательна, то система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \sin \dfrac{\pi(x+y)}{4} = 0, \\ \sin \dfrac{\pi(x-y)}{4} = 1, \\ 4 - |x| - |y+2| \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 4n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x - y = 2 + 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ |x| + |y+2| \leq 4; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + 2n + 4k, \ n, k \in \mathbb{Z}, \\ y = x - 2 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ |x| + |y+2| \leq 4; \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что x – нечётное целое число, а из неравенства следует, что $x \in [-4; 4]$. Поэтому возможны только $x = -3; -1; 1; 3$. Рассмотрим по очереди эти четыре случая:

$$1) \begin{cases} x = -3, \\ y = -5 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ |y+2| \leq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3, \\ y = -5 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ -3 \leq y \leq -1; \end{cases} \iff \emptyset;$$

$$2) \begin{cases} x = -1, \\ y = -3 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ |y+2| \leq 3; \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = -3 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ -5 \leq y \leq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ y = -3; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = 1, \\ y = -1 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ |y+2| \leq 3; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = -1 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ -5 \leq y \leq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = -1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ |y+2| \leq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 - 8k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ -3 \leq y \leq -1; \end{cases} \iff \emptyset.$$

О т в е т. $(1; -1)$, $(-1; -3)$.

Задача 12. (Геол-99.5)

Решить уравнение
$|\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3| = |\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3|$.

И д е я. Перейти к равносильному уравнению путём возведения обеих частей неравенства в квадрат.

З а м е ч а н и е. В принципе, можно выбрать любой из двух подходов:
а) уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно уравнению: $f^2(x) = g^2(x)$, то есть

$$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0;$$

б) уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности:

$$f(x) = g(x) \quad \text{или} \quad f(x) = -g(x).$$

С точки зрения универсальности применения, в том числе и для неравенств, которые при разложении на множители эффективно решаются методом интервалов, предпочтительнее первый подход, который и положен в основу идеи решения.

У к а з а н и е. Уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно уравнению $f^2(x) = g^2(x)$, то есть $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$.
У к а з а н и е. После разложения на множители по формуле разности квадратов уравнение принимает вид:

$$\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} \cdot \left(\operatorname{ctg}^2 2x - 3\right) = 0.$$

У к а з а н и е. Последнее уравнение решается расщеплением с учётом области определения: $\operatorname{ctg} 2x \leq 0$.

Р е ш е н и е. Так как обе части уравнения неотрицательны, то его обе части можно возвести в квадрат:

$$\left(\operatorname{ctg}^2 2x + 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3\right)^2 = \left(\operatorname{ctg}^2 2x - 8\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} - 3\right)^2.$$

Раскладывая по формуле разности квадратов, получаем:

$$16\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x} \cdot \left(2\operatorname{ctg}^2 2x - 6\right) = 0.$$

Расщепляя это уравнение, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} -\operatorname{ctg} 2x = 0, \\ \left\{\begin{array}{l} \operatorname{ctg}^2 2x = 3, \\ \operatorname{ctg} 2x \leq 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2};\ k, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 13. (Хим-96.5)

Решить уравнение $\quad |1 + \cos \pi\sqrt{x}| + |x^2 - 15x + 44| = 15x - x^2 - \cos \pi\sqrt{x} - 45$.

И д е я. Заметив, что в правой части стоит сумма подмодульных выражений левой, взятых со знаком минус, перейти к соответствующей равносильной системе без модулей.
У к а з а н и е. Переписать уравнение в виде:

$$|\cos \pi\sqrt{x} + 1| + |x^2 - 15x + 44| = -(\cos \pi\sqrt{x} + 1) - (x^2 - 15x + 44)$$

и перейти к равносильной системе условий.
У к а з а н и е. Уравнение вида $|f(x)| + |g(x)| = -f(x) - g(x)$ равносильно системе: $f(x) \leq 0,\ g(x) \leq 0$.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнение в виде:

$$|\cos \pi\sqrt{x} + 1| + |x^2 - 15x + 44| = -(\cos \pi\sqrt{x} + 1) - (x^2 - 15x + 44);$$

так как в правой части стоит сумма подмодульных выражений левой, взятых со знаком минус, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} \cos \pi\sqrt{x} + 1 \leq 0, \\ x^2 - 15x + 44 \leq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \pi\sqrt{x} = -1, \\ 4 \leq x \leq 11; \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x} = 2n + 1, \\ 2 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{11}; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \sqrt{x} = 3 \quad \iff \quad x = 9.$$

О т в е т. 9.

Задача 14. (ВМК-81.5)

Найти все решения уравнения $|\sin(2x-1)| = \cos x$, удовлетворяющие условию $|x| \le 2\pi$.

И д е я. Возвести обе части уравнения в квадрат с учётом дополнительных условий равносильности, после чего понизить степени тригонометрических функций по соответствующим формулам и решить тригонометрическое уравнение с отбором корней.

У к а з а н и е. Условие задачи равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin^2(2x-1) = \cos^2 x, \\ \cos x \ge 0, \\ |x| \le 2\pi. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Понижая степень в обеих частях уравнения по тригонометрическим формулам, получаем: $\cos 2x + \cos(4x-2) = 0$, где $|x| \le 2\pi$, $\cos x \ge 0$.

У к а з а н и е. Финальный отбор решений эффективнее всего делать через тригонометрическую окружность.

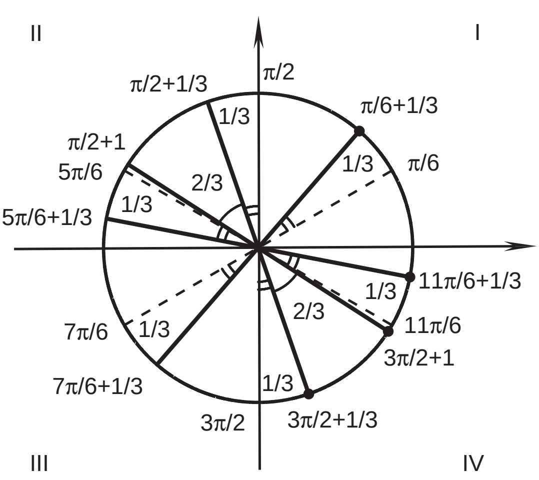
Р е ш е н и е. Возводя обе части уравнения в квадрат, с учётом дополнительных условий равносильности получаем систему:

$$\begin{cases} \sin^2(2x-1) = \cos^2 x, \\ \cos x \ge 0, \\ |x| \le 2\pi; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \cos(4x-2) = 1 + \cos 2x, \\ \cos x \ge 0, \\ |x| \le 2\pi; \end{cases}$$

для основного уравнения получаем:

$$\cos 2x + \cos(4x-2) = 0 \iff 2\cos(3x-1)\cos(x-1) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x - 1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 1 + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



Отметим все полученные серии на тригонометрической окружности, причём для удобства обозначим соответствующие точки числами из промежутка $[0;2\pi]$:

- точки серии $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$ получаются из точек «стандартной» серии $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$ сдвигом каждой из них (поворотом) по окружности в положительном направлении на угол $\dfrac{1}{3}\in\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$;
- точки серии $x=\dfrac{\pi}{2}+1+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$ получаются из точек «стандартной» серии $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$ сдвигом каждой из них на угол $1\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right)$;

учитывая условие $\cos x\geq 0$, требуется рассмотреть углы только I и IV четвертей; из промежутка $[0;2\pi]$ подходят углы:

$$\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3},\ \frac{3\pi}{2}+\frac{1}{3},\ \frac{3\pi}{2}+1,\ \frac{11\pi}{6}+\frac{1}{3};$$

в соответствии с неравенством $|x|\leq 2\pi$, то есть $-2\pi\leq x\leq 2\pi$, в окончательный ответ требуется записать в дополнение к перечисленным точкам их же, уменьшенных на 2π:

$$\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}-2\pi,\ \frac{3\pi}{2}+\frac{1}{3}-2\pi,\ \frac{3\pi}{2}+1-2\pi,\ \frac{11\pi}{6}+\frac{1}{3}-2\pi.$$

Ответ. $\dfrac{-\pi+2}{2},\ \dfrac{3\pi+2}{2},\ \dfrac{\pm\pi+2}{6},\ \dfrac{\pm 11\pi+2}{6},\ \dfrac{-3\pi+2}{6},\ \dfrac{9\pi+2}{6}.$

10.3. Раскрытие модулей в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах

Задача 1. (Экон.К-86.1)

Решить уравнение $2^{|x+1|}=\left(\sqrt{2}\right)^{-2x+3}$.

Идея. Перейти к равенству для показателей степеней, которое решить, раскрыв модуль через геометрический смысл.

Указание. Переписать уравнение в виде $2^{|x+1|}=2^{(-2x+3)/2}$ и перейти к равенству для показателей степеней, которое решить, раскрыв модуль через геометрический смысл.

Указание. Переходя к равенству для показателей степеней, получить уравнение:

$$|x+1|=\frac{-2x+3}{2},$$

которое решить, раскрыв модуль, например, через геометрический смысл.

Решение.

$$2^{|x+1|}=(\sqrt{2})^{-2x+3}\iff 2^{|x+1|}=2^{(-2x+3)/2}\iff |x+1|=\frac{-2x+3}{2}\iff$$

$$\iff \begin{cases} -2x+3 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+1 = \dfrac{-2x+3}{2}, \\ x+1 = -\dfrac{-2x+3}{2}; \end{array} \right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq \dfrac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4}, \\ 2 = -3 \text{ – неверно.} \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ. $\dfrac{1}{4}$.

Задача 2. (М/м-98(1).1)

Решить уравнение $2^{2x} - 2^{x+2} + \left|2^x - \dfrac{1}{3}\right| = -\dfrac{7}{3}$.

Идея. Рассматривая уравнение относительно показательной функции, раскрыть модуль по определению и решить два квадратных уравнения с отбором решений.
Указание. Уравнение можно переписать в виде:

$$z^2 - 4z + \frac{7}{3} + \left|z - \frac{1}{3}\right| = 0, \quad \text{где} \quad z = 2^x > 0.$$

Указание. Раскрывая в полученном уравнении модуль по определению, приходим к совокупности:

$$\begin{cases} z \geq \dfrac{1}{3}, \\ z^2 - 3z + 2 = 0; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 0 < z < \dfrac{1}{3}, \\ z^2 - 5z + \dfrac{8}{3} = 0; \end{cases}$$

которая решается стандартными способами.

Решение. Введем новую переменную $z = 2^x > 0$. Тогда уравнение перепишется в виде:

$$z^2 - 4z + \frac{7}{3} + \left|z - \frac{1}{3}\right| = 0.$$

Раскрывая модуль по определению, получим два случая:

1) $\begin{cases} z \geq \dfrac{1}{3}, \\ z^2 - 3z + 2 = 0; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} z = 1, \\ z = 2; \end{array} \right.$

2) $\begin{cases} 0 < z < \dfrac{1}{3}, \\ z^2 - 5z + \dfrac{8}{3} = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < z < \dfrac{1}{3}, \\ 3z^2 - 15z + 8 = 0; \end{cases} \iff z = \dfrac{15 \pm \sqrt{129}}{6};$

так как $\dfrac{15 - \sqrt{129}}{6} > \dfrac{15 - \sqrt{144}}{6} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$, то оба найденных значения в $0 < z < \dfrac{1}{3}$ не попадают.

Возвращаемся к $z = 2^x$:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 1, \\ 2^x = 2; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Ответ. 0; 1.

Задача 3. (М/м-93(1).1)

Решить неравенство $5\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{5}}\right)^{35x} < 5^{|x^2+6x-1|}$.

Идея. Перейдя от показательного неравенства к стандартному неравенству с модулем, решить последнее через геометрический смысл модуля числа.
Указание. Неравенство переписывается в виде:

$$5^{1-\frac{35}{6}x} < 5^{|x^2+6x-1|} \quad\Longleftrightarrow\quad |x^2+6x-1| > 1-\frac{35}{6}x.$$

Указание. Неравенство с модулем лучше решать через геометрический смысл.

Решение. Преобразовав левую часть, приходим к неравенству:

$$5^{1-\frac{35}{6}x} < 5^{|x^2+6x-1|} \quad\Longleftrightarrow\quad |x^2+6x-1| > 1-\frac{35}{6}x.$$

Раскрываем модуль через геометрический смысл:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+6x-1 > 1-\dfrac{35}{6}x, \\ x^2+6x-1 < -1+\dfrac{35}{6}x; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} 6x^2+71x-12 > 0, \\ 6x^2+x < 0; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x < -12, \\ x > \dfrac{1}{6}, \\ -\dfrac{1}{6} < x < 0. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;-12)\cup\left(-\dfrac{1}{6};0\right)\cup\left(\dfrac{1}{6};+\infty\right)$.

Задача 4. (М/м-97(2).1)

Решить неравенство $\dfrac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|3-2^x|} \geq 1$.

Идея. Рассмотрев неравенство относительно показательной функции, раскрыть модуль по определению.
Указание. Если $z=2^x>0$, то неравенство можно записать в виде:

$$\frac{21-z-\dfrac{64}{z}-|z-3|}{5-|z-3|} \geq 1,$$

после чего рассмотреть случаи $z \geq 3$ и $z<3$.

Решение. Введем новую переменную $z=2^x>0$. Учитывая чётность модуля, неравенство перепишется в виде:

$$\frac{21-z-\dfrac{64}{z}-|z-3|}{5-|z-3|} \geq 1.$$

Раскрывая модуль по определению, получаем два случая:
1) При $z \geq 3$ получаем:

$$\frac{21 - z - \dfrac{64}{z} - z + 3}{5 - z + 3} \geq 1 \iff \frac{24z - 2z^2 - 64}{z(8 - z)} \geq 1 \iff$$

$$\iff \frac{24z - 2z^2 - 64 - 8z + z^2}{z(8 - z)} \geq 0 \iff \frac{z^2 - 16z + 64}{z - 8} \geq 0 \iff \frac{(z - 8)^2}{z - 8} \geq 0$$

$$\iff z - 8 > 0 \iff z > 8 \iff 2^x > 8 \iff x > 3;$$

2) При $z \in (0; 3)$ получаем:

$$\frac{21 - z - \dfrac{64}{z} + z - 3}{5 + z - 3} \geq 1 \iff \frac{18z - 64}{z(z + 2)} \geq 1,$$

но $z(z + 2) > 0$, поэтому неравенство эквивалентно следующему:

$$18z - 64 \geq z^2 + 2z \iff z^2 - 16z + 64 \leq 0 \iff (z - 8)^2 \leq 0 \iff z = 8.$$

Значит, нет решений при $z \in (0; 3)$.

О т в е т. $(3; +\infty)$.

Задача 5. (Почв-84.3)

Решить неравенство $\log_2 \left| 1 + \dfrac{1}{x} \right| > 1$.

И д е я. Перейдя от логарифмического неравенства к неравенству с модулем, раскрыть его через геометрический смысл.

У к а з а н и е. Снимая логарифм, получить неравенство: $\left| 1 + \dfrac{1}{x} \right| > 2$, которое проще всего решать, используя геометрический смысл модуля.

Р е ш е н и е. Снимая логарифм, получаем: $\left| 1 + \dfrac{1}{x} \right| > 2$, что равносильно:

$$\left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{1}{x} < -2, \\ 1 + \dfrac{1}{x} > 2; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + 3 < 0, \\ \dfrac{1}{x} - 1 > 0; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x + 1}{x} < 0, \\ \dfrac{1 - x}{x} > 0; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{3} < x < 0, \\ 0 < x < 1. \end{array} \right.$$

О т в е т. $\left(-\dfrac{1}{3}; 0 \right) \cup (0; 1)$.

Задача 6. (Физ-95(2).5)

Решить неравенство $|\log_7(x+2)| > 1$.

И д е я. Раскрыть модуль через геометрический смысл и решить два логарифмических неравенства.

У к а з а н и е. Неравенство равносильно совокупности:
$\left[\begin{array}{l}\log_7(x+2) > 1;\\ \log_7(x+2) < -1;\end{array}\right.$ решаемой стандартными способами.

Р е ш е н и е. Раскрываем модуль через геометрический смысл:

$$\left[\begin{array}{l}\log_7(x+2) > 1;\\ \log_7(x+2) < -1;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x+2 > 7;\\ 0 < x+2 < \dfrac{1}{7};\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x > 5;\\ -2 < x < -\dfrac{13}{7}.\end{array}\right.$$

О т в е т. $\left(-2; -\dfrac{13}{7}\right) \cup (5; +\infty)$.

Задача 7. (Экон.К-85.2)

Решить неравенство $x \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3} - x\right) \geq |x|$.

И д е я. Раскрыв модуль по определению, выйти на простейшее логарифмическое неравенство с отбором решений.

У к а з а н и е. Неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll}x \geq 0, & x\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3} - x\right) \geq x;\\ x < 0, & x\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3} - x\right) \geq -x.\end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. 1) $x = 0$ – решение.

2) $\left\{\begin{array}{l}x > 0,\\ x\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3} - x\right) \geq x;\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x > 0,\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3} - x\right) \geq 1;\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x > 0,\\ 0 < \dfrac{1}{3} - x \leq \dfrac{1}{2};\end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}x > 0,\\ -\dfrac{1}{6} \leq x < \dfrac{1}{3};\end{array}\right. \iff 0 < x < \dfrac{1}{3}.$$

3) $\left\{\begin{array}{l}x < 0,\\ x\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3} - x\right) \geq -x;\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x < 0,\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3} - x\right) \leq -1;\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x < 0,\\ \dfrac{1}{3} - x \geq 2;\end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}x < 0,\\ x \leq -\dfrac{5}{3};\end{array}\right. \iff x \leq -\dfrac{5}{3}.$$

О т в е т. $\left(-\infty; -\dfrac{5}{3}\right] \bigcup \left[0; \dfrac{1}{3}\right)$.

Задача 8. (Геол-92.3)

Решить уравнение $|3\log_x x^4 + 7\log_7 2 \cdot \log_2 x^2| = -\log_x 49$.

И д е я. Рассмотрев уравнение относительно логарифма по постоянному основанию, раскрыть модуль через геометрический смысл и решить совокупность двух квадратных уравнений с отбором корней.
У к а з а н и е. Используя свойства логарифмов, переписать уравнение в виде:

$$|12 + 14\log_7 x| = -\frac{2}{\log_7 x}.$$

У к а з а н и е. Сделав замену $z = \log_7 x$, раскрыть модуль через геометрический смысл.

Р е ш е н и е. Используя свойства логарифмов, перепишем уравнение в виде:

$$|12\log_x x + 14\log_7 x| = -2\log_x 7.$$

Введем новую переменную $z = \log_7 x$. Тогда уравнение примет вид:

$$|6 + 7z| = -\frac{1}{z}.$$

Раскрываем модуль через геометрический смысл:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 7z + 6 = -\dfrac{1}{z}; \\ 7z + 6 = \dfrac{1}{z}; \end{array}\right. \\ z < 0; \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 7z^2 + 6z + 1 = 0; \\ 7z^2 + 6z - 1 = 0; \end{array}\right. \\ z < 0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{2}}{7}; \\ z = -1. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к логарифму, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \log_7 x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{2}}{7}; \\ \log_7 x = -1; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 7^{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}}; \\ x = \dfrac{1}{7}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $7^{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}}$; $\dfrac{1}{7}$.

Задача 9. (Экон.М-99.1)

Решить неравенство $\log_{1+|7x+17|}(|3x+8| + |7x+17|) \le 1$.

И д е я. По определению логарифма перейти от логарифмического неравенства к неравенству с модулями и воспользоваться геометрическим смыслом модуля.
У к а з а н и е. Основание логарифма всегда не меньше единицы, поэтому при снятии логарифма знак неравенства сохранится.
У к а з а н и е. Неравенство равносильно системе:

$$|3x+8| + |7x+17| \le 1 + |7x+17|, \quad x \ne -\frac{17}{7}.$$

Решение. Учитывая, что $|7x+17| \geq 0$, получаем, что основание логарифма не меньше единицы, поэтому неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} |3x+8| + |7x+17| \leq 1 + |7x+17|, \\ 1 + |7x+17| \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} |3x+8| \leq 1, \\ x \neq -\dfrac{17}{7}. \end{cases}$$

Раскрываем модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} -1 \leq 3x+8 \leq 1, \\ x \neq -\dfrac{17}{7}; \end{cases} \iff \begin{cases} -3 \leq x \leq -\dfrac{7}{3}, \\ x \neq -\dfrac{17}{7}. \end{cases}$$

Ответ. $\left[-3; -\dfrac{17}{7}\right) \bigcup \left(-\dfrac{17}{7}; -\dfrac{7}{3}\right]$.

Задача 10. (ВМК-70.2)

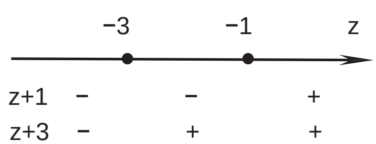
Решить уравнение $|1 - \log_{\frac{1}{6}} x| + 2 = |3 - \log_{\frac{1}{6}} x|$.

Идея. Рассмотрев выражение как уравнение относительно логарифма, раскрыть модули через точки смены знака подмодульных функций на соответствующих промежутках.

Указание. Ввести переменную $z = \log_6 x$, чтобы упростить рассуждения.

Указание. После замены уравнение принимает вид: $|z+1| + 2 = |z+3|$. Для раскрытия модулей надо рассмотреть промежутки: $z < -3$; $-3 \leq z < -1$; $z \geq -1$.

Решение. Учитывая, что $\log_{\frac{1}{6}} x = -\log_6 x$, введем переменную: $z = \log_6 x$. Тогда уравнение примет вид: $|z+1| + 2 = |z+3|$. Раскрываем модули по определению, через точки смены знака:



1) $\begin{cases} z < -3, \\ -z - 1 + 2 = -z - 3; \end{cases} \iff \emptyset;$

2) $\begin{cases} -3 \leq z < -1, \\ -z - 1 + 2 = z + 3; \end{cases} \iff \emptyset;$

3) $\begin{cases} z \geq -1, \\ z + 1 + 2 = z + 3; \end{cases} \iff z \geq -1.$

Возвращаясь к логарифму, получаем: $\log_6 x \geq -1 \iff x \geq \dfrac{1}{6}$.

Ответ. $\left[\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$.

Задача 11. (ВМК-93.3)

Решить неравенство $|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \le 3^x + 4x - x^2 - 7$.

Идея. Сгруппировать слагаемые в правой части равенства и воспользоваться нестандартным методом решения неравенств с модулями.
Указание. Неравенство вида $|f(x)| + |g(x)| \le f(x) - g(x)$ равносильно системе: $f(x) \ge 0,\ g(x) \le 0$.

Решение. Сгруппируем слагаемые в правой части равенства:

$$|3^x-4|+|x^2-4x+3| \le 3^x+4x-x^2-7 \iff |3^x-4|+|x^2-4x+3| \le (3^x-4)-(x^2-4x+3).$$

Это уравнение эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} 3^x - 4 \ge 0, \\ x^2 - 4x + 3 \le 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \log_3 4, \\ 1 \le x \le 3; \end{cases} \iff \log_3 4 \le x \le 3.$$

Ответ. $[\log_3 4; 3]$.

Задача 12. (Экон-83.3)

Решить неравенство $\log_3(x^2 - 2) < \log_3\left(\frac{3}{2}|x| - 1\right)$.

Идея. Перейти к неравенству для подлогарифменных функций; рассмотреть полученное неравенство как квадратное относительно новой переменной $y = |x|$.
Указание. Учитывая монотонность логарифмической функции, снять логарифмы, не забывая при этом про ОДЗ:

$$0 < x^2 - 2 < \frac{3}{2}|x| - 1.$$

Полученные неравенства решить относительно $|x|$.

Решение. Учитывая монотонность логарифмической функции, снимем логарифмы, не забывая при этом про ОДЗ:

$$\log_3(x^2-2) < \log_3\left(\frac{3}{2}|x| - 1\right) \iff 0 < x^2-2 < \frac{3}{2}|x|-1 \iff \begin{cases} 2x^2 - 3|x| - 2 < 0, \\ x^2 > 2. \end{cases}$$

Решим эти неравенства относительно $|x|$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < |x| < 2, \\ |x| > \sqrt{2}; \end{cases} \iff \sqrt{2} < |x| < 2 \iff \left[\begin{array}{l} -2 < x < -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} < x < 2. \end{array} \right.$$

Ответ. $\left(-2; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; 2\right)$.

Задача 13. (Геол-99(1).5)

Решить неравенство $2 < |2\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 4| \le 3$.

Идея. Раскрыв модуль через геометрический смысл, перейти к совокупности логарифмических неравенств, каждое из которых решается стандартными способами.

Указание. Используя чётность модуля, неравенство можно переписать в виде: $1 < |\log_2(3x+1) + 2| \le \dfrac{3}{2}$.

Указание. Неравенство $a < |f(x)| < b$ при $b > a > 0$ равносильно совокупности: $a < f(x) < b$ или $-b < f(x) < -a$.

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$2 < |-2\log_2(3x+1) - 4| \le 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < |\log_2(3x+1) + 2| \le \frac{3}{2}.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 1 < \log_2(3x+1) + 2 \le \dfrac{3}{2}; \\ -\dfrac{3}{2} \le \log_2(3x+1) + 2 < -1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -1 < \log_2(3x+1) \le -\dfrac{1}{2}; \\ -\dfrac{7}{2} \le \log_2(3x+1) < -3. \end{array}\right.$$

В силу монотонности логарифмической функции получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < 3x+1 \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ \dfrac{1}{8\sqrt{2}} \le 3x+1 < \dfrac{1}{8}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{6} < x \le \dfrac{\sqrt{2}-2}{6}; \\ \dfrac{\sqrt{2}-16}{48} \le x < -\dfrac{7}{24}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left[\dfrac{\sqrt{2}-16}{48}; -\dfrac{7}{24}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{\sqrt{2}-2}{6}\right]$.

Задача 14. (Соц-97.5)

Решить систему $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |x\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2}x - 1. \end{cases}$

Идея. Выполнив преобразования показательных функций в неравенстве системы, перейти к равносильному неравенству для показателей степеней.

Указание. Привести неравенство к виду:

$$2^{9x^2 - \frac{5}{3}} > 2^{x+3}.$$

Указание. Система эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} 9x^2 - \dfrac{5}{3} > x + 3, \\ x\sqrt{2} - 1 \ge 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{32}}\cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3},\\ |x\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}x-1;\end{cases} \iff \begin{cases}2^{9x^2-\frac{5}{3}} > 2^{x+3},\\ x\sqrt{2}-1\ge 0;\end{cases} \iff \begin{cases}9x^2-\dfrac{5}{3} > x+3,\\ x\ge \dfrac{1}{\sqrt{2}};\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}27x^2-3x-14>0,\\ x\ge \dfrac{1}{\sqrt{2}};\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{2}{3},\\ x>\dfrac{7}{9},\end{array}\right.\\ x\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{cases} \iff x>\frac{7}{9}.$$

О т в е т. $\left(\dfrac{7}{9};+\infty\right)$.

Задача 15. (М/м-90.2)

Решить уравнение $3\cdot 2^{\cos x+3\sqrt{1-\sin^2 x}}+11\cdot 2^{2\cos x}-34=0$.

И д е я. Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством и раскрыв модуль в показателе по определению, перейти к квадратным уравнениям.
У к а з а н и е. Применив основное тригонометрическое тождество, получить:

$$3\cdot 2^{\cos x+3|\cos x|}+11\cdot 2^{2\cos x}-34=0.$$

У к а з а н и е. Раскрыв модуль в показателе по определению, перейти к квадратным уравнениям относительно $2^{2\cos x}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$3\cdot 2^{\cos x+3|\cos x|}+11\cdot 2^{2\cos x}-34=0.$$

Раскрывая модуль по определению, получим два случая:

1) $\begin{cases}\cos x\ge 0,\\ 3\cdot 2^{4\cos x}+11\cdot 2^{2\cos x}-34=0;\end{cases} \iff \begin{cases}\cos x\ge 0,\\ 2^{2\cos x}=2;\end{cases} \iff$

$$\iff \cos x=\frac{1}{2} \iff x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

2) $\begin{cases}\cos x<0,\\ 3\cdot 2^{-2\cos x}+11\cdot 2^{2\cos x}-34=0;\end{cases} \iff \begin{cases}\cos x<0,\\ \left[\begin{array}{l}2^{2\cos x}=\dfrac{1}{11},\\ 2^{2\cos x}=3;\end{array}\right.\end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases}\cos x<0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1}{11},\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\log_2 3;\end{array}\right.\end{cases} \iff \begin{cases}\cos x<0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=-\log_2\sqrt{11},\\ \cos x=\log_2\sqrt{3};\end{array}\right.\end{cases}$$

но $-\log_2\sqrt{11}<-\log_2 3<-1$, а $\log_2\sqrt{3}>0$, то есть в этом случае решений нет.

О т в е т. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

11. Разложение на множители и расщепление в уравнениях и неравенствах различных видов

11.1. Понятие расщепления, равносильные преобразования

Задача 1. (ЕГЭ)

Найдите сумму корней уравнения $(x+1)\cdot\sqrt{2x^2+5x+2}=0$.

Идея. Использовать метод расщепления уравнения.
Указание. Уравнение равносильно совокупности условий: либо первый сомножитель равен нулю, а второй имеет смысл, либо второй сомножитель равен нулю.

Решение. Расщепляя уравнение стандартным образом, приходим к следующей совокупности.
1) Первый сомножитель равен нулю, а второй имеет смысл:

$$\begin{cases} x+1=0, \\ 2x^2+5x+2\geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1, \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -2; \\ x\geq -0,5; \end{array}\right. \end{cases} \implies \text{нет решений.}$$

2) Второй сомножитель равен нулю:

$$2x^2+5x+2=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=-2; \\ x=-0,5. \end{array}\right.$$

Сумма корней $S=-2-0,5=-2,5$.

Ответ. $-2,5$.

Задача 2. (ЕГЭ)

Найдите произведение корней уравнения $(2x-3)\cdot\sqrt[3]{2x^2-5x+2}=0$.

Идея. Использовать метод расщепления уравнения.
Указание. Уравнение равносильно совокупности условий: либо $2x-3=0$, либо $2x^2-5x+2=0$.
Указание. Заметим, что второй сомножитель имеет смысл $\forall x\in\mathbb{R}$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности (расщепление стандартным образом):

$$\left[\begin{array}{l} 2x-3=0; \\ 2x^2-5x+2=0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=1,5; \\ x=2; \\ x=0,5. \end{array}\right.$$

Произведение корней $P=1,5\cdot 2\cdot 0,5=1,5$.

Ответ. $1,5$.

Задача 3. (Экон-86.3)

Решить уравнение $\sqrt{3x+4}\cdot(9x^2+21x+10)=0$.

Идея. Использовать расщепление уравнения стандартным образом.
Указание. Уравнение равносильно совокупности: $3x+4=0$ или $9x^2+21x+10=0$ при $3x+4\ge 0$.

Решение. Расщепляя уравнение стандартным образом, получаем равносильную совокупность.

1) $3x+4=0 \iff x=-\dfrac{4}{3}$.

2) $\begin{cases} 9x^2+21x+10=0, \\ 3x+4\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{-21\pm 9}{18}, \\ x\ge -\dfrac{4}{3}; \end{cases} \iff x=-\dfrac{2}{3}$.

Ответ. $-\dfrac{4}{3}$; $-\dfrac{2}{3}$.

Задача 4. (ВМиК-78.1)

Решить неравенство $(x-1)\cdot\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$.

Идея. Учитывая неотрицательность второго сомножителя, свести неравенство к равносильной совокупности.
Указание. Неравенство равносильно совокупности условий: либо $x^2-x-2=0$, либо $x-1\ge 0$ при $x^2-x-2\ge 0$.

Решение. Второй сомножитель на области определения неотрицателен, поэтому неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0; \\ \begin{cases} x-1\ge 0, \\ x^2-x-2\ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Корни уравнения $x=-1$ и $x=2$.
Решаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ x^2-x-2\ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} x\le -1; \\ x\ge 2; \end{array}\right. \end{cases} \iff x\ge 2.$$

Объединяем решения: $x=-1$ или $x\ge 2$.

Ответ. $\{-1\}\cup[2;\infty)$.

Задача 5. (Геол-88.2)

Решить неравенство $(x^2+8x+15)\cdot\sqrt{x+4}\geq 0$.

Идея. Использовать расщепление неравенства с учётом области определения и неотрицательности второго сомножителя.
Указание. Неравенство равносильно совокупности: $x=-4$ или $x^2+8x+15\geq 0$ при $x\geq -4$.

Решение. Поскольку второй сомножитель всегда неотрицателен, неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x=-4, \\ \begin{cases} x^2+8x+15\geq 0, \\ x\geq -4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решения квадратного неравенства $x\leq -5$ или $x\geq -3$; условию $x\geq -4$ удовлетворяет луч $x\geq -3$.

Ответ. $\{-4\}\cup[-3;\infty)$.

Задача 6. (Экон.К-86.3)

Решить неравенство $(8x^2-6x+1)\cdot\sqrt{-25x^2+15x-2}\geq 0$.

Идея. Использовать расщепление неравенства с учётом области определения и неотрицательности второго сомножителя.
Указание. Неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} -25x^2+15x-2=0; \\ \begin{cases} 8x^2-6x+1\geq 0, \\ -25x^2+15x-2\geq 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение. Учитывая область определения и неотрицательность второго сомножителя, перейдём к равносильной совокупности.

1) Второй сомножитель равен нулю:

$$-25x^2+15x-2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{5}; \\ x=\dfrac{2}{5}. \end{array}\right.$$

2) Первый сомножитель неотрицателен, а второй имеет смысл:

$$\begin{cases} 8x^2-6x+1\geq 0, \\ -25x^2+15x-2\geq 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq\dfrac{1}{4}; \\ x\geq\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{5}\leq x\leq\dfrac{2}{5}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{5}\leq x\leq\frac{1}{4}.$$

Объединив результаты, получим ответ.

Ответ. $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right] \bigcup \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

Задача 7. (М/м-83.1)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

Идея. Перенеся выражения в левую часть и разложив разность на множители, применить стандартный метод расщепления.
Указание. После разложения на множители получим неравенство

$$\sqrt{6+x-x^2} \cdot \left(\frac{1}{2x+5} - \frac{1}{x+4}\right) \geq 0.$$

Указание. Полученное неравенство равносильно совокупности:
$\sqrt{6+x-x^2} = 0$ или $\dfrac{1}{2x+5} - \dfrac{1}{x+4} \geq 0$ на области определения.

Решение. Перенесём дробь из правой части неравенства в левую и разложим разность на множители:

$$\sqrt{6+x-x^2} \cdot \left(\frac{1}{2x+5} - \frac{1}{x+4}\right) \geq 0.$$

Применим стандартную процедуру расщепления.
1) Первый сомножитель равен нулю:

$$6+x-x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x = 3. \end{array}\right.$$

2) Второй сомножитель неотрицателен, а первый определён:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+5} - \dfrac{1}{x+4} \geq 0, \\ 6+x-x^2 \geq 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2x+5} \geq \dfrac{1}{x+4}; \\ -2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Заметим, что при $x \in [-2; 3]$ оба знаменателя положительны, поэтому система будет равносильна следующей:

$$\begin{cases} x+4 \geq 2x+5, \\ -2 \leq x \leq 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq -1, \\ -2 \leq x \leq 3; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad -2 \leq x \leq -1.$$

Объединив с ранее найденными точками, получаем, что $x \in [-2; -1] \cup \{3\}$.

Ответ. $[-2; -1] \cup \{3\}$.

Задача 8. (М/м-95(1).2)

Решить уравнение $\dfrac{|x^3|-|5x|}{\sqrt{2x^2-4x-1}-|x|+2}=0$.

Идея. Перейти к равносильной системе; корни числителя проверить на принадлежность области определения непосредственной подстановкой в знаменатель.
Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x^3|-|5x|=0, \\ 2x^2-4x-1\ge 0, \\ \sqrt{2x^2-4x-1}-|x|+2\ne 0. \end{cases}$$

Указание. Корнями уравнения являются числа $x=0$ и $x=\pm\sqrt{5}$, первое из которых не отвечает условию неотрицательности подкоренной функции, а два других обращают её в полный квадрат.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x^3|-|5x|=0, \\ 2x^2-4x-1\ge 0, \\ \sqrt{2x^2-4x-1}-|x|+2\ne 0. \end{cases}$$

Корни уравнения $x=0$ и $x=\pm\sqrt{5}$. Подставим найденные значения в неравенства системы:

- если $x=0$, то подкоренная функция $2x^2-4x-1=-1<0$, то есть этот корень не подходит;
- если $x=\sqrt{5}$, то $2x^2-4x-1=9-4\sqrt{5}=(\sqrt{5}-2)^2$, тогда левая часть второго неравенства принимает вид $|\sqrt{5}-2|-|\sqrt{5}|+2=\sqrt{5}-2-\sqrt{5}+2=0$; значит, $x=\sqrt{5}$ не подходит;
- если $x=-\sqrt{5}$, то $2x^2-4x-1=9+4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^2$, то есть для второго неравенства системы находим $|\sqrt{5}+2|-|-\sqrt{5}|+2=\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2=4\ne 0$ – верно.

Ответ. $-\sqrt{5}$.

Задача 9. (ЕГЭ)

При каких значениях параметра a уравнение $(x^2+4x+3)\sqrt{x-a}=0$ имеет ровно два решения?

Идея. Применив расщепление, перейти к равносильной совокупности; свести задачу к перебору возможных вариантов расположения корней уравнений в зависимости от значений параметра.

Указание. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+4x+3=0,\\ x-a\ge 0;\end{cases}\\ x-a=0.\end{array}\right.$$

Указание. Корни первого уравнения $x=-3$ и $x=-1$, корень второго уравнения $x=a$.
Указание. В зависимости от значений параметра уравнение может иметь от одного до трёх различных корней; необходимо отобрать те значения параметра, при которых корней ровно два.

Решение. Расщепляя уравнение стандартным образом, получим совокупность условий.
1) Первый сомножитель равен нулю, а второй имеет смысл:

$$\begin{cases}x^2+4x+3=0,\\ x-a\ge 0;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-3;\\ x=-1;\end{array}\right.\\ x\ge a.\end{cases}$$

2) Второй сомножитель равен нулю:

$$x-a=0 \iff x=a.$$

В зависимости от значений параметра a исходное уравнение может иметь от одного до трёх различных корней:

- если $a<-3$, то совокупность имеет три решения $x=a$, $x=-3$ и $x=-1$. Значит, значения $a<-3$ не подходят;
- если $a=-3$, то у совокупности два решения $x=-3$ и $x=-1$. Следовательно, значение $a=-3$ удовлетворяет условию задачи;
- если $-3<a<-1$, то у совокупности два решения $x=a$ и $x=-1$. Значит, значения $-3<a<-1$ подходят;
- если $a=-1$, то решение единственное $x=-1$;
- если $a>-1$, то решение единственное $x=a$.

Итак, ровно два решения существуют при $a\in[-3;-1)$.

Ответ. $[-3;-1)$.

Задача 10. (Псих-98.3)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{16-3x^2+22x}\le 0$.

Идея. Решить неравенство расщеплением, то есть перебрать возможные варианты знаков числителя и знаменателя.
Указание. Рассмотреть два случая: числитель не отрицателен, знаменатель – отрицателен и числитель не положителен, знаменатель – положителен.

Р е ш е н и е. Первый случай: $\begin{cases}\sqrt{4x+7}-3x+5\geq 0,\\ 16-3x^2+22x<0;\end{cases}\iff$

$$\iff\begin{cases}\sqrt{4x+7}\geq 3x-5,\\ 3x^2-22x-16>0;\end{cases}\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x+7\geq(3x-5)^2,\\ 3x-5\geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x+7\geq 0,\\ 3x-5<0;\end{cases}\end{array}\right.\\ 3x^2-22x-16>0;\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}9x^2-34x+18\leq 0,\\ x\geq\dfrac{5}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq-\dfrac{7}{4},\\ x<\dfrac{5}{3};\end{cases}\end{array}\right.\\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup(8;+\infty);\end{cases}\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left[\dfrac{17-\sqrt{127}}{9};\dfrac{17+\sqrt{127}}{9}\right];\\ x\ \geq\ \dfrac{5}{3};\end{cases}\\ x\in\left[-\dfrac{7}{4};\dfrac{5}{3}\right);\end{array}\right.\\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup(8;+\infty);\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\in\left[\dfrac{5}{3};\dfrac{17+\sqrt{127}}{9}\right];\\ x\in\left[-\dfrac{7}{4};\dfrac{5}{3}\right);\end{array}\right.\\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup(8;+\infty);\end{cases}\iff\begin{cases}x\in\left[-\dfrac{7}{4};\dfrac{17+\sqrt{127}}{9}\right];\\ x\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup(8;+\infty);\end{cases}\iff$$

$$\iff x\in\left[-\frac{7}{4};-\frac{2}{3}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{17-\sqrt{127}}{9}<\frac{17-11}{9}=\frac{2}{3}<\frac{5}{3};\qquad\frac{17+\sqrt{127}}{9}>\frac{17+11}{9}=\frac{28}{9}>\frac{5}{3}.$$

Второй случай: $\begin{cases}\sqrt{4x+7}-3x+5\leq 0,\\ 16-3x^2+22x>0;\end{cases}\iff\begin{cases}\sqrt{4x+7}\leq 3x-5,\\ 3x^2-22x-16<0;\end{cases}\iff$

$$\iff\begin{cases}4x+7\leq(3x-5)^2,\\ 3x-5\geq 0;\\ 4x+7\geq 0;\\ 3x^2-22x-16<0;\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases}x\ \in\ \left(-\infty;\dfrac{17-\sqrt{127}}{9}\right]\cup\left[\dfrac{17+\sqrt{127}}{9};+\infty\right);\\ x\geq\dfrac{5}{3};\\ x\ \in\ \left(-\dfrac{2}{3};8\right);\end{cases}\iff x\in\left[\frac{17+\sqrt{127}}{9};8\right).$$

Объединив найденные промежутки, получим ответ.

О т в е т. $\left[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right) \bigcup \left[\frac{17+\sqrt{127}}{9}; 8\right)$.

Задача 11. (Геол-95.3)

Решить систему $\begin{cases} x^3 \cdot \sqrt{x-y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$

И д е я. Применив расщепление к первому уравнению системы, свести её к совокупности случаев, решаемых подстановкой.
У к а з а н и е. Первое уравнение системы равносильно совокупности $x = y$ или $x = 0$ при $x \geq y$. Подставляя эти значения во второе уравнение, решаем систему.

Р е ш е н и е. Первое уравнение системы равносильно совокупности $x = y$ или $x = 0$ при $x \geq y$. Рассмотрим эти два случая.

1) $\begin{cases} x = y, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 21, \\ y = 21. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 0, \\ x \geq y, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y \leq 0, \\ 2y^2 + y - 21 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = -\frac{7}{2}; \\ y = 3; \end{array} \right. \end{cases}$

значит, $x = 0$, $y = -\frac{7}{2}$.

О т в е т. $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$; $(21; 21)$.

Задача 12. (Псих-90.3)

Решить неравенство $\left(-\frac{x}{2} + \frac{5}{8} - \frac{15}{88 - 32x}\right)^2 \leq 1$.

И д е я. Разложить неравенство на множители с помощью формулы разности квадратов.
У к а з а н и е. Приведя сомножители к единым знаменателям, решить неравенство методом интервалов.

Р е ш е н и е. Перенесём единицу в левую часть и воспользуемся формулой для разности квадратов:

$$\left(-\frac{x}{2} - \frac{3}{8} - \frac{15}{88 - 32x}\right)\left(-\frac{x}{2} + \frac{13}{8} - \frac{15}{88 - 32x}\right) \leq 0;$$

приведём слагаемые в каждом сомножителе к одному знаменателю:

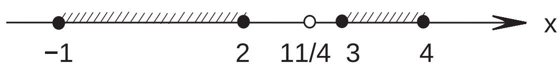
$$\frac{(4x+3)(11-4x)+15}{8(11-4x)} \cdot \frac{(4x-13)(11-4x)+15}{8(11-4x)} \le 0;$$

числители дробей разложим на множители и применим метод интервалов:

$$\begin{cases} \left(44x+33-16x^2-12x+15\right)\left(44x-143+52x-16x^2+15\right) \le 0, \\ x \ne 11/4; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} (16x^2-32x-48)(16x^2-96x+128) \le 0, \\ x \ne 11/4; \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} (x^2-2x-3)(x^2-6x+8) \le 0, \\ x \ne 11/4; \end{cases} \iff \quad \begin{cases} (x+1)(x-2)(x-3)(x-4) \le 0, \\ x \ne 11/4; \end{cases}$$



значит, $-1 \le x \le 2$ или $3 \le x \le 4$.

О т в е т. $[-1;2] \cup [3;4]$.

Задача 13. (Геол-99(1).7)

Решить неравенство $\sqrt{4x-x^2-3} \ge \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}$.

И д е я. Разложив подкоренные выражения на множители, вынести общий множитель за скобки с учётом соответствующих условий на области определения.
У к а з а н и е. Область определения

$$\begin{cases} 4x-x^2-3 = (x-1)(3-x) \ge 0, \\ x^2-7x+12 = (x-3)(x-4) \ge 0, \\ x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \ge 0; \end{cases} \iff \quad x \in [1;2] \cup \{3\}.$$

У к а з а н и е. Разложив подкоренные выражения на множители и учитывая область определения, вынести за скобки $\sqrt{3-x}$.
У к а з а н и е. $x = 3$ является решением, а на остальной области определения неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x-1} \ge \sqrt{3-x} \cdot (\sqrt{4-x} - \sqrt{2-x}), \\ 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Неравенство $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} \ge \sqrt{4-x}$ решается по стандартному алгоритму равносильных преобразований для неравенств с радикалами.

Р е ш е н и е. Разложим на множители подкоренные выражения:

$$\sqrt{(x-1)(3-x)} \geq \sqrt{(x-3)(x-4)} - \sqrt{(x-2)(x-3)}.$$

Область определения неравенства задаётся системой

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 3; \\ x \geq 4; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 2; \\ x \geq 3. \end{array}\right. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2; \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Проверив, что $x = 3$ является решением неравенства, рассматриваем далее $x \in [1;2]$. Поскольку в этом случае $\sqrt{3-x} > 0$, неравенство принимает вид

$$\sqrt{x-1} \geq \sqrt{4-x} - \sqrt{2-x} \quad \iff \quad \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} \geq \sqrt{4-x}.$$

Решаем это неравенство как стандартное с радикалами:

$$x - 1 + 2 - x + 2\sqrt{2x-2+x-x^2} \geq 4 - x \quad \iff 2\sqrt{3x-2-x^2} \geq 3 - x.$$

Заметим, что при $x \in [1;2]$ правая часть последнего неравенства строго положительна, поэтому возводим в квадрат без дополнительных ограничений:

$$4(3x-2-x^2) \geq (3-x)^2 \quad \iff \quad 12x-8-4x^2 \geq 9-6x+x^2 \quad \iff \quad 5x^2-18x+17 \leq 0.$$

Дискриминант квадратного трёхчлена отрицателен, поэтому неравенство не имеет решений.

О т в е т. 3.

Задача 14. (М/м-73.3)

Решить неравенство $4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2-x)\cdot 2^x + 2^{x+1}\cdot x\sqrt{2-x^2}$.

И д е я. Сгруппировав слагаемые, разложить выражение на множители и решить неравенство методом расщепления.
У к а з а н и е. После группировки слагаемых и разложения на множители получим неравенство $(4 - x\cdot 2^x)(x - 1 + 2\sqrt{2-x^2}) > 0$.
У к а з а н и е. Первый сомножитель положителен на области определения.
У к а з а н и е. Неравенство для второго сомножителя $x-1+2\sqrt{2-x^2} > 0$ решается стандартно.

Р е ш е н и е. Область определения $|x| \leq \sqrt{2}$. Сгруппируем слагаемые и разложим выражение на множители:

$$4(x-1) - x(x-1)2^x > 2\sqrt{2-x^2}(x\cdot 2^x - 4) \quad \iff$$

$$\iff \quad (x-1)(4 - x\cdot 2^x) + 2\sqrt{2-x^2}(4 - x\cdot 2^x) > 0 \quad \iff$$

$$\iff \quad (4 - x\cdot 2^x)(x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2}) > 0.$$

Далее применим метод расщепления. Прежде всего найдём корни первого сомножителя и определим промежутки знакопостоянства. Корни первого сомножителя определяются из уравнения

$$4 - x\cdot 2^x = 0 \quad \iff \quad x\cdot 2^x = 4.$$

Решения могут быть лишь при $x > 0$, то есть с учётом области определения при $x \in (0;\sqrt{2}]$. В этом случае в левой части уравнения стоит произведение двух монотонно возрастающих положительно определённых функций $f(x) = x\cdot 2^x$. Значит, $f(x) > 0$ и монотонно возрастает. Поскольку

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\cdot 2^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}\cdot 2^{1{,}5} = 4,$$

то на промежутке $(0;\sqrt{2}]$ $f(x) < 4$, то есть $x\cdot 2^x < 4$. Следовательно, на ОДЗ $4 - x\cdot 2^x > 0$.

Значит, в решаемом неравенстве достаточно потребовать положительности второго сомножителя:

$$x - 1 + 2\sqrt{2 - x^2} > 0 \quad \iff \quad 2\sqrt{2 - x^2} > 1 - x.$$

Переходим к равносильной совокупности систем в зависимости от знака правой части.

1) При неотрицательной правой части возводим неравенство в квадрат:

$$\begin{cases} 4(2 - x^2) > (1 - x)^2, \\ 1 - x \ge 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2 - 2x - 7 < 0, \\ x \le 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -1 < x < \dfrac{7}{5}, \\ x \le 1; \end{cases} \iff \quad -1 < x \le 1.$$

2) При отрицательной правой части учитываем область определения:

$$\begin{cases} 2 - x^2 \ge 0, \\ 1 - x < 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}, \\ x > 1; \end{cases} \iff \quad 1 < x \le \sqrt{2}.$$

Объединяя результаты, получаем ответ.

О т в е т. $\big(-1;\sqrt{2}\,\big]$.

Задача 15. **(Геогр-96(1).4)**

Решить неравенство $\dfrac{\left(3x - 2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x - \log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{7}\right)^2}{x - 8\sin\frac{241\pi}{12}} \le 0$.

И д е я. Учитывая неотрицательность второго сомножителя в числителе и вычислив значения логарифмической и тригонометрических функций, расщепить неравенство и решить стандартным методом интервалов.

Указание. $\sin\dfrac{241\pi}{12} = \sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$; $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$; $\log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{7} = \log_3 28$.

Указание. Расщепляя неравенство, получим, что $x = \log_3 28$ – решение. Остаётся неравенство $\dfrac{x - \frac{4\pi}{9}}{x - \sqrt{8}\left(\sqrt{3}-1\right)} \le 0$.

Решение. Прежде всего вычислим значения тригонометрических и логарифмической функций:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3};$$

$$\log_{\sqrt{3}} 2\sqrt{7} = \log_3 28;$$

$$\sin\frac{241\pi}{12} = \sin\left(20\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}.$$

Подставляем найденные значения в неравенство:

$$\frac{\left(x - \frac{4\pi}{9}\right)\left(x - \log_3 28\right)^2}{x - \sqrt{8}\left(\sqrt{3}-1\right)} \le 0.$$

Значение $x = \log_3 28$ является решением. При $x \ne \log_3 28$ неравенство принимает вид

$$\frac{x - \frac{4\pi}{9}}{x - \sqrt{8}\left(\sqrt{3}-1\right)} \le 0.$$

Сравним числа:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{4\pi}{9} & \vee & \sqrt{8}\left(\sqrt{3}-1\right) \\ \pi & \vee & \dfrac{9}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \\ \pi & < & 4 < 4,5 = \dfrac{9}{2} < \dfrac{9}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right). \end{array}$$

Значит, решением неравенства будет промежуток $\dfrac{4\pi}{9} \le x < \sqrt{8}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Ответ. $\left[\dfrac{4\pi}{9}; \sqrt{8}\left(\sqrt{3}-1\right)\right) \cup \{\log_3 28\}$.

11.2. Расщепление в тригонометрических уравнениях и неравенствах

Задача 1. (Псих-84.3)

Решить уравнение $2(\cos x-1)\sin 2x=3\sin x$.

И д е я. Применив формулу синуса двойного угла, разложить уравнение на множители.
У к а з а н и е. После применения формулы синуса двойного угла уравнение принимает вид

$$4\,(\cos x-1)\sin x\cos x=3\sin x,$$

откуда $\sin x=0$ или $4\cos^2 x-4\cos x-3=0$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой синуса двойного угла, после чего разложим выражение на множители:

$$4(\cos x-1)\sin x\cos x=3\sin x \iff \left[\begin{array}{l}\sin x=0;\\ 4\cos^2 x-4\cos x-3=0;\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ \cos x=-\dfrac{1}{2};\\ \cos x=\dfrac{3}{2}>1;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

О т в е т. $\pi n,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.

Задача 2. (Почв-94.1)

Решить уравнение $\sin^3 x-\sin^2 x=\sin^2 x\cos^2 x$.

И д е я. Разложить обе части уравнения на множители и применить метод расщепления.
У к а з а н и е. В правой части уравнения воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой для разности квадратов:

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=(1-\sin x)\,(1+\sin x)\,.$$

У к а з а н и е. Уравнение приводится к виду

$$\sin^2 x\,(\sin x-1)=\sin^2 x\,(1-\sin x)\,(1+\sin x)\,.$$

Р е ш е н и е. Разложим выражения в левой и правой частях уравнения на множители, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством и формулой для разности квадратов:

$$\sin^2 x(\sin x-1)=\sin^2 x(1-\sin^2 x) \iff \left[\begin{array}{l}\sin^2 x=0;\\ \sin x-1=(1-\sin x)(1+\sin x);\end{array}\right. \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \sin x = 1; \\ 1 + \sin x = -1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 3. (ИСАА-98.1)

Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 6x = 1$.

Идея. Разложить уравнение на множители, воспользовавшись формулами понижения степени и суммы косинусов.

Указание. После применения формулы понижения степени $\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ к каждому слагаемому левой части уравнение принимает вид $\cos 2x + \cos 12x = 0$.

Указание. После применения формулы суммы косинусов $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ получаем уравнение $2\cos 7x \cos 5x = 0$.

Решение. Применим формулу понижения степени к каждому слагаемому левой части:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 12x}{2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos 12x + \cos 2x = 0;$$

по формуле суммы косинусов уравнение раскладывается на множители:

$$2\cos 7x \cos 5x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 7x = 0; \\ \cos 5x = 0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 7x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ 5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi m}{5},\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi n}{7},\ \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi m}{5};\ n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 4. (Псих-91.2)

Решить уравнение $(\cos x - 1)\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\cos 2x - 1\right) = \sin^2 x$.

Идея. Представив правую часть как разность квадратов за счёт основного тригонометрического тождества, разложить уравнение на множители и применить формулу косинуса двойного угла.

Указание. В правой части воспользоваться основным тригонометрическим тождеством и формулой разности квадратов:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x);$$

затем применить формулу косинуса двойного угла:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x).$$

У к а з а н и е. Уравнение приводится к виду

$$(\cos x - 1)(\sin x + \cos x)(2 - \cos x + \sin x) = 0.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся в правой части уравнения основным тригонометрическим тождеством и формулой разности квадратов:

$$(\cos x - 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - 1\right) = (1 - \cos x)(1 + \cos x);$$

вынесем общий множитель за скобки:

$$(\cos x - 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - 1 + 1 + \cos x\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\cos x - 1)\left(\sin x + \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 0.$$

Во втором сомножителе применим формулы косинуса двойного угла и разности квадратов:

$$(\cos x - 1)\bigl(2(\sin x + \cos x) - \bigl(\cos^2 x - \sin^2 x\bigr)\bigr) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\cos x - 1)(\sin x + \cos x)(2 - \cos x + \sin x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1; \\ \sin x + \cos x = 0; \\ \cos x - \sin x = 2. \end{array}\right.$$

1) Решения первого уравнения совокупности $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

2) Второе уравнение совокупности является однородным тригонометрическим первой степени и решается, например, сведением к уравнению для тангенса. Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

3) Третье уравнение совокупности $\cos x - \sin x = 2$ не имеет решений в силу ограниченности тригонометрических функций в левой части; действительно, равенство возможно только при одновременном выполнении условий $\cos x = 1$ и $\sin x = -1$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству.

О т в е т. $2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (Фил-78.3)

Решить уравнение $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$.

Идея. Используя формулы суммы синусов и синуса двойного угла, разложить левую часть исходного уравнения на множители.
Указание. Преобразуем левую часть, применив формулу суммы синусов к первому и третьему слагаемым и формулу синуса двойного аргумента к последнему слагаемому:

$$10\sin 2x\cos x + 6\sin 2x + 2\sin 2x\cos 2x = 0.$$

Указание. Полученное уравнение сводится к совокупности условий $\sin 2x = 0$ или $5\cos x + 3 + \cos 2x = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой суммы синусов для первого и третьего слагаемых и формулой синуса двойного аргумента для последнего слагаемого:

$$5(\sin x+\sin 3x)+6\sin 2x+2\sin 2x\cos 2x = 0 \iff 2\sin 2x(5\cos x+3+\cos 2x) = 0.$$

Расщепляем уравнение стандартным образом и применяем формулу косинуса двойного угла:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0;\\ 5\cos x + 3 + 2\cos^2 x - 1 = 0;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z};\\ \cos x = -\dfrac{1}{2};\\ \cos x = -2 < -1;\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z};\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m$; $n, m\in\mathbb{Z}$.

Задача 6. (Биол-89.3)

Решить уравнение $\sin x(3\sin 2x\sin^3 x + 12\sin 2x\sin x - 16\cos x) + 2\sin 4x = 0$.

Идея. Раскрыв скобки и использовав формулу синуса двойного угла, вынести последний за скобки для разложения на множители.
Указание. Уравнение приводится к виду $\sin 2x(3\sin^4 x + 4\sin^2 x - 4) = 0$.
Указание. Второй множитель удобно исследовать как квадратный трёхчлен по переменной $\sin^2 x$ или использовать формулу понижения степени
$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Решение. Раскроем скобки и воспользуемся формулой синуса двойного угла:

$$3\sin 2x\sin^4 x + 12\sin 2x\sin^2 x - 8\sin 2x + 4\sin 2x\cos 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin 2x\left(3\sin^4 x + 12\sin^2 x - 8 + 4(1-2\sin^2 x)\right) = 0.$$

Применим метод расщепления:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0; \\ 3\sin^4 x + 4\sin^2 x - 4 = 0; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}; \\ \sin^2 x = -2 < 0; \\ \sin^2 x = \dfrac{2}{3}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}; \\ x = \pm\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \pi k$; $n, k\in\mathbb{Z}$ (второй вариант ответа $\dfrac{\pi n}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3} + \pi m$; $n, m\in\mathbb{Z}$.)

Задача 7. (ЕГЭ)

Найдите сумму корней уравнения $\sin 2x\cdot(\operatorname{tg} x - 1) = 0$, принадлежащих промежутку $[0; 2\pi]$. Ответ запишите в градусах.

Идея. Использовать расщепление уравнения стандартным образом; произвести отбор по условию.

Решение. Расщепляя уравнение стандартным образом, получаем равносильную совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi l,\ l\in\mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Промежутку $[0; 2\pi]$ принадлежат корни $x = 0$; $x = \pi$; $x = 2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{4}$; $x = \dfrac{5\pi}{4}$; их сумма равна $S = \pi + 2\pi + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{9\pi}{2}$ или 810°.

Ответ. 810°.

Задача 8. (Почв-96(1).5)

Решить уравнение $(1-\cos 8x)\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x\cdot\operatorname{ctg} x$.

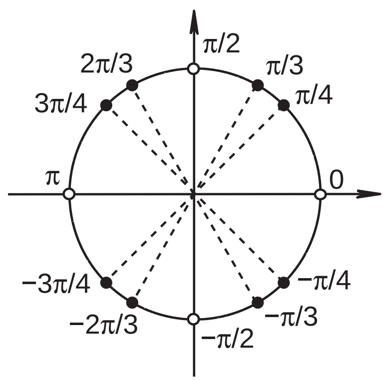
И д е я. Использовав формулу косинуса двойного угла, разложить уравнение на множители с последующим расщеплением.
У к а з а н и е. $1-\cos 8x = 2\sin^2 4x$.

Р е ш е н и е. Применим в левой части уравнения формулу косинуса двойного угла:

$$2\sin^2 4x\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x\operatorname{ctg} x \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 4x = 0,\\ \sin x\neq 0,\\ \cos x\neq 0;\end{cases}\\ \operatorname{tg} x = 3\operatorname{ctg} x.\end{array}\right.$$

1) Решение системы $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{ctg} x \iff \operatorname{tg}^2 x = 3 \iff x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.



О т в е т. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.

Задача 9. (М/м-97.1)

Решить уравнение $(2\sin^2 x-3\sin x+1)\sqrt{\operatorname{tg} x}=0$.

И д е я. Использовать расщепление уравнения стандартным образом.
У к а з а н и е. Уравнение равносильно совокупности, полученной в результате расщепления:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sin^2 x-3\sin x+1=0,\\ \operatorname{tg} x\geq 0;\end{cases}\\ \operatorname{tg} x=0.\end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. Расщепляя уравнение стандартным образом, получаем равносильную совокупность

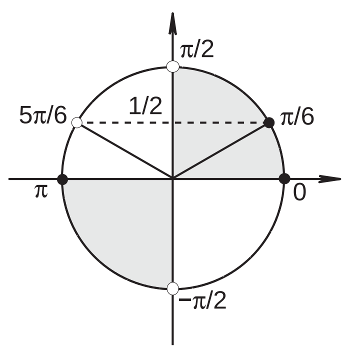
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0,\\ \operatorname{tg} x \geq 0;\end{cases}\\ \operatorname{tg} x = 0.\end{array}\right.$$

1) Рассмотрим систему

$$\begin{cases}2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0,\\ \operatorname{tg} x \geq 0;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x = 1;\\ \sin x = \dfrac{1}{2};\end{array}\right.\\ \operatorname{tg} x \geq 0.\end{cases}$$

Учитывая неравенство и область определения тангенса, оставляем

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$



2) Второе уравнение совокупности даёт решение $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $\pi n,\ \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 10. (М/м-97.1)

Решить уравнение $(2\cos^2 x - \cos x - 1)\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 0$.

И д е я. Применив процедуру расщепления, перейти к равносильной совокупности условий.

У к а з а н и е. Уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0,\\ \operatorname{ctg} x \geq 0;\end{cases}\\ \operatorname{ctg} x = 0.\end{array}\right.$

У к а з а н и е. Отбор серий среди решений тригонометрических уравнений удобно проводить через тригонометрическую окружность.

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\cos^2 x-\cos x-1=0,\\ \operatorname{ctg} x\geq 0;\end{cases}\\ \operatorname{ctg} x=0.\end{array}\right.$$

1) Рассмотрим систему

$$\begin{cases}2\cos^2 x-\cos x-1=0,\\ \operatorname{ctg} x\geq 0;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=1;\\ \cos x=-\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\\ \operatorname{ctg} x\geq 0.\end{cases}$$

Среди решений простейших тригонометрических уравнений оставляем углы I и III четвертей:

$$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) Второе уравнение совокупности даёт решение $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

О т в е т. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}.$

Задача 11. (Экон.К-87.1)

Решить уравнение $(2\sin x-1)\sqrt{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=0$.

И д е я. Использовать расщепление уравнения стандартным образом с отбором тригонометрических серий решений.

У к а з а н и е. Уравнение равносильно совокупности условий: $\begin{cases}2\sin x-1=0,\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0;\end{cases}$

или $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0.$

У к а з а н и е. Решая систему, выполнить отбор корней либо через тригонометрическую окружность, либо непосредственной подстановкой в неравенство.

Р е ш е н и е. Применяя правило расщепления, переходим к равносильной совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\sin x-1=0,\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0;\end{cases}\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0.\end{array}\right.$$

1) Рассмотрим систему:

$$\begin{cases}2\sin x-1=0,\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0;\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\end{array}\right.\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0.\end{cases}$$

При $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{12} > 0$; значит, эта серия подходит.
При $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{13\pi}{12} < 0$; значит, вторая серия неравенству не удовлетворяет.

2) Решаем второе уравнение совокупности:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \dfrac{\pi}{4} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 12. (М/м-81.2)

Решить систему $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$

Идея. Применив расщепление к первому уравнению, использовать результаты для подстановки во второе уравнение системы.
Указание. Первое уравнение равносильно совокупности условий: $\sin x = 0$ или $\cos y = 0$ при $\sin x \geq 0$. Выполнение неравенства проверяется подстановкой.

Решение. Расщепляя первое уравнение стандартным образом, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0; \\ \begin{cases} \cos y = 0, \\ \sin x \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставляем найденные зависимости во второе уравнение исходной системы.
1) При $\sin x = 0$ второе уравнение принимает вид $\cos 2y = -2 < -1$; нет решений.
2) Во втором случае получаем систему

$$\begin{cases} \cos y = 0, \\ \sin x \geq 0, \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \cos y = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ. $\left((-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi m\right);\ n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 13. (ВМиК-78.2)

Решить уравнение $(1 + \operatorname{tg}^2 2x)\left(\sin\dfrac{21x}{4}\cos\dfrac{7x}{4} + \sin\dfrac{5x}{4}\cos\dfrac{x}{4}\right) =$
$= \dfrac{1}{\cos^2 2x}\left(\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{5x}{4} - \sin\dfrac{7x}{4}\cos\dfrac{21x}{4}\right).$

Идея. Преобразовав первый сомножитель в левой части, вынести общий множитель за скобки и решить уравнение методом расщепления, воспользовавшись формулами для синуса суммы и разности углов и суммы синусов.

Указание. В левой части $1+\operatorname{tg}^2 2x = \dfrac{1}{\cos^2 2x}$, где $\cos 2x \neq 0$;
$\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta)$; $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Указание. Уравнение приводится к виду $2\sin 4x\cos 3x = 0$ при $\cos 2x \neq 0$. Использованы формулы для синуса суммы и разности углов и суммы синусов.

Решение. Заметим, что $1+\operatorname{tg}^2 2x = \dfrac{1}{\cos^2 2x} > 0$. Значит, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin\dfrac{21x}{4}\cos\dfrac{7x}{4}+\sin\dfrac{5x}{4}\cos\dfrac{x}{4} = \sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{5x}{4}-\sin\dfrac{7x}{4}\cos\dfrac{21x}{4}, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

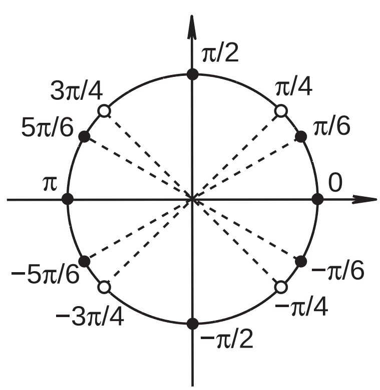
Переносим все слагаемые уравнения в левую часть и группируем по формулам для синуса суммы и разности углов:

$$\sin\left(\frac{21x}{4}+\frac{7x}{4}\right)+\sin\left(\frac{5x}{4}-\frac{x}{4}\right)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sin 7x+\sin x = 0.$$

Используем формулу для суммы синусов:

$$2\sin 4x\cos 3x = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0; \\ \cos 3x = 0; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{4},\ n\in\mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi m}{3},\ m\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $\cos 2x \neq 0 \iff x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi l}{2}$, $l\in\mathbb{Z}$, оставляем решения $x=\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$ и $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



Ответ. $\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$; $n,k\in\mathbb{Z}$.

Задача 14. (Филол-70.2)

Найти все x, удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{2} < \left|3x - \dfrac{\pi}{2}\right| \le \pi$ и являющиеся решением уравнения $1 + \cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

Идея. Применив в левой части уравнения формулу косинуса двойного угла, а в правой части формулу суммы синусов, разложить исходное уравнение на множители и решить его, выполнив отбор корней.
Указание. Уравнение приводится к виду $\cos x(2\cos x+1) = \sin 2x(2\cos x+1)$.
Указание. Полученное уравнение равносильно совокупности трёх простейших тригонометрических уравнений $\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}; \\ \cos x = 0; \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$
Указание. Раскрыв модуль в дополнительном условии через его геометрический смысл, получаем условия отбора: $-\dfrac{\pi}{6} \le x < 0$ или $\dfrac{\pi}{3} < x \le \dfrac{\pi}{2}$.
Указание. Отбор удобно делать на тригонометрической окружности.

Решение. Применим в левой части уравнения формулу косинуса двойного угла, а в правой части формулу суммы синусов:

$$2\cos^2 x + \cos x = \sin 2x + 2\sin 2x\cos x.$$

Раскладываем на множители и решаем методом расщепления:

$$\cos x(2\cos x + 1) = \sin 2x(1 + 2\cos x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}; \\ \cos x = 0; \\ \cos x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Раскрываем модуль в дополнительном условии через его геометрический смысл:

$$\frac{\pi}{2} < \left|3x - \frac{\pi}{2}\right| \le \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} < 3x - \dfrac{\pi}{2} \le \pi; \\ -\pi \le 3x - \dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2}; \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ -\dfrac{\pi}{6} \le x < 0. \end{array}\right.$$

Найденным промежуткам принадлежит единственный корень $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 15. (ВМиК-98(1).3)

Решить уравнение $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0$.

И д е я. Свести уравнение к равносильной совокупности стандартным расщеплением.

У к а з а н и е. Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{tg} x = 0,\\ \sin x - 2\cos x - 1 \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x - 2\cos x - 1 = 0,\\ \cos x \neq 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

У к а з а н и е. Первый вариант в совокупности удобно решать непосредственной подстановкой решения уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ в неравенство, тогда как второй вариант разумно свести к уравнению для $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ по формулам универсальной подстановки.

У к а з а н и е. При решении уравнения $\sin x - 2\cos x = 1$ воспользуемся формулами универсальной подстановки: $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, где $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ при $\dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

З а м е ч а н и е. Уравнение $\sin x - 2\cos x = 1$ можно решить и методом вспомогательного аргумента.

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{tg} x = 0,\\ \sin x - 2\cos x - 1 \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x - 2\cos x - 1 = 0,\\ \cos x \neq 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

1) Для первой системы получаем

$$\begin{cases}x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\\ -2\cos x \geq 1;\end{cases} \iff \begin{cases}x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\\ \cos x \leq -\dfrac{1}{2};\end{cases} \iff x = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

2) При рассмотрении уравнения второй системы воспользуемся формулами универсальной подстановки: $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, где $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ при $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$, то есть при $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. В этом случае уравнение $\sin x - 2\cos x = 1$ принимает вид

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} = 1 \iff 2t - 2 + 2t^2 = 1 + t^2 \iff$$

$$\iff t^2 + 2t - 3 = 0 \iff \left[\begin{array}{l}t = 1;\\ t = -3;\end{array}\right.$$

значит,

$$\left[\begin{aligned} &\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z};\\ &\frac{x}{2}=-\operatorname{arctg}3+\pi s,\ s\in\mathbb{Z}; \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x=\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z};\\ &x=-2\operatorname{arctg}3+2\pi s,\ s\in\mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Условию $\cos x\neq 0$ не удовлетворяет первая серия.

О т в е т. $\pi+2\pi m, -2\operatorname{arctg}3+2\pi s;\ m,s\in\mathbb{Z}$.

З а м е ч а н и е. Вторая часть ответа может быть получена в виде $\pi+\arccos\dfrac{1}{\sqrt5}-\arcsin\dfrac{1}{\sqrt5}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z},$ если использовался метод вспомогательного аргумента.

Задача 16. (Псих-98.4)

Решить уравнение $\operatorname{tg}8x-\operatorname{tg}6x=\dfrac{1}{\sin 4x}$ при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

И д е я. Преобразовать выражение в левой части по формуле разности тангенсов; перейти к равносильной системе; отобрать решения по условию.
У к а з а н и е. Воспользовавшись определением тангенса и приведя левую часть к общему знаменателю, получим уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\cos 8x\cos 6x}=\dfrac{1}{\sin 4x}$.
У к а з а н и е. Полученное уравнение равносильно уравнению

$$\sin 2x\sin 4x=\cos 6x\cos 8x$$

при $\sin 4x\neq 0$. Условия $\cos 6x\neq 0$ и $\cos 8x\neq 0$ гарантируются уравнением при $\sin x\neq 0$.
У к а з а н и е. После преобразования произведений синусов и косинусов, приведения подобных слагаемых и использования формулы для суммы косинусов получим уравнение $\cos 4x\cos 10x=0$, которое решается стандартным методом расщепления.

Р е ш е н и е. Воспользуемся определением тангенса и приведём левую часть уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 8x\cos 6x}=\frac{1}{\sin 4x} \iff \begin{cases}\sin 2x\sin 4x=\cos 6x\cos 8x,\\ \sin 4x\neq 0.\end{cases}$$

Условия $\cos 6x\neq 0$ и $\cos 8x\neq 0$ гарантируются уравнением при $\sin x\neq 0$. Решаем уравнение:

$$\cos 2x-\cos 6x=\cos 14x+\cos 2x \iff \cos 6x+\cos 14x=0 \iff$$

$$\iff \cos 4x\cos 10x=0 \iff \left[\begin{aligned} &\cos 4x=0;\\ &\cos 10x=0.\end{aligned}\right.$$

1) Если $\cos 4x = 0$, то $\sin 4x \neq 0$. Значит, серия $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$ подходит. Осталось отобрать корни, принадлежащие указанному промежутку:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \iff -2 \leq 1 + 2n \leq 6 \iff -\frac{3}{2} \leq n \leq \frac{5}{2} \iff$$

$$\iff n \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

2) Если $\cos 10x = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi m}{10}$, $m \in \mathbb{Z}$. Проверим условия $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$ и $\sin 4x \neq 0$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi m}{10} \leq \dfrac{3\pi}{4}, \\ \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi m}{5} \neq \pi k; \end{cases} \iff \begin{cases} -5 \leq 1 + 2m \leq 15, \\ 1 + 2m \neq 5k; \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leq m \leq 6, \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Итак, решениями задачи во втором случае являются числа $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi m}{10}$ при $m \in \{-2; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 6\}$.

О т в е т. $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $n = 0; \pm 1; 2$; $\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi m}{10}$, $m = -2; 0; \pm 1; 3; 4; 5; 6$.

З а м е ч а н и е. Возможна другая форма записи ответа: $x = \pm\dfrac{\pi}{8}$; $\dfrac{3\pi}{8}$; $\dfrac{5\pi}{8}$; $\pm\dfrac{\pi}{20}$; $\pm\dfrac{3\pi}{20}$; $\dfrac{7\pi}{20}$; $\dfrac{9\pi}{20}$; $\dfrac{11\pi}{20}$; $\dfrac{13\pi}{20}$.

Задача 17. (М/м-00(1).3)

Найти все корни уравнения

$$\cos x \sin\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\sin x + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

И д е я. Сгруппировать слагаемые в левой части, применить формулы понижения степени и формулы двойных углов, разложить уравнение на множители, после чего свести к простейшим тригонометрическим уравнениям и сделать отбор коней на тригонометрической окружности.

У к а з а н и е. После группировки слагаемых и тригонометрических преобразований уравнение приводится к виду $\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\cos\dfrac{x}{4} + \dfrac{9}{10}\right) = 0$.

У к а з а н и е. Отбор решений уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ для $x \in \left[-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$ удобнее делать непосредственным решением соответствующих неравенств с целочисленным параметром.

У к а з а н и е. Для отбора корней уравнения $\cos\dfrac{x}{4} = -\dfrac{9}{10}$, принадлежащих промежутку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, эффективно перейти к переменной $\dfrac{x}{4} \in \left[-\dfrac{9\pi}{8}; -\dfrac{3\pi}{8}\right]$.

У к а з а н и е. При отборе корней уравнения $\cos\dfrac{x}{4} = -\dfrac{9}{10}$ по тригонометрической окружности в соответствии с условием $\dfrac{x}{4} \in \left[-\dfrac{9\pi}{8}; -\dfrac{3\pi}{8}\right]$ удобно провести формальное сравнение $\dfrac{\pi}{8} \vee \arccos\left(\dfrac{9}{10}\right)$ через $\dfrac{\pi}{4} \vee 2\arccos\left(\dfrac{9}{10}\right)$.

Р е ш е н и е. Последовательно группируем слагаемые и применяем тригонометрические формулы двойного угла (понижения степени):

$$\sin\frac{x}{4}(\cos x + 1) + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff 2\sin\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \sin x\cos\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \cos\frac{x}{4}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{10}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{4} + \frac{9}{10}\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}; \\ \cos\dfrac{x}{4} = -\dfrac{9}{10}. \end{array}\right.$$

$$1)\ \sin x = \frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\[2ex] x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Подставляем в отрезок $-\dfrac{9\pi}{2} \le x \le -\dfrac{3\pi}{2}$ для отбора решений:

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{9}{2} \le 2n + \dfrac{1}{6} \le -\dfrac{3}{2}; \\[2ex] -\dfrac{9}{2} \le 2m + \dfrac{5}{6} \le -\dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -\dfrac{7}{3} \le n \le -\dfrac{5}{6}; \\[2ex] -\dfrac{8}{3} \le m \le -\dfrac{7}{6}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} n = -1; -2; \\ m = -2; \end{array}\right.$$

значит, $x = \dfrac{\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{11\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{6} - 4\pi = -\dfrac{23\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6} - 4\pi = -\dfrac{19\pi}{6}$.
Эти значения являются решениями исходного уравнения.
2) Для решения уравнения $\cos\dfrac{x}{4} = -\dfrac{9}{10}$ на отрезке $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$ удобно перейти к аргументу $\dfrac{x}{4} \in \left[-\dfrac{9\pi}{8}; -\dfrac{3\pi}{8}\right]$. Тогда $\dfrac{x}{4} = \pm\arccos\left(-\dfrac{9}{10}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
В заданном интервале могут лежать только значения $\dfrac{x}{4} = -\pi \pm \arccos\left(\dfrac{9}{10}\right)$.
Сравним

$$\begin{array}{ccl} \dfrac{\pi}{8} & \vee & \arccos\left(\dfrac{9}{10}\right) \\ \dfrac{\pi}{4} & \vee & 2\arccos\left(\dfrac{9}{10}\right), \end{array}$$

возьмём косинус от обеих частей и, поскольку в первой четверти косинус убывает, поменяем знак неравенства на противоположный:

$$\begin{array}{rcl} \cos\dfrac{\pi}{4} & \wedge & \cos\left(2\arccos\left(\dfrac{9}{10}\right)\right) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \wedge & 2\cos^2\left(\arccos\left(\dfrac{9}{10}\right)\right) - 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \wedge & 2\left(\dfrac{9}{10}\right)^2 - 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \wedge & \dfrac{31}{50} \\ (25\sqrt{2})^2 & \wedge & 31^2 \\ 1250 & > & 961, \end{array}$$

то есть $\dfrac{\pi}{8} < \arccos\left(\dfrac{9}{10}\right)$. Следовательно, $\dfrac{x}{4} = -\pi - \arccos\left(\dfrac{9}{10}\right) < -\pi - \dfrac{\pi}{8}$, то есть не является решением исходного уравнения, тогда как $\dfrac{x}{4} = -\pi + \arccos\left(\dfrac{9}{10}\right)$ подходит.

О т в е т. $-\dfrac{23\pi}{6}$; $-\dfrac{19\pi}{6}$; $-\dfrac{11\pi}{6}$; $-4\pi + 4\arccos\left(\dfrac{9}{10}\right)$.

11.3. Расщепление в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах, модифицированный метод интервалов

Задача 1. (Хим-84.1)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \geq 0$.

Идея. Используя неотрицательность числителя, свести неравенство на области определения к положительности знаменателя.

Указание. Неравенство равносильно совокупности: $x = \dfrac{1}{2}$ или $\log_3 x^2 > 0$ при $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Решение. В силу неотрицательности числителя неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}; \\ \begin{cases} \log_3 x^2 > 0, \\ x \geq \dfrac{1}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}; \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup (1; +\infty)$.

Задача 2. (М/м-81.1)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$.

Идея. Использовать расщепление неравенства стандартным путём с учётом неотрицательности числителя.

Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x = 5, \\ x > 4, \\ \log_{\sqrt{2}}(x-4) \neq 1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1 > 0, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Решение. Учитывая неотрицательность числителя, получаем равносильную совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5, \\ x > 4, \\ \log_{\sqrt{2}}(x-4) \neq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1 > 0, \\ x \geq 5. \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 5; \\ x > \sqrt{2} + 4. \end{array}\right.$$

Ответ. $\{5\} \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Задача 3. (Геол-88.3)

Решить уравнение $\left(2x^2-5x+2\right)\cdot(\log_{2x}18x+1)=0$.

Идея. Применить расщепление уравнения стандартным образом.
Указание. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-5x+2=0,\\ 2x\neq 1,\\ x>0;\end{cases}\\ \log_{2x}18x+1=0.\end{array}\right.$$

Решение. Применяя метод расщепления, получаем равносильную совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-5x+2=0,\\ 2x\neq 1,\\ x>0;\end{cases}\\ \log_{2x}18x+1=0.\end{array}\right.$$

1) В первом случае $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2;\\ x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\\ 0<x\neq\dfrac{1}{2};\end{cases}\iff\quad x=2.$

2) Во втором случае $\begin{cases}\dfrac{1}{2x}=18x,\\ 0<x\neq\dfrac{1}{2};\end{cases}\iff\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{36},\\ 0<x\neq\dfrac{1}{2};\end{cases}\iff\quad x=\dfrac{1}{6}.$

Ответ. $\dfrac{1}{6}$; 2.

Задача 4. (М/м-71.1)

Решить уравнение $(x+4)\log_4(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\dfrac{8}{3}\log_2(x^2-1)$.

Идея. Перейдя к логарифмам по одному основанию и представив логарифм в правой части как сумму логарифмов, сгруппировать слагаемые и решить уравнение методом расщепления.
Указание. Уравнение приводится к виду

$$\left(\frac{x}{2}+2-\frac{8}{3}\right)\log_2(x+1)=\left(\frac{8}{3}+x-4\right)\log_2(x-1).$$

Р е ш е н и е. Перейдём к логарифмам по одному основанию и представим на области определения логарифм в правой части как сумму логарифмов:

$$\frac{1}{2}(x+4)\log_2(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\frac{8}{3}\log_2(x+1)+\frac{8}{3}\log_2(x-1).$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\left(\frac{x}{2}+2-\frac{8}{3}\right)\log_2(x+1)=\left(\frac{8}{3}+x-4\right)\log_2(x-1) \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (3x-4)\log_2(x+1)=(6x-8)\log_2(x-1).$$

Разложим на множители и применим стандартный метод расщепления:

$$(3x-4)\left(\log_2(x+1)-2\log_2(x-1)\right)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\log_2(x+1)=2\log_2(x-1);\\ \begin{cases}3x-4=0,\\ x>1.\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\log_2(x+1)=2\log_2(x-1) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}x+1=(x-1)^2,\\ x>1;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0;\\ x=3;\end{array}\right.\\ x>1;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad x=3.$$

2) $\begin{cases}3x-4=0,\\ x>1;\end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad x=\dfrac{4}{3}.$

О т в е т. $\dfrac{4}{3}$; 3.

Задача 5. (Псих-78.1)

Решить уравнение $\log_3\dfrac{3}{x}\log_2 x-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$.

И д е я. Разложить уравнение на множители и расщепить стандартным образом.
У к а з а н и е. Уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{2}\log_2 x-\log_2 x\log_3 x-3\log_3 x=0$$

и решается, например, вынесением множителя $\log_2 x$ за скобки с привлечением формулы перехода к новому основанию.

Р е ш е н и е. Последовательно преобразуем уравнение:

$$(1-\log_3 x)\log_2 x-3\log_3 x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2 x \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log_2 x-\log_2 x\log_3 x-3\log_3 x=0.$$

Переходя в $\log_3 x$ в последнем слагаемом к новому основанию, получаем

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x \log_3 x - 3\log_2 x \log_3 2 = 0 \iff$$

$$\iff \quad \log_2 x \left(\frac{1}{2} - \log_3 x - 3\log_3 2\right) = 0.$$

Применяем метод расщепления:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0; \\ \log_3 x + \log_3 8 = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \quad \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{8}. \end{array}\right.$$

О т в е т. $1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Задача 6. **(Почв-78.5)**

Решить уравнение $\sqrt{x}(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18$.

И д е я. Используя свойства степеней, сгруппировать слагаемые по сходным признакам и разложить уравнение на множители.
У к а з а н и е. $3^{2\sqrt{x^2-3}+1} = 3\cdot 9^{\sqrt{x^2-3}}$; $3^{\sqrt{x^2-3}+1} = 3\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}}$.
У к а з а н и е. Группировка слагаемых приводит к разложению на множители:

$$(\sqrt{x} - 3)(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}} - 6) = 0.$$

Р е ш е н и е. Используя свойства степеней, преобразуем уравнение и сгруппируем в нём слагаемые:

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 3\cdot 9^{\sqrt{x^2-3}} - 3\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}} + 6(\sqrt{x} - 3) \iff$$

$$\iff \quad (\sqrt{x} - 3)\left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 6(\sqrt{x} - 3) \iff$$

$$\iff \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x} = 3, \\ x^2 - 3 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}} = 6, \\ x \ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \iff \quad \left[\begin{array}{l} x = 9; \\ \begin{cases} 3^{\sqrt{x^2-3}} = 3; \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \quad \left[\begin{array}{l} x = 9; \\ x = 2. \end{array}\right.$$

О т в е т. 2; 9.

Задача 7. (ВМК-98(1).1)

Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_2 \frac{4}{x}} \geq \log_2 \dfrac{x}{8} - 1$.

Идея. Преобразовав логарифмы, ввести новую переменную и использовать метод интервалов.
Указание. Если $t = \log_2 x$, то неравенство преобразуется к виду

$$\frac{1}{2-t} \geq t - 4.$$

Указание. Решая неравенство методом интервалов, получим $t = 3$ или $t < 2$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{2 - \log_2 x} \geq \log_2 x - 3 - 1.$$

Пусть $t = \log_2 x$, приводим выражения к общему знаменателю и решаем методом интервалов:

$$\frac{t^2 - 6t + 9}{t-2} \leq 0 \quad \iff \quad \frac{(t-3)^2}{t-2} \leq 0 \quad \iff \quad \left[\begin{array}{l} t = 3; \\ t < 2. \end{array}\right.$$

Значит, $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3; \\ \log_2 x < 2; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 8; \\ 0 < x < 4. \end{array}\right.$

Ответ. $(0;4) \cup \{8\}$.

Задача 8. (ЕГЭ)

Решите уравнение $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x = 5 \cdot 25^x$.

Идея. Свести уравнение к квадратному относительно новой переменной.
Указание. Разделив обе части уравнения на $2^{2x} > 0$, получим квадратное уравнение относительно новой переменной $y = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 0$.
Указание. Из двух корней отбираем положительный.

Решение. Разделим уравнение на $2^{2x} > 0$ и введём переменную $y = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 0$; в новых обозначениях

$$5y^2 + 3y - 2 = 0 \quad \iff \quad \left[\begin{array}{l} y = -1 < 0; \\ y = \dfrac{2}{5}; \end{array}\right.$$

значит, $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \dfrac{2}{5} \quad \iff \quad x = -1$.

Ответ. -1.

Задача 9. (Геол-98(1).2)

Решить уравнение $\log_9(4^x - 2\cdot 18^x) = 2x$.

Идея. Перейти к однородному уравнению, используя определение логарифма.
Указание. Уравнение равносильно $4^x - 2\cdot 18^x = 9^{2x}$, то есть

$$9^{2x} + 2\cdot 9^x\cdot 2^x - 2^{2x} = 0.$$

Указание. Последнее уравнение является однородным второй степени относительно 9^x и 2^x.

Решение. Используя определение логарифма, перейдём к равносильному уравнению

$$4^x - 2\cdot 18^x = 9^{2x} \quad\Longleftrightarrow\quad 9^{2x} + 2\cdot 9^x\cdot 2^x - 2^{2x} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $2^{2x} \neq 0$ и, используя замену $t = \left(\dfrac{9}{2}\right)^x > 0$, получим

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Значит, $\left(\dfrac{9}{2}\right)^x = \sqrt{2} - 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \log_{\frac{9}{2}}(\sqrt{2} - 1)$.

Ответ. $\log_{\frac{9}{2}}(\sqrt{2} - 1)$.

Задача 10. (ЕГЭ)

При каких значениях параметра a уравнение $2\cdot 9^x - (2a+3)6^x + 3a\cdot 4^x = 0$ имеет ровно один корень?

Идея. Перейти к квадратному уравнению относительно новой переменной.
Указание. Уравнение является однородным второй степени относительно 3^x и 2^x. Разделив уравнение на $2^{2x} > 0$, получаем квадратное уравнение относительно новой переменной $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$.
Указание. При исследовании вопроса единственности решения используются свойства показательной функции.

Решение. Разделим уравнение на 2^{2x} и введём новую переменную $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$:

$$2y^2 - (2a+3)y + 3a = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} &y = a; \\ &y = \frac{3}{2}. \end{aligned}\right.$$

Исходное уравнение имеет единственный корень при $a \leq 0$ или $a = \dfrac{3}{2}$.

Ответ. $(-\infty; 0] \cup \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Задача 11. (Геол-86.3)

Решить уравнение $\dfrac{2\cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3$.

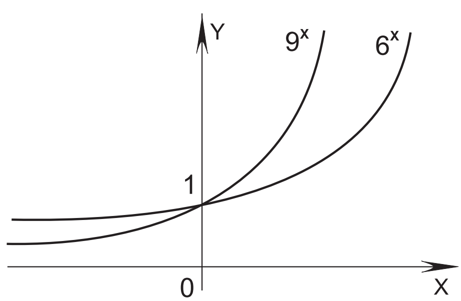
И д е я. Перейти к равносильной системе из однородного уравнения второй степени и неравенства.
У к а з а н и е. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\cdot 6^x - 4^x - 15 = 3\cdot 6^x - 3\cdot 9^x - 15, \\ 6^x - 9^x \neq 5; \end{cases}$$

в которой уравнение приводится к квадратному относительно $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, а неравенство выполнено $\forall x \in \mathbb{R}$.
У к а з а н и е. Для решения уравнения $6^x - 9^x = 5$ удобно рассмотреть $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$, используя свойства показательной функции.

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2\cdot 6^x - 4^x - 15 = 3\cdot 6^x - 3\cdot 9^x - 15, \\ 6^x - 9^x \neq 5; \end{cases} \iff \begin{cases} 3\cdot 9^x - 6^x - 4^x = 0, \\ 6^x - 9^x \neq 5. \end{cases}$$



Неравенство решаем методом от противного. Пусть $6^x - 9^x = 5$, тогда:

- если $x > 0$, то $6^x < 9^x$ и их разность отрицательна, то есть решений нет;
- если $x = 0$, то $6^x - 9^x = 0 \neq 5$;
- если $x < 0$, то $6^x \in (0;1)$, $9^x \in (0;1)$ и их разность не может быть равна пяти.

Значит, $\forall x \in \mathbb{R}\quad 6^x - 9^x \neq 5$.
Возвращаясь к уравнению, делим его на $4^x > 0$:

$$3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 0 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Поскольку $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x > 0$, остаётся одно значение

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{13}}{6}.$$

Ответ. $\log_{\frac{3}{2}} \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$.

Задача 12. (Физ-00(1).7)

При каких значениях b уравнение $25^x - (2b+5)\cdot 5^{x-\frac{1}{x}} + 10b\cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$ имеет ровно два решения?

Идея. Выполнив замену переменных, свести уравнение к квадратному.
Указание. Уравнение является однородным второй степени относительно 5^x и $5^{-\frac{1}{x}}$. Разделив уравнение на $5^{-\frac{2}{x}}$, получить квадратное уравнение относительно новой переменной $h = 5^{x+\frac{1}{x}}$.
Указание. При исследовании условий существования двух решений использовать свойства показательной функции.

Решение. Если принять, что $5^x = f(x) > 0$, а $5^{-\frac{1}{x}} = g(x) > 0$, то уравнение имеет однородный вид:

$$f^2(x) - (2b+5)f(x)g(x) + 10bg^2(x) = 0.$$

Делим обе части на $g^2(x) > 0$ и заменяем $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = 5^{x+\frac{1}{x}}$. Так как сумма взаимно обратных чисел $x + \dfrac{1}{x}$ не меньше 2 для положительных x и не больше -2 для отрицательных x, то функция $h(x)$ может принимать значения из множества $\left(0; \dfrac{1}{25}\right] \cup [25; +\infty)$, причём каждое свое значение, кроме граничных $\left(\dfrac{1}{25} \text{ и } 25\right)$, функция принимает ровно при двух значениях x, а граничные – только в одной точке (-1 и 1 соответственно). Рассмотрим получившееся квадратное уравнение:

$$h^2(x) - (2b+5)h(x) + 10b = 0.$$

Найдём дискриминант $D = (2b+5)^2 - 4\cdot 10b = (2b-5)^2$.

1) Если $D = 0 \implies b = \dfrac{5}{2}$ и $h(x) = 5$ – не принадлежит множеству значений функции, то есть при $b = \dfrac{5}{2}$ решений нет.

2) Если $b \neq \dfrac{5}{2}$, то $h(x) = \dfrac{2b+5-2b+5}{2} = 5$ или $h(x) = \dfrac{2b+5+2b-5}{2} = 2b$.

Уравнение $h(x) = 5$ решений не имеет. Исходя из множества значений функции $h(x)$, уравнение $h(x) = 2b$ будет иметь два решения при условии:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 2b < \dfrac{1}{25}; \\ 2b > 25; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 0 < b < \dfrac{1}{50}; \\ b > \dfrac{25}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{50}\right) \bigcup \left(\dfrac{25}{2}; +\infty\right)$.

Задача 13. (Почв-80.4)

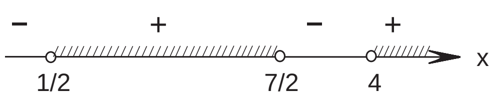
Решить неравенство $\big(4x^2 - 16x + 7\big) \cdot \log_2 (x - 3) > 0$.

Идея. Учитывая рациональность первого сомножителя, решить неравенство модифицированным методом интервалов с условиями равносильности.
Указание. Выражение $\log_2 f(x)$ имеет тот же знак на области определения $(f(x) > 0)$, что и выражение $f(x) - 1$.
Указание. Неравенство преобразуется к виду $\big(4x^2 - 16x + 7\big)(x - 4) > 0$, где $x > 3$.

Решение. Воспользуемся модифицированным методом интервалов. Логарифм $\log_2 f(x)$ при $f(x) > 0$ имеет тот же знак, что и $f(x) - 1$, поэтому исходное неравенство при $x > 3$ равносильно следующему:

$$\big(4x^2 - 16x + 7\big)(x - 3 - 1) > 0 \iff (2x - 7)(2x - 1)(x - 4) > 0 \iff$$

$$\iff x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right) \cup (4, +\infty).$$



Учитывая, что $x > 3$, получаем $x \in \left(3; \dfrac{7}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.

Ответ. $\left(3; \dfrac{7}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.

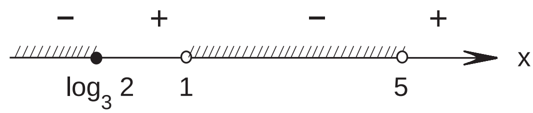
Задача 14. (Геол-95.4)

Решить неравенство $\dfrac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leq 0$.

Идея. Разложив знаменатель на множители, использовать модифицированный метод интервалов (заменить числитель выражением того же знака).
Указание. $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$; выражение $3^x - 2$ имеет тот же знак, что и $x - \log_3 2$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся модифицированным методом интервалов. Выражение 3^x-2 имеет тот же знак, что и выражение $x-\log_3 2$, поэтому исходное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{x-\log_3 2}{(x-1)(x-5)}\le 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x\in(-\infty;\log_3 2]\cup(1;5).$$



О т в е т. $(-\infty;\log_3 2]\cup(1;5)$.

Задача 15. (ЕГЭ)

Укажите количество целых решений неравенства $(2^x-1)(25-5^x)>0$.

И д е я. Использовать модифицированный метод интервалов.
У к а з а н и е. Используя модифицированный метод интервалов, сделать равносильный переход: $(2^x-1)(5^x-25)<0 \iff (x-0)(x-2)<0$.

Р е ш е н и е. Используя модифицированный метод интервалов, сделаем равносильный переход:

$$(2^x-2^0)(5^x-5^2)<0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x-0)(x-2)<0 \quad\Longleftrightarrow\quad 0<x<2.$$

В этом интервале только одно целочисленное решение $x=1$.

О т в е т. Одно.

Задача 16. (ЕГЭ)

Решите неравенство $\dfrac{x^2-3}{3^x-4}<0$.

И д е я. Использовать модифицированный метод интервалов.
У к а з а н и е. Используя модифицированный метод интервалов, получить:

$$\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x-\log_3 4}<0.$$

Р е ш е н и е. Используем модифицированный метод интервалов:

$$\frac{x^2-3}{3^x-4}<0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x-\log_3 4}<0 \quad\Longleftrightarrow\quad x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\log_3 4;\sqrt{3}\right).$$

О т в е т. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\log_3 4;\sqrt{3}\right)$.

Задача 17. (Экон-93.1)

Решить неравенство $\log_{7^x-6} 25 < 2$.

Идея. Использовать модифицированный метод интервалов.
Указание. Сделать замену $t = 7^x > 0$, привести неравенство к виду $\dfrac{\log_5(t-6)-1}{\log_5(t-6)-0} > 0$ и применить модифицированный метод интервалов.

Решение. Сделаем замену $t = 7^x > 0$, перейдём к логарифму по основанию 5 и приведём всё к одному знаменателю:

$$1 - \frac{1}{\log_5(t-6)} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\log_5(t-6)-1}{\log_5(t-6)-0} > 0$$

Применим модифицированный метод интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{(t-6)-5}{(t-6)-1} > 0, \\ t-6 > 0; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{t-11}{t-7} > 0, \\ t > 6; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 6 < t < 7; \\ t > 11. \end{array} \right.$$

Значит, $\log_7 6 < x < 1$ или $x > \log_7 11$.

Ответ. $(\log_7 6; 1) \cup (\log_7 11; +\infty)$.

Задача 18. (М/м-91.2)

Решить неравенство $\dfrac{\log_3\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)}{\log_9 2x} \geq 1$.

Идея. Перейти к логарифмам по основанию 3, перенести всё налево и решить неравенство модифицированным методом интервалов.
Указание. Перейти в знаменателе к логарифму по основанию 3:

$$\frac{2\log_3\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)}{\log_3 2x} - 1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\log_3\left(1-\dfrac{3x}{2}\right) - \log_3 2x}{\log_3 2x - \log_3 1} \geq 0.$$

Указание. Применить модифицированный метод интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)^2 - 2x}{2x-1} \geq 0, \\ 2x > 0, \\ 1 - \dfrac{3x}{2} > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перейдём в знаменателе к логарифму по основанию 3:

$$\frac{2\log_3\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)}{\log_3 2x} - 1 \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2\log_3\left(1-\dfrac{3x}{2}\right) - \log_3 2x}{\log_3 2x - \log_3 1} \geq 0.$$

Применим модифицированный метод интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(1-\dfrac{3x}{2}\right)^2 - 2x}{2x-1} \geq 0, \\ 2x > 0, \\ 1 - \dfrac{3x}{2} > 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{9x^2 - 20x + 4}{2x-1} \geq 0, \\ x > 0, \\ x < \dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2}{9} \leq x < \frac{1}{2}.$$

О т в е т. $\left[\dfrac{2}{9}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Задача 19. (Почв-79.2)

Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_3(x^2-7x+12)} < \dfrac{1}{\log_3 20}$.

И д е я. Приведя дроби к общему знаменателю в левой части неравенства, перейти к равносильной системе неравенств через модифицированный метод интервалов.

У к а з а н и е. Неравенство $\dfrac{\log_3 20 - \log_3(x^2-7x+12)}{\log_3(x^2-7x+12)\log_3 20} < 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{20-(x^2-7x+12)}{x^2-7x+12-1} < 0, \\ x^2-7x+12 > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Перенесём все слагаемые в левую часть и приведём к общему знаменателю:

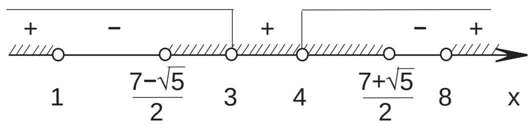
$$\frac{\log_3 20 - \log_3(x^2-7x+12)}{\log_3(x^2-7x+12)\log_3 20} < 0$$

и применим модифицированный метод интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{20-(x^2-7x+12)}{(x^2-7x+12)-1} < 0, \\ x^2-7x+12 > 0; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{x^2-7x-8}{x^2-7x+11} > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 3; \\ x > 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Первое неравенство решаем методом интервалов. Корни числителя $-1; 8$. Корни знаменателя $\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}$. Учитывая, что $-1 < \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} < 3 < 4 < \dfrac{7+\sqrt{5}}{2} < 8$, получаем

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}; 3\right) \cup \left(4; \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (8; +\infty).$$



О т в е т. $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{7-\sqrt{5}}{2};3\right)\cup\left(4;\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(8;+\infty)$.

Задача 20. (ВМК-97.2)

Решить неравенство $\log_{\frac{1}{1-x^2}} 2 < \log_{2x^2}\dfrac{1}{2}$.

И д е я. Перейдя в логарифмах к постоянному основанию и приведя все получившиеся дроби к общему знаменателю в левой части неравенства, использовать модифицированный метод интервалов.

У к а з а н и е. Неравенство приводится к виду

$$\frac{\log_2(1-x^2)-\log_2 2x^2}{\log_2 2x^2\cdot\log_2(1-x^2)}<0.$$

У к а з а н и е. Выражение $\log_2 f(x)-\log_2 g(x)$ имеет на области определения $(f(x)>0,\ g(x)>0)$ тот же знак, что и $f(x)-g(x)$.

У к а з а н и е. Заменив логарифмы рациональными выражениями, применить для решения стандартный метод интервалов.

Р е ш е н и е. Перейдём к логарифмам с постоянным основанием:

$$\frac{1}{\log_2(1-x^2)}>\frac{1}{\log_2 2x^2}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\log_2 2x^2-\log_2(1-x^2)}{\log_2 2x^2\cdot\log_2(1-x^2)}>0.$$

На области определения данное неравенство равносильно системе (модифицированный метод интервалов):

$$\begin{cases}\dfrac{2x^2-1+x^2}{(2x^2-1)(1-x^2-1)}>0,\\ 1-x^2>0,\\ 2x^2>0;\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{3x^2-1}{2x^2-1}<0,\\ -1<x<1,\\ x\neq 0;\end{cases}$$

значит, $\dfrac{1}{3}<x^2<\dfrac{1}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad\dfrac{1}{\sqrt{3}}<|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

О т в е т. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\bigcup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 21. (ИСАА-91.5)

Решить неравенство $\log_{\log_{\frac{1}{2}} x} \log_{\frac{1}{7}} x > 0$.

Идея. Перейти к равносильной системе условий через модифицированный метод интервалов для логарифмов.
Указание. Используя модифицированный метод интервалов, перейти к системе

$$\begin{cases} (\log_{\frac{1}{2}} x - 1)(\log_{\frac{1}{7}} x - 1) > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x > 0, \\ \log_{\frac{1}{7}} x > 0. \end{cases}$$

Решение. Перейдём согласно модифицированному методу интервалов к равносильной системе:

$$\begin{cases} (\log_{\frac{1}{2}} x - 1)(\log_{\frac{1}{7}} x - 1) > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x > 0, \\ \log_{\frac{1}{7}} x > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2} - x\right)\left(\dfrac{1}{7} - x\right) > 0, \\ 0 < x < 1; \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{7}; \\ \dfrac{1}{2} < x < 1. \end{array} \right.$$

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{7}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Задача 22. (М/м-89.2)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2 - x^2 + 2x} + x - 2}{\log_3\left(\dfrac{5}{2} - x\right) + \log_3 2} \le 0$.

Идея. Используя формулу суммы логарифмов, заменить знаменатель рациональным выражением того же знака и применить расщепление неравенства.
Указание. $\log_3\left(\dfrac{5}{2} - x\right) + \log_3 2 = \log_3 (5 - 2x)$ и имеет тот же знак, что и выражение $(5 - 2x) - 1$.
Указание. Используя модифицированный метод интервалов получить, что в области $\left(-\infty; \dfrac{5}{2}\right)$ исходное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sqrt{2 - x^2 + 2x} + x - 2}{x - 2} \ge 0.$$

Далее использовать расщепление.

Решение. Преобразуем знаменатель дроби по формуле суммы логарифмов:

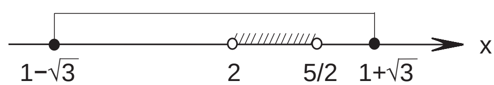
$$\frac{\sqrt{2 - x^2 + 2x} + x - 2}{\log_3(5 - 2x)} \le 0.$$

Выражение $\log_3 f(x)$ имеет при $f(x)>0$ тот же знак, что и $f(x)-1$ (модифицированный метод интервалов), поэтому

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{4-2x}\le 0,\\ 5-2x>0;\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{x-2}\ge 0,\\ x<\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

Расщепление неравенства приводит к совокупности систем.

$$1)\ \begin{cases}\sqrt{2-x^2+2x}+x-2\ge 0,\\ x-2>0,\\ x<\dfrac{5}{2};\end{cases} \iff \begin{cases}\sqrt{2-x^2+2x}\ge 2-x,\\ 2<x<\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$



Первое неравенство системы выполняется везде на своей области определения $[1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}]$; значит, $2<x<\dfrac{5}{2}$.

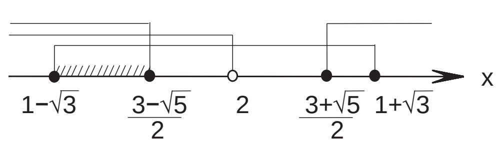
$$2)\ \begin{cases}\sqrt{2-x^2+2x}+x-2\le 0,\\ x-2<0,\\ x<\dfrac{5}{2};\end{cases} \iff \begin{cases}\sqrt{2-x^2+2x}\le 2-x,\\ x<2.\end{cases}$$

Неравенство с радикалом решается возведением в квадрат:

$$\begin{cases}2-x^2+2x\ge 0,\\ x<2,\\ 2-x^2+2x\le (2-x)^2;\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-2x-2\le 0,\\ x<2,\\ x^2-3x+1\ge 0;\end{cases} \iff \begin{cases}1-\sqrt{3}\le x\le 1+\sqrt{3},\\ x<2,\\ \left[\begin{array}{l}x\le \dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\\ x\ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Сравним числа: $1-\sqrt{3}<0<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<\dfrac{3}{2}<2<\dfrac{3+2}{2}<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; осталось сравнить

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & \vee & 1+\sqrt{3}\\ 3+\sqrt{5} & \vee & 2+2\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{5} & \vee & 2\sqrt{3}\\ 6+2\sqrt{5} & \vee & 12\\ \sqrt{5} & < & 3;\end{array}$$



значит, во втором случае получаем $\quad 1-\sqrt{3} \leq x \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $\left[1-\sqrt{3}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \bigcup \left(2; \dfrac{5}{2}\right)$.

11.4. Смешанные задачи

Задача 1. (ЕГЭ)

Укажите число корней уравнения $(2^{x^2}-32)\sqrt{3-x}=0$.

Идея. Использовать расщепление уравнения стандартным образом.

Указание. Уравнение равносильно совокупности $\begin{cases} 2^{x^2}=32, \\ x \leq 3; \end{cases}$ или $x=3$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{x^2}=32, \\ 3-x \geq 0; \end{cases} \\ 3-x=0; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=5, \\ x \leq 3; \end{cases} \\ x=3; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5}; \\ x=-\sqrt{5}; \\ x=3; \end{array}\right.$$

следовательно, уравнение имеет три корня.

Ответ. Три.

Задача 2. (Геогр-98.1)

Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{-4x^2+13x-3}+1}{\log_{3x}7} \geq 0$.

Идея. Рассмотрев знаки числителя и знаменателя дроби, перейти к равносильной системе условий.

Указание. Числитель дроби на своей области определения заведомо положителен, поэтому достаточно потребовать на области определения радикала положительности её знаменателя.

Указание. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} \log_{3x}7>0, \\ -4x^2+13x-3 \geq 0. \end{cases}$

Решение. Поскольку числитель дроби на области определения положителен, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{3x}7>0, \\ -4x^2+13x-3 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 3x>1, \\ \dfrac{1}{4} \leq x \leq 3; \end{cases} \iff x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right].$$

Ответ. $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right]$.

Задача 3. (Экон.К-83.2)

Решить уравнение $\sqrt{4-x^2}\cdot(\sin 2\pi x - 3\cos\pi x) = 0$.

Идея. Использовать расщепление уравнения стандартным образом.
Указание. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 4-x^2=0; \\ \begin{cases} \sin 2\pi x - 3\cos\pi x = 0, \\ 4-x^2 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение. Расщепляя уравнение стандартным образом, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 4-x^2=0; \\ \begin{cases} \sin 2\pi x - 3\cos\pi x = 0, \\ 4-x^2 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

1) Решения первого уравнения $x=\pm 2$.
2) Рассмотрим тригонометрическое уравнение:

$$2\sin\pi x\cos\pi x = 3\cos\pi x \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \cos\pi x = 0; \\ \sin\pi x = \dfrac{3}{2} > 1; \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \pi x = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}+n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Выполняя отбор по условию $4-x^2\ge 0 \iff |x|\le 2$, получим систему

$$\begin{cases} -2\le n+\dfrac{1}{2}\le 2, \\ n\in\mathbb{Z}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} -\dfrac{5}{2}\le n\le \dfrac{3}{2}, \\ n\in\mathbb{Z}; \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad n\in\{-2;-1;0;1\};$$

при $n=-2$ $x=-\dfrac{3}{2}$; при $n=-1$ $x=-\dfrac{1}{2}$; при $n=0$ $x=\dfrac{1}{2}$; при $n=1$ $x=\dfrac{3}{2}$.

Ответ. $\pm\dfrac{1}{2}$; $\pm\dfrac{3}{2}$; ± 2.

Задача 4. (М/м-99(2).1)

Решить уравнение $(x^2+4)\lg\sin^2 3x + x^2\lg\cos^2 2x = 4\lg\left(\cos 2x\sin^3 3x\right)$.

Идея. Преобразовав логарифмические выражения с учётом их области определения, сгруппировать слагаемые в уравнении для разложения на множители.

Указание. После преобразования логарифмов получаем

$$x^2 \cdot \lg(\sin^2 3x \cdot \cos^2 2x) - 4\lg(\cos 2x \cdot \sin 3x) = 0.$$

Указание. После группировки и разложения на множители с последующим расщеплением получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 2, \\ \sin 3x \cos 2x > 0; \end{cases} \\ \lg \sin 3x \cos 2x = 0. \end{array}\right.$$

Указание. Требование $\sin 3x \cos 2x > 0$ при $x^2 = 2$ проверить непосредственной подстановкой.

Указание. Тригонометрическое уравнение $\sin 3x \cos 2x = 1$ удобнее всего решать сведением к сумме $\sin 5x + \sin x = 2$, что равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin x = 1. \end{cases}$$

Решение. На области определения ($\sin 3x \cos 2x > 0$) преобразуем слагаемые по формулам для логарифмов, после чего разложим на множители:

$$x^2 \cdot (\lg \sin^2 3x + \lg \cos^2 2x) - 4(\lg(\cos 2x \cdot \sin^3 3x) - \lg \sin^2 3x) = 0 \iff$$

$$\iff x^2 \cdot \lg(\sin^2 3x \cdot \cos^2 2x) - 4\lg(\cos 2x \cdot \sin 3x) = 0 \iff$$

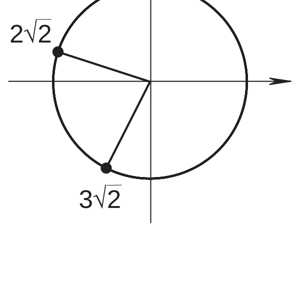
$$\iff \left(x^2 - 2\right) \lg\left(\sin 3x \cos 2x\right) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 2, \\ \sin 3x \cos 2x > 0; \end{cases} \\ \lg \sin 3x \cos 2x = 0. \end{array}\right.$$

1) Из первого уравнения получаем $x = \pm\sqrt{2}$; условие $\sin 3x \cos 2x > 0$ проверяем непосредственной подстановкой:

- при $x = \sqrt{2}$ $\sin 3x \cos 2x = \sin 3\sqrt{2} \cos 2\sqrt{2}$;
  $\cos 2\sqrt{2} < 0$, так как угол $2\sqrt{2}$ лежит во II четверти;
  $\sin 3\sqrt{2} < 0$, так как $\pi < 3\sqrt{2} < 3 \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2} < \dfrac{3\pi}{2}$, то есть угол $3\sqrt{2}$ лежит в III четверти;
  значит, $\sin 3\sqrt{2} \cos 2\sqrt{2} > 0$, то есть значение $x = \sqrt{2}$ подходит;

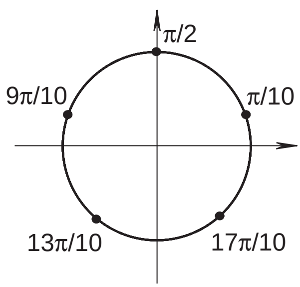


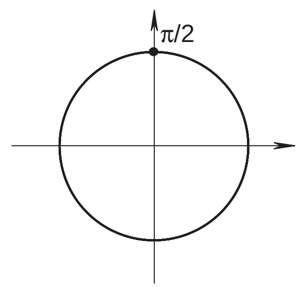
- при $x = -\sqrt{2}$ $\quad \sin 3x \cos 2x = -\sin 3\sqrt{2}\cos 2\sqrt{2} < 0$, то есть $x = -\sqrt{2}$ не подходит.

2) При решении второго уравнения совокупности воспользуемся ограниченностью синуса:

$$\sin 3x \cos 2x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin 5x + \sin x = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \sin x = 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$





О т в е т. $\sqrt{2}$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. (М/м-97.2)

Решить неравенство $\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) \log_{13-3\cdot 2^x} 4 \le 1$.

И д е я. Преобразовать неравенство в логарифмическое; затем перейти к равносильной системе условий с помощью модифицированного метода интервалов для логарифмов.

У к а з а н и е. Переписав неравенство в виде $\log_{13-3\cdot 2^x} 4^{1-\frac{x}{2}} - 1 \le 0$, воспользоваться утверждением о том, что на области определения неравенство $\log_{a(x)} f(x) - 1 \le 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-a(x)) \le 0, \\ a(x) > 0, \\ a(x) \ne 1, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (13 - 3\cdot 2^x - 1)\left(\dfrac{4}{2^x} - 13 + 3\cdot 2^x\right) \le 0, \\ 13 - 3\cdot 2^x > 0, \\ 13 - 3\cdot 2^x \ne 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Используем для перехода от логарифмического неравенства к равносильной ему системе условий модифицированный метод интервалов:

$$\log_{13-3\cdot 2^x} 4^{1-\frac{x}{2}} \le 1 \iff \log_{13-3\cdot 2^x} \frac{4}{2^x} - 1 \le 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} (13-3\cdot 2^x - 1)\left(\dfrac{4}{2^x} - 13 + 3\cdot 2^x\right) \le 0, \\ 13 - 3\cdot 2^x > 0, \\ 13 - 3\cdot 2^x \ne 1; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (4-2^x)(3\cdot 4^x - 13\cdot 2^x + 4) \le 0, \\ 2^x < \dfrac{13}{3}, \\ 2^x \ne 4; \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (2^x - 4)\left(2^x - \dfrac{1}{3}\right)(2^x - 4) \ge 0, \\ 2^x < \dfrac{13}{3}, \\ 2^x \ne 4; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{3} \le 2^x < \dfrac{13}{3}, \\ 2^x \ne 4; \end{cases}$$

значит, $x \in [-\log_2 3; 2) \cup \left(2; \log_2 \dfrac{13}{3}\right)$.

О т в е т. $[-\log_2 3; 2) \cup \left(2; \log_2 \dfrac{13}{3}\right)$.

Задача 6. (М/м-73.1)

Решить уравнение $\cos 2x + \log_4 \dfrac{1}{2}\sin x + 2\cos x \log_{\frac{1}{2}} \sin x = 2\cos x + \sin^2 x \log_2 \sin^2 x$.

И д е я. Применив формулу косинуса двойного угла и перейдя к логарифмам по одному основанию, вынести логарифмы за скобки и разложить на множители.
У к а з а н и е. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$; $\log_4\left(\dfrac{\sin x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{\sin x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\log_2 \sin x - \dfrac{1}{2}$; $\log_2 \sin^2 x = 2\log_2 \sin x$ при $\sin x > 0$.
У к а з а н и е. Уравнение раскладывается на множители:

$$\left(2\sin^2 x + 2\cos x - \frac{1}{2}\right)(1 + \log_2 \sin x) = 0.$$

Р е ш е н и е. Применим формулу косинуса двойного угла и перейдём к логарифмам по основанию 2:

$$1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{2}(\log_2 \sin x - 1) - 2\cos x \cdot \log_2 \sin x = 2\cos x + 2\sin^2 x \cdot \log_2 \sin x \iff$$

$$\iff \log_2 \sin x \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\cos x - 2\sin^2 x\right) = 2\cos x - \frac{1}{2} + 2\sin^2 x \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{2} - 2\cos x - 2(1-\cos^2 x) = 0, \\ \sin x > 0; \end{cases} \\ \log_2 \sin x = -1; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0, \\ \sin x > 0; \end{cases} \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Из первого уравнения получаем $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ и $\cos x = \dfrac{3}{2} > 1$; с учётом условия $\sin x > 0$ остаётся $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ находим $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

О т в е т. $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. (Физ-86.3)

Решить систему $\begin{cases} 3^y = x, \\ 2\sin x + \sin 2x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}. \end{cases}$

И д е я. Решить тригонометрическое уравнение независимо от показательного, после чего вычислить обе переменные с учётом дополнительных условий.
У к а з а н и е. Для решения тригонометрического уравнения использовать формулы синуса двойного угла и понижения степени для косинуса.
У к а з а н и е. Из показательного уравнения найти y: $y = \log_3 x$, где $x > 0$.

Р е ш е н и е. Отдельно рассмотрим тригонометрическое уравнение:

$$2\sin x + 2\sin x\cos x = 1 + \cos x \iff 2\sin x(1+\cos x) = 1 + \cos x \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos x = -1; \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения исходной системы

$$3^y = x > 0 \iff y = \log_3 x, \quad x > 0.$$

В итоге получаем $\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n, \quad y = \log_3(\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{N}_0; \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad y = \log_3\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m\right), \quad m \in \mathbb{N}_0; \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad y = \log_3\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{array}\right.$

О т в е т. $(\pi + 2\pi n; \log_3(\pi + 2\pi n))$, $\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m; \log_3\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi m\right)\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k; \log_3\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)\right)$; $n, m, k \in \mathbb{N}_0$.

Задача 8. (Геол-96.3)

Найти все решения уравнения $\dfrac{\cos 10x - \cos 8x}{2x^2 + \pi x - \pi^2} = \dfrac{\cos 6x - \cos 4x}{2x^2 + \pi x - \pi^2}$, принадлежащие интервалу $(0; \pi)$.

Идея. Уравнение выполнено при равенстве числителей дробей с отбором решений по ненулевому знаменателю и заданному интервалу.
Указание. Равносильная система

$$\begin{cases} \cos 10x - \cos 8x = \cos 6x - \cos 4x, \\ 2x^2 + \pi x - \pi^2 \neq 0, \\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. Данное уравнение с учётом дополнительного условия равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 10x - \cos 8x = \cos 6x - \cos 4x, \\ 2x^2 + \pi x - \pi^2 \neq 0, \\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение

$$\cos 10x + \cos 4x = \cos 8x + \cos 6x \iff 2\cos 7x \cos 3x = 2\cos 7x \cos x \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos 7x = 0; \\ \cos 3x = \cos x; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \cos 7x = 0; \\ \sin 2x \sin x = 0; \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Осталось учесть условия $x \neq -\pi$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}$, $0 < x < \pi$; после отбора остаются значения $\dfrac{\pi}{14}$, $\dfrac{3\pi}{14}$, $\dfrac{5\pi}{14}$, $\dfrac{9\pi}{14}$, $\dfrac{11\pi}{14}$, $\dfrac{13\pi}{14}$.

Ответ. $\left\{ \dfrac{\pi}{14}; \dfrac{3\pi}{14}; \dfrac{5\pi}{14}; \dfrac{9\pi}{14}; \dfrac{11\pi}{14}; \dfrac{13\pi}{14} \right\}$.

Задача 9. (М/м-98(2).2)

Решить неравенство $\dfrac{1 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+4} + \log_{\frac{1}{2}}(13 - x)}{|x^2 + 2x - 3| - |2x^2 - 10x + 8|} \geq 0$.

Идея. Приведя числитель к разности логарифмов по одному основанию и разложив знаменатель на множители, использовать модифицированный метод интервалов для перехода к равносильной системе условий.
Указание. Числитель дроби приводится к виду

$$1 + \log_2(x+4) - \log_2(13 - x) = \log_2(2x + 8) - \log_2(13 - x)$$

и на области определения имеет тот же знак, что и разность $(2x + 8) - (13 - x)$.

У к а з а н и е. Знаменатель преобразуется к виду

$$|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8| = |x-1|\cdot|x+3|-2|x-1|\cdot|x-4| =$$
$$= |x-1|\cdot(|x+3|-|2x-8|)$$

и на области определения имеет тот же знак, что и разность $(x+3)^2-(2x-8)^2$.
У к а з а н и е. Искомое неравенство равносильно системе условий

$$\begin{cases} \dfrac{2x+8-13+x}{(x+3)^2-(2x-8)^2} \geq 0, \\ x \neq 1, \\ -4 < x < 13. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразуем числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{\log_2(2x+8)-\log_2(13-x)}{|x-1|\cdot|x+3|-2|x-1|\cdot|x-4|} = \frac{\log_2(2x+8)-\log_2(13-x)}{|x-1|\cdot(|x+3|-|2x-8|)}.$$

Учитывая, что всегда $|x-1| \geq 0$, и применив модифицированный метод интервалов (разность логарифмов и разность модулей заменяем на выражения того же знака с учётом области определения), переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} \dfrac{2x+8-(13-x)}{(x+3)^2-(2x-8)^2} \geq 0, \\ -4 < x < 13, \\ x \neq 1; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3x-5}{(3x-5)(x-11)} \leq 0, \\ -4 < x < 13, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

значит, $-4 < x < 11$, $x \neq 1$, $x \neq \dfrac{5}{3}$.

О т в е т. $(-4;1)\cup\left(1;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};11\right)$.

Задача 10. (Почв-97(1).4)

Решить неравенство $\dfrac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\log_{2^x} 3} > 0$.

И д е я. Привести числитель и знаменатель к показательным выражениям и воспользоваться модифицированным методом интервалов.
У к а з а н и е. Удобно ввести параметрическую замену $a = \log_2 3 > 1$; тогда неравенство приводится к виду $\dfrac{a^x-a^2}{a^{-x}-a} > 0$ при $x \neq 0$.

Р е ш е н и е. Обозначив $\log_2 3 = a > 1$, получаем равносильную систему, которую решаем модифицированным методом интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{a^x-a^2}{a^{-x}-a} > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-2}{-x-1} > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} < 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

О т в е т. $(-1;0)\cup(0;2)$.

Задача 11. (ИСАА-92.5)

Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5(x^2 - 9) < 0$.

И д е я. Воспользовавшись модифицированным методом интервалов, свести неравенство к системе условий.
У к а з а н и е. Выражение $\log_a f(x)$ имеет тот же знак при $a > 1$ и $f(x) > 0$, что и выражение $f(x) - 1$.
У к а з а н и е. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (|\cos x| - 1)(x^2 - 10) > 0, \\ \cos x \neq 0, \\ x^2 - 9 > 0. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Так как $|\cos x| \leq 1$ всегда, получаем неравенство $3 < |x| < \sqrt{10}$ с отбором корней по условию $x \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Р е ш е н и е. По формуле преобразования логарифма получаем

$$\log_2 |\cos x| \cdot \log_5(x^2 - 9) > 0;$$

учитывая, что $\log_a f(x)$ имеет при $a > 1$ и $f(x) > 0$ тот же знак, что и $f(x)-1$, переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} (|\cos x| - 1)\big(x^2 - 10\big) > 0, \\ x^2 - 9 > 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Первый множитель всегда отрицателен, кроме случая $|\cos x| = 1$, поэтому

$$\begin{cases} 9 < x^2 < 10, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos x \neq \pm 1; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3 < |x| < \sqrt{10}, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}, \ n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

единственным подозрительным числом на интервале $(3; \sqrt{10})$ является значение $\pi > 3$; проведём сравнение:

$$\begin{array}{rcl} \pi & \vee & \sqrt{10} \\ \pi < 3.15 & \vee & \sqrt{10} \\ 315 & \vee & 100\sqrt{10} \\ 63 & \vee & 20\sqrt{10} \\ 63^2 = 3969 & < & 400 \cdot 10 = 4000; \end{array}$$

следовательно, $\pi < 3.15 < \sqrt{10}$, то есть $\pi \in (3; \sqrt{10})$. Таким образом, окончательно получаем $3 < |x| < \sqrt{10}$, $|x| \neq \pi$.

О т в е т. $(-\sqrt{10}; -\pi) \cup (-\pi; -3) \cup (3; \pi) \cup (\pi; \sqrt{10})$.

Задача 12. (Хим-93(1).4)

Решить систему уравнений $\begin{cases} 6x^2+17xy+7y^2=16, \\ \log_{2x+y}(3x+7y)=3. \end{cases}$

Идея. Разложить левую часть первого уравнения на множители и воспользоваться определением логарифма во втором уравнении системы для подстановки.
Указание. Левую часть первого уравнения раскладываем на множители:

$$6x^2+17xy+7y^2=(2x+y)(3x+7y);$$

из второго уравнения получаем $(2x+y)^3=3x+7y$ при $0<2x+y\neq 1$.

Решение. Разложим на множители левую часть первого уравнения:

$$6x^2+17xy+7y^2=6x^2+3xy+14xy+7y^2=$$

$$=3x(2x+y)+7y(2x+y)=(2x+y)(3x+7y).$$

Во втором уравнении системы на области определения воспользуемся определением логарифма:

$$(2x+y)^3=3x+7y \quad \text{при} \quad 0<2x+y\neq 1.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} (2x+y)(3x+7y)=16, \\ 3x+7y=(2x+y)^3, \\ 2x+y>0, \\ 2x+y\neq 1; \end{cases}$$

из уравнений выражаем $(2x+y)^4=16$, то есть $2x+y=2$. Тогда из первого уравнения следует, что $3x+7y=8$. Итак,

$$\begin{cases} 2x+y=2, \\ 3x+7y=8; \end{cases} \iff \begin{cases} y=2-2x, \\ 3x+14-14x=8; \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{6}{11}, \\ y=\dfrac{10}{11}. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\dfrac{6}{11};\dfrac{10}{11}\right)$.

Задача 13. (М/м-98(1).3)

Решить неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_3(-2x-x^2)\geq\log_3\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\log_2(-2x-x^2).$$

Идея. Разложив выражение на множители, применить модифицированный метод интервалов.

Указание. Модифицированный метод интервалов для данного неравенства: выражение $\log_a f(x)$ имеет тот же знак при $a > 1$ и $f(x) > 0$, что и выражение $f(x) - 1$; выражение $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ при $a > 1$ имеет тот же знак, что и $f(x) - g(x)$.

Указание. После применения модифицированного метода интервалов на области определения $-2 < x < 0$ получим неравенство $(x+1)^2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+x-\frac{1}{2}\right) \le 0.$

Решение. Область определения

$$\begin{cases} -2x - x^2 > 0, \\ x \ge -\dfrac{11}{2}, \\ \sqrt{x+\dfrac{11}{2}} + \dfrac{x}{2} + 1 > 0, \\ \dfrac{|x|}{2} + \dfrac{3}{2} > 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -2 < x < 0, \\ \sqrt{x+\dfrac{11}{2}} > -\left(\dfrac{x}{2}+1\right); \end{cases}$$

заметим, что при $-2 < x < 0$ справедлива оценка $-1 < -\left(\frac{x}{2}+1\right) < 0$, то есть второе условие последней системы выполнено автоматически; значит, областью определения будет множество $-2 < x < 0$.

Перейдём в обеих частях исходного неравенства к логарифмам по основанию 2, перенесём все слагаемые в левую часть и разложим на множители:

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\log_2(-2x-x^2) \ge \log_3\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\log_2(-2x-x^2) \iff$$

$$\iff \quad \log_2(-2x-x^2)\left(\log_3\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right) - \log_3\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\right) \ge 0.$$

Применим модифицированный метод интервалов (выражение $\log_a f(x)$ имеет тот же знак при $a > 1$ и $f(x) > 0$, что и выражение $f(x) - 1$; выражение $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ при $a > 1$ имеет тот же знак, что и $f(x) - g(x)$):

$$(-2x - x^2 - 1)\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1-\frac{|x|}{2}-\frac{3}{2}\right) \ge 0 \quad \iff$$

$$\iff \quad (x+1)^2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}-\frac{|x|}{2}-\frac{1}{2}\right) \le 0;$$

$x = -1$ – решение. Далее рассмотрим последний сомножитель, на области определения $|x|$ раскрывается с минусом:

$$\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2} \le 0 \quad \iff \quad \sqrt{x+\frac{11}{2}} \le \frac{1}{2} - x;$$

на области определения $\frac{1}{2}-x>0$, поэтому возводим обе части неравенства в квадрат без дополнительных ограничений:

$$x+\frac{11}{2}\le\frac{1}{4}+x^2-x \quad\iff\quad x^2-2x-\frac{21}{4}\ge 0 \quad\iff\quad \left[\begin{array}{l} x\le-\frac{3}{2};\\ x\ge\frac{7}{2};\end{array}\right.$$

с учётом условия $-2<x<0$ получаем $-2<x\le-\frac{3}{2}$.

Ответ. $\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\{-1\}$.

Задача 14. (ИСАА-95.5)

Решить неравенство $\sqrt{4x-x^2-3}(\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos 2x})\ge 0$.

Идея. Использовать стандартный метод расщепления.

Указание. Область определения $4x-x^2-3\ge 0$, то есть $x=1$ и $x=3$ являются корнями исходного неравенства, а при $1<x<3$ оно равносильно тригонометрическому неравенству $\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos 2x}\ge 0$.

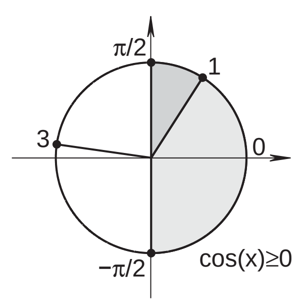
Указание. Заметив, что под радикалом в тригонометрическом неравенстве стоит $2\cos^2 x$, получаем $\cos x\ge|\cos x|$.

Указание. Учитывая ограничение $1<x<3$, неравенство $\cos x\ge 0$ выгоднее решать на тригонометрической окружности.

Решение. Прежде всего заметим, что $\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2}|\cos x|$, поэтому область определения задаётся единственным условием $4x-x^2-3\ge 0 \iff x\in[1;3]$.

Первый сомножитель исходного неравенства (радикал) неотрицателен на области определения. Нули первого сомножителя $x=1$ и $x=3$ являются решениями неравенства.

В остальных случаях при $x\in(1;3)$ требуется исследовать неотрицательность второго сомножителя:



$$\sqrt{2}\cos x-\sqrt{1+\cos 2x}\ge 0 \quad\iff\quad |\cos x|\le\cos x$$

$$\iff\quad \cos x\ge 0.$$

Отметив соответствующие секторы на тригонометрической окружности, получаем, что $1<x\le\frac{\pi}{2}$. Объединяем с ранее полученными значениями: $1\le x\le\frac{\pi}{2}$ или $x=3$.

Ответ. $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]\cup\{3\}$.

Задача 15. (Биол-88.5)

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi\,(2x-y-2)}{6}\right)\cdot\left(\sqrt{3-x^2-y^2+2x}-3\right)=0,\\ 3\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\dfrac{\pi\,(2x-y)}{6}=\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi\,(2x-y)}{6}. \end{cases}$$

Идея. Расщепить первое уравнение и решить получившуюся равносильную совокупность двух систем.

Указание. Область определения исходной системы удобно интерпретировать как круг на координатной плоскости с центром в точке $(1;0)$ и радиусом, равным двум.

Указание. Используя метод вспомогательного аргумента, преобразовать второе уравнение к виду:

$$\frac{3}{2}\cos\frac{\pi x}{2}+\sin\left(\frac{\pi\,(2x-y-2)}{6}\right)=0.$$

Указание. Одна из полученных при равносильном переходе систем является тригонометрической. Решением этой системы будет семейство прямых. Для отбора решений удобно использовать получившийся при поиске области определения круг.

Указание. Второй получающейся при равносильном переходе системой является смешанная:

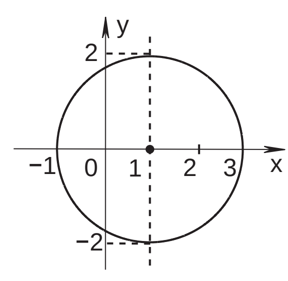
$$\begin{cases} 3-x^2-y^2+2x=9,\\ \dfrac{3}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2}+\sin\left(\dfrac{\pi\,(2x-y-2)}{6}\right)=0. \end{cases}$$

Указание. Выделив в первом уравнении полный квадрат по x, показать, что оно не имеет решений.

Решение. Прежде всего найдём область определения системы:

$$3-x^2-y^2+2x\ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x-1)^2+y^2\le 4;$$

на плоскости Oxy это круг с центром $(1;0)$ радиуса 2.



Второе уравнение преобразуем с использованием метода вспомогательного аргумента:

$$3\cos\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{\pi\,(2x-y)}{6}=\sqrt{3}\cos\frac{\pi\,(2x-y)}{6}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{3}{2}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi\,(2x-y)}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi\,(2x-y)}{6}=0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{3}{2}\cos\frac{\pi x}{2}+\sin\left(\frac{\pi\,(2x-y)}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=0\quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad \frac{3}{2}\cos\frac{\pi x}{2}+\sin\left(\frac{\pi\,(2x-y-2)}{6}\right)=0.$$

Расщепляя первое уравнение системы, получаем два случая.

1) $\begin{cases} \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x}{2} + \sin\dfrac{\pi\,(2x-y-2)}{6} = 0, \\ \dfrac{3}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2} + \sin\dfrac{\pi\,(2x-y-2)}{6} = 0. \end{cases}$

Вычитая одно уравнение из другого, получаем $\cos\dfrac{\pi x}{2} = 0$, значит, и

$$\sin\left(\frac{\pi\,(2x-y-2)}{6}\right) = 0.$$

Решаем тригонометрические уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{\pi\,(2x-y-2)}{6} = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}, \\ 2x - y = 6m+2, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Учитывая область определения, получаем, что для $x = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ (нечётное целое) возможны три значения: -1, 1, 3, причём для двух крайних единственно возможным значением второй переменной является $y = 0$.

- Если $x = -1$, то $y = 0$; второе уравнение системы $6m = -4$ не имеет решений при $m \in \mathbb{Z}$.
- Если $x = 1$, то $y \in [-2; 2]$; уравнение $2x - y = 6m + 2$ принимает вид $y = -6m$, $m \in \mathbb{Z}$; из всех возможных значений подходит только $m = 0$, в этом случае $y = 0$; пара $(1; 0)$ является решением исходной системы.
- Если $x = 3$, то $y = 0$; уравнение $6m = 4$ не имеет решений при $m \in \mathbb{Z}$.

2) $\begin{cases} \sqrt{3 - x^2 - y^2 + 2x} - 3 = 0, \\ \dfrac{3}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2} + \sin\dfrac{\pi\,(2x-y-2)}{6} = 0. \end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение:

$$3 - x^2 - y^2 + 2x = 9 \iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = -5 \iff (x-1)^2 + y^2 = -5.$$

У данного уравнения, а также и у системы в целом, решений нет.

Ответ. $(1; 0)$.

Задача 16. (Геол-95.5)

Решить уравнение $\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\log_2(4-x^2)=\ 0\,.$

Идея. Воспользоваться расщеплением уравнения стандартным образом.
Указание. Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}2\sqrt{3}\sin(\pi x)-\operatorname{ctg}\pi x=0,\\ 4-x^2>0;\end{cases}\\ &\begin{cases}4-x^2=1,\\ \sin\pi x\neq 0.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Решение. Так как $\sin(\pi x+3\pi)=-\sin\pi x$ и $\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\pi x$, то, применяя расщепление, приходим к равносильной совокупности:

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}2\sqrt{3}\sin(\pi x)-\operatorname{ctg}\pi x=0,\\ 4-x^2>0;\end{cases}\\ &\begin{cases}\log_2\left(4-x^2\right)=0,\\ \sin\pi x\neq 0.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

1) Рассмотрим первую систему:

$$\begin{cases}2\sqrt{3}\sin\pi x-\operatorname{ctg}\pi x=0,\\ 4-x^2>0;\end{cases}\iff\begin{cases}\cos\pi x=2\sqrt{3}\sin^2\pi x,\\ \sin\pi x\neq 0,\\ -2<x<2;\end{cases}\iff\begin{cases}\cos\pi x=2\sqrt{3}\sin^2\pi x,\\ -2<x<2.\end{cases}$$

В последнем равносильном переходе использовалось то, что при $\sin\pi x=0$ не может выполняться равенство $\cos\pi x=2\sqrt{3}\sin^2\pi x$.

Найдём корни тригонометрического уравнения:

$$2\sqrt{3}\cos^2\pi x+\cos\pi x-2\sqrt{3}=0\quad\iff\quad\left[\begin{aligned}&\cos\pi x=\frac{-8}{4\sqrt{3}}<-1;\\ &\cos\pi x=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2};\end{aligned}\right.\quad\iff$$

$$\iff\quad x=\pm\frac{1}{6}+2k,\ k\in\mathbb{Z};$$

отбираем корни по условию $-2<x<2$, учитывая $k\in\mathbb{Z}$:

- $-2<2k-\frac{1}{6}<2\iff\left[\begin{aligned}&k=0;\\ &k=1;\end{aligned}\right.$ то есть $\left[\begin{aligned}&x=-1/6;\\ &x=11/6.\end{aligned}\right.$
- $-2<2k+\frac{1}{6}<2\iff\left[\begin{aligned}&k=-1;\\ &k=0;\end{aligned}\right.$ то есть $\left[\begin{aligned}&x=-11/6;\\ &x=1/6.\end{aligned}\right.$

2) Решаем вторую систему:

$$\begin{cases} 4 - x^2 = 1, \\ \sin \pi x \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{3}, \\ x \neq n,\ n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \iff x = \pm\sqrt{3}.$$

О т в е т. $\pm\dfrac{1}{6};\ \pm\sqrt{3};\ \pm\dfrac{11}{6}$.

Задача 17. (М/м-75.5)

Найти все значения x в промежутке $-0,5 < x < 1,5$, удовлетворяющие уравнению $\log_3\left(\sin 3x - \cos 2x - \dfrac{3}{10}\right) = \log_3\left(\sin 7x - \cos 6x - \dfrac{3}{10}\right)$.

И д е я. Перейдя к равносильной системе, решить в ней тригонометрическое уравнение с отбором корней по заданным условиям.
У к а з а н и е. Условие задачи равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x - \cos 2x = \sin 7x - \cos 6x, \\ \sin 3x - \cos 2x - \dfrac{3}{10} > 0, \\ -0,5 < x < 1,5. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Тригонометрическое уравнение приводится к виду

$$\sin 2x(\cos 5x + \sin 4x) = 0.$$

Ограничив его решения интервалом $(-0,5; 1,5)$, удобнее всего подставлять их в тригонометрическое неравенство, не решая его отдельно.
У к а з а н и е. Уравнение вида $\sin 4x + \cos 5x = 0$ можно решить через формулу приведения: $\sin 4x = \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
У к а з а н и е. Решениями основного тригонометрического уравнения являются серии $x = \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$.
У к а з а н и е. При отборе решений возникает необходимость сравнения $\cos\dfrac{2\pi}{9} \vee \dfrac{4}{5}$, которое эффективно провести через промежуточный угол $\dfrac{5\pi}{24} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Р е ш е н и е. Исходное уравнение (с учётом условия) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 3x - \cos 2x = \sin 7x - \cos 6x, \\ \sin 3x - \cos 2x - \dfrac{3}{10} > 0, \\ -0,5 < x < 1,5. \end{cases}$$

Решаем тригонометрическое уравнение:

$$\cos 6x - \cos 2x = \sin 7x - \sin 3x \iff -2\sin 4x \sin 2x = 2\sin 2x \cos 5x \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0;\\ \cos 5x + \sin 4x = 0;\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z};\\ \cos 5x + \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0.\end{array}\right.$$

Сумму косинусов преобразуем в произведение:

$$2\cos\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos\left(\dfrac{9x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0;\\ \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0;\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\dfrac{9x}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi p,\ p \in \mathbb{Z};\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{9},\ k \in \mathbb{Z};\\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Заметим, что последняя из найденных серий $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ полностью включается в серию $x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$, поэтому решениями тригонометрического уравнения будут две серии $x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ и $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{9},\ k \in \mathbb{Z}$. Подставим эти серии в неравенство $-0,5 < x < 1,5$:

- $-0,5 < \dfrac{\pi n}{2} < 1,5 \iff -1 < \pi n < 3 \implies n = 0;$
- $-0,5 < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{9} < 1,5 \iff -9 < \pi(4k+3) < 27 \implies k = -1; 0; 1.$

Значит, для исследования остаются числа $x = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{18}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{7\pi}{18}$; проверяем для них справедливость неравенства $\sin 3x - \cos 2x - \dfrac{3}{10} > 0$:

- при $x = 0$ $\quad \sin 0 - \cos 0 - \dfrac{3}{10} = -\dfrac{3}{10} - 1 < 0$, не подходит;
- при $x = -\dfrac{\pi}{18}$ $\quad \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) - \cos\dfrac{\pi}{9} - \dfrac{3}{10} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{10} - \cos\dfrac{\pi}{9} < 0$, не подходит;
- при $x = \dfrac{\pi}{6}$ $\quad \sin\dfrac{\pi}{2} - \cos\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3}{10} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{10} > 0$, подходит; значение $x = \dfrac{\pi}{6}$ является корнем уравнения и решением исходной задачи;
- при $x = \dfrac{7\pi}{18}$ $\quad \sin\dfrac{7\pi}{6} - \cos\dfrac{7\pi}{9} - \dfrac{3}{10} = -\dfrac{1}{2} + \cos\dfrac{2\pi}{9} - \dfrac{3}{10} = \cos\dfrac{2\pi}{9} - \dfrac{4}{5}$; проведём сравнение:

$$\cos\frac{2\pi}{9} < \cos\frac{5\pi}{24} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{5\pi}{12}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{8} + \sqrt{3} - 1}{\sqrt{8}}} \bigvee \frac{4}{5};$$

возведём обе части этого формального неравенства в квадрат:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}} & \vee & \dfrac{32}{25} \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & \vee & \dfrac{7}{25} \\ 25\sqrt{3} & \vee & 14\sqrt{2}+25 \\ 3\cdot 625 & \vee & 625+2\cdot 196+50\cdot 14\sqrt{2} \\ 625-196 & \vee & 350\sqrt{2} \\ 429<490=35\cdot 14=350\cdot 1,4 & < & 350\cdot\sqrt{2}. \end{array}$$

Таким образом, $\cos\dfrac{2\pi}{9}<\cos\dfrac{5\pi}{24}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}}<\dfrac{4}{5}$; значит, $x=\dfrac{7\pi}{18}$ не подходит.

О т в е т. $\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 18. (Экон.К-83.6)

Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geq 0$.

И д е я. Разложив левую часть на множители, перейти к равносильной совокупности условий путём расщепления.

У к а з а н и е. Представив неравенство в виде $a\left(ax^2+3\right)^2\geq x-3$, заметить, что для разложения его на множители следует вычесть из обеих частей ax^2.

У к а з а н и е. После разложения на множители неравенство приобретает вид

$$\left(ax^2-x+3\right)\left(a^2x^2+ax+3a+1\right)\geq 0,$$

где второй сомножитель при $a\neq 0$ всегда положителен в силу отрицательности своего дискриминанта.

З а м е ч а н и е. Самым «неочевидным» преобразованием является вычитание из обеих частей неравенства ax^2 как величины, удобной и требующейся для разложения на множители. Фактически получается, что левая часть имеет четвёртую степень, а правая часть неравенства всего лишь первую: $a\left(ax^2+3\right)^2\geq x-3$. Единственно «разумной» формулой для понижения четвёртой степени является разность квадратов, вследствие чего и вычитается x^2 с коэффициентом (также «логичным»), причём с тем расчётом, что после разложения левой части на множители по формуле разности квадратов один из множителей окажется равным «новой» правой части.

Как показала практика, объяснить преобразования именно так гораздо проще, чем «таинственно» вычитать и прибавлять что-то в левой части исходного неравенства под лозунгом «несложно видеть».

Другим путём разложения может оказаться метод неопределённых коэффициентов, но в данном случае он громоздок.

Решение. Преобразуем левую часть и само неравенство к виду

$$a\left(a^2x^4+6ax^2+9\right)\ge x-3 \quad\Longleftrightarrow\quad a\left(ax^2+3\right)^2\ge x-3;$$

вычитая из обеих частей ax^2, получаем

$$a\left((ax^2+3)^2-x^2\right)\ge -(ax^2-x+3) \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad a(ax^2-x+3)(ax^2+x+3)\ge -(ax^2-x+3) \quad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad (ax^2-x+3)(a^2x^2+ax+3a+1)\ge 0;$$

дискриминанты:
$D_1=1-12a$,
$D_2=a^2-4a^2(3a+1)=a^2(1-12a-4)=-3a^2(4a+1)\le 0$ при $a\ge 0$.

Если $a=0$, то $0\ge x-3 \iff x\le 3$.

Если $a\ne 0$, то $D_2<0$, поэтому второй множитель всегда положителен; неравенство равносильно требованию $ax^2-x+3\ge 0$; дискриминант квадратного трёхчлена $D_1=1-12a$. Тогда

- если $a=\dfrac{1}{12}$, то $D_1=0$ и $x^2-12x+36\ge 0$ при $\forall x\in\mathbb{R}$;
- если $a>\dfrac{1}{12}$, то $D_1<0$ и неравенство выполнено $\forall x\in\mathbb{R}$;
- если $a<\dfrac{1}{12}$, то $x\le\dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ или $x\ge\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}$.

Ответ. Если $a=0$, то $x\le 3$; если $0<a<\dfrac{1}{12}$, то $x\le\dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ или $x\ge\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}$; если $a\ge\dfrac{1}{12}$, то $x\in\mathbb{R}$.

Задача 19. (Экон-84.6)

Найти все значения параметра a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^3\sqrt{a^3+a^2-a-1}-x^2\sqrt{a^3+a^2}+x\sqrt{a^4-a^2}-a^2\le 0$ удовлетворяет условию $a\le x\le 2a+1$.

Идея. Вычислив область допустимых значений для параметра, разложить неравенство на множители и исследовать его решение с точки зрения заданного условия.

Указание. Из неотрицательности подкоренных выражений следует

$$\begin{cases} a^3+a^2-a-1=(a+1)^2(a-1)\ge 0,\\ a^2(a+1)\ge 0,\\ a^2(a^2-1)\ge 0; \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \left[\begin{array}{l} a=-1;\\ a\ge 1. \end{array}\right.$$

Указание. Исходное неравенство на области определения раскладывается на множители

$$\left(x^2\sqrt{a+1}+a\right)\left(x\sqrt{a^2-1}-a\right)\le 0.$$

Указание. Контрольное значение $a=-1$ надо проверить отдельно, до основных преобразований. Решением неравенства в общем случае является промежуток ненулевой длины.
Указание. Для единственности решения, удовлетворяющего условию, достаточно потребовать совпадения правой границы промежутка решений с левой границей условия, учитывая область определения переменной и параметра.

Решение. Область определения для параметра

$$\begin{cases} a^3+a^2-a-1=a^2(a+1)-(a+1)\geq 0, \\ a^3+a^2=a^2(a+1)\geq 0, \\ a^4-a^2=a^2(a^2-1)\geq 0; \end{cases}$$

отсюда получаем $a=-1$ или $a\geq 1$.

1) Если $a=-1$, то исходное неравенство принимает вид $-1\leq 0$, то есть $x\in\mathbb{R}$; условие $a\leq x\leq 2a+1$ принимает вид

$$-1\leq x\leq 2\cdot(-1)+1=-1,$$

то есть ему удовлетворяет только одно значение $x=-1$, которое является решением задачи;

2) Если $a\geq 1$, то неравенство можно преобразовать:

$$x^3\sqrt{(a+1)^2(a-1)}-x^2\sqrt{a^2(a+1)}+x\sqrt{a^2(a^2-1)}-a^2\leq 0 \iff$$

$$\iff x^3\sqrt{(a+1)^2(a-1)}-x^2a\sqrt{a+1}+xa\sqrt{a^2-1}-a^2\leq 0 \iff$$

$$\iff x^2\sqrt{a+1}\left(x\sqrt{a^2-1}-a\right)+a\left(x\sqrt{a^2-1}-a\right)\leq 0 \iff$$

$$\iff \left(x\sqrt{a^2-1}-a\right)\left(x^2\sqrt{a+1}+a\right)\leq 0;$$

учитывая, что $a\geq 1$, можно говорить о положительности второго сомножителя, то есть остаётся неравенство $x\sqrt{a^2-1}\leq a$. Тогда

- если $a=1$, то неравенство справедливо для всех $x\in\mathbb{R}$, но условию $1\leq x\leq 3$ отвечает целый отрезок;
- при $a>1$ находим $x\leq\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$; для единственности решения этого неравенства на отрезке $a\leq x\leq 2a+1$ надо потребовать, чтобы соответствующие границы промежутков совпадали, то есть

$$\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}; \\ a>1; \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2-1}=1; \\ a>1; \end{array}\right. \iff a=\sqrt{2}.$$

Ответ. $-1;\sqrt{2}$.

Ответы

1.1.

1. 0.
2. -6.
3. $\sqrt{a}+9\sqrt{b}$.
4. $\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+9\sqrt[3]{b^2}$.
5. 2 при $a \geq 0,\ b \geq 0,\ 4a \neq b$.
6. $2\sqrt{2}$, если $a>0,\ b>0,\ 2a \neq b$.
7. 180.
8. 2.
9. -1.
10. 47.
11. 1.
12. 2.
13. 4.
14. $0{,}01$.

1.2.

1. Второе число больше.
2. Второе число меньше.
3. Первое число больше.
4. $3^{400} > 4^{300}$.
5. $\sqrt{7}+\sqrt{10} < \sqrt{3}+\sqrt{19}$.
6. Второе выражение больше первого.
7. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} < \sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.
8. $33^{44} > 44^{33}$.
9. $\pi < \sqrt{10}$.
10. $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1/6} > \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/5}$.

1.3.

1. 1.
2. $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right]$.
3. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
4. $\left(-\infty; \dfrac{4}{7}\right]$.
5. $\dfrac{2}{3};\ 2$.
6. $-25;\ 3$.
7. $\left[-\dfrac{7}{2};\ \dfrac{15}{2}\right]$.
8. $-\dfrac{17}{5};\ \dfrac{11}{3}$.
9. $\left(\dfrac{3}{7}; \dfrac{11}{7}\right)$.
10. $(2;+\infty)$.
11. а) Если $a<-1$ или $a>1$, то $x=4$; если $a=-1$, то $x \geq 4$; если $a=1$, то $-2 \leq x \leq 4$; если $-1<a<1$, то $x=4$ или $x=\dfrac{4(a-2)}{a+1}$.

    б) Если $a<-1$ или $a>1$, то $x=1$; если $a\in(-1;1)$, то $x=1$ и $x=\dfrac{a+7}{a-1}$; если $a=-1$, то $x\in[-3;1]$; если $a=1$, то $x\in[1;+\infty)$.
12. $\left[\dfrac{4}{3};2\right]$.

1.4.

1. $\pm 1;\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
2. $4;\ \dfrac{\sqrt{17}+1}{2}$.
3. $2;\ 3$.
4. $1;\ 13$.
5. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.
6. $(-5;3+\sqrt{8})$.
7. $[1;2]$.
8. Нет.
9. $\left(-2;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};2\right)$.
10. $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}};\ \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
11. $[-3;-1)$.
12. ± 5.
13. $x_1=5,\ x_2=7$ или $x_1=-5,\ x_2=-7$.
14. $(p^2+2q)^2-2q^2$.
15. $(2;-8;8)$.
16. $\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{16};\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

2.1.

1. $\left(-4; -\dfrac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$.
2. $(0; 0{,}2]$.
3. $(-\infty; -1] \cup [0; 5)$.
4. $(-\infty; 1) \cup \{2\}$.
5. $(-1; 0) \cup (2; 4)$.
6. $(-\infty; 1] \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.
7. $(-\infty; -5) \cup [1; 2]$.
8. $(-\infty; 2) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$.
9. $[-2; -1) \cup (-1; +\infty)$.
10. $(-\infty; -2] \cup \left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \dfrac{\sqrt{73}-3}{4}\right]$.
11. $(-\infty; 1] \cup (1996; +\infty)$.
12. $(-\infty; -9) \cup \left(\dfrac{2}{3}; 1\right) \cup \left[\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$.
13. $(-6; -4) \cup (-4; 1)$.
14. $\left(\dfrac{-9-\sqrt{57}}{4}; -2\right) \cup (-2; -1) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.
15. $(-\infty; -1) \cup \left[-\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.
16. $[0; 100) \cup (400; +\infty)$.
17. $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$.
18. $-1;\ 0$.
19. $\left(-2; -\dfrac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.
20. $(-\infty; 2) \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$.
21. $(-\infty; -4) \cup \{0\} \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$.
22. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
23. Если $a = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $x = \dfrac{5a}{3}$.

2.2.

1. $(3; 1)$, $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{11}{3}\right)$.
2. $(9; 2)$.
3. $(5; -2)$.
4. $(1; -1)$, $\left(-\dfrac{1}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$.
5. $\pm\sqrt{2}$.
6. -4.
7. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
8. $-\dfrac{3}{4};\ 0;\ \dfrac{2}{9}$.

2.3.

1. $(-4; -3] \cup [3; 5)$.
2. $(1; 3)$.
3. $[-3; 0]$.
4. -3.
5. 18.
6. $\dfrac{19+\sqrt{137}}{8}$.
7. $\dfrac{13-\sqrt{21}}{2}$.
8. $\dfrac{15+\sqrt{5}}{10}$.
9. 0.
10. 2.
11. $1;\ 4$.
12. $2+\sqrt{3}$.
13. -1.
14. $\left[-\dfrac{3}{2}; 3\right]$.
15. $(4; +\infty)$.
16. $(-\infty; -2]$.
17. $\left(\dfrac{21-\sqrt{89}}{8}; +\infty\right)$.
18. $\left[-6; \dfrac{11+\sqrt{167}}{4}\right)$.
19. $(-\infty; -5] \cup \left[1; \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$.
20. $\{-21\} \cup [0; 21]$.
21. $\{1\} \cup [2; +\infty)$.
22. $[1; 4]$.
23. $[-1; 0)$.
24. $-\sqrt{3}$.
25. $\dfrac{3+\sqrt{65}}{2}$.
26. 0.
27. 3.

28. $7/9$.

29. $\left[0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.

30. 1.

2.4.

1. 3.
2. 0.
3. $\pm\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.
4. $\left(\dfrac{4}{7}; \dfrac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$.
5. $\sqrt{5}$.
6. $\dfrac{\sqrt{57}-1}{4}$.
7. $-\dfrac{15}{4}; -\dfrac{7}{4}; -3$.
8. $\left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{57}}{2}\right] \bigcup \left(\dfrac{38}{9}; +\infty\right)$.
9. $\left[3; \dfrac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$.
10. $\{3\} \cup [4; 7]$.
11. $(-\infty; 0] \cup \left[\dfrac{7}{8}; +\infty\right)$.
12. $(-\infty; -2] \cup \left[-1; \dfrac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$.
13. $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$.
14. $\left[-5+\sqrt{23}; -\dfrac{1}{8}\right] \cup \left[\dfrac{3}{8}; 3-\sqrt{5}\right] \cup$ $\cup [3+\sqrt{5}; +\infty)$.
15. $[-2; -1] \cup \{2\}$.
16. $[1; 3)$.
17. $\left[-\dfrac{15}{4}; -\dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$.
18. $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{8}\right)$.
19. $[-1-2\sqrt{13}; -5) \cup (1; 2\sqrt{13}-1]$.
20. $\left(-\infty; \dfrac{-31-\sqrt{265}}{6}\right) \cup (-5; +\infty)$.
21. $\left(-\dfrac{15}{4}; -\dfrac{36}{25}\right)$.
22. $\left(-7; \dfrac{28}{5}\right)$, $\left(1; -\dfrac{4}{5}\right)$, $(1; 0)$.
23. $(-\infty; 2) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$.
24. $0; \pm 1$.
25. $[-2; -1) \cup [0; 1]$.
26. $\left(\dfrac{3}{4}; 7\right]$.
27. а) При $a \le -1$ $x \in [a; -a]$;
при $a \in (-1; -1/2)$
$x \in \left[-\sqrt{-2a-1}; \sqrt{-2a-1}\right]$;
при $a = -1/2$ $x = 0$;
при $a > -1/2$ решений нет.
б) При $a \ge 2$ $x \in [-a; a]$;
при $a \in [1; 2)$
$x \in \left[-2\sqrt{a-1}; 2\sqrt{a-1}\right]$;
при $a < 1$ решений нет.
28. а) Если $a < 0$, то решений нет;
если $a = 0$, то $x > 0$;
если $a > 0$, то $x \in \left[-\dfrac{a}{3}; 0\right) \cup (8a; +\infty)$.
б) Если $a < 0$, то решений нет;
если $a = 0$, то $x > 0$;
если $a > 0$, то $x \in \left[-\dfrac{4a}{3}; -a\right) \cup$ $(0; +\infty)$.
29. Если $b \le -1$, то $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
если $-1 < b < 0$, то
$x \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{1-b^2}}; -1\right] \cup [1; +\infty)$;
если $b = 0$, то $x \in \{-1\} \cup [1; +\infty)$.

3.1.

1. $\operatorname{ctg}^2 \alpha$.
2. $1,96$.
3. $-\dfrac{\sqrt{19}}{3}$.
4. $\operatorname{ctg}^2 \alpha$.
5. 4.
6. $\dfrac{7}{9}$.
7. $\dfrac{3}{5}$.
8. $\dfrac{120}{119}$.
9. $-\dfrac{2}{3}; -\sqrt{5}$.
10. $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$.

3.2.

1. $(-1)^m \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{4} m,\ m \in \mathbb{Z}$.
2. 1.
3. -2π.
4. $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.
5. $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
6. $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
7. $-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.
8. $\dfrac{(-1)^n}{3} \arcsin \dfrac{\sqrt{29}-3}{8} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$.
9. $(-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
10. $(-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.
11. $(-1)^n \arcsin \dfrac{4\sqrt{3}}{7} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
12. $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
13. $\pi n,\ (-1)^m \dfrac{\pi}{6} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
14. $\pi + 2\pi n,\ \ 2(-1)^m \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m;$ $n, m \in \mathbb{Z}$.
15. $4(-1)^k \arcsin \dfrac{3\sqrt{3}-5}{2} + 4\pi k,$ $2\pi + 4\pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}$.
16. $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3};\ \dfrac{1}{3} \operatorname{arcctg} 6 + \dfrac{\pi m}{3};\ n, m \in \mathbb{Z}$.
17. $\pm\dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{17-\sqrt{385}}{16} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
18. $\pm\sqrt{-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k},\ \pm\sqrt{\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n};$ $k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0$.
19. $\dfrac{-9 \pm \sqrt{2n + \dfrac{1}{2}}}{13},\ n \in \mathbb{N}_0$.

3.3.

1. $\dfrac{2\pi}{3} m,\ m \in \mathbb{Z}$.
2. $(-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
3. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2};\ n, m \in \mathbb{Z}$.
4. $\pi n,\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2};\ n, m \in \mathbb{Z}$.
5. $\pi n,\ (-1)^{m+1} \dfrac{\pi}{32} + \dfrac{\pi m}{8};\ n,\ m \in \mathbb{Z}$.
6. $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2};\ n,\ m \in \mathbb{Z}$.
7. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{1}{2}(-1)^m \arcsin \dfrac{3}{4} + \dfrac{\pi m}{2};$ $n,\ m \in \mathbb{Z}$.
8. $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4},\ (-1)^m \dfrac{\pi}{60} + \dfrac{\pi m}{10};\quad n, m \in \mathbb{Z}$.
9. $\dfrac{2\pi n}{7},\ \dfrac{2\pi m}{5},\ \pi k;\ \ n, m, k \in \mathbb{Z}$.
10. $\pi n,\ \ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
11. $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5},\ \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi m;\ n,\ m \in \mathbb{Z}$.
12. $\dfrac{\pi n}{3},\ \pm\dfrac{5\pi}{12} + \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.
13. $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
14. $\pm\dfrac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
15. $\dfrac{\pi n}{2},\ \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi m;\ \ n,\ m \in \mathbb{Z}$.
16. $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
17. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$.
18. $1 + \dfrac{2\pi n}{5},\ \dfrac{\pi}{5} - 1 + \dfrac{2\pi m}{5};\quad n, m \in \mathbb{Z};$ или в другой форме записи $(-1)^k \left(1 - \dfrac{2\pi}{5}\right) + \dfrac{\pi k}{5},\quad k \in \mathbb{Z}$.
19. $-\dfrac{5}{6} + \dfrac{\pi m}{3},\ \dfrac{5}{4} + \dfrac{\pi n}{2};\ m, n \in \mathbb{Z}$.
20. $-\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi m;\ \ n, m \in \mathbb{Z}$.
21. $\dfrac{4}{5}$.

3.4.

1. $\dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{7\pi}{6}$.
2. $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
3. Один.
4. $-\dfrac{4\pi}{3}; -\pi$.
5. $\pm\arccos \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
6. $\pm\arcsin \dfrac{3}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
7. $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

8. $(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}$.
9. $\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
10. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.
11. $\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.
12. $\dfrac{5\pi}{6}$.
13. $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ (-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k$; $n,k\in\mathbb{Z},\ n\neq 0$.
14. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-2\right)+\pi l;\ n,l\in\mathbb{Z}$.
15. $\pm\arcsin\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
16. $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
17. $(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.
18. $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{17}-3}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.
19. $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
20. $\pi-\arcsin\left(\dfrac{\pi}{12}\right);\ \pi+\arcsin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4.1.

1. 96 тонн.
2. 12 га; 9 га; 15 га.
3. $16+24+40+48$.
4. 147 ц/га.
5. 90 %.
6. 7,2 %.

4.2.

1. 20.
2. 96.
3. 53.
4. 18.
5. 129.
6. 242.
7. 1,2.
8. $a_1=9;\ d=2$.
9. 5,5 тонны; 4 тонны; 2,5 тонны.
10. 50.
11. 28.
12. 70.
13. $a_1=a_2=a_3=7$;
$a_1=7(1-\sqrt{2}),\ a_2=7,\ a_3=7(1+\sqrt{2})$;
$a_1=7(1+\sqrt{2}),\ a_2=7,\ a_3=7(1-\sqrt{2})$.
14. $a_1=2;\ d=3$.
15. 9.
16. 2.
17. 50.
18. -2.
19. 162.
20. Сумма первых восьми членов геометрической прогрессии больше суммы первых шести членов арифметической прогрессии.
21. 20.
22. 128π.

4.3.

1. 60 км/ч.
2. 15 км/ч.
3. 6 км/ч.
4. 80 км/ч.
5. 11 км/ч.
6. $106\dfrac{2}{3}$ км.
7. 16 км/ч.
8. 10 км/ч.
9. 3 часа.
10. В 4 раза.
11. В 9/7 раза.
12. 72 км/ч.
13. Скорость пароходов 15 км/ч, скорость реки 3 км/ч.
14. 50 км/ч, 100 км/ч.

4.4.

1. 19.
2. 168.
3. 15.
4. 6.

5. $8/3$ часа.
6. 8 часов.
7. Да.

4.5.

1. На $25\,\%$.
2. Снизится на четверть.
3. 100 кг.
4. 720 руб.
5. На $54\,\%$.
6. 600.
7. 12500 руб.
8. $4\,\%$.
9. 1000 л.
10. 6.
11. $1/15$.

5.1.

1. -2.
2. 2.
3. 9.
4. 8.
5. $b+1-a$.
6. 0.
7. -2.
8. $\dfrac{5-8a}{6a+3}$.
9. $\dfrac{9}{7}$.
10. Имеют.
11. $[-4;2)\cup(3;4]$.
12. $3\log_8 26$.
13. $\sqrt{8}$.
14. Второе.
15. $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
16. Если $p=q=0$, то $\dfrac{1}{6}$; если $p\neq 0$ и $q\neq 0$, то $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{p+q+pq}{p+q-2pq}$.

5.2.

1. $3,5$.
2. $(-1;+\infty)$.
3. $(2\log_7 3;+\infty)$.
4. 0,5.
5. 1.
6. 1.
7. 0.
8. -1.
9. 2.
10. $(3;+\infty)$.
11. $(-\infty;-1)$.
12. $\left[\log_4\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.
13. $(0;+\infty)$.
14. $(-\infty;0)\cup(1;3)$.
15. $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$.
16. $(25;+\infty)$.
17. $\log_{0,6} 2$.
18. $\log_2^2\dfrac{5}{4}$.
19. 2.
20. 4.
21. $(-\infty;2)$.
22. $[-10;5]$.
23. $-2+\sqrt{4-2\log_3 5}$.
24. 0.
25. $(-\infty;0)$.
26. $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.
27. Если $a<0$, то $x=2\log_2(-a)$; если $a=0$, то нет решений; если $a=1$, то $x=0$; если $0<a\neq 1$, то $x=\log_2 a$ или $x=2\log_2 a$.

5.3.

1. $0,5$.
2. $(-\infty;-2)\cup(7;+\infty)$.
3. -3.
4. $\dfrac{3}{2}$.

5. $\left(\frac{4}{5};4\right]$.
6. $\left[-\frac{6}{5};-1\right)\cup\left(-\frac{1}{5};0\right]$.
7. $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.
8. $(4;2\sqrt{3}+1]$.
9. $(-3;-1)$.
10. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
11. $(-77;3)$.
12. $(-\infty;-2)\cup[7;+\infty)$.
13. $\sqrt{3}-2$.
14. $(-2;3)$.
15. 2.
16. $-3;-2;1$.
17. $\frac{1}{2};4\sqrt{2}$.
18. $\frac{1}{8};2$.
19. $4;\ 16$.
20. $\sqrt{17}-4$.
21. $(2;5]$.
22. $1;\ 3$.
23. $-\frac{15}{11};1$.
24. $(0;1)\cup(1;2]$.
25. $\left(0;\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\cup(1;49)$.
26. $(1;2)$.
27. $\left[\frac{13}{50};9+4\sqrt{5}\right)$.
28. $\left(1;\frac{7}{2}\right]$.
29. $(-1;0)\cup(0;1)\cup[5;+\infty)$.
30. $\left(1;\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\cup\ [3;+\infty)$.
31. $(-\infty;0)\cup\left(\frac{7}{12};\frac{2}{3}\right)$.
32. $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$.

5.4.

1. $0,1$.
2. $(1;\log_3 2)$.
3. -1.
4. $\frac{4\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
5. $1;2-\sqrt{10}$.
6. $(-\infty;0)$.
7. $\frac{1}{4};\ 64$.
8. $(0;1)\cup(1;4)\cup(64;+\infty)$.
9. $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right)$.
10. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.
11. $\left(1-\log_2 3;\frac{1}{6}\right)$.
12. $(-17;\log_2 5+1)$.
13. $\frac{1}{3};\ \frac{5}{3}$.
14. $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}$.
15. 4.
16. $\frac{9}{5}$.
17. 3.
18. $\left(0;\frac{1}{16}\right)$.
19. $\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right]$.
20. $-2;\ 0$.
21. $\log_2 3$.
22. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$.
23. $\pm\sqrt{\log_2 3}$.
24. $(0;2)$.
25. $\frac{5}{4}$.
26. $(1;+\infty)$.
27. $(0;+\infty)$.
28. $\left(-1;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{3}{2};9\right)$.

6.1.

1. -60°.
2. $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ \frac{2\pi m}{5};\ n,m\in\mathbb{Z}$.

3. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \dfrac{5\pi}{12}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
4. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \dfrac{5\pi}{12}+2\pi m,\ \dfrac{13\pi}{12}+2\pi k;$ $n,m,k\in\mathbb{Z}.$
5. $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{29}}\pm\arccos\dfrac{3}{\sqrt{29}}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
6. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}2+\dfrac{\pi m}{3};\ n,m\in\mathbb{Z}.$
7. $\pi+2\pi k,\ 2\arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2+4}}+2\pi n;$ $k,n\in\mathbb{Z}.$
8. $\dfrac{5\pi}{12};\ \dfrac{53\pi}{84};\ \dfrac{59\pi}{84}.$
9. $[-\sqrt{29};\sqrt{29}].$
10. $1.$
11. $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
12. $\dfrac{\pi}{12}+2\pi n,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi m;\quad n,m\in\mathbb{Z}.$
13. $-\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

6.2.

1. $2.$
2. $-\operatorname{arctg}4+\pi n,\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
3. $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}4+\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}.$
4. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \dfrac{\pi}{3}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
5. $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi m;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
6. $\dfrac{\pi}{4}+\pi m,\ \dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ n,m\in\mathbb{Z}.$
7. $\operatorname{arctg}3+2\pi n,\ \pi-\operatorname{arctg}3+2\pi k;$ $n,k\in\mathbb{Z}.$
8. $-\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$

6.3.

1. $45^\circ.$
2. $(\pm30^\circ+n\cdot180^\circ;\ 90^\circ+m\cdot360^\circ);$ $n,m\in\mathbb{Z}.$
3. $\left(\dfrac{\pi}{6};0\right),\ \left(\dfrac{\pi}{6};-\dfrac{\pi}{6}\right),\ \left(\dfrac{\pi}{6};-\pi\right).$
4. $\left(\dfrac{\pi}{24}+\pi n;\ \dfrac{5\pi}{24}-\pi n\right),$ $\left(\dfrac{5\pi}{24}+\pi m;\ \dfrac{\pi}{24}-\pi m\right);\ n,m\in\mathbb{Z}.$
5. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right),$ $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m;\ (-1)^l\dfrac{\pi}{3}+\pi l\right);$ $n,k,m,l\in\mathbb{Z}.$
6. $\pm\sqrt{3}.$
7. $\left(-\dfrac{2}{7};\ \pm\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{7}}+\pi m\right);\ m,k\in\mathbb{Z};$ $\left(-\dfrac{3\pi+2}{7};\ \pm\arcsin\sqrt{\dfrac{4-\pi}{7}}+\pi k\right).$
8. $\left(\pi n;\dfrac{\pi}{4}-\pi n\right),\ \left(\dfrac{\pi}{4}+\pi m;-\pi m\right);$ $n,m\in\mathbb{Z}.$
9. $\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ \operatorname{arctg}2+\pi m\right);\quad k,m\in\mathbb{Z}.$
10. $\left(\dfrac{\pi}{4};\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),$ $\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$
11. $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n;(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right),$ $\left(\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi m;(-1)^q\dfrac{\pi}{4}+\pi q\right);$ $n,k,m,q\in\mathbb{Z}.$
12. $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\pi-2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}.$
13. $\left(\dfrac{\pi}{12};-\dfrac{\pi}{12}\right),\ \left(\dfrac{5\pi}{12};-\dfrac{5\pi}{12}\right).$
14. $(\pi;\pm\pi),\ (2\pi;0).$
15. $\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2};\ -\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\pi m}{5}\right);$ $n,m\in\mathbb{Z}.$
16. $\dfrac{\pi}{12};\ \dfrac{11\pi}{12}.$
17. $(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$
18. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}-1};\ \dfrac{\pi}{4\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}-1}}\right),$ $\left(\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}-1};\ \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}-1}}\right).$

6.4.

1. $0.$
2. $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

3. Решений нет.
4. $\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.
5. $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ 2\pi m;\ k,m\in\mathbb{Z}$.
6. $\pi+2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}$.
7. $2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k;\ n,k\in\mathbb{Z}$.
8. Решений нет.
9. $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.
10. Решений нет.
11. Решений нет.
12. 0.
13. $1;\ 4$.
14. 0.
15. Решений нет.
16. $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
17. 0.
18. $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
19. $-\frac{7}{4};\ \frac{1}{4}$.

7.1.

1. На последнем.
9. $\frac{2\pi}{3}+4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
10. $y_{\max}=3$ при $2\le x\le 3$.

7.2.

1. 16.
2. $\frac{\pi}{2}+1$.
3. 32.
4. 15.
5. $\frac{\pi}{8}$.
6. $\frac{\pi}{2}+1$.
7. $2\pi+7$.
8. $27\pi+18$.
9. 1.

7.3.

1. $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$.
2. $\left(\frac{1}{2};1\right)$.
3. $4;\ \frac{3}{2}$.
4. $(-2;0)$.
5. Нет решений.
6. $\frac{60}{13}$.
7. Если $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то $x=1$; если $a\in(-1;1)$, то $x=1$ и $x=\frac{a+7}{a-1}$; если $a=-1$, то $x\in[-3;1]$; если $a=1$, то $x\in[1;+\infty)$.
8. 6.

8.1.

1. $2\pi-1$.
2. $-5+4e$.
3. 2.
4. 0.
5. $3e$.
6. 2.
7. -8.
8. $0,25e^2$.
9. 0.
10. 12.
11. 1.

8.2.

1. 10.
2. 2.
3. 0.
4. 4.
5. 9.
6. 6.
7. 2.
8. 27.
9. -7.

10. 1.
11. $16 + 6\pi$.
12. 200; 50; 50; 40 м.

8.3.

1. $\dfrac{x^2}{2} + \sin x$.
2. $x^2 + \ln x$.
3. $2x - e^x$.
4. $e^x + \sin x - 2$.
5. -13.
6. $2\sin x - 2$.
7. 15.
8. 4.
9. 6.
10. 9.
11. 8.

9.1.

1. $\dfrac{6}{5}$ часов.
2. $\dfrac{2}{5}$.
3. 5 км.
4. 60 км/ч.
5. 6 км/ч.
6. 20 км.
7. $11:00$.

9.2.

1. Первое.
2. 1; 2.
3. 17.
4. 2.
5. 1; 2; 4; 8.
6. $-3,6$.
7. 20 м.
8. $-3\sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$.
9. $5 + \dfrac{1}{5^{29}}$.

10. 33.

9.3.

1. 9 кг.
2. 15 кг.
3. 2 кг.
4. 100 г.
5. 2 л.
6. 10 л и 20 л.
7. 15 т.
8. 170 кг.
9. 9 кг.
10. Не менее $1,4$ декалитра.
11. 5.
12. $90\,\%$.
13. Глицерина $0,5$ л; воды $3,5$ л.
14. 3 л.

9.4.

1. $(3;2)$, $(3;-2)$, $(-3;2)$, $(-3;-2)$.
2. $(1;5)$, $(7;-97)$, $(-7;-99)$, $(-1;-9)$.
3. $(5;\pm 2)$, $(-5;\pm 2)$, $(11;\pm 10)$, $(-11;\pm 10)$.
4. $x = 2$, $y = 2$.
5. $(\pm 4;1)$, $(\pm 4;-3)$.
6. $(13;32)$, $(-5;-16)$, $(-13;-32)$, $(5;16)$.
7. 11 оценок «2», 7 оценок «3», 10 оценок «4» и две оценки «5».
8. $(0;0)$, $(-3;-5)$, $(3;5)$.
9. $(12;-8)$.
10. 144 человека.
11. 5 прессов.
12. 8 шт.
13. 16 автобусов.

10.1.

1. 2; 3.
2. $(-\infty; -2 + 2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$.
3. $[-6;-1] \cup [0;+\infty)$.
4. $(-6;6)$.

5. $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

6. $-9; -8; -6; -5$.

7. $(-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$.

8. а) $(3; 4) \cup (4; 7)$;
б) $(-13; -4) \cup (-4; -1)$.

9. $(0; -6)$ и $(t; 6-t)$, где $t \le 2$.

10. $(-3;\ -\sqrt{6}] \cup \left[\sqrt{6};\ \frac{5}{2}\right] \cup (5,\ +\infty)$.

11. а) $\left[4; \frac{13}{2}\right)$; б) $\left[-\frac{9}{2}; -\frac{13}{4}\right)$.

12. а) $\{-1\} \cup (1; 3) \cup (4; 6]$;
б) $\{1; 2\} \cup (1; 3) \cup [5; 6]$.

13. а) $0 < x < \frac{2a^2b}{a^2+b^2}$.
б) $[-c; 0)$ при $c < d$,
$\left(-\frac{2c^2d}{c^2+d^2}; 0\right)$ при $c \ge d$.

14. а) Если $a < -1$, то
$0 < x \le -a - \sqrt{a^2-1}$ или
$-a + \sqrt{a^2-1} \le x \le -a + \sqrt{a^2+1}$;
если $a \ge -1$, то $0 < x \le -a + \sqrt{a^2+1}$.
б) Если $a < -1$, то $x \in (-\infty; 0) \cup$
$(0; a + \sqrt{a^2+1}) \cup$
$(-a - \sqrt{a^2-1}; -a + \sqrt{a^2-1})$;
если $a \ge -1$, то $x \in (-\infty; 0) \cup$
$(0; a + \sqrt{a^2+1})$.

10.2.

1. $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi m$,
$-\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k;\ n, m, k \in \mathbb{Z}$.

2. $-\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

4. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

5. $\pi \pm \arccos\frac{1}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

6. $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

7. $\pi + 2\pi k,\ (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ k, n \in \mathbb{Z}$.

8. $-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k,\ \pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}$.

9. $2\pi n,\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m;\ n, m \in \mathbb{Z}$.

10. $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

11. $(1; -1),\ (-1; -3)$.

12. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ k, n \in \mathbb{Z}$.

13. 9.

14. $\frac{-\pi+2}{2},\ \frac{3\pi+2}{2},\ \frac{\pm\pi+2}{6}$,
$\frac{\pm 11\pi+2}{6},\ \frac{-3\pi+2}{6},\ \frac{9\pi+2}{6}$.

10.3.

1. $1/4$.

2. $0;\ 1$.

3. $(-\infty; -12) \bigcup \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \bigcup \left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

4. $(3; +\infty)$.

5. $\left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1)$.

6. $\left(-2; -\frac{13}{7}\right) \bigcup (5; +\infty)$.

7. $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \bigcup \left[0; \frac{1}{3}\right)$.

8. $7^{\frac{-3\pm\sqrt{2}}{7}};\ \frac{1}{7}$.

9. $\left[-3; -\frac{17}{7}\right) \bigcup \left(-\frac{17}{7}; -\frac{7}{3}\right]$.

10. $\left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$.

11. $[\log_3 4; 3]$.

12. $\left(-2; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; 2\right)$.

13. $\left[\frac{\sqrt{2}-16}{48}; -\frac{7}{24}\right) \bigcup \left(-\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{2}-2}{6}\right]$.

14. $(7/9;\ +\infty)$.

15. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

11.1.

1. $-2,5$.

2. $1,5$.

3. $-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}$.

4. $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

5. $\{-4\} \cup [-3; +\infty)$.
6. $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right] \bigcup \left\{\frac{2}{5}\right\}$.
7. $[-2; -1] \cup \{3\}$.
8. $-\sqrt{5}$.
9. $[-3; -1)$.
10. $\left[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right) \bigcup \left[\frac{17+\sqrt{127}}{9}; 8\right)$.
11. $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$; $(21; 21)$.
12. $[-1; 2] \cup [3; 4]$.
13. 3.
14. $(-1; \sqrt{2}\,]$.
15. $\left[\frac{4\pi}{9}; \sqrt{8}\left(\sqrt{3}-1\right)\right) \cup \{\log_3 28\}$.

11.2.

1. πn, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
2. πn, $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
3. $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
4. $2\pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
5. $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.
6. $\frac{\pi n}{2}$, $\pm \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + \pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$ (второй вариант ответа $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$).
7. 810°.
8. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
9. πn, $\frac{\pi}{6} + 2\pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
10. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.
11. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi m$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
12. $\left((-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi m\right)$; $n, m \in \mathbb{Z}$.
13. $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$.
14. $\pi/2$.
15. $\pi + 2\pi m, -2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi s$; $m, s \in \mathbb{Z}$.
16. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{10}$, $n = 0; \pm 1; 2$; $m = -2; 0, \pm 1; 3; 4; 5; 6$.
17. $-\frac{23\pi}{6}$; $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$; $-4\pi + 4\arccos\frac{9}{10}$.

11.3.

1. $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup (1; +\infty)$
2. $\{5\} \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$.
3. $\frac{1}{6}$; 2.
4. $\frac{4}{3}$; 3.
5. 1; $\frac{\sqrt{3}}{8}$.
6. 2; 9.
7. $(0; 4) \cup \{8\}$.
8. -1.
9. $\log_{\frac{9}{2}}(\sqrt{2} - 1)$.
10. $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
11. $\log_{\frac{3}{2}}\frac{1+\sqrt{13}}{6}$.
12. $\left(0; \frac{1}{50}\right) \bigcup \left(\frac{25}{2}; +\infty\right)$.
13. $\left(3; \frac{7}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.
14. $(-\infty; \log_3 2] \cup (1; 5)$.
15. Одно.
16. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\log_3 4; \sqrt{3})$.
17. $(\log_7 6, 1) \cup (\log_7 11, +\infty)$.
18. $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{2}\right)$.
19. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}; 3\right) \cup$ $\cup \left(4; \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (8; +\infty)$.
20. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \bigcup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
21. $\left(0; \frac{1}{7}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.
22. $\left[1 - \sqrt{3}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \bigcup \left(2; \frac{5}{2}\right)$.

11.4.

1. Три.
2. $\left(\frac{1}{3}; 3\right]$.
3. $\pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm 2$.
4. $\sqrt{2};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.
5. $[-\log_2 3; 2) \cup \left(2; \log_2 \frac{13}{3}\right)$.
6. $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}$.
7. $(\pi + 2\pi n; \log_3(\pi + 2\pi n))$,
$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m; \log_3\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m\right)\right)$,
$\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \log_3\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)\right)$;
$n, m, k \in \mathbb{N}_0$.
8. $\left\{\frac{\pi}{14}; \frac{3\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{11\pi}{14}; \frac{13\pi}{14}\right\}$.
9. $(-4; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 11\right)$.
10. $(-1; 0) \cup (0; 2)$.
11. $(-\sqrt{10}; -\pi) \cup (-\pi; -3) \cup (3; \pi) \cup (\pi; \sqrt{10})$.
12. $\left(\frac{6}{11}; \frac{10}{11}\right)$.
13. $\left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \{-1\}$.
14. $\left[1; \frac{\pi}{2}\right] \cup \{3\}$.
15. $(1; 0)$.
16. $\pm\frac{1}{6};\ \pm\sqrt{3};\ \pm\frac{11}{6}$.
17. $\frac{\pi}{6}$.
18. Если $a = 0$, то $x \leq 3$;
если $0 < a < \frac{1}{12}$, то $x \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 12a}}{2a}$
или $x \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 12a}}{2a}$;
если $a \geq \frac{1}{12}$, то $x \in \mathbb{R}$.
19. $-1;\ \sqrt{2}$.

Литература

1. *Федотов М. В., Разгулин А. В.* Алгебра. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 260 с.

2. *Федотов М. В., Хайлов Е. Н.* Задачи устного экзамена по математике.– М.: МАКС Пресс, 2002. – 144 с.

3. Математика. Задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова с ответами и решениями (1999-2004 гг.) *Сост. Е. А. Григорьев.* – М.: Издательство УНЦ ДО, 2005. – 399 с.

4. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2000-2002, 2003, 2004 гг.). – М.: Механико-математический факультет МГУ.

5. *Глазков Ю. А., Варшавский И. К., Гаиашвили М. Я.* Математика. Единый государственный экзамен. Решение задач группы В. – М.: Изд-во "Экзамен", 2009. – 382 с.

6. *Сергеев И. Н.* Математика. Единый государственный экзамен. Задания типа С. – М.: Изд-во "Экзамен", 2009. – 318 с.

7. *Денищева Л. О., Бойченко Е. М., Глазков Ю. А. и др.* Единый государственный экзамен 2003-2004: Контрольные измерительные материалы: Математика. – М.: Просвещение, 2003. – 191 с.

8. *Денищева Л. О., Рязановский А. Р., Семенов П. В., Сергеев И. Н.* ЕГЭ 2008. Математика. Федеральный банк экзаменационных материалов. – М.: Эксмо, 2008. – 240 с.

9. *Галеев Э. М.* Подготовка к ЕГЭ по математике. Задания типа В и С. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 96 с.

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Попов Юрий Александрович
Семендяева Наталья Леонидовна
Федотов Михаил Валентинович

АЛГЕБРА.
БАЗОВЫЙ КУРС С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ
Учебно-методическое пособие

Подписано к использованию 19.03.15. Формат 145×225 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

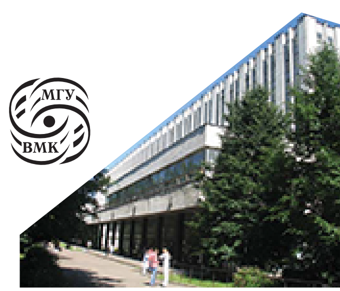
Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***



Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru